1

ANALYSE

Exercice 1.1.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\big) - \ln(n)$. On admet que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et on note γ sa limite.

1. On pose pour tout $n \geqslant 2$, $v_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$.

a) Montrer que la série de terme général $v_{2n} + v_{2n+1}$ est convergente.

b) En déduire que la série de terme général v_n est convergente.

On pose $S = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$.

2. Justifier les inégalités :

$$\forall\, n \geqslant 3, \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \text{ et } \forall\, n \geqslant 4, \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$$

On se propose maintenant de calculer S.

Pour $n \geqslant 3$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k},\ t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \text{ et } a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}$$

3. En utilisant la question 2, montrer que :

a) la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

b) la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est convergente.

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $S_{2n} = t_n - t_{2n} + \ln(2) \times \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En déduire une expression de S_{2n} à l'aide de a_n, a_{2n} et u_n.

5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$ (on exprimera cette limite en fonction de γ et de $\ln(2)$). Déterminer alors S.

Solution :

1. a) $v_{2n} + v_{2n+1} = \dfrac{\ln(2n)}{2n} - \dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1} = \dfrac{\ln(2n)}{2n(2n+1)} - \dfrac{1}{2n+1} \ln(1 + \dfrac{1}{2n})$

Le premier terme est équivalent à $\dfrac{\ln n}{4n^2}$ et le second est équivalent à $-\dfrac{1}{2n} \times \dfrac{1}{2n}$, soit à $-\dfrac{1}{4n^2}$, donc est négligeable devant le premier. Ainsi :

$$v_{2n} + v_{2n+1} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{\ln n}{4n^2}$$

Donc $v_{2n} + v_{2n+1}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ et la convergence en résulte.

b) Avec des notations évidentes, la suite (v_{2n+1}) est donc convergente et comme $v_{2n+2} \to 0$, la suite (v_{2n+2}) est convergente de même limite. Ainsi la suite (v_n) converge.

2. On étudie succinctement la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = \dfrac{\ln t}{t}$. On constate qu'elle est strictement décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Ainsi, pour $n \geqslant 3$, la fonction φ est majorée par $\varphi(n)$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ et, pour $n \geqslant 4$, minorée par cette même quantité sur l'intervalle $[n-1, n]$. En découlent les deux inégalités demandées.

3. a) On a, pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2} + \frac{(\ln(n))^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

b) Également :

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(1)}{1} + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{\ln(n)}{n} \\ &\geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(n)}{n} + \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(n)}{n} + \left[\tfrac{1}{2}(\ln t)^2\right]_3^n \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$a_n = t_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \geqslant \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

Ainsi la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est minorée. Comme elle est décroissante, elle converge.

4. On calcule :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) \ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\ln(2k)}{k} - \frac{\ln k}{k}\Big) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - t_n$$

Par ailleurs :

$$S_{2n} + t_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} = 2 \sum_{k=1,(k=2p)}^{2n} \frac{\ln k}{k} = 2 \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p}$$

On soustrait les deux résultats obtenus pour obtenir la relation demandée.
On a donc :

$$S_{2n} = a_n + \frac{(\ln n)^2}{2} - a_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) \ln 2$$

et, en développant, on obtient :

$$S_{2n} = a_n - a_{2n} + u_n \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

5. On a donc : $\lim S_{2n} = \lim a_n - \lim a_{2n} + \gamma \ln 2 - \dfrac{(\ln 2)^2}{2} = \gamma \ln 2 - \dfrac{(\ln 2)^2}{2}$
Comme le terme général de la série alternée de somme S tend vers zéro, on a :

$$S = \lim S_{2n} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

Exercice 1.2.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est dite *absolument monotone* (en abrégé A.M.) sur $]a, b[$ si elle est de classe C^∞ sur $]a, b[$ et vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a, b[, f^{(n)}(x) \geqslant 0$$

1. a) Vérifier que la fonction $h : x \mapsto -\ln(1-x)$ est A.M. sur $]0, 1[$.

b) Donner des exemples de fonctions A.M. sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit b un réel strictement positif, f une fonction de classe C^∞ sur $[0, b[$ et A.M. sur $]0, b[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,b[\,, R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

2. Exprimer $R_n(x)$ sous forme d'une intégrale.

3. Justifier que la série de terme général $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge pour tout $x \in [0,b[$.

On note S sa somme. Montrer que, pour tout $x \in [0,b[$, on a $S(x) \leqslant f(x)$.

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que la fonction $\phi : x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0,b[$. Quelle est sa limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures ?

b) Montrer que, si $0 < x < y < b$, alors $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$.

c) En déduire que $S = f$ sur $[0,b[$.

5. Pour $x \in]0,1[$, écrire $\ln(1-x)$ comme la somme d'une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Solution :

1. a) Par récurrence, on trouve :

$$h^{(n)}(x) = (n-1)!/(1-x)^n \geqslant 0 \text{ sur }]0,1[\text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc h est absolument monotone sur $]0,1[$.

b) Par exemple, la fonction exponentielle, ou toute fonction constante positive.

2. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral. La fonction étant A.M :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \geqslant 0$$

3. La somme partielle S_n vérifie $f - S_n = R_n \geqslant 0$, d'où $S_n \leqslant f$. La série converge car à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées. Par passage à la limite, on obtient : $S \leqslant f$.

4.a) Pour tous x et x' tels que $0 < x < x'$:

$$\begin{aligned}
\frac{R_n(x)}{x^n} &= \frac{1}{x^n}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left(1-\frac{t}{x}\right)^n dt \\
&\leqslant \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left(1-\frac{t}{x'}\right)^n dt \leqslant \int_0^{x'} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left(1-\frac{t}{x'}\right)^n dt \\
&\leqslant \frac{R_n(x')}{x'^n}
\end{aligned}$$

Autre méthode : Le changement de variable affine $t \mapsto u = \dfrac{t}{x}$ donne :

$$\frac{R_n(x)}{x^n} = \frac{x}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(xu)(1-u)^n du$$

qui est une fonction croissante de x comme produit de fonctions positives et croissantes.

Ainsi ϕ est croissante sur $]0,b[$.

D'autre part, on sait (formule de Taylor-Young) que : $R_n(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \phi(x) = 0$.

b) Par croissance de $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^n}$ et la majoration $R_n \leqslant f$, on a, pour $0 < x < y$:

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n R_n(y) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$$

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y) = 0$, car $0 < \dfrac{x}{y} < 1$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) - S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0,$$

donc $f = S$ sur $]0, b[$, et clairement $S(0) = f(0)$.

5. h est de classe C^∞ sur $[0, 1[$, A.M., avec $h(0) = 0$ et pour $n \geqslant 1, h^{(n)}(0) = (n-1)!$ et la question précédente donne

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ sur } [0, 1[.$$

Exercice 1.3.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites décroissantes de réels strictement positifs dont la série associée converge.

1. L'ensemble $\mathcal{S}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est-il un espace vectoriel ?

Pour $(b_n) \in \mathcal{S}$, *on note :* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \quad ; \quad b = b_0 + R_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$

On dit alors que $(b_n) \in \mathcal{S}$ *est une base discrète d'ordre 1 (en abrégé bd1) si pour tout* $t \in [0, b]$, *la propriété suivante est vérifiée :*

$$\exists\, (d_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}},\ t = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k b_k \qquad (P_t)$$

2. Soit $(b_n) \in \mathcal{S}$. Montrer que la propriété (P_t) est vérifiée pour $t = 0$, pour $t = b$, et pour $t = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{3k}$. On précisera à chaque fois une suite (d_n) correspondante.

Étant donné $(b_n) \in \mathcal{S}$ *et* $t \in [0, b]$, *on définit la suite* (t_n) *par la relation de récurrence :* $t_0 = 0$ *et* $\forall n \geqslant 0, t_{n+1} = \begin{cases} t_n + b_n & \text{si } t_n + b_n \leqslant t \\ t_n & \text{sinon} \end{cases}$.

3. On suppose ici $b_n \leqslant R_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit $t \in [0, b]$. Etablir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement :

$$0 \leqslant t - t_n \leqslant b_n + R_n.$$

b) En déduire que (b_n) est une bd1.

4. Montrer que la suite (2^{-n}) est une bd1.

5. Dans cette question, $b_n = \ln(1 + 2^{-n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Etablir l'inégalité : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(1 + a_1 + \cdots + a_n) \leqslant \ln(1 + a_1) + \cdots + \ln(1 + a_n)$$

b) En déduire que (b_n) est une bd1.

c) Écrire un programme Pascal qui calcule $S_{30} = \sum_{k=0}^{30} b_k$.

Solution :

1. L'ensemble $\mathcal{S}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles car la suite nulle n'est pas dans $\mathcal{S}$.

2. Facilement $(d_n) = (0)$, $(d_n) = (1)$, $(d_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 3p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. a) Pour $n = 0$, la double inégalité à établir s'écrit : $0 \leqslant t \leqslant b$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons : $0 \leqslant t - t_n \leqslant b_n + R_n$.

- par construction on a : $t - t_{n+1} \geqslant 0$.
- si $t_n + b_n \leqslant t$, on a : $(b_{n+1} + R_{n+1}) - t + t_{n+1} = R_n - t + (t_n + b_n) \geqslant 0$;
- sinon : $(b_{n+1} + R_{n+1}) - t + t_{n+1} = R_n - t + t_n \geqslant b_n - t + t_n \geqslant 0$ (car $b_n \leqslant R_n$).

b) On pose : $d_n = \begin{cases} 1 & \text{si } t_n + b_n \leqslant t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n + d_n b_n$, d'où, de proche en proche : $t_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k b_k$.

La suite réelle (t_n) étant croissante et majorée par t, elle est convergente ; en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, il vient : $\lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k b_k$.

Or, pour tout n, $0 \leqslant t - t_n \leqslant b_n + R_n$, d'où en passant à la limite :

$$0 \leqslant t - \lim_{n\to\infty} t_n \leqslant 0 + 0.$$

Donc :

$$t = \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k b_k$$

4. On a $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{-(n+1)} \dfrac{1}{1-1/2} = 2^{-n} = b_n$. On a donc $b_n \leqslant R_n$ et on conclut grâce à la question précédente.

5. a) Directement, en passant à l'exponentielle, l'inégalité à démontrer équivaut à :

$$1 + a_1 + \cdots + a_n \leqslant (1+a_1).(1+a_2).\cdots(1+a_n).$$

On conclut en développant le membre de droite car tous les a_i sont positifs.

b) On applique l'inégalité précédente avec : $a_k = 2^{-k}$. En sommant de $n+1$ à N, on obtient :

$$\ln(1 + \sum_{k=n+1}^{N} 2^{-k}) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \ln(1+2^{-k})$$

Si on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient, les séries étant convergentes :

$$\ln(1 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k}) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1+2^{-k})$$

soit : $\ln(1+2^{-n}) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$, et enfin : $b_n \leqslant R_n$ ce qui permet de conclure.

c)

```
program escp ;
var  k  :integer ; d,p :real ;
begin
    p :=1 ; d :=1 ;
    for k :=0 to 30 do
        begin
        p :=p*(1+(1/d)) ;  d :=d*2 ;
    end ;
writeln('S30=',ln(p)) ;
readln ; end.
```

Exercice 1.4.

1. a) Dresser le tableau de variations de la fonction d'une variable réelle

$$F : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt.$$

Justifier que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à préciser.

b) En déduire que la relation $\displaystyle\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\,dt = 1$ permet de définir une fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer le sens de variation de f.

3. Vérifier que pour x, y réels, $y = f(x) \iff -x = f(-y)$. Comment s'interprète géométriquement ce résultat sur la courbe $\mathcal{C}$ représentant f ?

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \leqslant f(x) \leqslant x + \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

Solution :

1. a) F est de classe C^1 et $F'(x) = \mathrm{e}^{x^2} > 0$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, comme intégrales divergentes d'une fonction positive. Donc F définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) En utilisant la fonction F, la relation demandée s'écrit

$$F\big(f(x)\big) - F(x) = 1 \text{ ce qui équivaut à } f(x) = F^{-1}\big(1 + F(x)\big)$$

ce qui définit f.

2. a) La fonction F est de classe C^1 à dérivée ne s'annulant pas ; donc F^{-1} est de classe C^1 et f aussi d'après la relation précédente.

b) La relation précédente donne

$$f'(x)\,\mathrm{e}^{[f(x)]^2} - \mathrm{e}^{x^2} = 0 \iff f'(x) = \mathrm{e}^{x^2-[f(x)]^2} > 0$$

et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Par parité de $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$, il vient : $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{t^2}dt = \int_{-y}^{-x} \mathrm{e}^{t^2}dt$, d'où

$$y = f(x) \implies 1 = \int_{-y}^{-x} \mathrm{e}^{t^2}dt \implies -x = f(-y)$$

De même $-x = f(-y) \implies -(-y) = f(-(-x))$.

La courbe $\mathcal{C}$ est donc symétrique par rapport à la seconde bissectrice d'équation $y = -x$.

4. On sait que $\mathrm{e}^{t^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}dt = 1 > 0 \implies f(x) \geqslant x$$

D'autre part,

$$1 = \int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}dt \geqslant \int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{x^2}dt = \mathrm{e}^{x^2}\,\big[f(x) - x\big]$$

donne : $f(x) \leqslant x + \mathrm{e}^{-x^2}$, soit $x \leqslant f(x) \leqslant x + \mathrm{e}^{-x^2}$.

Enfin $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big[f(x) - x\big] = 0$ prouve que la première bissectrice est asymptote à $\mathcal{C}$ en $\pm\infty$. L'allure de la courbe représentative s'en déduit.

Exercice 1.5.

1. Pour x réel, on considère la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x} - \ln n$$

Pour quelle valeurs de x, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle ainsi bien définie ?

2. Pour $n \geqslant 2$, on pose $w_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x)$. Étudier la convergence de la série de terme général $w_n(x)$.

3. En déduire l'ensemble de définition D de la fonction f définie par

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x).$$

On admet que f est continue sur D.

4. Soit $x \in D$. Démontrer que $f(x+1) = f(x) - \dfrac{1}{1+x}$.

5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} [f(n) + \ln n] = 0$.

6. Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0,1] : f(px) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} f(x - \frac{k}{p}) - \ln p$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Solution :

1. La suite est définie sur $D_u = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$.

2. On a pour n au voisinage de $+\infty$, $w_n(x) \sim \dfrac{-1-x}{n^2}$ qui est le terme général d'une série (absolument) convergente. On en déduit que la série de terme général $w_n(x)$ converge pour tout $x \in D_u$.

3. On a $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n(x) + \dfrac{1}{1+x}$. On en déduit que $D = D_u$.

4. On a $u_n(x+1) = u_n(x) - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{n+1+x}$. Pour x réel fixé, on en déduit par passage à la limite que $f(x+1) = f(x) - \dfrac{1}{1+x}$.

5. On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f(n) + \ln n = f(0) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{1+k} + \ln n = f(0) - u_n(0)$.
Par définition de $f(0)$, cette deuxième expression a pour limite 0, d'où le résultat.

6. On a : $u_{pn}(px) = \sum\limits_{k=1}^{pn} \dfrac{1}{k+px} - \ln(pn) = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=1}^{pn} \dfrac{1}{x+\frac{k}{p}} - \ln n - \ln p$, donc :

$$u_n(px) = \frac{1}{p}\Big(\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x} - \ln n\big) + \big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x-\frac{1}{p}} - \ln n\big) + \cdots + \big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x-\frac{p-1}{p}} - \ln n\big)\Big) - \ln p$$

On obtient ce résultat en remarquant que si l'on effectue la division euclidienne de k par p : $k = pq + r$, on a : $k + px = p\big(q + x + \dfrac{r}{p}\big) = p\big(q + 1 + x - \dfrac{p-r}{p}\big)$, et en regroupant ensuite les termes qui ont même reste r. Par passage à la limite :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in D : f(px) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\big(x - \frac{k}{p}\big) - \ln p$$

On a enfin :

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\big(\frac{k}{p}\big) = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} f\big(1 - \frac{k}{p}\big)$$

$$= \lim_{p\to+\infty} f(p) + p = 0$$

Exercice 1.6.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On considère les deux suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{nu_n}\big(\sum_{k=1}^{n} u_k\big) \text{ et } w_n = \frac{1}{n^2 u_n}\big(\sum_{k=1}^{n} ku_k\big)$$

1. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = n^\alpha$, où α est un réel strictement positif.

   a) À l'aide d'une somme de Riemann, déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$, quand n tend vers $+\infty$.

   b) Vérifier que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

   c) Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. On suppose dans cette question que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel a strictement positif et on admet le résultat suivant :

[Si $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites réelles positives telles que $a_n \underset{(n\to\infty)}{\sim} b_n$ et $\sum\limits_n a_n$ diverge, alors $\sum\limits_{k=1}^n a_k \underset{(n\to\infty)}{\sim} \sum\limits_{k=1}^n b_k$.]

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*, S_n = \sum\limits_{k=1}^n u_k$.

a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que la série de terme général u_n est divergente.

b) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n ku_k = (n+1)S_n - \sum_{k=1}^n S_k$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $w_n = \dfrac{n+1}{n}v_n - \dfrac{1}{n^2u_n}\sum\limits_{k=1}^n S_k$.

d) En utilisant le résultat admis, montrer qu'au voisinage de $+\infty$:

$$w_n = a - aw_n + o(w_n).$$

e) En déduire, en fonction de a, la limite de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$.

Solution :

1. a) Si on pose $T_n = \sum\limits_{k=1}^n k^\alpha$, on peut écrire $T_n = n^{\alpha+1}\big(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \big(\frac{k}{n}\big)^\alpha\big)$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \big(\frac{k}{n}\big)^\alpha = \displaystyle\int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}$. Finalement :

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

b) On a donc $v_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\sum\limits_{k=1}^n k^\alpha$. En utilisant l'équivalent précédent :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{\alpha+1}.$$

c) On a $w_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+2}}\sum\limits_{k=1}^n k^{\alpha+1}$. Toujours avec l'équivalent trouvé précédemment : $\sum\limits_{k=1}^n k^{\alpha+1} \sim \dfrac{n^{\alpha+2}}{\alpha+2}$. En conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{\alpha+2}.$$

2. a) Supposons que la série de terme général u_n soit convergente. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n u_k = S$, où S est un réel strictement positif.

De la relation $v_n = \dfrac{1}{nu_n}\big(\sum\limits_{k=1}^n u_k\big)$ on tire alors $u_n \sim \dfrac{S}{an}$. Comme la série de terme général $\dfrac{S}{an}$ est divergente, ceci contredit le fait que la série de terme général u_n est convergente.

b) Considérons $T_n = \sum\limits_{k=1}^n ku_k$. Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on peut écrire $u_k = S_k - S_{k-1}$. Ainsi :

$$T_n = u_1 + \sum_{k=2}^n k(S_k - S_{k-1}) = u_1 + \sum_{k=2}^n kS_k - \sum_{k=2}^n kS_{k-1}.$$

En effectuant un glissement d'indice dans la seconde somme :

$$T_n = u_1 + \sum_{k=2}^n kS_k - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)S_k.$$

Comme $u_1 = S_1$, on obtient $T_n = \sum\limits_{k=1}^n kS_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(k+1)S_k$. En arrangeant : $T_n = nS_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k$. Enfin, en ajoutant et en retranchant S_n aux deux termes , il vient :

$$\sum_{k=1}^n ku_k = (n+1)S_n - \sum_{k=1}^n S_k.$$

c) On a : $w_n = \dfrac{1}{n^2 u_n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k\Big)$. En remplaçant $\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$ par $(n+1)S_n - \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$, on obtient :

$$w_n = \frac{(n+1)S_n}{n^2 u_n} - \frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{n+1}{n} v_n - \frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=1}^{n} S_k$$

d) En utilisant la relation : $v_n = \dfrac{1}{n u_n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\Big)$, on a donc : $S_n \sim a n u_n$. Comme la série de terme général positif u_n est divergente, celle de terme général $n u_n$ est *a fortiori* divergente.
En utilisant le résultat admis, on a donc : $\sum\limits_{k=1}^{n} S_k \sim a \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$.
On en déduit : $\dfrac{1}{n^2 u_n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k \sim a\dfrac{1}{n^2 u_n}\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$. Soit $\dfrac{1}{n^2 u_n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k \sim a w_n$, ce qui peut également s'écrire : $\dfrac{1}{n^2 u_n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k = a w_n + o(w_n)$. En remplaçant dans l'égalité trouvée précédemment : $w_n = a - a w_n + o(w_n)$.

e) L'égalité précédente s'écrit également : $(1+a)w_n = a + o(w_n)$
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{a}{a+1}$.

Exercice 1.7.
Soit a un nombre réel, tel que $a > 2$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} a_1 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n^2 - 2 \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2. a) Montrer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante :

$$a_n^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \dots a_{n-1}^2 (a_1^2 - 4)$$

b) Déterminer, en fonction de a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$.

3. a) Simplifier, pour k supérieur ou égal à 2 : $\dfrac{a_k}{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} - \dfrac{a_{k+1}}{a_1 a_2 \dots a_k}$.

b) En déduire, en fonction de a, l'existence et la valeur de : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_1 a_2 \dots a_k}$.

Solution :

1. $\star$ On a $a_1 > 2$, et si pour un certain rang n, on a $a_n > 2$, alors $a_{n+1} > 2^2 - 2 = 2$. On conclut par le principe de récurrence :

$$\forall\, n \geqslant 1, a_n > 2$$

$\star$ On a alors $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n - 2 = (a_n - 2)(a_n + 1) > 0$ et la suite (a_n) est strictement croissante.

$\star$ Si la suite (a_n) était convergente, en notant ℓ sa limite, on aurait $\ell = \ell^2 - 2$, soit $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$, *i.e.* $\ell = 2$ ou $\ell = -1$, ce qui est incompatible avec la condition initiale et la stricte croissance de cette suite.
Ainsi la suite (a_n) est divergente, et plus précisément :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

2. a) Pour $n \geqslant 2$, on a :

$$a_n^2 - 4 = (a_{n-1}^2 - 2)^2 - 4 = a_{n-1}^4 - 4a_{n-1}^2 = a_{n-1}^2(a_{n-1}^2 - 4)$$

Ainsi, par l'argument de récurrence habituel :

$$\forall\, n \geqslant 2, a_n^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \dots a_{n-1}^2 (a_1^2 - 4)$$

b) Ainsi $a_1^2 a_2^2 \dots a_{n-1}^2 = \dfrac{a_n^2 - 4}{a_1^2 - 4}$ et donc :

$$\frac{a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \sqrt{\frac{a_n^2(a_1^2 - 4)}{a_n^2 - 4}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a_1^2 - 4}$$

3. a) En réduisant au même dénominateur :

$$\frac{a_k}{a_1a_2\ldots a_{k-1}} - \frac{a_{k+1}}{a_1a_2\ldots a_k} = \frac{a_k^2 - a_{k+1}}{a_1a_2\ldots a_k} = \frac{2}{a_1a_2\ldots a_k}$$

b) Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{a_1a_2\ldots a_k} = \frac{2}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{a_1a_2\ldots a_k} = \frac{2}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_{n+1}}{a_1a_2\ldots a_n}$$

et par le résultat 2. b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1a_2\ldots a_k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_1a_2\ldots a_k} = \frac{1}{a_1} + \frac{a_2}{2a_1} - \frac{\sqrt{a_1^2-4}}{2}$$

Exercice 1.8.

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{si } n \notin A \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout x de $]-1,1[$, la série $\sum\limits_n a_nx^n$ est convergente. On note alors $f_A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux parties A de $\mathbb{N}$ pour lesquelles $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f_A(x)$ existe. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces parties et $P(A)$ cette limite.

2. a) Montrer que $\emptyset, \mathbb{N}$ appartiennent à $\mathcal{A}$ et calculer $P(\emptyset)$ et $P(\mathbb{N})$.

b) Montrer que si A et B sont deux parties de $\mathcal{A}$ telles que $A \subset B$, , alors $P(A) \leqslant P(B)$.

c) Montrer que $A \in \mathcal{A} \implies P(A)$ appartient à $[0,1]$.

d) Soit $A, B \in \mathcal{A}$ telles que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $A \cup B \in \mathcal{A}$ et calculer $P(A \cup B)$.

e) Montrer que $A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathcal{A}$ et calculer $P(\overline{A})$.

f) Montrer que $2\mathbb{N}, 3\mathbb{N}+5 \in \mathcal{A}$ et calculer $P(2\mathbb{N})$ et $P(3\mathbb{N}+5)$.

g) Montrer qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, deux à deux disjoints, pour lesquels $P\big(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n\big) \neq \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(A_n)$.

3. Dans cette question, on prend $A = \{n^2, n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$.

a) Vérifier que $f_A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$.

b) À l'aide d'une comparaison série/intégrale, déterminer un équivalent de $f_A(x)$, lorsque x est au voisinage de 1.

c) En déduire que $A \in \mathcal{A}$ et déterminer la valeur de $P(A)$.

Solution :

1. Comme $|a_n| \leqslant 1$, pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $|a_nx^n| \leqslant |x^n|$ et la série $\sum |x^n|$ est convergente comme série géométrique de raison inférieure à 1.

2. a) $P(\emptyset) = 0$ et $P(\mathbb{N}) = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-x} = 1$.

b) Comme $A \subset B$, on a pour tout n de $\mathbb{N}$: $a_n \leqslant b_n$ et comme on a supposé que les limites existent : $P(A) \leqslant P(B)$.

c) Comme $\emptyset \subset A \subset \mathbb{N}$, il vient $0 \leqslant P(A) \leqslant P(\mathbb{N}) = 1$.

d) Notons $C = A \cup B$. On a alors $c_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \in A \\ b_n & \text{si } n \in B \end{cases}$. Ainsi, pour tout N :

$$\sum_{n=0}^{N} c_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=0}^{N} b_n x^n.$$

En prenant la limite lorsque N tend vers $+\infty$, il vient

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[,\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

et comme $P(A)$ et $P(B)$ existent, $P(C)$ existe également et $P(C) = P(A) + P(B)$.

e) Par les questions précédentes, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

f) Il vient :

$\rightarrow P(2\mathbb{N}) = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow P(3\mathbb{N}+5) = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{3n+5} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)x^5}{1-x^3} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5}{1+x+x^2} = \dfrac{1}{3}$

g) Il suffit d'écrire $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\{n\}$ et $P(\{n\}) = 0$, alors que $P(\mathbb{N}) = 1$.

3. a) Par définition même : $f_A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$

b) Soit $x \in \left]0, 1\right[$ fixé et $f : t \mapsto x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2 \ln x}$. La fonction f est positive, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (car $\ln x < 0$). Si $t \in [k, k+1]$, alors $x^{(k+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} x^{t^2}\,dt \leqslant x^{k^2}$. On somme ces inégalités pour $k \in [\![0, N]\!]$. Il vient :

$$\sum_{k=0}^{N} x^{(k+1)^2} \leqslant \int_0^{N+1} x^{t^2}\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{N} x^{k^2}$$

puis en prenant la limite lorsque N tend vers $+\infty$:

$$f(x) - 1 \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln x}\,dt \leqslant f(x)$$

Or, le changement de variable affine, $u = t\sqrt{-\ln x}$ donne :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln x}\,dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$$

Le dernier terme tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1 ; donc au voisinage (à gauche) de 1 : $f(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$. De plus, pour x au voisinage de 1, on a $-\ln x \sim 1 - x$. Finalement :

$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{\pi}}{2} = 0$$

Exercice 1.9.

Soit n un entier pair $\geqslant 2$. On considère la fonction φ définie sur le segment $[0, n]$ par

$$\varphi(t) = |t(t-1)\dots(t-n)| = \Big|\prod_{k=0}^{n}(t-k)\Big|$$

1. a) Montrer que $\forall\, t \in \left[1, \frac{n}{2}\right], \varphi(t-1) \geqslant \varphi(t)$.

b) Montrer que φ admet un maximum sur l'intervalle $[0, n]$.

c) On note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t. En comparant $\varphi(n-t)$ et $\varphi(t)$ puis $\varphi(t - \lfloor t \rfloor)$ et $\varphi(t)$, montrer que le maximum de φ sur $[0, n]$ est atteint en un point de l'intervalle $\left]0, 1\right[$.

2. En étudiant les variations de la fonction $\ln \circ \varphi$, montrer que le maximum de φ est atteint une seule fois sur $\left]0, 1\right[$; on note t_n l'abscisse de ce maximum (*i.e.* $t_n \in \left]0, 1\right[$ et $\varphi(t_n) = \max\limits_{t\in[0,n]} \varphi(t)$).

3. Comparer $\frac{1}{t_n}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. En déduire la limite de t_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que pour tout $t\in[0,n]$, on a : $\varphi(t)<\dfrac{n!}{\ln(n+1)}$.

Solution :

1. a) Si t est entier compris entre 1 et $n/2$, la relation demandée est banale.
Pour $t\notin\mathbb{N}$, on a : $\dfrac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)}=\dfrac{|t-n-1|}{|t|}=\left|1-\dfrac{n+1}{t}\right|$.
Or la fonction $t\mapsto 1-\dfrac{n+1}{t}$ croît sur $\mathbb{R}_+^*$; sur $\left[1,\frac{n}{2}\right]$, elle varie entre $-n$ et $-1-\dfrac{2}{n}$ et a donc une valeur absolue plus grande que 1.

b) La fonction φ est continue sur le segment $[0,n]$ et admet donc un maximum sur ce segment.

c) Le maximum est atteint en au moins un point de $\left[0,\frac{n}{2}\right]$ car :
$\varphi(n-t)=\left|\prod\limits_{k=0}^{n}((n-t)-k)\right|=\prod\limits_{k=0}^{n}|n-k-t|=\prod\limits_{j=0}^{n}|j-t|=\left|\prod\limits_{j=0}^{n}(t-j)\right|$
c'est-à-dire $\varphi(n-t)=\varphi(t)$, et le résultat.
Par ailleurs, de $\varphi(t-1)\geqslant\varphi(t)$ sur $\left[1,\frac{n}{2}\right]$, on déduit par récurrence évidente que : $\forall t\in\left[1,\frac{n}{2}\right],\varphi(t-\lfloor t\rfloor)\geqslant\varphi(t)$.
Ainsi, si le maximum de φ est atteint en un point $t\in\left[1,\frac{n}{2}\right]$, il est aussi atteint au point $t-\lfloor t\rfloor\in[0,1[$ (et pas en 0 car $\varphi(0)=0$ et $\varphi\geqslant 0$ non identiquement nulle).

2. Sur $]0,1[$, on a : $\ln(\varphi(t))=\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(|t-k|)$. Donc :
$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=\frac{d}{dt}\ln(\varphi(t))=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}=g(t)$$
Ainsi, $\varphi'(t)$ est du signe de g (car $\varphi(t)>0$). Or $g'(t)=-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(t-k)^2}<0$. En utilisant le théorème de la bijection pour g (qui est de limite $+\infty$ en 0 à droite et de limite $-\infty$ en 1 à gauche), il existe donc un unique $t_n\in\,]0,1[$ tel que φ admette un maximum en t_n.

3. Comme φ est maximale en t_n sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, on a $\varphi'(t_n)=0$, soit $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{t_n-k}=0$, soit $\dfrac{1}{t_n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k-t_n}$.
Or pour tout $k\geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{k-t_n}-\dfrac{1}{k}=\dfrac{t_n}{k(k-t_n)}>0$. On en déduit que :
$$\frac{1}{t_n}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
La série $\sum\frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente à termes positifs, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=+\infty$.
On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{t_n}=+\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=0$.

4. La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :
$$\forall\,k\geqslant 1,\forall\,t\in[k,k+1],\ \frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{k}$$
En intégrant cette inégalité sur $[k,k+1]$, puis en sommant de $k=2$ à $k=n$, on obtient :
$$\int_2^{n+1}\frac{dt}{t}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$
Ainsi $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}\geqslant\ln(n+1)-\ln 2$ et $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\geqslant\ln(n+1)-\ln 2+1\geqslant\ln(n+1)$
Le passage à l'inverse (tout est strictement positif) donne finalement :

$$t_n < \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Pour tout $t \in [0,n]$, on a :

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(t_n) = \prod_{k=0}^{n} |t_n - k| = t_n \prod_{k=1}^{n} (k - t_n) \leqslant t_n \prod_{k=1}^{n} k \leqslant t_n n! < \frac{n!}{\ln(n+1)}$$

Exercice 1.10.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$u_n(x) = x \ln\big(1 + \frac{1}{n}\big) - \ln\big(1 + \frac{x}{n}\big)$$

Lorsque la série de terme général $u_n(x)$ converge, on note $S(x)$ sa somme.

1. Déterminer l'ensemble D des valeurs de x pour lesquelles la série ci-dessus converge. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

2. Montrer que pour tout $x \in D, S(x+1) = S(x) + \ln(x+1)$.

3. On définit la fonction T sur D par : $T(x) = \exp(S(x))$.

  a) Montrer que T vérifie les propriétés :

    i) $T(0) = 1$.

    ii) $\forall x \in D :\ T(x+1) = (x+1)T(x)$.

  b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}, T(n) = n!$.

4. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : T(x+n) = T(x) \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (x+k)$.

5. a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \big[\ln\big(1 + \frac{1}{k}\big) - \ln\big(1 + \frac{1}{k+n}\big)\big] = \ln(n+1)$.

  b) On pose $R_n(x) = S(x+n) - S(n) - x\ln(n+1)$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

  c) En déduire l'existence d'une fonction réelle φ_n définie sur D telle que :

$$\forall\, x \in D, \forall\, n \in \mathbb{N}^* : T(x+n) = n!(n+1)^x \varphi_n(x), \ \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = 1$$

Solution :

1. On trouve que $u_n(x) = \dfrac{x(x-1)}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$ ce qui montre $D =]-1,+\infty[$.

On a $S(0) = S(1) = 0$.

2. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} (u_n(x+1) - u_n(x)) &= \sum_{n=1}^{N} \big[\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{x+1}{n}) + \ln(1+\frac{x}{n})\big]\\ &= \sum_{n=1}^{N} \big[\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(n+x+1) + \ln(n+x)\big]\end{aligned}$$

Par télescopages :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} (u_n(x+1) - u_n(x)) &= \ln(N+1) - \ln(N+x+1) + \ln(1+x)\\ &= \ln(1+x) + \ln\big(\frac{N+1}{N+x+1}\big)\end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque N tend vers l'infini on trouve le résultat demandé.

3. On définit la fonction T sur D par : $T(x) = \exp(S(x))$.

  a) Il vient :

    i) $T(0) = \exp(S(0)) = 1$.

    ii) $T(x+1) = \exp(S(x) + \ln(x+1)) = (x+1)\exp S(x) = (x+1)T(x)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T(n) = n!$ de manière immédiate.

4. On a facilement que $S(x+n) = S(x) + \sum_{k=1}^{n} (x+k)$. D'où le résultat en «passant à l'exponentielle».

5. a) On a, en repassant aux sommes partielles et par télescopage terminal :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln(1+\frac{1}{k}) - \ln(1+\frac{1}{k+n})\right] = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \ln(n+1)$$

b) En utilisant le résultat précédent, on trouve :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[x\ln(1+\frac{1}{k+n}) + \ln(1+\frac{n}{k}) - \ln(1+\frac{x+n}{k})\right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[x\ln(1+\frac{1}{k+n}) + \ln(k+n) - \ln(x+k+n)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[x\ln(1+\frac{1}{k+n}) - \ln(1+\frac{x}{k+n})\right] \end{aligned}$$

Ceci est le reste d'ordre n de la série convergente de terme général :

$$v_m(x) = x\ln(1+\frac{1}{m}) - \ln(1+\frac{x}{m})$$

qui tend donc vers 0.

c) En passant à l'exponentielle on en déduit l'existence d'une fonction réelle φ_n définie sur D telle que :

$$\forall x \in D\ \forall n \in \mathbb{N}^* : T(x+n) = n!(n+1)^x \varphi_n(x),\ \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = 1$$

Exercice 1.11.

Soit E l'ensemble des fonctions f définies sur $[0,1]$, à valeurs réelles, de classe C^1, vérifiant de plus $f(0) = f(1) = 0$. Soit f un élément de E. On pose, pour tout x de $[0,1]$:

$$h(x) = \int_0^x |f'(t)|dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^1 |f'(t)|dt$$

1. Montrer que les fonctions g et h sont dérivables sur $[0,1]$. Exprimer $h'(x)$ et $g'(x)$ à l'aide de $f(x)$.

2. Montrer que :

$$\int_0^{1/2} |f(t)f'(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}h^2\big(\frac{1}{2}\big) \quad \text{et} \quad \int_{1/2}^{1} |f(t)f'(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}g^2\big(\frac{1}{2}\big)$$

3. a) Trouver un majorant de $h^2\big(\frac{1}{2}\big)$ et de $g^2\big(\frac{1}{2}\big)$ en fonction des intégrales $\displaystyle\int_0^{1/2} f'^2(t)dt$ et $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f'^2(t)dt$

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 |f(t)f'(t)|dt \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(t)dt$

4. a) Déterminer une fonction f continue sur $[0,1]$, de classe C^1 par morceaux, telle que $f(0) = f(1) = 0$, pour laquelle l'inégalité précédente est une égalité.

b) Comment démontrerait-on que la constante $1/4$ de l'inégalité précédente est la meilleure possible pour que l'inégalité soit vraie pour toutes les fonctions de E ?

Solution :

1. La fonction $x \to |f'(x)|$ est continue, puisque f est C^1.
Le théorème fondamental du calcul intégral implique que $h(0) = 0$ et que h est de classe C^1 de dérivée $h'(x) = |f'(x)|$. Avec un raisonnement identique, il vient $g(1) = 0$ et $g'(x) = -|f'(x)|$.

2. Comme $f(0) = 0$, on peut écrire $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)dt$.

Donc $|f(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^x |f'(t)|dt = h(x)$ et $|f(x)f'(x)| \leqslant h(x)h'(x)$.
Il reste à intégrer cette inégalité sur $[0,1/2]$, ce qui donne :

$$\int_0^{1/2} |f(t)f'(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}h^2\big(\frac{1}{2}\big).$$

Même raisonnement pour la seconde inégalité car $f(1) = 0$.

3. a) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$h^2(x) = \Big(\int_0^x |f'(t)|.1dt\Big)^2 \leqslant \int_0^x |f'(t)|^2 dt \times x$$

Donc : $h^2\big(\frac{1}{2}\big) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{1/2} |f'(t)|^2 dt$. De même : $g^2\big(\frac{1}{2}\big) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{1/2}^1 f'^2(t)dt$.

b) Par la question 2 et la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(t)f'(t)|dt &= \int_0^{1/2} |f(t)f'(t)|dt + \int_{1/2}^1 |f(t)f'(t)|dt \\ &\leqslant \frac{1}{4}\int_0^{1/2} |f'(t)|^2 dt + \frac{1}{4}\int_{1/2}^1 |f'(t)|^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\end{aligned}$$

4.a) Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1-x & \text{si } 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$.

Cette fonction est continue, de classe C^1 sauf en $x = 1/2$ et

$$\int_0^1 |f(t)f'(t)|dt = \int_0^{1/2} t dt + \int_{1/2}^1 (1-t)dt = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(t)\, dt$$

b) Il s'agirait « d'approcher d'aussi près que l'on veut » la fonction f définie ci-dessus par des fonctions de classe C^1. On peut penser à approcher la fonction « chapeau » f précédente en « arrondissant » simplement la pointe avec un petit arc de cercle pour effectuer une approximation de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer alors que les intégrales en question sont aussi proches que l'on veut des intégrales de la question a), le détail du calcul n'est pas demandé ...

Exercice 1.12.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{E}$ l'application T qui à toute fonction f de $\mathcal{E}$ fait correspondre la fonction $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = 1 - \int_0^x \frac{tf(t)}{1+t^2} dt$$

On note φ l'élément de $\mathcal{E}$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. a) Montrer que T est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. L'application T est-elle linéaire ?

b) T est-elle surjective ?

c) Calculer $T(\varphi)$ en fonction de φ.

On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ par $f_0 \in \mathcal{E}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $f_{n+1} = T(f_n)$.

2. Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie par : $g_n = (-1)^n\,[\varphi - f_n]$.

Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel x, la relation :

$$g_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{tg_n(t)}{1+t^2} dt$$

3. On s'intéresse au cas particulier où f_0 est la fonction définie par $f_0 = \varphi + 1$, et on garde les notations de la question précédente.

a) Déterminer g_0, g_1 et g_2.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un réel a_n vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = a_n \left[\ln\left(1+x^2\right)\right]^n$$

et donner la relation liant a_{n+1} à a_n.

c) Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n en fonction de n.

d) Déterminer, pour tout réel x, la limite quand n tend vers l'infini de $g_n(x)$.

e) Calculer, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Solution :

1. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{tf(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$. En notant H une primitive de cette fonction, on a donc, pour tout réel x, $T(f)(x) = 1 - (H(x) - H(0)$.
Cette fonction est dérivable et sa dérivée est définie pour tout x par

$$(T(f))'(x) = H'(x) = \frac{xf(x)}{1+x^2}.$$

En fait, la fonction $T(f)$ est même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
T n'est clairement pas linéaire ($T(0) \neq 0$).

b) On vu que, pour toute fonction f de $\mathcal{E}$, $T(f)$ était dérivable. Comme il existe des fonctions de $\mathcal{E}$ qui ne sont pas dérivables, par exemple la fonction $x \mapsto |x|$, cela prouve que T n'est pas surjective.

c) On a, pour tout réel x :

$$T(\varphi)(x) = 1 - \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}dt = 1 - \Big[-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\Big]_0^x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \varphi(x)$$

2. On a : $g_{n+1} = (-1)^{n+1}[\varphi - f_{n+1}]$. Or, par définition, $\varphi = T(\varphi)$ et $f_{n+1} = T(f_n)$.
On a donc : $g_{n+1} = (-1)^{n+1}\left[T(\varphi) - T(f_n)\right]$.
Attention, T n'est pas une application linéaire !, mais

$$T(\varphi) = 1 - \int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+t^2}dt \text{ et } T(f_n) = 1 - \int_0^x \frac{tf_n(t)}{1+t^2}dt.$$

Les 1 se neutralisent et par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$g_{n+1} = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t(f_n(t) - \varphi(t))}{1+t^2}dt.$$

En simplifiant : $g_{n+1}(x) = (-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t(\varphi(t)) - f_n(t))}{1+t^2}dt = \int_0^x \frac{tg_n(t)}{1+t^2}dt.$

3. a) On a :
$\star$ $g_0 = \varphi - f_0$, d'où $g_0 = -1$.
On utilise alors la relation $g_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{tg_n(t)}{1+t^2}dt$ qui donne :
$\star$ $g_1(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt = \big[-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\big]_0^x = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$
Puis : $g_2(x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{t\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt.$
On reconnaît une expression de la forme uu', d'où :

$$g_2(x) = -\frac{1}{8}\big[\ln^2(1+t^2)\big]_0^x = -\frac{1}{8}\ln^2(1+x^2).$$

b) On montre le résultat par récurrence.
Initialisation. Pour $n = 0$, la relation est vraie avec $a_0 = -1$.
Hérédité. On suppose que, pour un certain entier naturel n, on a pour tout x, $g_n(x) = a_n\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]^n$.
On a alors : $g_{n+1}(x) = a_n\displaystyle\int_0^x \frac{t(\ln(1+t^2))^n}{1+t^2}dt$. On reconnaît dans l'intégrale une expression, à un coefficient près, de la forme $u'u^n$. On a donc :

$g_{n+1}(x) = a_n \dfrac{1}{2(n+1)} \left[(\ln\left(1+t^2\right))^{n+1}\right]_0^x$, ce qu'il fallait, avec en prime

$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} a_n.$$

c) On montre alors facilement par récurrence que : $a_n = -\dfrac{1}{2^n n!}$.

d) On a donc : $g_n(x) = -\dfrac{1}{2^n n!}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]^n$. Comme la fonction puissance est négligeable devant la fonction factorielle, on a, pour tout réel x : $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$.

e) On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \varphi(x)$.

Exercice 1.13.

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme u_1 strictement positif et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}$$

Pour tout réel strictement positif a, on note f_a la fonction définie, pour tout réel $x \geqslant 0$, par :

$$f_a(x) = x - \sqrt{x} - a.$$

1. Montrer que l'équation $f_a(x) = 0$ (d'inconnue x) possède une unique solution réelle notée $\ell(a)$, que l'on précisera.
Préciser les variations de f_a ainsi que le sens de variation de $a \mapsto \ell(a)$.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $u_n > 1$. Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, déterminer sa limite.

3. On suppose vérifiée la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}) : \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 1, u_n \leqslant \ell\big(\frac{1}{n}\big)$$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

c) Que pensez-vous de la propriété $\mathcal{P}$?

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Solution :

1. Avec $X = \sqrt{x} \geqslant 0$, on a : $f_a(x) = 0 \iff X^2 = X + a, X \geqslant 0$.
Le discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4(-a) = 1 + 4a > 0$.
Il y a donc deux racines $X_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Comme $\sqrt{1+4a} > 1$, on a $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$; donc

$$\ell(a) = X_2^2 = \big(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\big)^2.$$

$\star$ $f_a'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc f_a croît sur $]0, 1/4]$ et décroît sur $[1/4, +\infty[$.
$\star$ La fonction $a \mapsto \ell(a)$ est clairement croissante.

2. • $u_2 = \sqrt{u_1} + 1 > 1$,
• si pour un certain rang n, $u_n > 1$ alors, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n} > \sqrt{u_n} > 1$.
On conclut par le principe de récurrence.
La seule limite possible de la suite (u_n) est 1. En effet si (u_n) converge vers ℓ, alors (la fonction racine carrée est continue) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n}\big) = \sqrt{\ell}$, donc $\sqrt{\ell} = \ell$. Les solutions sont $\ell = 0$ et $\ell = 1$ et 0 n'est pas possible car $(u_n)_{n\geq 2}$ est minorée par 1.

3. a) Comme $a \mapsto \ell(a)$ est croissante et $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$, il vient : $\ell\big(\dfrac{1}{n}\big) \leqslant \ell(1) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

b) On a $u_{n+1} - u_n = -u_n + \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n} = -f_{1/n}(u_n) \geqslant 0$, car la fonction $f_{1/n}$ est négative sur $[0, \ell\left(\frac{1}{n}\right)]$ et $u_n \leqslant \ell(\dfrac{1}{n})$.

c) Si $\mathcal{P}$ est vraie, la suite (u_n) est croissante et majorée, elle converge, et donc converge vers 1 d'après la question 2. Or (u_n) croît, donc $u_n \geqslant u_1 > 1$, d'où $\lim u_n \geqslant u_1 > 1$, ce qui est absurde. La propriété $\mathcal{P}$ est donc fausse.

4. Ainsi, il existe m un entier naturel non nul vérifiant : $u_m > \ell(\dfrac{1}{m})$

On montre alors par récurrence sur $n \geqslant m$ que $u_{n+1} < u_n$:

- $u_{m+1} - u_m = -f_{1/m}(u_m) < 0$, car $u_m > \ell(\dfrac{1}{m})$, (tableau de variations de $f_{1/m}$).
- si $u_{n+1} < u_n$, alors $\sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n}$; or $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$; donc :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \frac{1}{n+1} < \sqrt{u_n} + \frac{1}{n} = u_{n+1}$$

Comme la suite (u_n) est décroissante à partir du rang m et minorée par 1, elle converge et sa limite ne peut être que 1.

Exercice 1.14.

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ qui converge vers 0.

Soit $A \in \mathbb{R}^+$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n(A) = \displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2}\, dx$.

1. Etablir l'existence de $I_n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + x^2}\, dx$.

3. On suppose dans cette question que $A > 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(A) = 0$.

4. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Big|\int_0^A \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2}\, dx\Big| \leqslant \varepsilon$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(0) = 0$.

5. On ne suppose plus que $f(0) = 0$. Montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(0) = \frac{\pi}{2} f(0)$.

6. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n e^{-\sqrt{t}}}{1 + n^2 t^2}\, dt$.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. En notant B un majorant de $|f|$, on a :

$$\Big|\frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2}\Big| \leqslant \frac{a_n B}{a_n^2 + x^2}$$

Ainsi la règle de Riemann assure que $I_n(A)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + x^2} dx = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{1/a_n}{1 + (x/a_n)^2} dx = \lim_{X\to+\infty} \big[\arctan(x/a_n)\big]_0^X$$
$$= \lim_{X\to+\infty} \arctan(X/a_n) = \frac{\pi}{2}$$

3. Soit $A > 0$. En notant toujours B un majorant de $|f|$:

$$|I_n(A)| \leqslant a_n B \int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{a_n B}{A}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$; donc $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(A) = 0$.

4. On a $f(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$; la fonction f est continue en 0 : il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in [0, A], |f(x| \leqslant \frac{2}{\pi}\epsilon$. On a alors :

$$|\int_0^A \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx| \leqslant \frac{2}{\pi}\varepsilon|\int_0^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + x^2} dx| \leqslant \frac{2}{\pi}\varepsilon \times \frac{\pi}{2} \leqslant \varepsilon$$

Le réel A ainsi défini ne dépendant pas de n.

On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n(0) = \int_0^A \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx + I_n(A)$ et on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(0) = 0.$$

5. Dans le cas général, on peut écrire $f(x) = f(0) + [f(x) - f(0)]$. Si on note g la fonction $f - f(0)$, on a donc $g(0) = 0$, et :

$$\begin{aligned} I_n(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2}\, dx = f(0) \int_0^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + x^2}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{a_n g(x)}{a_n^2 + x^2}\, dx \\ &= \frac{\pi}{2} f(0) + I_n(g) \end{aligned}$$

En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction g bornée telle que $g(0) = 0$, il vient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(0) = \frac{\pi}{2} f(0)$$

6. On choisit $f(t) = \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$. La fonction f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, bornée par $f(0) = 1$, d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{n\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1 + n^2 t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{n f(t)}{1 + n^2 t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{n} f(t)}{\frac{1}{n^2} + t^2}\, dt$$

On reconnaît $I_n(0)$ avec $a_n = \frac{1}{n}$, terme général d'une suite de réels positifs convergeant vers 0. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1 + n^2 t^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 1.15.

Si f est une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I, on note $f^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ la dérivée d'ordre n de cette fonction f. On considère la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$L_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^x}{n!} f_n^{(n)}(x), \text{ où } f_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$$

On admettra que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$xL_n(x) = (n+1)\, L_{n+1}(x) + (2n+1)\, L_n(x) + nL_{n-1}(x)$$

1. Calculer L_0, L_1 et L_2. Montrer que pour tout entier naturel n, L_n est une fonction polynôme de degré n (que l'on confond avec le polynôme associé).

2. Soit $n \geqslant 1$, montrer que l'on a :

$$(x - y) \sum_{k=0}^{n-1} L_k(x) L_k(y) = n(L_n(x) L_{n-1}(y) - L_{n-1}(x) L_n(y))$$

3. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} [L_k(x)]^2 = n(L_n'(x) L_{n-1}(x) - L_{n-1}'(x) L_n(x))$$

4. On va s'intéresser aux zéros du polynôme L_n. S'il existe des zéros réels d'ordre impair, on les notera $x_1, \ldots, x_m$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$.

a) Montrer que si P est un polynôme à coefficients réels qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors il est de signe constant. En déduire que si L_n admet des zéros réels d'ordre impair, il se met sous la forme $L_n(X) = aP(X)(X - x_1) \cdots (X - x_m)$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et P est un polynôme positif sur $\mathbb{R}$.

b) Par intégrations par parties successives et après avoir justifié l'existence de l'intégrale, montrer que pour tout polynôme Q de degré strictement inférieur à n :

$$\int_0^{+\infty} L_n(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}dx = 0$$

c) En considérant le polynôme $Q = (X - x_1)\cdots(X - x_m)$ (on posera $Q(x) = 1$ s'il n'y a pas de racine d'ordre impair), montrer que L_n a exactement n zéros réels distincts.

Solution :

1. On trouve $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x - 1$ et $L_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$. On déduit immédiatement de la formule de récurrence que L_n est un polynôme. On a bien $\deg(L_0) = 0$ et $\deg(L_1) = 1$.
Supposons que $\deg(L_k) = k$ pour $0 \leqslant k < n$ avec $n \geqslant 2$, il vient :

$$\deg(L_n) = \deg(\frac{1}{n}[(x - 2n + 1)L_{n-1} - (n - 1)L_{n-2}(x)]) = n$$

2. Soit $n \geqslant 1$, en utilisant la formule de récurrence on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta &= (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} L_k(x)L_k(y)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(xL_k(x))L_k(y) - \sum_{k=1}^{n-1} L_k(x)(yL_k(y)) + (x-y)L_0(x)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}[(k+1)L_{k+1}(x) + (2k+1)L_k(x) + kL_{k-1}(x)]L_k(y)\\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n-1} L_k(x)[(k+1)L_{k+1}(y) + (2k+1)L_k(y) + kL_{k-1}(y)] + x - y\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)L_{k+1}(x)L_k(y) + \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)L_k(x)L_{k+1}(y)\\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)L_k(x)L_{k+1}(y) - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)L_{k+1}(x)L_k(y) + x - y\\
&= nL_n(x)L_{n-1}(y) - L_1(x)L_0(y) + L_0(x)L_1(y) - nL_{n-1}(x)L_n(y) + x - y\\
&= n(L_n(x)L_{n-1}(y) - L_{n-1}(x)L_n(y))
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait.

3. Avec la question précédente, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k(x)L_k(y) = n\frac{L_n(x) - L_n(y)}{x-y}L_{n-1}(y) + n\frac{L_{n-1}(y) - L_{n-1}(x)}{x-y}L_n(y)$$

Il suffit alors de faire tendre y vers x pour obtenir le résultat.

4. Soient $x_1, \dots, x_m$ les zéros d'ordre impair de L_n avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$.

a) Si P n'est pas constant, il tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$, comme il ne s'annule pas on a $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$ (sinon on aurait un zéro avec le théorème des valeurs intermédiaires). On se ramène donc sur un intervalle borné sur lequel il ne peut pas changer de signe non plus car on aurait à nouveau un zéro. Il est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$. En factorisant L_n en tenant compte de ses zéros, on voit que $L_n(x) = P_1(x)P_2(x)$, où P_1 est de signe constant sur $\mathbb{R}$ et P_2 est un produit de facteurs de degré 1. En tenant compte du début de cette question et des zéros de degré pair, on voit que L_n se met sous la forme souhaitée.

b) $\star$ On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2L_n(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$ et la règle de Riemann donne la convergence de l'intégrale proposée.

$\star$ Intégrons par parties, en dérivant $x \mapsto Q(x)$ en $x \mapsto Q'(x)$. et en intégrant $x \mapsto L_n(x)\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{(-1)^n}{n!}f_n^{(n)}(x)$ en $x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!}f_n^{(n-1)}(x)$ qui est de la forme $x \mapsto xR(x)\mathrm{e}^{-x}$, où R est une fonction polynôme.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} xR(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$, on peut effectuer cette intégration directement avec la borne infinie et on trouve :

$$\int_0^{+\infty} L_n(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}Q'(x)f_n^{(n-1)}(x)\,dx$$

On recommence et au bout de n intégrations par parties, il vient :

$$\int_0^{+\infty} L_n(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}Q^{(n)}(x)f_n(x)\,dx = 0$$

puisque $Q^{(n)}(x) = 0$ (on a $\deg(Q) < n$).

c) Supposons que $m < n$. Il vient alors :

$$0 = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} L_n(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}dx = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)^2\mathrm{e}^{-x}dx$$

Or la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)^2e^{-x}$ est continue et positive, elle doit donc être nulle sur $\mathbb{R}^+$, ce qui est impossible. Par suite, L_n a nécessairement n zéros distincts.

Exercice 1.16.

On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}$$

1. On considère les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et définies par $\alpha_0 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_0 = 0$.

a) Étudier la monotonie des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l'infini.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

d) Montrer que les deux suites $\left(\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.

e) Que peut-on dire de la suite $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Comparaison asymptotique des suites.

f) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \ell\right| \leqslant \frac{1}{\beta_n\beta_{n+1}}$.

g) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n - \ell\beta_n)$.

h) Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n - \mu\beta_n)$ en fonction de la position de μ par rapport à ℓ.

2. Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de E.

a) Montrer qu'il existe deux réels λ et λ' tels que :

$$u_0 = \lambda\alpha_0 - \lambda'\beta_0 \text{ et } u_1 = \lambda\alpha_1 - \lambda'\beta_1.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\alpha_n - \lambda'\beta_n$.

c) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lambda' = \lambda\ell$.

Solution :

1. a) On montre dans un premier temps par une récurrence évidente que les suites $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ et $(\beta_n)_{n\geq 2}$ sont à termes strictement positifs. On vérifie alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = (4n+2)\alpha_n + \alpha_{n-1} - \alpha_n = (4n+1)\alpha_n + \alpha_{n-1} \geqslant 0$$

Ainsi, la suite (α_n) est croissante à partir du rang 1. On montre de même que la suite (β_n) est croissante.

b) Comme la suite (α_n) est croissante, soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$. Supposons par l'absurde que la suite (α_n) converge. La limite est alors strictement positive car $\alpha_n \geqslant \alpha_2 \geqslant 1$. On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4n+2 = (\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1})/\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est impossible car la suite $(4n+2)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. On procède de même pour la suite (β_n).

c) On montre cette propriété par récurrence sur n.

• lorsque $n=0$, on a bien $\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1=-1$.

• soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que la propriété annoncée soit vérifiée à l'ordre n. On a alors

$$\begin{aligned}\alpha_{n+2}\beta_{n+1}-\alpha_{n+1}\beta_{n+2} &= ((4n+6)\alpha_{n+1}+\alpha_n)\beta_{n+1}-\alpha_{n+1}((4n+6)\beta_{n+1}+\beta_n)\\ &=\alpha_n\beta_{n+1}-\alpha_{n+1}\beta_n=(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

On conclut à l'aide du principe de récurrence.

d) On montre les trois propriétés des suites adjacentes.

• on vérifie aisément que $\dfrac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}-\dfrac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}=\dfrac{(-1)^{2n+2}}{\beta_{2n}\beta_{2n+2}}$.

Ainsi, comme (β_n) tend vers $+\infty$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\dfrac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}-\dfrac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\Big)=0$.

• toujours en utilisant la relation de récurrence,

$$\frac{\alpha_{2n+2}}{\beta_{2n+2}}-\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}=\frac{((4(2n+1)+2)\alpha_{2n+1}+\alpha_{2n})\beta_{2n}-\alpha_{2n}((4(2n+1)+2)\beta_{2n+1}+\beta_{2n})}{\beta_{2n}\beta_{2n+2}}$$

$$\frac{\alpha_{2n+2}}{\beta_{2n+2}}-\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}=\frac{(8n+6)\big(\alpha_{2n+1}\beta_{2n}-\alpha_{2n}\beta_{2n+1}\big)}{\beta_{2n}\beta_{2n+2}}=-\frac{8n+6}{\beta_{2n}\beta_{2n+1}}<0$$

Ainsi, (α_{2n}/β_{2n}) est décroissante.

• on montre de manière analogue que $(\alpha_{2n+1}/\beta_{2n+1})$ est croissante.

e) Notons $u_n=\alpha_n/\beta_n$. Comme les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ. Ainsi, la suite (u_n) converge également vers ℓ.

f) Comme ℓ est la limite de deux suites adjacentes, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\leqslant\ell\leqslant\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\Big|\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}-\ell\Big|\leqslant\Big|\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}-\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\Big|=\frac{1}{\beta_{2n}\beta_{2n+1}}$$

On montre la même inégalité pour les entiers n impairs.

g) En utilisant l'inégalité précédente : $|\alpha_n-\ell\beta_n|\leqslant\dfrac{1}{\beta_{n+1}}$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n-\ell\beta_n)=0$$

h) Soit $\mu\in\mathbb{R}$. On écrit $(\alpha_n-\mu\beta_n)=(\alpha_n-\ell\beta_n)+(\ell-\mu)\beta_n$.

Si $\ell<\mu$, $\lim(\alpha_n-\mu\beta_n)=-\infty$; si $\ell>\mu$, $\lim(\alpha_n-\mu\beta_n)=+\infty$, le cas $\ell=\mu$ est déjà traité.

2. a) Comme $-\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0=-1$, d'après les formules de Cramer, le système proposé possède une unique solution, cette solution est d'ailleurs évidente :

$$(\lambda,\lambda')=(u_0,-u_1).$$

b) Le résultat est vrai pour $n=0$ et $n=1$, l'hérédité est une conséquence banale de la relation de récurrence de définition. On conclut par le principe de récurrence.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on écrit $u_n=\lambda(\alpha_n-\dfrac{\lambda'}{\lambda}\beta_n)$. Ainsi, d'après l'étude précédente, si $\lim u_n=0$, alors $\lambda'=\ell\lambda$.

Exercice 1.17.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=1$, $u_1=-2$ et la relation de récurrence : pour $n\geqslant 2$,

$$u_n=-2u_{n-1}+\Big(\frac{1}{n}-1\Big)u_{n-2}$$

1. Montrer que $|u_n|\leqslant v_n$ pour tout entier naturel n, où la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $v_0=1, v_1=2$ et, pour tout $n\geqslant 2$: $v_n=2v_{n-1}+v_{n-2}$.

2. Montrer qu'il existe des constantes A,B,a,b que l'on déterminera telles que $\forall\, n\in\mathbb{N}, v_n=Aa^n+Bb^n$. En déduire que pour tout entier positif n, on a :

$$|u_n|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}$$

3. Prouver que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} n u_n x^{n-1}$ sont absolument convergentes pour tout x appartenant à l'intervalle $I =]-1/(1+\sqrt{2}), 1/(1+\sqrt{2})[$.

4. Pour $x \in I$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$.

a) Soit $n \geqslant 2$; montrer pour tout couple $(t,h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, que :

$$\left|\frac{(t+h)^n - t^n}{h} - nt^{n-1}\right| \leqslant \frac{n(n-1)}{2}|h|\left(|h|+|t|\right)^{n-2}$$

b) Soit $x \in I$ et r tel que $|x| < r < 1/(1+\sqrt{2})$. Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)|u_n| r^n$ est convergente.

Montrer que pour tout $h \in]-(r-|x|), r-|x|[\setminus \{0\}$, on a :

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| \leqslant |h| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} |u_n| r^n.$$

En déduire que f est dérivable sur I et que $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$.

5. Montrer que pour tout $x \in I$, on a $(1+x)^2 f'(x) = -(2+x)f(x)$. Déterminer la fonction f.

Solution :

1. La propriété est déjà vérifiée pour $n=0$ et $n=1$. Soit $n \geqslant 2$, supposons que $|u_k| \leqslant v_k$ pour $0 \leqslant k < n$, il vient :

$$\begin{aligned}|u_n| &= |-2u_{n-1} + (\tfrac{1}{n}-1)u_{n-2}| \leqslant 2|u_{n-1}| + (1-\tfrac{1}{n})|u_{n-2}| \leqslant 2|u_{n-1}| + |u_{n-2}| \\ &\leqslant 2v_{n-1} + v_{n-2} = v_n\end{aligned}$$

2. La suite (v_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 - 2r - 1 = 0$. Ses racines sont $a = 1-\sqrt{2}$ et $b = 1+\sqrt{2}$, et par suite v_n est de la forme $Aa^n + Bb^n$. Pour déterminer A et B, il suffit de résoudre le système donné par les équations $v_0 = 1$ et $v_1 = 2$. On trouve finalement :

$$\begin{aligned}v_n &= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}\end{aligned}$$

On en déduit que $|u_n| \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}$, pour tout entier positif n.

3. Soit $x \in I$; on a $|u_n x^n| \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(|x|(1+\sqrt{2}))^n$. Comme $|x|(1+\sqrt{2}) < 1$, le théorème de comparaison des séries à termes positifs montre que la série définissant $f(x)$ est absolument convergente.

De même, on a $|n u_n x^{n-1}| \leqslant \frac{(1+\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} n(|x|(1+\sqrt{2}))^{n-1}$ et le théorème de comparaison permet encore de conclure, puisque l'on reconnaît dans la série majorante la série dérivée d'une série géométrique convergente.

4. Soit $x \in I$; avec la question précédente, on voit que les fonctions f et g sont bien définies.

a) Soit $n \geqslant 2$. Posons $\varphi : x \mapsto x^n$, on a par la formule de Taylor :

$$\left|\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} - \varphi'(t)\right| \leqslant \frac{|h|}{2} \sup_{x\in[t,t+h]} |\varphi''(x)|$$

soit ici : $\left|\frac{(t+h)^n - t^n}{h} - nt^{n-1}\right| \leqslant \frac{|h|}{2} n(n-1) \sup\limits_{x\in[t,t+h]} |x|^{n-2}$:

Donc :

$$\left|\frac{(t+h)^n - t^n}{h} - nt^{n-1}\right| \leqslant \frac{n(n-1)}{2}|h|\left(|h|+|t|\right)^{n-2}$$

b) Soit $x \in I$ et r tel que $|x| < r < \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$. La série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)|u_n|r^{n-2}$ est convergente car $0 < (1+\sqrt{2})r < 1$ et

$$n(n-1)|u_n|r^{n-2} \leqslant \frac{(1+\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} n(n-1)[(1+\sqrt{2})r]^{n-2}$$

On reconnaît alors le terme général d'une série dérivée seconde d'une série géométrique convergente.

Avec a), on obtient pour tout $h \in\,]-(r-|x|), r-|x|[\, \setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned}
|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)| &= |\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}| \\
&= |\sum_{n=2}^{+\infty} u_n [\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1}]| \\
&\leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} |u_n||h|(|h|+|x|)^{n-2} \\
&\leqslant |h| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} |u_n| r^{n-2}
\end{aligned}$$

Avec la définition de la dérivée, on voit qu'il suffit de faire tendre h vers 0 pour prouver que f est dérivable au point x, avec $f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n x^{n-1}$.

5. On a :

$$\begin{aligned}
(1+x)^2 f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) u_{n-1} x^n \\
&= u_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)u_{n+1} + 2n u_n + (n-1)u_{n-1}] x^n
\end{aligned}$$

Or $(n+1)u_{n+1} = -2(n+1)u_n - n u_{n-1}$, et donc :

$$(1+x^2)f'(x) = -2 + \sum_{n=1}^{+\infty} [-2u_n - u_{n-1}] x^n = -2 - 2(f(x)-1) - x f(x)$$

$$(1+x^2)f'(x) = -(x+2)f(x)$$

On obtient donc l'équation différentielle du premier ordre sur I ($-1 \notin I$) :

$$f'(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2} f(x) = -\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2} f(x) = [-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}] f(x)$$

D'où :

$$f(x) = C\exp(-\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}) = \frac{C}{x+1}\exp(\frac{1}{x+1})$$

Or, $f(0) = u_0 = 1$, d'où $C = \mathrm{e}^{-1}$ et par suite :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}\exp(\frac{1}{x+1} - 1) = \frac{1}{x+1}\exp(-\frac{x}{x+1})$$

Exercice 1.18.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles strictement positives.

On dit que f est logarithmiquement convexe si la fonction $\ln \circ f$ est convexe.

On admet le résultat suivant :

Soit α, β deux réels supérieurs à 1, tels que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $h, k : I \to \mathbb{R}$ telles que $\int_I |h(t)|dt$ et $\int_I |k(t)|dt$ convergent. Alors $\int_I |h(t)k(t)|dt$ converge et

$$\int_I |h(t)k(t)|dt \leqslant \Big(\int_I |h(t)|^\alpha dt\Big)^{1/\alpha} \times \Big(\int_I |k(t)|^\beta dt\Big)^{1/\beta}$$

1. Soit X une variable aléatoire possédant une densité telle que l'espérance $E(\mathrm{e}^{\lambda X})$ soit définie pour tout réel λ. Montrer que l'application $\varphi : \lambda \mapsto E(\mathrm{e}^{\lambda X})$ est logarithmiquement convexe.

2. Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe.

3. Caractérisation des fonctions logarithmiquement convexes.
On notera, pour tout réel $c > 0$, $\varphi_c : I \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto f(x)c^x$.

a) Montrer que si f est logaritmiquement convexe, alors pour tout $c > 0$, φ_c est convexe.

b) Soit $c > 0$. On suppose que φ_c est convexe. Montrer que pour tous $a, b \in I, \lambda \in [0, 1]$, il existe un réel α tel que

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a)\alpha^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(b)\alpha^{-\lambda}.$$

c) En choisissant judicieusement α dans la question précédente, montrer que si φ_c est convexe pour tout $c > 0$, alors f est logarithmiquement convexe.

4. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si f et g sont logarithmiquement convexes, alors $f+g$ est logarithmiquement convexe.

Solution :

1. On remarque que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda) > 0$.
Soient p, $q \in [0, 1]$ tels que $p + q = 1$ et λ, μ des réels. Alors, avec $p = \dfrac{1}{\alpha}$ et $q = \dfrac{1}{\beta}$ et en notant f une densité sur $\mathbb{R}$ de X :

$$\begin{aligned}[E(\mathrm{e}^{\lambda X})]^p.[E(\mathrm{e}^{\mu X}]^q &= \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\lambda x} f(x)\,dx\Big)^p \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mu x} f(x)\,dx\Big)^q \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{\lambda x} f(x))^p (\mathrm{e}^{\mu x} f(x))^q\,dx\end{aligned}$$

Soit : $[E(\mathrm{e}^{\lambda X})]^p.[E(\mathrm{e}^{\mu X}]^q \geqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{p\lambda x}\mathrm{e}^{q\mu x} f(x)\,dx = E(\mathrm{e}^{(\lambda p+\mu q)X})$

Ainsi $\varphi(\lambda)^p\varphi(\mu)^q \geqslant \varphi(\lambda p + \mu q)$ et le résultat en prenant le logarithme :

$$\ln\circ\varphi(p\lambda + q\mu) \leqslant p\ln\circ\varphi(\lambda) + q\ln\circ\varphi(\mu).$$

Donc φ est logarithmiquement convexe.

2. Soit f une fonction logarithmiquement convexe. On rappelle que la fonction exponentielle est croissante et convexe. Ainsi, pour tous $\lambda \in [0, 1]$ et x, $y \in I$,

$$\begin{aligned}\ln(f(\lambda x + (1-\lambda y))) &\leqslant \lambda\ln(f(x)) + (1-\lambda)\ln(f(y)) \\ f(\lambda x + (1-\lambda y)) &\leqslant \exp\{\lambda\ln(f(x)) + (1-\lambda)\ln(f(y))\} \\ &\leqslant \lambda\exp\{\ln f(x)\} + (1-\lambda)\exp\{\ln f(y)\} \\ &\leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est convexe.

3. a) On remarque que pour tout $x \in I$, $\ln(\varphi_c(x)) = \ln f(x) + x\ln c$. Ainsi, comme la fonction $\ln f$ est convexe et que les fonctions affines sont convexes, la fonction $\ln\circ\varphi_c$ est convexe. Donc la fonction φ_c est logarithmiquement convexe et d'après la question précédente, elle est convexe.

b) Soient $\lambda \in [0, 1]$, a, $b \in I$. On utilise la convexité de la fonction φ_c :

$$\varphi_c(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda\varphi_c(a) + (1-\lambda)\varphi_c(b)$$

Donc : $f(\lambda a + (1-\lambda)b)c^{\lambda a+(1-\lambda)b} \leqslant \lambda f(a)c^a + (1-\lambda)f(b)c^b$

Soit, en plaçant toutes les puissances de c à droite :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a)\alpha^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(b)\alpha^{-\lambda},$$

où on a posé $\alpha = c^{a-b}$.

c) Soit $\psi : \alpha \mapsto \lambda f(a)\alpha^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(b)\alpha^{-\lambda}$.

$$\begin{aligned}\psi'(\alpha) &= \lambda(1-\lambda)f(a)\alpha^{-\lambda} - \lambda(1-\lambda)f(b)\alpha^{-\lambda-1} \\ &= \lambda(1-\lambda)\alpha^{-\lambda-1}(\alpha f(a) - f(b))\end{aligned}$$

Ainsi ψ atteint son maximum en $\alpha = \dfrac{f(b)}{f(a)}$ et

$$\psi(\frac{f(b)}{f(a)}) = \lambda f(a)(\frac{f(b)}{f(a)})^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(b)(\frac{f(b)}{f(a)})^{-\lambda}$$

Soit : $\psi(\dfrac{f(b)}{f(a)}) = (\lambda + 1 - \lambda)f(a)^{\lambda}f(b)^{1-\lambda} = f(a)^{\lambda}f(b)^{1-\lambda}$

Soit, en reportant dans la majoration obtenue en b) :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant f(a)^{\lambda}f(b)^{1-\lambda}$$

Et donc :

$$\ln\circ f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda \ln\circ f(a) + (1-\lambda)\ln\circ f(b)$$

Ceci étant vrai pour tous a, $b \in I$, $\lambda \in [0,1]$, la fonction $\ln\circ f$ est bien convexe.

4. Pour toute fonction f de I dans $\mathbb{R}_+^{\star}$, notons $\varphi_{f,c} : I \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi_{f,c}(x) = f(x)c^x$.

Soient f, g deux fonctions logarithmiquement convexes. Alors, pour tout $c > 0$, $\varphi_{f,c}$ et $\varphi_{g,c}$ sont convexes. Donc, pour tout $c > 0$, $\varphi_{f,c} + \varphi_{g,c} = \varphi_{f+g,c}$ est convexe. Ainsi, d'après la question précédente, $f+g$ est logarithmiquement convexe.

Exercice 1.19.

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$, où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.
Dans tout l'exercice, U est un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^2$, et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur U. On note, pour tout $a \in U$, ∇f_a le gradient de f au point a.

[On rappelle qu'une partie U de $\mathbb{R}^2$ est convexe si

$$\forall\,(x,y) \in U^2, \forall\,\lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)y \in U.$$

De même une fonction f définie sur U est convexe si

$$\forall (x,y) \in U^2, \forall\,\lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)]$$

1. Soit $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans U et $\varphi_{x,y}$ définie sur $[0,1]$ par : $\varphi_{x,y}(t) = f(x + t(y-x))$.
Montrer que $\varphi_{x,y}$ est de classe C^1 et montrer que $\varphi'_{x,y}(t) = \langle \nabla f_{x+t(y-x)}, y - x\rangle$ pour tout $t \in [0,1]$.

2. On suppose que f est convexe sur U.

a) Montrer que pour tout $(x,y) \in U^2$, $\varphi_{x,y}$ est convexe. En déduire que la fonction $\varphi'_{x,y}$ est croissante.

b) En déduire que $\forall (x,y) \in U^2 : f(y) - f(x) \geqslant \langle \nabla f_x, y - x\rangle \qquad (1).$

3. Réciproquement on suppose que f vérifie la relation (1) ci-dessus. Montrer que f est convexe.

4. Soit f convexe sur U.

a) Montrer que si f présente en $x_0 \in U$ un minimum relatif, alors f présente en x_0 un minimum global.

b) Montrer que si l'ensemble des points où f admet un minimum est non vide, alors cet ensemble est une partie convexe de U.

Solution :

1. La fonction f étant de classe C^1 il en est de même pour φ par composition de fonctions de classe C^1. De plus comme

$$\varphi_{x,y}(t) = f(x + t(y-x)) = f(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2))$$

Il vient, par dérivation d'une composée :

$$\begin{aligned}\varphi'_{x,y}(t) &= (y_1 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x + t(y-x)) + (y_2 - x_2)\frac{\partial f}{\partial y}(x + t(y-x))\\ &= \langle \nabla f_{x+t(y-x)}, y - x\rangle\end{aligned}$$

2. On suppose de plus f convexe.

a) Soit $(t_1, t_2, \lambda) \in [0,1]^3$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{x,y}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)(y-x)) \\
&= f(\lambda(x + t_1(y-x)) + (1-\lambda)(x + t_2(y-x))) \\
&\leqslant \lambda f(x + t_1(y-x)) + (1-\lambda) f(x + t_2(y-x)) \\
&\leqslant \lambda \varphi_{x,y}(t_1) + (1-\lambda)\varphi_{x,y}(t_2)
\end{aligned}$$

Ceci montre la convexité de $\varphi_{x,y}$ sur $[0,1]$, pour tout choix de x et y dans U.

La fonction $\varphi_{x,y}$ étant de plus de classe C^1 sur $[0,1]$, on sait alors que sa dérivée est croissante sur cet intervalle.

b) Du théorème des accroissements finis et de la croissance de $\varphi_{x,y}$, on déduit que : $\varphi_{x,y}(1) - \varphi_{x,y}(0) \geqslant \varphi'_{x,y}(0)$. C'est-à-dire, compte tenu du résultat de la première question :

$$\forall\, x, y \in U, f(y) - f(x) \geqslant \langle \nabla f_x, y - x \rangle \quad (1)$$

3. Soit $x, y \in U$ et $\lambda \in [0,1]$. Posons $z = \lambda y + (1-\lambda)x = x + \lambda(y-x)$.

⋆ On a : $f(z) - f(x) = \varphi_{x,y}(\lambda) - \varphi_{x,y}(0)$, donc il existe $c \in\,]0, \lambda[$ tel que :

$$f(z) - f(x) = \lambda \varphi'_{x,y}(c)$$

⋆ De même il existe $d \in\,]\lambda, 1[$ tel que :

$$f(y) - f(z) = \varphi_{x,y}(1) - \varphi_{x,y}(\lambda) = (1-\lambda)\varphi'_{x,y}(d)$$

On a donc $c \leqslant d$ et la fonction φ' étant croissante, on en déduit :

$$(1-\lambda)(f(z) - f(x)) \leqslant \lambda(f(y) - f(z))$$

Soit $f(z) \leqslant \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)$, c'est-à-dire :

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leqslant \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)$$

et f est bien convexe.

4. a) Si f présente au point x_0 un minimum relatif, alors le gradient de f en x_0 est nul. Comme f est convexe, d'après ce qui précède :

$$\forall\, x \in U, f(x) - f(x_0) \geqslant \langle \nabla f_{x_0}, x - x_0 \rangle = 0,$$

ce qui montre que ce minimum est en fait global.

b) Si x_1 et x_2 sont deux points où f admet un minimum (local, donc global), on a $f(x_1) = f(x_2)$, De plus, f étant convexe,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = f(x_1)$$

Comme, par définition d'un minimum, on a $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant f(x_1)$, on a en fait égalité et f présente aussi en $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ un minimum, ce qui donne le résultat demandé.

2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 1$) est dite *à diagonale propre* si ses valeurs propres (la matrice M étant considérée comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) sont toutes réelles, et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre. Une matrice A est antisymétrique si ${}^tA = -A$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ n'est pas vide.

2. La matrice antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre ?

3. Soit A une matrice antisymétrique à diagonale propre.

   a) Quelles sont ses valeurs propres ?

   b) Montrer qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0$.

   c) Calculer $({}^tAA)^p$. En remarquant que ${}^tAA$ est une matrice symétrique, montrer que $A = 0$.

4. Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques. Déterminer la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

5. a) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset \mathcal{E}_n$. Montrer que $\dim F \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$ (on pourra utiliser $\dim(F + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

   b) Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

Solution :

1. L'ensemble $\mathcal{E}_n$ contient les matrices diagonales et les matrices triangulaires.

2. Si la matrice A était à diagonale propre, comme elle est de diagonale nulle, son unique valeur propre serait 0. Or $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A^2 admet comme valeurs propres 0 et -1, et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 + I = (A - iI)(A + iI)$ n'est pas inversible. Une des deux matrices $(A - iI)$ ou $(A + iI)$ n'est pas inversible et A possède au moins une valeur propre complexe non nulle : elle n'est pas à diagonale propre.

3. a) La diagonale d'une matrice antisymétrique n'est formée que de 0. La seule valeur propre de A est donc 0.

   b) La matrice A admet un polynôme annulateur (pour p assez grand, la famille $(I, A, \ldots, A^p)$ est liée). Sur $\mathbb{C}$, ce polynôme se factorise sous la forme

$$P(X) = \alpha \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

Si λ_i n'est pas valeur propre de A, la matrice $A-\lambda_i I$ est inversible et le polynôme $\dfrac{P(X)}{(X-\lambda_i)^{m_i}}$ reste annulateur de A. En choisissant P de degré minimal, toute racine de P est donc valeur propre de A, Comme 0 est l'unique valeur propre de A, le polynôme P est de la forme X^p.

c) On a ${}^tAA=-A^2$; donc $({}^tAA)^p=0$. La matrice $B={}^tAA$ est symétrique réelle, donc diagonalisable. Comme $B^p=0$, sa seule valeur propre est 0 : elle est semblable donc égale à la matrice nulle. Ainsi $A^2=0$ et ${}^tAA=0$.

Or $\operatorname{Ker} A=\operatorname{Ker}({}^tAA)$. En effet $\operatorname{Ker} A\subseteq \operatorname{Ker}({}^tAA)$ est banal et si ${}^tAAX=0$, alors $||AX||^2={}^tX{}^tAAX=0$, donc $X\in\operatorname{Ker} A$. Comme $\operatorname{Ker}{}^tAA=E$, on a $\operatorname{Ker} A=E$ et $A=0$.

4. On sait que $\dim\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=\dfrac{n(n-1)}{2}$

5. a) On a $F+\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\dim(F+\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))\leqslant n^2$, soit, par le résultat de la question 3. :

$$n^2\geqslant\dim F+\dim\mathcal{A}_n(\mathbb{R})-\dim(F\cap\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))=\dim F+\dim\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Donc,

$$\dim F\leqslant n^2-\dim\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

b) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Ses éléments sont tous à diagonale propre et comme on ne peut pas faire mieux (résultat a) :

la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F\subset\mathcal{E}_n$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2.2.

On désigne par $E=C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. À tout f de E, on associe l'application $g=\Phi(f)$ définie par : $g(0)=f(0)$ et pour tout réel x non nul,

$$g(x)=\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}f(t)dt$$

1. a) Vérifier que la fonction g ainsi définie est un élément de E, ce qui permet d'envisager Φ comme une application de E dans E.

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, justifier l'égalité : $g(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}f(xu)du$. Montrer que g est une fonction paire et simplifier l'expression de g lorsque f est une fonction paire ou lorsque f est une fonction impaire.

2. a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que Φ n'est pas injective et préciser son noyau.

c) Soit $f\in E$ et $g=\Phi(f)$. Montrer que g est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$ et préciser $g'(x)$.

d) Montrer que Φ n'est pas surjective.

3. Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$. On souhaite déterminer $E_\lambda=\operatorname{Ker}(\Phi-\lambda Id_E)$.

a) Soit $f\in E$ vérifiant $\Phi(f)=\lambda f$. Montrer que f est paire, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et telle que : $\forall\,x\in\mathbb{R}^*,\lambda xf'(x)=(1-\lambda)f(x)$.

b) En déduire l'expression de $f(x)$ pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $x\in\mathbb{R}_-^*$.

c) En déduire la forme possible de f selon $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

d) Conclure en précisant E_λ selon $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

Solution :

1. a) La continuité de f prouve la dérivabilité, donc la continuité, de g sur $\mathbb{R}^*$. En zéro :

$$|g(x)-g(0)|=\Big|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}(f(t)-f(0))dt\Big|\leqslant\frac{1}{2|x|}|2x|\sup_{t\in[-x;x]}|f(t)-f(0)|$$

$$|g(x) - g(0)| \leqslant \sup_{t \in [-x;x]} |f(t) - f(0)|.$$

Cette dernière expression, du fait de la continuité de f en zéro, a pour limite zéro lorsque x tend vers zéro. Cela prouve la continuité de g en zéro. Ainsi g est continue sur $\mathbb{R}$ et elle appartient bien à E.

b) On vérifie tout d'abord le résultat pour $x = 0$. Si x est non nul, le changement de variable $t = xu$ permet de répondre à la question.
La parité de g est évidente sur sa définition.

Quand f est paire, la relation de Chasles permet d'obtenir : $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xu)du$, et, lorsque f est impaire, g est la fonction nulle.

2. a) On a déjà vu que Φ allait de E dans E. Sa linéarité provient de celle de l'intégration.

b) On a vu dans la première question que toute fonction f impaire appartenait au noyau de Φ, donc cette dernière n'est pas injective. En outre :
$f \in \operatorname{Ker}\Phi \iff g = 0 \iff [\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = 0]$

$$\iff [f(0) = 0,\ \text{et } \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \int_{-x}^{x} f(t)dt = 0]$$

En dérivant la dernière relation, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) - (-1)f(-x) = 0$, ce qui prouve que f est impaire (on a aussi $f(0) = 0$). On a donc la réciproque de la remarque précédente. Ainsi, $\operatorname{Ker}\Phi$ est l'ensemble des fonctions impaires.

c) La dérivabilité de g a déjà été évoquée. Si x est non nul :

$$g'(x) = -\frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} f(t)dt + \frac{1}{2x}(f(x) + f(-x))$$

d) Nous venons de voir que $\operatorname{Im}\Phi$ était incluse dans l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Comme toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ne sont pas dans ce cas (par exemple $x \mapsto |x-1|$ n'est pas dérivable en 1), Φ n'est pas surjective.

3. a) Soit $f \in E$ vérifiant $\Phi(f) = \lambda f$. Avec les notations précédentes, λ n'étant pas nul, on a : $f = \dfrac{1}{\lambda} g$. Ainsi, de la parité et de la dérivabilité de g, découlent celles de f. En dérivant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1}{\lambda}g'(x) = -\frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} f(t)dt + \frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{2x}(f(x) + f(-x))$$

Ce qui donne, en multipliant par λx et en utilisant la parité de f :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \lambda x f'(x) = -g(x) + f(x) = -\lambda f(x) + f(x) = (1-\lambda)f(x)$$

b) Ce qui précède s'écrit encore : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{1-\lambda}{\lambda x} f(x)$.

Comme $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}^{*-}$ les solutions sont de la forme :

$$f(x) = \alpha \exp\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln|x|\right)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est quelconque. Bilan :

$$\exists\, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = \beta(-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

et :

$$\exists\, \gamma \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \gamma x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

c) Comme on a vu que f se devait d'être paire, on a nécessairement $\beta = \gamma$. On doit donc avoir : $\exists\, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \beta|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

Pour que f soit continue en zéro, il faut, en outre, qu'elle admette une limite à droite (finie) en ce point (étant paire, elle aura la même à gauche).
C'est le cas si $\beta = 0$ ou $\lambda = 1$ car f est constante égale à β.
Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ (dont le signe dépend du signe de β), enfin, si $0 < \lambda < 1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, donc en posant $f(0) = 0$, f est continue en zéro.

d) Faisons la synthèse de ces différents résultats.

→ Si $\lambda = 1$, on a E_1 égal à l'ensemble des fonctions constantes, donc 1 est valeur propre de Φ.
→ Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, nous avons vu que $E_\lambda = \{0\}$, donc λ n'est pas valeur propre de Φ.
→ Supposons $0 < \lambda < 1$. Considérons la fonction f définie par $f(0) = 0$ et :

$$f(x) = |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

En remplaçant dans l'expression initiale, on constate que $\Phi(f) = \lambda f$, ce qui prouve que f appartient à E_λ, de même que toutes les fonctions qui lui sont colinéaires. Ainsi, E_λ est la droite vectorielle de base f et λ est valeur propre de Φ.

Exercice 2.3.

Pour n entier naturel, on note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On identifiera polynômes et fonctions polynomiales associées.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes :

$$U_n(X) = (X^2 - 1)^n \text{ et } L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \times U_n^{(n)}(X)$$

où $P^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ du polynôme P, (pour $n = 1$, on notera aussi $P^{(1)} = P'$).
Pour tout polynôme P, on pose :

$$\mathcal{L}(P)(X) = ((X^2 - 1)P')'$$

1. a) Calculer L_0, L_1 et L_2.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
   c) En déduire que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.

2. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

3. a) Montrer que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   b) Montrer que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle \mathcal{L}(P), Q\rangle = \langle P, \mathcal{L}(Q)\rangle$.

4. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(L_n) = n(n+1)L_n$.
   a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $(L_n)_{n\in[\![0,m]\!]}$ est une famille de polynômes orthogonaux.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

5. Montrer que L_{n+1} possède exactement $n+1$ racines réelles distinctes, toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$ (on pourra supposer que L_{n+1} change de signe seulement en $a_1, \ldots, a_r$ de $]-1, 1[$ et que $r < n+1$ pour obtenir une contradiction).

Solution :

1. a) On remarque que $L_0 = 1, L_1 = X$ et $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.
   b) Comme $\deg(U_n) = 2n$, $\deg(L_n) = 2n - n = n$.

Le coefficient dominant de L_n est obtenu par dérivations successives du terme X^{2n}. Ainsi, il vaut $\dfrac{1}{2^n n!} \times \dfrac{(2n!)}{n!} = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n}{n}$.

   c) La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ à degrés échelonnés du degré 0 au degré n. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Il s'agit bien d'une forme bilinéaire définie positive, les fonctions polynomiales étant des fonctions continues sur $[-1, 1]$, ce qui assure que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(x)\, dx = 0$ entraîne que P admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

3. a) $\mathcal{L}$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ par linéarité de l'opérateur de dérivation.

b) Soient P, $Q \in \mathbb{R}[X]$.

D'après la formule d'intégration par parties, $(x^2-1)\dfrac{dP}{dx}(x)$ étant nul en -1 et 1 :

$$\langle \mathcal{L}(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}[(x^2-1)\frac{dP}{dx}(x)]Q(x)dx = \int_{-1}^{1}[(x^2-1)\frac{dP}{dx}(x)]\frac{dQ}{dx}(x)dx$$

Sous cette forme, la symétrie des rôles de P et Q est claire et ainsi :

$$\langle \mathcal{L}(P), Q\rangle = \langle \mathcal{L}(Q), P\rangle$$

4. a) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \neq n$. Alors supposons sans restriction que $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}\langle L_n, L_m\rangle &= \frac{1}{n(n+1)}\langle \mathcal{L}(L_n), L_m\rangle = \frac{1}{n(n+1)}\langle L_n, \mathcal{L}(L_m)\rangle \\ &= \frac{m(m+1)}{n(n+1)}\langle L_n, L_m\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, $(n(n+1)-m(m+1))\langle L_n, L_m\rangle = 0$. Or, $n(n+1)-m(m+1) \neq 0$, car la fonction $x \mapsto x(x+1)$ est injective sur $\mathbb{N}$. D'où $\langle L_n, L_m\rangle = 0$.

b) Comme $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout Q polynôme de degré inférieur ou égal à n, il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$. Ainsi,

$$\langle Q, L_{n+1}\rangle = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle L_k, L_{n+1}\rangle = 0$$

c) On a déjà montré que $(L_0, \ldots, L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

d) Posons $Q(X) = \prod\limits_{i=1}^{r}(X-a_i)$. Comme $\deg(L_{n+1}) = n+1$, on a $r \leqslant n+1$. De plus, le polynôme QL_{n+1} garde un signe constant sur $[-1, 1]$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)L_{n+1}(x)\,dx \neq 0$. Comme $L_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^{\perp}$ et $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on en déduit que Q est de degré $n+1$.

Ainsi, $r = n+1$ et L change exactement $n+1$ fois de signe sur $]-1, 1[$.

Exercice 2.4.

Étude matricielle de la lettre C.

On considère la matrice $C \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ la base canonique de $\mathbb{R}^7$ et c l'endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ dont la matrice dans la base canonique est C. Selon l'usage, on identifie les matrices colonnes (à 7 lignes à coefficients réels) à des vecteurs de $\mathbb{R}^7$. On note $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ les vecteurs colonnes de la matrice C.

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de c, ainsi que le rang de c.

2. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^7$ engendré par les trois premiers vecteurs colonnes f_1, f_2, f_3 de la matrice C.

a) Montrer que F est stable par c.

b) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de F et déterminer la matrice Φ dans cette base de l'endomorphisme φ de F induit par c.

c) Pourquoi 1 est-il valeur propre de Φ ?

d) Montrer que Φ admet 3 valeurs propres réelles distinctes que l'on déterminera.

e) La matrice Φ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

3. Déduire des questions précédentes le spectre de C et les dimensions des sous-espaces propres associés. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice diagonale semblable à C.

Solution :

1. Comme $f_2 = f_5$, $f_3 = f_4$ et $f_6 = f_7 = 0$, le rang de c est le même que celui de la famille (f_1, f_2, f_3) qui est égal à trois. Comme cette famille engendre l'image de c, elle en constitue une base. En outre, d'après le théorème du rang, le noyau de c est de dimension 4. D'après les remarques liminaires, il a pour base la famille $(e_2 - e_5, e_3 - e_4, e_6, e_7)$.

2. a) On a : $F = \operatorname{Im} c = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.
On a également : $c(f_1) = (2, 1, 0, 0, 0, 1, 2) = f_2 + 2f_3 \in F$ et $c(f_2) = f_2 \in F$ et $c(f_3) = f_1 \in F$. Ainsi, F est stable par c.

b) Le fait que (f_1, f_2, f_3) est une base de F a déjà été remarqué. On note $\varphi = c_{|F}$. Les calculs précédents permettent d'écrire la matrice associée à Φ dans la base proposée :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On a $c(f_2) = f_2$, donc 1 est élément du spectre de Φ.

d) On cherche les réels λ tels qu'il existe un triplet $u = (x, y, z)$ non nul appartenant à F tel que $\varphi(u) = \lambda u$. Comme φ est bijective (d'après le rang de c), nous savons déjà que zéro ne sera pas valeur propre de φ. Supposons $\lambda \neq 1$. Le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} z = \lambda x \\ x + y = \lambda y \\ 2x = \lambda z \end{cases}, \text{ qui équivaut à : } \begin{cases} z = \dfrac{\lambda^2}{2} z \\ x = (\lambda - 1) y \\ 2x = \dfrac{\lambda}{2} z \end{cases}$$

Il est clair que si λ est différent de $\sqrt{2}$ et de $-\sqrt{2}$, la seule solution est $u = 0$ et λ n'est pas valeur propre.
Si $\lambda = \sqrt{2}$, le système devient : $z = \sqrt{2}x, y = (\sqrt{2} + 1)x$. Donc $\sqrt{2}$ est valeur propre de φ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle de base $(1, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$. De façon analogue, $-\sqrt{2}$ est valeur propre de φ associée au sous-espace propre de base $(1, 1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

e) La matrice Φ, étant d'ordre trois et possédant trois valeurs propres, est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

3. D'après ce qui précède, les valeurs propres de C sont $0, 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. Les dimensions des sous-espaces propres associés sont : 4 pour la valeur propre zéro (le sous-espace propre est le noyau), 1 pour chacune des trois autres valeurs propres. La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égale à 7, la matrice C est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Une matrice diagonale semblable à C sera, par exemple, de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2.5.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. On note id l'endomorphisme identité de E.

1. On suppose dans cette question que u est diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ l'ensemble de ses valeurs propres.
Montrer que le polynôme $m(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)$ est annulateur de u.

2. Soit f et g deux endomorphismes de E. En considérant la restriction de f à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$, montrer que :

$$\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g$$

On suppose dans la suite de l'exercice qu'il existe un polynôme

$$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)$$

annulateur de u, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont des réels distincts.

3. a) Montrer que $n \leqslant \sum_{j=1}^{k} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda_j id)$.

b) En déduire que l'endomorphisme u est diagonalisable.

4. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques telles que $A^3 + A^2 + A + I = 0$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution :

1. L'endomorphisme u étant diagonalisable, on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Supposons que e_l soit associé à la valeur propre λ_l. Par commutation, on a :

$$m(u)(e_l) = \Big[\prod_{j \neq l} (u - \lambda_j id)\Big] \circ (u - \lambda_l id)(e_l) = 0$$

Ainsi l'endomorphisme $m(u)$ s'annule sur une base de E : il est identiquement nul.

2. Notons $\widetilde{f}$ la restriction de f à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$. Ainsi $\widetilde{f} : \mathrm{Ker}(g \circ f) \to E$, et

$$\mathrm{Ker}\, \widetilde{f} = \{x \in \mathrm{Ker}(g \circ f) / f(x) = 0\} \subset \mathrm{Ker}\, f$$

$$\mathrm{Im}\, \widetilde{f} = \{f(x) / g(f(x)) = 0\} \subset \mathrm{Ker}\, g$$

Le théorème du rang permet d'affirmer que

$$\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) = \dim \mathrm{Ker}\, \widetilde{f} + \dim \mathrm{Im}\, \widetilde{f} \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g$$

3. a) La relation précédente se généralise par récurrence à un nombre quelconque d'endomorphismes. Le polynôme P étant annulateur de u, il vient

$$n = \dim E = \dim \mathrm{Ker}\, P(u) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda_j id)$$

b) Des sous-espaces propres associés a un même endomorphisme étant toujours en somme directe, on a :

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j id) = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j id)$$

Donc :

$$n \leqslant \sum_{j=1}^{k} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda_j id) = \dim \Big(\bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j id)\Big) \leqslant n$$

On a donc égalité, ce qui montre que u est diagonalisable.

4. Le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ est annulateur de A. Sur $\mathbb{C}$, on peut écrire $P(X) = (X+1)(X+i)(X-i)$. Ainsi la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Or la matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $\pm i$ ne sont pas valeurs propres de A ce qui entraîne que $A + iI$ et $A - iI$ sont inversibles. Donc $A + I = 0$, *i.e.* $A = -I$.

Exercice 2.6.

Soit n un entier supérieur ou égal à Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour tout x de E on pose : $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

1. a) L'application f est-elle un endomorphisme de E ?

b) L'application f est-elle injective, surjective ?

c) L'application f est-elle un endomorphisme symétrique de E ?

d) Caractériser les bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ telles que f soit un projecteur.

2. a) Montrer que les valeurs propres de f sont strictement positives.

b) Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique s de E à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ f)^{-1}$.

c) Montrer que $\big(s(e_1), s(e_2), \dots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Solution :

1. a) La linéarité de f résulte de la linéarité à gauche du produit scalaire et des propriétés du calcul vectoriel. D'autre part f est clairement à valeurs dans E, donc f est un endomorphisme de E.

b) Si $f(x) = 0$, on a : $\forall\, k, \langle x, e_k\rangle = 0$ (car $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E), ce qui prouve que x est orthogonal à une base de E, donc à tout vecteur de E, et en particulier à x. Ainsi $\|x\|^2 = 0$ et $x = 0$.
Ceci prouve que f est injective, donc est bijective, puisque f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

c) Pour tous vecteurs x et y, on a :

$$\langle f(x), y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle e_k, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k\rangle\langle e_k, x\rangle = \langle f(y), x\rangle$$

Ainsi, f est un automorphisme symétrique.

d) Comme f est un automorphisme, f est un projecteur si, et seulement si, $f = id$.

$\star$ Si $f = id$, alors $\forall\, x \in E, x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$.

En particulier, pour tout indice j, $e_j = \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, e_k\rangle e_k$ et l'unicité de l'écriture dans une base donne $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$, ce qui prouve que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée.

$\star$ Réciproquement si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, alors :

$\forall\, x \in E, x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$ et $f = id$.

$$f \text{ projecteur} \iff (e_1, \dots, e_n) \text{ orthonormée}$$

2. a) Si λ est une valeur propre de f et x un vecteur propre associé, on a :

$$\lambda\|x\|^2 = \langle f(x), x\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 > 0 \text{ (car } x \neq 0)$$

Donc $\lambda > 0$.

b) $s = (s \circ f)^{-1}$ équivaut à $s \circ s = f^{-1}$. Puisque f est un endomorphisme symétrique, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
On a : $M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ et on peut donc considérer l'endomorphisme s tel que $M_{\mathcal{B}}(s) = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_n^{-1/2})$.
Par construction même, $s \circ s = f^{-1}$, s est un automorphisme et s est symétrique, donc s convient.

c) Pour tout couple (i, j), on a : $\langle s(e_i), s(e_j)\rangle = \langle e_i, s \circ s(e_j)\rangle = \langle e_i, f^{-1}(e_j)\rangle$.

Or : $e_j = f(f^{-1}(e_j)) = \sum_{i=1}^{n} \langle f^{-1}(e_j), e_i\rangle e_i$, d'où : $\langle f^{-1}(e_j), e_i\rangle = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker).

Ainsi $\langle s(e_i), s(e_j)\rangle = \delta_{i,j}$ et donc $\big(s(e_1), s(e_2), \dots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 2.7.

1. Dans cette question, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E et l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques.

2. Dans cette question, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. La droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ est notée $\mathcal{D}$ et le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$ est noté $\mathcal{P}$.

a) Montrer que $\mathcal{D} \oplus \mathcal{P} = E$.

b) Déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

3. Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et p est un projecteur de E.

a) Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors : $\forall\, x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

b) Réciproquement, on suppose que : $\forall\, x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

i) Soit $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$, avec $y \neq 0$. En considérant le vecteur $x + \lambda y$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), montrer que x et y sont orthogonaux.

ii) En déduire que p est un projecteur orthogonal.

Solution :

1. Le calcul prouve que $M^2 = M$, ce qui établit que f est un projecteur. Ses éléments caractéristiques sont son noyau et son image, c'est-à-dire :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1 - 2e_2)$$

2. a) Comme la somme des dimensions de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ vaut celle de E, il suffit de montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre, ce qui se vérifie facilement. On la notera $\mathcal{B}'$. C'est donc une base de E.

b) Utilisons la base $\mathcal{B}'$.

On commence par donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, ce qui est immédiat :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis on utilise la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d'où l'on déduit : $P^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -7 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

et la matrice cherchée $M_{\mathcal{B}}(f) = PDP^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

3. a) On suppose que p est le projecteur orthogonal sur F, sous-espace vectoriel de E. On a alors, pour tout x de E :

$$x = p(x) + (x - p(x)) \qquad \text{donc} \qquad \|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$$

en raison de l'orthogonalité de $p(x)$ à $x - p(x)$. Cela prouve bien que : $\|x\| \geqslant \|p(x)\|$.

b) Réciproquement, on suppose que : $\forall\, x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

i) Soit $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \neq 0 \in \operatorname{Ker} p$. On a :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \|p(x + \lambda y)\| \leqslant \|x + \lambda y\|$$

ou encore :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$$

soit, en élevant au carré :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\big(\|y\|^2\lambda + 2(x|y)\big) \geqslant 0$$

Ce trinôme du second degré en λ ne peut être de signe constant que si ses deux racines 0 et $-2\dfrac{(x|y)}{\|y\|^2}$ sont égales, ce qui donne l'orthogonalité de y à x.

Ayant montré que tout vecteur de $\operatorname{Ker} p$ est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Im} p$, on en déduit que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 2.8.

Soit n un entier $\geqslant 2$. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, alors $a_{i,j} \geqslant 0$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$;

ii) si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$.

Ces matrices sont dites stochastiques.

1. a) $\mathcal{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

b) Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}$ est un élément de $\mathcal{S}$.

c) Soit $A \in \mathcal{S}$ inversible. Son inverse A^{-1} est-il élément de $\mathcal{S}$?

2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
Pour σ permutation de $[\![1,n]\!]$, on définit l'endomorphisme f_σ de E par : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
On note A_σ la matrice de f_σ dans la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer que A_σ appartient à $\mathcal{S}$.

b) Montrer que A_σ est inversible et que A_σ^{-1} est élément de $\mathcal{S}$.

c) Que peut-on dire des valeurs propres (*a priori* complexes) de A_σ ?

3. Dans cette question, soit A un élément de $\mathcal{S}$ inversible tel que son inverse appartiennent à $\mathcal{S}$. Montrer qu'il existe une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ telle que $A = A_\sigma$.

Solution :

1. a) $\mathcal{S}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'il ne contient pas la matrice nulle.

b) Soit $A, B \in \mathcal{S}$. Alors, avec les notations habituelles :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geqslant 0, \text{ et } AB(U) = AU = U$$

D'où la conclusion.

c) La réponse est en général négative. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est stochastique inversible et son inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ n'est pas stochastique.

2. a) La matrice A_σ s'appelle matrice de permutation : chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un seul 1, les autres éléments étant nuls et deux 1 ne peuvent se trouver sur une même colonne. On a alors clairement $A_\sigma \in \mathcal{S}$

b) On remarque que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$, ce qui montre que le produit de deux matrices de permutation est une matrice de permutation. Ainsi $f_\sigma^{-1} = f_{\sigma^{-1}} \in \mathcal{S}$.

c) Le groupe des permutations étant fini (de cardinal $n!$), il existe $p > q$ tels que $\sigma^p = \sigma^q$, soit $\sigma^{p-q} = Id$. Donc, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $A_\sigma^r = I$.
Ainsi, si λ est valeur propre de A_σ, $\lambda^r = 1$ et λ est une racine r-ième de l'unité, donc un nombre complexe de module 1.

3. Soient A, B deux éléments de $\mathcal{S}$ tels que $BA = I$. On note $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$. On a alors :

$$\text{pour } i \neq j,\ \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} = 0, \text{ et } \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i} = 1$$

$\rightarrow$ Les éléments de A et B étant positifs, la première relation donne pour tout $i \neq j$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $b_{i,k}a_{k,j} = 0$.
$\rightarrow$ Soit k fixé. Il existe $i_k \in [\![1,n]\!]$ tel que $b_{i_k,k} \neq 0$ (autrement B ne serait pas inversible). Ainsi, pour tout $j \neq i_k$, on a : $a_{k,j} = 0$.

Comme $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j} = 1$, il vient $a_{k,i_k} = 1$. Cet indice i_k est unique (autrement A possèderait deux 1 sur sa ligne k et ne serait pas stochastique).

On définit ainsi une application $i \rightarrow i_k$ injective de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, donc bijective, c'est-à-dire une permutation.

Ainsi, la matrice A est une matrice de permutation tout comme son inverse.

Exercice 2.9.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note respectivement a et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices A et J.

1. a) Calculer J^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) En déduire que $A^n = I + \dfrac{4^n - 1}{3} J$, où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

2. Montrer que a admet deux valeurs propres réelles λ et μ avec $\lambda < \mu$.

3. a) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $a^n = \lambda^n p + \mu^n q$.

b) Montrer que p et q sont deux projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.

4. Déterminer les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$, combinaisons linéaires de p et q tels que $h^2 = h \circ h = a$.

5. Montrer qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q et qui est tel que $h^2 = a$.

Solution :

1. a) Par calcul, $J^2 = 3J$ et par récurrence, $J^n = 3^{n-1}J$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On remarque que $A = I + J$. Comme I et J commutent, la formule du binôme de Newton donne :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k = I + J \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} = I + \frac{4^n - 1}{3} J$$

2. a) Comme $J^2 = 3J$, les valeurs propres possibles de J sont 0 et 3 ; de plus $\mathrm{rg}(j) = 1$, donc $\dim \mathrm{Ker}(j) = 2$. Ce noyau est engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

La matrice J symétrique réelle est diagonalisable, tout comme la matrice A. La matrice $A = I + J$ admet comme valeurs propres 1 et 4, des vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ étant $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et un vecteur propre associé à $\mu = 4$ étant $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. a) On sait que $A^n = I + \dfrac{4^n - 1}{3} J = I - \dfrac{1}{3} J + \dfrac{4^n}{3} J$. On pose donc p l'endomorphisme canoniquement associé à $I - \dfrac{1}{3} J$ et q celui canoniquement associé à $\dfrac{4^n}{3} J$.

D'autre part la résolution du système $\begin{cases} id = p + q \\ a = \lambda p + \mu q \end{cases}$ montre qu'il n'y avait qu'un choix possible.

b) La relation $J^3 = 3J$ donne $q^2 = q$ et $p^2 = p$. Enfin on vérifie aisément que $p \circ q = q \circ p = 0$. Remarquons que p est la projection sur le sous-espace propre E_1 (de dimension 2) parallèlement à E_4 et q la projection sur le sous-espace propre E_4 (de dimension 1) parallèlement à E_1.

4. Montrons que la famille (p, q) est une famille libre. En effet si $\alpha p + \beta q = 0$, en composant par p, il vient $\alpha p = 0$, donc $\alpha = 0$, puis en remplaçant il vient $\beta = 0$.

On écrit alors $h = \alpha p + \beta q$. La question précédente donne $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = p + 4q$. Par la remarque précédente, il vient $\alpha^2 = 1, \beta^2 = 4$, donc $\alpha = \pm 1, \beta = \pm 2$. La réciproque est immédiate.

5. Soit (e_1, e_2) une base de E_1 et e_3 une base de E_4. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $h(e_1) = e_2, h(e_2) = e_1, h(e_3) = 2e_3$.
On a alors $h^2(e_1) = e_2, h^2(e_2) = e_2, h^2(e_3) = 4e_3$, donc $h^2 = a$. Mais on ne peut écrire $h = \alpha p + \beta q$, puisque $(\alpha p + \beta q)(e_1) = \alpha e_1$ jamais égal à e_2.

Exercice 2.10.

Soit n entier tel que $n \geqslant 2$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels. On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_n \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la valeur du rang de M, suivant les valeurs des $a_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

2. Montrer que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de M si et seulement si le polynôme

$$P(X) = X^n - a_1 X^{n-1} - a_2 X^{n-1} - \cdots - a_n$$

admet λ pour racine. Préciser alors une base du sous-espace propre associé et la dimension de celui-ci.

3. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si P admet n racines complexes distinctes.

4. Montrer que si $a_n > 0$, alors M admet au moins une valeur propre réelle strictement positive.

5. Dans cette question on suppose que $n = 4$ et $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, -3, 0, -2)$. Déterminer les valeurs propres de M. Est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Les $n - 1$ premières colonnes de M forment une famille echelonnée, donc libre. Ainsi le rang de M est au moins égal à $n - 1$.
Effectuons alors une permutation circulaire des colonnes de M, afin d'amener la dernière colonne en tête en repoussant toutes les autres d'un cran ...
On obtient ainsi une matrice M' trigonale de coefficients diagonaux $a_n, 1, \ldots, 1$. Donc M' est inversible si et seulement si $a_n \neq 0$. Ainsi :

$$\text{rg}(M) = \begin{cases} n & \text{si } a_n \neq 0 \\ n - 1 & \text{si } a_n = 0 \end{cases}$$

2. Soit $C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$MC = \lambda C \iff \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$$

En remontant les équations de ce sytème, il vient :

$$MC = \lambda C \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{n-1} = \lambda x_n \\ x_{n-2} = \lambda^2 x_n \\ \quad \vdots \\ x_1 = \lambda^{n-1} x_n \\ x_n(\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \cdots - a_{n-1}\lambda - a_n) = 0 \end{cases}$$

⋆ Si $P(\lambda) \neq 0$, la dernière équation donne $x_n = 0$ et on en déduit la nullité de tous les x_k, donc le système n'admet que la solution triviale et $\lambda \notin \operatorname{Spec} M$.

⋆ Si λ est racine de P, alors x_n est quelconque et les autres x_k s'en déduisent. Donc λ est alors valeur propre de M, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la colonne

$$C_\lambda = {}^t\,(\,\lambda^{n-1} \quad \lambda^{n-2} \quad \ldots \quad \lambda \quad 1\,)$$

3. Tous les sous-espaces propres étant de dimension 1, M est diagonalisable si et seulement si ils sont au nombre de n, donc si et seulement si P admet n racines (distinctes).

4. Si $a_n > 0$, la fonction polynôme réelle P vérifie $P(0) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$, donc P admet au moins une racine strictement positive.

5. Ici $P = X^4 + 3X^2 + 2 = (X^2+1)(X^2+2)$, donc :

$$\operatorname{Spec}_{\mathbb{C}}(M) = \{-i, i, -i\sqrt{2}, i\sqrt{2}\}$$

Donc M est $\mathbb{C}$-diagonalisable, mais pas $\mathbb{R}$-diagonalisable.

Exercice 2.11.

Soit E l'ensemble des fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)^2 \mathrm{e}^{-x} dx$ converge.

On rappelle les formules de Leibniz (que l'on ne demande pas de redémontrer) pour des fonctions C^∞ sur un intervalle I :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

$$\int_a^b u^{(n)}(t)v(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[u^{(n-k-1)}(t)v^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u(t)v^{(n)}(t)dt,$$

où $n \geqslant 1$ et $(a,b) \in I^2$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel (pour a, b réels, on pourra utiliser l'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ en la justifiant).

2. Montrer que les fonctions polynomiales appartiennent à E.

3. Prouver que l'application $\langle\ ,\ \rangle$ définie sur $E \times E$ par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}dt$ est un produit scalaire sur E.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions définies pour tout x réel par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x} \text{ et } L_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^x}{n!} f_n^{(n)}(x).$$

Prouver que

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!}.$$

Soit $n \geqslant 1$; vérifier que $f_n^{(p)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant p < n$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n^{(p)}(x) = 0$.

5. Soit $f \in E$; montrer que l'on a : $\langle f, L_n\rangle = \dfrac{1}{n!}\langle f^{(n)}, X^n\rangle$.

En déduire que $(L_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthonormale.

6. Montrer que pour $n \geqslant 1$:

$$XL_n(X) = (n+1)\,L_{n+1}(X) + (2n+1)\,L_n(X) + nL_{n-1}(X).$$

Solution :

1. Seule la somme pose un problème. On va utiliser l'inégalité proposée qui résulte de la relation $(|a| - |b|)^2 = a^2 + b^2 - 2|ab| \geqslant 0$.
Si $f, g \in E$, il vient :

$$(f(t) + g(t))^2 \mathrm{e}^{-t} = [f(t)^2 + g(t)^2 + 2f(t)g(t)]\mathrm{e}^{-t} \leqslant 2[f(t)^2 + g(t)^2]\mathrm{e}^{-t}.$$

On conclut avec le critère de comparaison.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (|x|^n(1+x^2))\mathrm{e}^{-x} = 0$, on en déduit qu'il existe $A > 0$ tel que $|x^n|\mathrm{e}^{-x} \leqslant (1+x^2)^{-1}$ pour tout $x \geqslant A$. On applique ensuite le critère de comparaison.

3. Il est clair que cette application est bilinéaire et positive. Montrons qu'elle est définie positive. Soit $f \in E$ telle que $0 = \langle f, f\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t}dt$. L'intégrante est positive, sa continuité entraine sa nullité, et par suite $f = 0$ (on peut se ramener à la nullité de l'intégrale sur un intervalle borné si l'on veut).

4. En appliquant la première formule de Leibniz, et en regroupant les cas $p \leqslant n$ et $p > n$, on obtient :

$$f_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\min(p,n)} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n - \min(p,n) + k)!} x^{n-\min(p,n)+k}(-1)^k \mathrm{e}^{-x}$$

On en tire immédiatement que $f_n^{(p)}(0) = 0$ lorsque $0 \leqslant p < n$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n^{(p)}(x) = 0$. En faisant $p = n$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$L_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k (-1)^k \mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!}$$

5. Avec la seconde formule de Leibniz et en tenant compte de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^b f_n^{(n)}(x) f(x)dx \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \big[f_n^{(n-k-1)}(x) f^{(k)}(x)\big]_0^b + (-1)^n \int_0^b f_n(x) f^{(n)}(x)dx \Big\} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_n^{(n-k-1)}(b) f^{(k)}(b) + (-1)^n \int_0^b x^n \mathrm{e}^{-x} f^{(n)}(x)dx \Big\}
\end{aligned}$$

et par suite en faisant tendre b vers $+\infty$:

$$\langle f, L_n\rangle = \frac{1}{n!} \int_0^b x^n \mathrm{e}^{-x} f^{(n)}(x)dx = \frac{1}{n!} \langle f^{(n)}, X^n\rangle.$$

Si $m < n$, on voit facilement avec la formule précédente que $\langle L_m, L_n\rangle = 0$ puisque $\deg L_m = m < n$.
De plus, on a : $\langle L_n, L_n\rangle = \dfrac{1}{n!}\langle 1, X^n\rangle = \dfrac{1}{n!}\Gamma(n+1) = 1$

6. Soit $n \geqslant 1$; comme $(L_k)_{0\leq k\leq n+1}$ est une famille échelonnée de polynômes avec $\deg L_k = k$, il existe des scalaires tels que

$$XL_n = a_n L_{n+1} + b_n L_n + c_n L_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} u_k L_k$$

Or, pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $u_k = \langle XL_n, L_k\rangle = \langle L_n, XL_k\rangle = 0$, car $\deg XL_k < n$. On a donc bien :

$$XL_n(X) = a_n L_{n+1}(X) + b_n L_n(X) + c_n L_{n-1}(X)$$

où a_n, b_n, c_n sont trois réels.
En utilisant la formule explicite donnant $L_n(X)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
b_n &= \langle XL_n, L_n\rangle = \frac{1}{n!}\langle [XL_n]^{(n)}, X^n\rangle = \frac{1}{n!}\langle -n^2 + (n+1)X, X^n\rangle \\
&= \frac{1}{n!}[-n^2\Gamma(n+1) + (n+1)\Gamma(n+2)] = -n^2 + (n+1)^2 = 2n+1
\end{aligned}$$

On a également :
$a_n = \langle XL_n, L_{n+1}\rangle = \dfrac{1}{(n+1)!}\langle [XL_n]^{(n+1)}, X^{n+1}\rangle = \dfrac{1}{(n+1)!}\langle n+1, X^{n+1}\rangle$
$= \dfrac{n+1}{(n+1)!}\Gamma(n+2) = n+1$
et $c_n = \langle XL_n, L_{n-1}\rangle = \langle XL_{n-1}, L_n\rangle = a_{n-1} = n$.
Finalement, on a trouvé :

$$XL_n = (n+1)\,L_{n+1} + (2n+1)\,L_n + nL_{n-1}$$

Exercice 2.12.

Soit les ensembles de matrices

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

1. a) Vérifier que le produit de deux éléments de $\mathcal{G}$ appartient à $\mathcal{G}$.

b) Justifier que toute matrice de $\mathcal{G}$ est inversible, et que son inverse appartient à $\mathcal{G}$.

c) Montrer que, pour toute matrice $G \in \mathcal{G}$ n'appartenant pas à $\mathcal{H}$, il existe une matrice $H \in \mathcal{H}$ telle que $H^{-1}\,G\,H$ soit une matrice diagonale.

Pour toute matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$, *on définit l'application* Φ_G *qui, à tout polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *associe le polynôme* $\Phi_G(P)$ *défini par*

$$\big[\Phi_G(P)\big](X) = P(\alpha X + \beta).$$

2. a) Justifier que Φ_G est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Pour deux matrices G et G' de $\mathcal{G}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, comparer $\Phi_{GG'}(P)$ et $\Phi_G\big(\Phi_{G'}(P)\big)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé.*

3. a) Soit $G \in \mathcal{G}$. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est stable par Φ_G.

On note Ψ_G *la restriction de* Φ_G *à* $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $M_n(G) = (m_{p,q})_{0\le p,q\le n}$ la matrice de Ψ_G dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Expliciter le coefficient générique $m_{p,q}$. (**On prendra garde au fait que les indices commencent à** 0.)

c) Déterminer les valeurs propres de $M_n(G)$.

d) Expliciter $M_n(G)$ lorsque G est une matrice diagonale.

4. a) Soit $G \in \mathcal{G}$ n'appartenant pas à $\mathcal{H}$. Justifier que Ψ_G est diagonalisable.

b) Écrire la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à une base de vecteurs propres de Ψ_G. Expliciter une base de vecteurs propres de Ψ_G.

Solution :

1. a) On a : $GG' = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta' + \beta\alpha' \\ 0 & \alpha\alpha' \end{pmatrix} \in G$.

b) De même $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta/\alpha \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \in G$.

c) Si $H = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où :

$$H^{-1}\,G\,H = \begin{pmatrix} 1 & b+\beta-b\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

qui est diagonale si et seulement si $b = \dfrac{\beta}{\alpha - 1}$ ($\alpha \neq 1$ car $G \notin \mathcal{H}$), soit pour

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \beta/(\alpha-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a) α et β étant fixés, la linéarité de Φ_G est banale.

b) On a $\Phi_{GG'}(P) = P\big[(\alpha\alpha')X + (\beta' + \beta\alpha')\big]$ et d'autre part :

$$\Phi_G\big(\Phi_{G'}(P)\big) = \Phi_G\big[P(\alpha' X + \beta')\big] = P\big[\alpha'(\alpha X + \beta) + \beta'\big] = \Phi_{GG'}(P)$$

3. a) Il suffit de s'assurer que $\deg\big(P(\alpha X + \beta)\big) = \deg\big(P(X)\big)$, ce qui est clair.

b) Pour $q \in [\![0, n]\!]$, $\Psi_G(X^q) = (\alpha X + \beta)^q = \sum\limits_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \alpha^p X^p \beta^{q-p}$, d'où :

$$m_{p,q} = \begin{cases} \binom{q}{p} \alpha^p \beta^{q-p} & \text{si } p \leqslant q \\ 0 & \text{si } p > q \end{cases}$$

c) La matrice $M_n(G)$ est triangulaire, donc ses valeurs propres sont α^p pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

d) Si $G = D$ diagonale, on a $\beta = 0$ et $M_n(D) = \operatorname{diag}\big(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\big)$ est aussi diagonale.

4. a) D'après les questions 1.c) et 2.b), la matrice G est semblable à une matrice diagonale D, et

$$M_n(D) = M_n(H^{-1}GH) = M_n(H)^{-1}\, M_n(G)\, M_n(H)$$

montre que $M_n(G)$ est semblable à la matrice diagonale $M_n(D)$, donc diagonalisable.

b) La matrice de passage est, avec la convention usuelle $\binom{q}{p} = 0$ si $p > q$,

$$M_n(H) = M_n\Big(\begin{pmatrix} 1 & \beta/(\alpha-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big) = \Big(\binom{q}{p}\big(\frac{\beta}{\alpha-1}\big)^{q-p}\Big)_{0 \leq p,q \leq n}$$

Les vecteurs propres correspondants ont pour coordonnées les colonnes de $M_n(H)$, soit :

$$V_q(X) = \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \big(\frac{\beta}{\alpha-1}\big)^{q-p} X^p = \big(X + \frac{\beta}{\alpha-1}\big)^q, (0 \leqslant q \leqslant n)$$

Exercice 2.13.

Soit a un nombre réel strictement positif.

1. Montrer que l'on peut définir deux suites réelles strictement positives $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a, b_0 = 1$ et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, a_{k+1} = \frac{1}{2}\big(a_k + \frac{1}{b_k}\big), b_{k+1} = \frac{1}{2}\big(b_k + \frac{1}{a_k}\big)$$

2. Établir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $u_k = a_k b_k$. En déduire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

3. Montrer que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont proportionnelles et qu'elles convergent. Préciser leurs limites respectives.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique définie positive* lorsqu'elle est symétrique vérifiant
$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0$.

4.a) Montrer que toute matrice symétrique définie positive est inversible et que son inverse est symétrique définie positive.

b) En déduire que, si A est une matrice symétrique définie positive donnée , on peut définir deux suites de matrices symétriques définies positives $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $A(0) = A, B(0) = I_n$ et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ A(k+1) = \frac{1}{2}\big(A(k) + B(k)^{-1}\big),\ B(k+1) = \frac{1}{2}\big(B(k) + A(k)^{-1}\big)$$

5. Montrer que les suites $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
NB : On dit qu'une suite de matrices $(U(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convergente lorsque, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, la suite $(u_{i,j}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients de la i-ème ligne et de la j-ème colonne converge.

Solution :

1. La relation de récurrence voulue est :

$$X_{k+1} = F(X_k) \text{ avec } X_k = (a_k, b_k) \text{ et } F(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}\right)$$

Or la fonction F est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et vérifie clairement $F\left((\mathbb{R}_+^*)^2\right) \subset (\mathbb{R}_+^*)^2$. On montre ainsi de manière évidente par récurrence sur $k \geqslant 0$ la relation :

« X_k est défini et appartient à $(\mathbb{R}_+^*)^2$ ».

2. On a :

$$u_{k+1} = a_{k+1}b_{k+1} = \frac{1}{4}\big(a_k b_k + 1 + 1 + \frac{1}{a_k b_k}\big) = \frac{1}{4}\big(u_k + 2 + \frac{1}{u_k}\big)$$

Pour tout k, on a donc :

$$u_{k+1} - u_k = \frac{-3u_k^2 + 2u_k + 1}{4u_k} = \frac{(u_k - 1)(-3u_k - 1)}{4u_k}$$

Or l'étude sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}\big(x + 2 + \frac{1}{x}\big)$ (on a : $f'(x) = \frac{x^2-1}{4x^2}$) montre que f est minimale en 1, donc $\forall\, x > 0, f(x) \geqslant f(1) = 1$; donc $u_k \geqslant 1$ pour tout $k \geqslant 1$.
Par conséquent $u_{k-1} - u_k \leqslant 0$, donc la suite (u_k) est décroissante et minorée, et elle converge.
Sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit $\ell - 1 = 0$ ou $-3\ell - 1 = 0$; par ailleurs $\ell \geqslant 1$ car $u_k \geqslant 1$. Donc $\ell = 1$.

3. On a : $\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \dfrac{\frac{1}{2}(a_k + \frac{1}{b_k})}{\frac{1}{2}(b_k + \frac{1}{a_k})} = \dfrac{a_k b_k + 1}{b_k} \times \dfrac{a_k}{a_k b_k + 1} = \dfrac{a_k}{b_k}$

La suite de terme général $\dfrac{a_k}{b_k}$ est donc constante et vaut $\dfrac{a_0}{b_0} = a$, soit $a_k = a\, b_k$. Comme $a_k \geqslant 0$, on a, lorsque k tend vers $+\infty$:

$$a_k = \sqrt{a_k^2} = \sqrt{\frac{a_k}{b_k} u_k} = \sqrt{a u_k} \to \sqrt{a}\,; \quad b_k = \frac{1}{a} a_k \to \frac{1}{a}\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

4. Pour toute matrice S symétrique définie positive, si (λ, X) est un couple (valeur propre, vecteur propre) de S, alors :

$$0 < {}^tXSX = {}^tX\lambda X = \lambda\|X\|^2 \text{ d'où } \lambda > 0$$

On a, par le théorème spectral, également la réciproque : si une matrice symétrique réelle n'a que des valeurs propres positives, elle est définie positive.
Donc 0 n'est pas valeur propre de S et S est inversible. En transposant $SS^{-1} = I$, on montre que S^{-1} est symétrique puis définie positive, puisque ses valeurs propres sont les inverses de celles de S.

On montre facilement que l'ensemble des matrices symétriques définies positives est stable par somme et par produit par un scalaire strictement positif. On montre alors de manière évidente par récurrence sur $k \geqslant 0$ la relation : « $A(k)$ et $B(k)$ sont bien définies et sont symétriques définies positives ».

5. Par le théorème spectral, la matrice symétrique $A(0) = A$ se diagonalise en $A(0) = PD{}^tP$ avec P orthogonale et D diagonale à valeurs propres strictement positives. Comme $B(0) = I = PI{}^tP$, une récurrence évidente montre que $A(k) = PD(k){}^tP$ et $B(k) = P\Delta(k){}^tP$, où les matrices $D(k)$ et $\Delta(k)$ sont diagonales et vérifient :

$$D_0 = D,\ \Delta_0 = I_n, D_{k+1} = \frac{1}{2}(D_k + \Delta_k^{-1}), \Delta_{k+1} = \frac{1}{2}(\Delta_k + D_k^{-1})$$

Si, pour tout k, on note : $D_k = \operatorname{diag}(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)})$ et $\Delta_k = \operatorname{diag}(b_k^{(1)}, \dots, b_k^{(n)})$, alors, d'après la question 3, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} a_k^{(i)} = \sqrt{a_0^{(i)}}, \lim_{k\to+\infty} b_k^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{a_0^{(i)}}}$$

Or d'après la relation $A(k) = PD(k)P^{-1}$, les coefficients de $A(k)$ sont des combinaisons linéaires de $a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}$ donc convergent quand k tend vers $+\infty$ et de même avec $B(k)$.

Exercice 2.14.

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On considère une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de p vecteurs de E, où p est un entier tel que $p \geqslant 2$. On dit que cette famille est obtusangle si pour tout couple $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $i \neq j$ entraîne que $\langle u_i, u_j \rangle < 0$ (ce qui impose aux vecteurs d'être tous non nuls).

1. On veut montrer par récurrence que si une famille de p vecteurs de E est obtusangle, alors toute sous-famille de $p-1$ vecteurs est libre.

a) Montrer que cette propriété est vérifiée pour $p=2$.

b) On suppose que la propriété est vérifiée à un rang $p+1 \geqslant 2$, et on envisage une famille $(u_1,\dots,u_{p+2})$ obtusangle telle que la famille $(u_1,\dots,u_{p+1})$ soit liée.

i) Montrer qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\langle u_{p+1},u_k\rangle > 0$.

ii) En déduire qu'il existe $k\in[\![1,p]\!]$ tel que $\lambda_k<0$ et montrer que l'on peut supposer $k=p$.

iii) En considérant la famille $(y_1,\dots,y_{p+1})$ définie par :

$$\forall\, i\in[\![1,p-1]\!],\ y_i=u_i,\ y_p=u_{p+1}-\lambda_p u_p,\ y_{p+1}=u_{p+2},$$

montrer qu'il y a une contradiction.

iv) Conclure.

2. Soit $(e_1,\dots,e_{n+1})$ une famille obtusangle de vecteurs unitaires de E et v le vecteur de E défini par $v=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k$.

On veut montrer que $[\forall\, k\in[\![1,n]\!], \langle v,e_k\rangle\geqslant 0]\Longrightarrow[\forall\, k\in[\![1,n]\!],\lambda_k\geqslant 0]$.

a) Soit p la projection orthogonale de E sur $(\mathrm{Vect}(e_{n+1}))^{\perp}$. Montrer que $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$:

$$\langle p(e_i),p(e_j)\rangle=\langle e_i,e_j\rangle-\langle e_i,e_{n+1}\rangle\times\langle e_j,e_{n+1}\rangle$$

b) Montrer la propriété par récurrence sur n.

Solution :

1. a) Clair puisque qu'une famille réduite à un vecteur non nul est toujours libre.

b) Supposons le résultat acquis à un rang $p+1$ et soit $(u_1,\dots,u_{p+1},u_{p+2})$ une famille obtuse. Supposons $(u_1,\dots,u_p,u_{p+1})$ liée. La famille $(u_1,\dots,u_{p+1})$ étant obtuse, l'hypothèse de récurrence montre que $(u_1,\dots,u_p)$ est libre. Dans ce cas, u_{p+1} est combinaison linéaire de $(u_1,\dots,u_p)$:

$$\text{il existe } (\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p,\text{ telle que } u_{p+1}=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k.$$

i) On a : $||u_{p+1}||^2=\langle u_{p+1},\sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k\rangle=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\langle u_{p+1},u_k\rangle>0$.

ii) La famille étant obtusangle, et la somme précédente strictement positive, il existe k tel que $\lambda_k<0$. Quitte à modifier l'ordre des vecteurs, on peut supposer que $k=p$, donc $\lambda_p<0$.

iii) On montre facilement que la famille $(y_1,\dots,y_{p+1})$ est obtusangle. En effet :

$\star$ Si i et j sont dans $[\![1,p-1]\!]$ et distincts, on a $\langle y_i,y_j\rangle=\langle u_i,u_j\rangle<0$.

$\star$ Pour $i\in[\![1,p-1]\!]$, $\langle y_i,y_p\rangle=\langle u_i,u_{p+1}-\lambda_p u_p\rangle=\langle u_i,u_{p+1}\rangle-\lambda_p\langle u_i,u_p\rangle<0$

$\langle y_i,y_{p+1}\rangle=\langle u_i,u_{p+2}\rangle<0$

$\star$ Enfin $\langle y_p,y_{p+1}\rangle=\langle u_{p+1},u_{p+2}-\lambda_p u_p\rangle=\langle u_{p+1},u_{p+2}\rangle-\lambda_p\langle u_{p+1},u_p\rangle<0$.

Par hypothèse de récurrence, la famille $(y_1,\dots,y_p)$ est donc libre. Or :

$$u_{p+1}-\lambda_p u_p=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k-\lambda_p u_p=\sum_{k=1}^{p-1}\lambda_k u_k\implies y_p=\sum_{k=1}^{p-1}\lambda_k y_k$$

ce qui est contradictoire.

iv) En conclusion, si la propriété est vérifiée au rang $p+1$, elle reste vérifiée au rang $p+2$ (car on peut toujours ranger les $p+2$ vecteurs de la famille obtuse de sorte que les $p+1$ vecteurs considérés soient les $p+1$ premiers de cette famille) : elle est donc vérifiée pour tout $p\geqslant 2$.

2. a) D'après le cours : $p(e_i)=e_i-\langle e_i,e_{n+1}\rangle e_{n+1}$ pour tout i. Donc :

$$\langle p(e_i), p(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle - \langle e_i, e_{n+1}\rangle \times \langle e_j, e_{n+1}\rangle$$

b) La propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Supposons-la vérifiée pour un certain $n \geqslant 1$ et soit $(e_1, \dots, e_{n+1})$ une famille obtusangle de vecteurs unitaires . Soit v défini dans l'énoncé tel que $\langle v, e_i\rangle \geqslant 0$.

On a $p(v) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k p(e_k)$ (car $p(e_{n+1}) = 0$). Un calcul analogue au précédent donne :

$$\langle p(v), p(e_j)\rangle = \langle v, e_j\rangle - \langle v, e_{n+1}\rangle \times \langle e_j, e_{n+1}\rangle \geqslant 0$$

D'autre part :

$$\langle p(e_i), p(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle - \langle e_i, e_{n+1}\rangle \times \langle e_j, e_{n+1}\rangle < 0$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence au vecteur $p(v)$ et à la famille obtusangle $(p(e_1), \dots, p(e_n))$.

Il vient, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $\lambda_j \geqslant 0$.

Enfin :

$$0 \leqslant \langle v, e_{n+1}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, e_{n+1}\rangle + \lambda_{n+1} ||e_{n+1}||^2$$

Comme $\lambda_k \langle e_k, e_{n+1}\rangle \leqslant 0$, on obtient : $\lambda_{n+1} \geqslant 0$.

Exercice 2.15.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. On note I l'endomorphisme identité de E.

On suppose qu'il existe k endomorphismes non nuls de E, $p_1, p_2, \dots, p_k$ et k réels distincts $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ tels que pour tout m de $\mathbb{N}$:

$$u^m = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^m p_i$$

1. a) Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on a : $P(u) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(\lambda_i) p_i$.

b) En déduire que le polynôme $M(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)$ est annulateur de u. Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de u ?

2. Pour tout ℓ de $[\![1, k]\!]$, on pose : $L_\ell(X) = \prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq \ell}} \left(\dfrac{X - \lambda_i}{\lambda_\ell - \lambda_i}\right)$.

a) Montrer que pour tout ℓ de $[\![1, k]\!]$: $p_\ell = L_\ell(u)$.

b) En déduire que $\operatorname{Im} p_\ell \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda_\ell I)$, puis que les valeurs propres de u sont exactement les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

3. Montrer que pour tout (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$, on a : $p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } j = i \end{cases}$.

4. Montrer que u est diagonalisable.

Solution :

1. a) La relation proposée est vérifiée pour tout monôme X^k, $k \in \mathbb{N}$. Elle est donc vérifiée pour tout polynôme, par un argument de linéarité.

b) Pour le polynôme M dont les racines sont $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, il vient :

$$M(u) = \sum_{i=1}^{k} M(\lambda_i) p_i = 0.$$

Ainsi le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de M donc dans $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

2. a) On remarque que les polynômes proposés sont les polynômes de Lagrange aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, c'est-à-dire que l'on a $L_\ell(\lambda_i) = \delta_{i,\ell}$ (symbole de Kronecker).

Il suffit alors d'appliquer le résultat de la question 1.a) au polynôme L_ℓ, et :

$$L_\ell(u) = p_\ell$$

b) On a $(u-\lambda_\ell I)\circ L_\ell(u) = M(u) = 0$, donc $(u-\lambda_\ell I)\circ p_\ell = 0$, ce qui entraîne que $\operatorname{Im} p_\ell \subset \operatorname{Ker}(u-\lambda_\ell I)$. Comme $\dim(\operatorname{Im} p_\ell) \neq 0$, il en résulte que $\operatorname{Ker}(u-\lambda_\ell I) \neq \{0\}$ et λ_ℓ est valeur propre de u.

3. On a pour $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$, car $p_i \circ p_j = L_i(u)\circ L_j(u) = L_iL_j(u) = 0$, puisque L_iL_j est divisible par M.

Pour $m = 0$, l'hypothèse de l'exercice donne $I = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$. Donc

$$p_j = I \circ p_j = \sum_{i=1}^{k} p_i \circ p_j = p_j^2.$$

4. La relation $I = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$ permet d'obtenir, pour tout vecteur s de E : $x = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(x)$, ce qui montre que

$$E = \operatorname{Im}(p_1) + \operatorname{Im}(p_2) + \cdots + \operatorname{Im}(p_k)$$

Cette somme est directe. En effet, si $0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, avec $x_i \in \operatorname{Im}(p_i)$, c'est-à-dire $x_i = p_i(x_i)$, alors, par la question 3. :

$$0 = p_j(0) = p_j^2(x_j) = p_j(x_j) = x_j.$$

Donc :

$$E = \operatorname{Im}(p_1) \oplus \operatorname{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(p_k)$$

Enfin, comme $\operatorname{Im} p_\ell \subseteq \operatorname{Ker}(u-\lambda_\ell I)$, il vient, car les sous-espaces propres sont toujours en somme directe :

$$E \subset \operatorname{Ker}(u-\lambda_1 I)) \oplus \operatorname{Ker}(u-\lambda_2 I) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(u-\lambda_k I)$$

D'où en fait l'égalité et u est diagonalisable.

Exercice 2.16.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle matrice symétrique strictement positive, tout élément de S_n dont les valeurs propres sont strictement positives : on note S_n^{++}, l'ensemble de ces matrices.

Soit A une matrice de S_n^{++}.

1. Justifier qu'il existe une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A, et telles que $A = PD\,{}^tP$.

2. Montrer qu'il existe R de S_n^{++} telle que $A = R^2$. On dit que R est une racine carrée de A.

3. Soient B et C deux racines carrées de A, toutes deux strictement positives.

Montrer que B et C ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres. En déduire que la matrice A admet une unique racine carrée dans S_n^{++} que l'on note $A^{1/2}$.

4. On cherche dans cette question à exprimer $A^{1/2}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout j de $[\![1,p]\!]$, on pose :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{1\leq i\leq p\\ i\neq j}} \frac{X-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}$$

a) Montrer que $(L_1, \ldots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme T de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, $T(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

c) En déduire une expression de $A^{1/2}$ en fonction de A.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n \end{pmatrix}$. Montrer que A est dans S_n^{++} et déterminer $A^{1/2}$.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle : elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe donc une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont strictement positifs et une matrice orthogonale P telles que $A = PD^tP$.

2. En notant Δ la matrice diagonale dont les éléments sont les racines carrées positives des éléments de D, il vient :

$$R = P\Delta^tP \implies R^2 = P\Delta^{2t}P = A$$

3. Montrons que B et C ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres.
Soit λ réel, et X matrice colonne tels que $BX = \lambda X$. Alors $B^2X = \lambda^2 X = AX = C^2X$. Ainsi $(C^2 - \lambda^2 I)X = 0$. Or $0 = (C^2 - \lambda^2 I)X = (C + \lambda I)(C - \lambda I)X$. La matrice C n'ayant que des valeurs propres strictement positives, la matrice $C + \lambda I$ est inversible et $(C - \lambda I)X = 0$. Ceci montre que λ est valeur propre de C de vecteur propre associé X. En échangeant les rôles de B et C, on obtient le résultat escompté.

4. a) Ces polynômes sont de degré $p-1$ et si $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i L_i(X) = 0$, alors, pour tout indice j, $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i L_i(\lambda_j) = \alpha_j = 0$, ce qui montre que la famille donnée est libre, donc est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

b) L'écriture de tout polynôme P de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ dans cette base est :

$$P = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) L_i$$

Il suffit donc de choisir $P(X) = \sum\limits_{i=1}^{p} \sqrt{\lambda_i} L_i$. L'unicité provient du fait que $(L_1, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) On pose $B = \sum\limits_{i=1}^{p} \sqrt{\lambda_i} L_i(A)$ qui est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si λ est une valeur propre de A de vecteur propre associé X, alors pour tout polynôme P : $P(A)(X) = P(\lambda)X$. Ainsi $L_i(A)(X) = L_i(\lambda)X$.
Or $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ montre que si X_j est vecteur propre associé à la valeur propre λ_j, $P(A)(X_j) = \sqrt{\lambda_j} X_j$.
On en déduit que $B^2 = A$. La matrice B est symétrique (car A l'est) et dans S_n^{++} puisque ses valeurs propres sont $(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p})$. On conclut par l'unicité de la racine carrée.

5. La matrice A est symétrique réelle. On peut l'écrire $A = (n+1)I - J$, où la matrice J n'est formée que de 1. Les valeurs propres de J sont 0 et n ; les valeurs propres de A sont $n+1$ et 1. Elle est donc dans S_n^{++}.
Par les questions précédentes, $A^{1/2} = L_1(A) + \sqrt{n+1} L_{n+1}(A)$, avec

$$L_1(X) = \frac{X - n - 1}{-n} \text{ et } L_{n+1}(X) = \frac{X-1}{n}$$

Après calculs :

$$A^{1/2} = \frac{1}{n}\big((\sqrt{n+1} - 1)A - (\sqrt{n+1} - (n+1))I\big)$$

Exercice 2.17.

1. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \neq 1$: $Q(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$.

b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto Q$ ainsi définie est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ puis calculer son inverse A^{-1}. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?

4. a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$. Le complexe α est-il racine de $f^{-1}(Q)$? Avec quel ordre de multiplicité ?

b) En déduire les sous-espaces propres de l'endomorphisme f^{-1} puis montrer qu'ils sont aussi les sous-espaces propres de f.

Solution :

1. a) Une primitive F du polynôme P est un polynôme de degré $n+1$; ainsi :

$$\frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt = \frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$

Comme 1 est racine du polynôme $F(X)-F(1)$, on peut simplifier par $(x-1)$ et le quotient est bien une fonction polynôme de degré n.

De plus Q est parfaitement définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, donc en une infinité de points et le polynôme associé encore noté Q est parfaitement défini.

b) La linéarité de f résulte de la linéarité de l'intégration et donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. On a montré : $\forall\, P, \deg f(P) = \deg P$. Donc f est une application linéaire conservant le degré, l'image par f de la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ est une famille graduée en degré qui est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Ainsi, f transforme une base en une base : elle est donc bijective.

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, (x-1)Q(x) = (x-1)f(P)(x) = \displaystyle\int_1^x P(t)dt$, d'où en dérivant les deux membres et en revenant à la notation polynomiale : $(X-1)Q' + Q = P$ et

$$f^{-1} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]; Q \mapsto (X-1)Q' + Q$$

3. En écrivant l'image par f de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:
$f(X^k) = \dfrac{1+X+\cdots+X^k}{k+1}$, soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

et A^{-1} est la matrice de f^{-1} relativement à la même base.
Comme $f^{-1}(X^k) = (k+1)X^k - kX^{k-1}$, il vient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices sont triangulaires. Elles possèdent chacune $n+1$ valeurs propres distinctes (qui se lisent sur leurs diagonales) , ce qui est une condition suffisante de diagonalisabilité.

4. a) On écrit $Q = (X-\alpha)^k Q_1$ avec $Q_1(\alpha) \neq 0$, alors :
$f^{-1}(Q) = P = (X-1)Q' + Q$, donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(Q) &= (X-1)[k(X-\alpha)^{k-1}Q_1 + (X-\alpha)^k.Q_1'] + (X-\alpha)^k Q_1 \\ &= (X-\alpha)^{k-1}[k(X-1)Q_1 + (X-\alpha)(Q_1 + (X-1)Q_1')] \\ &= (X-\alpha)^{k-1}R(X) \end{aligned}$$

en notant R la quantité $k(X-1)Q_1 + (X-\alpha)(Q_1 + (X-1)Q_1'$. De plus $R(\alpha) = k(\alpha-1)Q_1(\alpha)$. On a : $k \neq 0$ et $Q_1(\alpha) \neq 0$ d'où :

- Si $\alpha \neq 1$: α est racine d'ordre $k-1$ de $f^{-1}(Q)$.
- Si $\alpha = 1$: $R = (X-1)[(k+1)Q_1 - (X-1)Q_1'] = (X-1)S$ en posant $S = (k+1)Q_1 - (X-1)Q_1'$. On a : $S(1) = (k+1)Q_1(1) \neq 0$ car $k+1 \neq 0$ et $Q_1(1) = Q_1(\alpha) \neq 0$ et 1 est racine d'ordre k de P.

b) Soit Q un vecteur propre de f^{-1} ; $f^{-1}(Q) = \lambda.Q$, avec $\lambda \neq 0$ car f^{-1} est inversible. Donc toute racine complexe de Q a le même ordre de multiplicité dans Q et dans $f^{-1}(Q)$. D'après la question précédente, 1 est la seule racine possible de Q, d'où :

$$Q(X) = \alpha(X-1)^k,\ 0 \leqslant k \leqslant n,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$$

On a alors : $f^{-1}(Q) = (X-1)Q' + Q = (k+1)Q$. Ainsi Q est associé à la valeur propre $k+1$.
Les sous-espaces propres de f^{-1} sont : $E_0, E_1, \dots, E_n$ avec $E_k = \mathrm{Vect}((X-1)^k)$.
Si Q est vecteur propre de f^{-1} alors $f^{-1}(Q) = \lambda.Q$, donc $Q = \lambda f(Q)$ et $f(Q) = \frac{1}{\lambda}Q$. Donc les vecteurs propres de f^{-1} sont vecteurs propres de f et il n'y en a pas d'autres car f et f^{-1} sont diagonalisables.

Exercice 2.18.

Soit n un entier $\geqslant 2$. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $a_{i,j} \geqslant 0$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$;

ii) si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$.

1. $\mathcal{S}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2. a) Soit $A \in \mathcal{S}$. Montrer que 1 est valeur propre de A.

b) Soit λ une valeur propre (réelle ou complexe) de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. En considérant une coordonnée de module maximal de X, montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

3. Soit $z_1, \dots, z_p$, p nombres complexes non nuls ($p \geqslant 2$) vérifiant :

$$\Big|\sum_{i=1}^{p} z_i\Big| = \sum_{i=1}^{p} |z_i|$$

Montrer qu'il existe des réels positifs $\rho_1, \dots, \rho_p$ et $i_0 \in [\![1,p]\!]$, tels que pour tout j de $[\![1,p]\!]$, on a : $z_j = \rho_j z_{i_0}$.

4. Soit λ une valeur propre complexe de A telle que $|\lambda| = 1$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On pose : $|x_k| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$

a) Montrer qu'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_j = \lambda x_k$.

b) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul q tel que $\lambda^q = 1$.

Solution :

1. a) $\mathcal{S}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'il ne contient pas la matrice nulle.

2. a) Le réel $\lambda = 1$ est valeur propre, puisque le vecteur U est un vecteur propre associé.

b) Soit k un indice tel que $|x_k| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. En considérant la $k^{\text{ème}}$ équation du système $AX = \lambda X$, il vient : $\lambda x_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j$.

Donc : $|\lambda||x_k| = \Big|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j\Big| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j}|x_j| \leqslant 1 \times |x_k|$.

Comme $x_k \neq 0$ (autrement on aurait $X = 0$), il vient : $|\lambda| \leqslant 1$.

3. On effectue une démonstration par récurrence sur p.

• si $p = 1$, alors $z_1 = 1 \times z_1$.

• supposons la propriété vérifiée pour $(p-1)$ nombres complexes. Soit $z_1, \dots, z_p$, p nombres complexes qui vérifient : $\Big|\sum\limits_{i=1}^{p} z_i\Big| = \sum\limits_{i=1}^{p} |z_i|$.

On pose : $u = z_1 + \cdots + z_{p-1}$ et $v = z_p$. On a alors, par l'inégalité triangulaire :

$$\sum_{i=1}^{p} |z_i| = \Big|\sum_{i=1}^{p} z_i\Big| = |u+v| \leqslant |u| + |v| \leqslant \sum_{i=1}^{p-1} |z_i| + |z_p|$$

On a donc en fait égalité dans ces inégalités et $|u+v| = |u| + |v|$ ainsi que $\Big|\sum_{i=1}^{p-1} z_i\Big| = \sum_{i=1}^{p-1} |z_i|$. Par hypothèse de récurrence, il existe un réel $\rho \geqslant 0$ tel que $v = \rho u$ et il existe $\rho_1, \ldots, \rho_{p-1}$ réels positifs tels que $z_i = \rho_i z_1$ (par exemple). La relation $v = \rho u$ donne enfin

$$z_p = \rho\big(\sum_{i=1}^{p-1} z_i\big) = \rho\big(\sum_{i=1}^{p-1} \rho_i\big) z_1$$

On conclut par le principe de récurrence.

4. On suppose dans cette question que $|\lambda| = 1$. En reprenant la méthode développée dans la question 2, il vient :

$$|x_k| = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} |x_j| \leqslant |x_k|$$

On a donc égalité dans les inégalités précédentes, et :

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j\Big| = \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j} x_j|$$

Par la question 3, il existe i_0, des réels positifs $\rho_1, \ldots, \rho_n$ tels que pour tout j de $[\![1, n]\!]$, $a_{k,j} x_j = \rho_j a_{k,i_0} x_{i_0}$.
Notons $J = \{j \in [\![1, n]\!] / a_{k,j} \neq 0\}$. Ainsi : $\lambda x_k = \sum\limits_{j \in J} a_{k,j} x_j = a_{k,i_0} x_{i_0} \sum\limits_{j \in J} \rho_j$.
Soit : $|x_k| \leqslant \big(a_{k,i_0} \sum\limits_{j \in J} \rho_j\big) |x_{i_0}| \leqslant \big(a_{k,i_0} \sum\limits_{j \in J} \rho_j\big) |x_k|$, ce qui montre que $a_{k,i_0} \sum\limits_{j \in J} \rho_j = 1$ et $\lambda x_k = x_{i_0}$.

Donc $|x_k| = |x_{i_0}|$, et x_{i_0} est également une coordonnée de module maximal. On recommence ce processus, et comme le vecteur X n'a qu'un nombre fini de coordonnées, on finira par retrouver une coordonnée déjà obtenue, il existe donc $q \in \mathbb{N}^*$ et k_1 tels que $x_{k_1} = \lambda^q x_{k_1}$.
Donc $\lambda^q = 1$.

Exercice 2.19.

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 1$) à coefficients réels.
Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le produit de Schur $A \otimes B$ des matrices A et B en posant :

$$A \otimes B = (a_{i,j} b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} & \ldots & a_{1,n}b_{1,n} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} & \ldots & a_{2,n}b_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1}b_{n,1} & \ldots & \ldots & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et on confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée. On dit qu'une matrice A est positive (notation $A \geqslant 0$) si elle est symétrique et a toutes ses valeurs propres positives ou nulles. Lorsque A et B sont symétriques, on écrit $A \leqslant B$ si $B - A \geqslant 0$.

1. Montrer qu'une matrice A est positive si et seulement si elle est symétrique et vérifie $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En déduire que la somme de deux matrices positives est encore une matrice positive.

2. Soit V un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice $B = V\,{}^tV$ est positive.

3. Soit R une matrice positive non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un entier $m \in \{1, \ldots, n\}$ et une famille $(V_1, \ldots, V_m)$ de vecteurs (colonnes) orthogonaux non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$R = \sum_{k=1}^{m} V_k\,{}^tV_k$$

4. Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et V un vecteur colonne. Montrer que $A \otimes V\,{}^tV$ est une matrice positive. En déduire que le produit de Schur $A \otimes B$ de deux matrices positives A et B est encore une matrice positive.

Solution :

1. Soit A une matrice positive. La matrice A est symétrique réelle, il existe donc P orthogonale et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PD{}^tP$. Comme A est positive, ses valeurs propres sont positives et donc les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positifs ou nuls.
Alors, pour tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle Ax, x\rangle = {}^tx{}^tAx = {}^txAx = {}^txPD{}^tPx = {}^tyDy$$

avec $y = {}^tPx = (y_1, \ldots, y_n)$. Ainsi :

$$\langle Ax, x\rangle = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant 0$$

Réciproquement, si A est une matrice symétrique telle que $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$, alors pour $\lambda \in \operatorname{Spec} A$, en notant x un vecteur propre associé, on a :

$$0 \leqslant \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$$

et donc $\lambda \geqslant 0$.

Si A et B sont positives, alors $A + B$ est symétrique réelle et pour tout vecteur x, on a : $\langle (A + B)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Bx, x\rangle \geqslant 0$ et $A + B$ est encore positive.

2. Comme ${}^tB = {}^t(V{}^tV) = {}^t({}^tV){}^tV = V{}^tV = B$, on voit déjà que B est symétrique (et réelle).
De plus, pour tout vecteur x, on a :
$\langle Bx, x\rangle = {}^txBx = {}^txV{}^tVx = {}^t({}^tVx)({}^tVx) = ({}^tVx)^2 \geqslant 0$
(la matrice ${}^tVx$ est produit d'une matrice ligne par une matrice colonne, donc est une matrice carrée d'ordre 1, identifiée à son unique terme)
Ainsi B est une matrice positive.

3. On peut écrire $R = PD{}^tP$, avec P orthogonale et D diagonale. Quitte à permuter les colonnes de P, on peut supposer que D est de la forme

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)$$

où les nombres λ_1, λ_m , qui sont positifs ou nuls puisque R est positive, sont en fait strictement positifs.

Notons $P = (p_{i,j})$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons $V_k = \sqrt{\lambda_k} \begin{pmatrix} p_{1,k} \\ \vdots \\ p_{n,k} \end{pmatrix}$.

Les colonnes $V_1, \ldots, V_m$ sont non nulles et deux à deux orthogonales, tandis que les colonnes $V_{m+1}, \ldots, V_n$ (si $m < n$) sont nulles.
On a : $(V_k{}^tV_k)_{i,j} = \lambda_k p_{i,k} p_{j,k}$, donc pour tout couple (i, j) :

$$(\sum_{k=1}^{m} V_k{}^tV_k)_{i,j} = (\sum_{k=1}^{n} V_k{}^tV_k)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} \lambda_k p_{j,k} = (PD{}^tP)_{i,j}$$

Ainsi :

$$R = PD{}^tP = \sum_{k=1}^{m} V_k{}^tV_k$$

4. Posons : $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $C = A \oplus V{}^tV = (c_{i,j})$.

On a : $c_{i,j} = a_{i,j} v_i v_j$, et comme A est symétrique, il en est de même de C. De plus, on a pour tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\langle Cx, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_i v_j x_i x_j = \langle Ay, y\rangle \geqslant 0$$

avec $y = (v_1 x_1, \ldots, v_n x_n)$.
Par conséquent, la matrice C est bien positive.

En utilisant la question précédente et la question 1, on écrit $B = \sum_{k=1}^{m} V_k {}^tV_k$ et on en déduit immédiatement que $A \otimes B = \sum_{k=1}^{m} A \otimes \left(V_k {}^tV_k\right) \geqslant 0$ comme somme de matrices positives.

Exercice 2.20.

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note U la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1, I la matrice identité d'ordre n et $E = \mathrm{Vect}(I, U)$, le sous-espace vectoriel engendré par U et I.

1. Montrer que (I, U) forme une base de E.

2. Les éléments de E sont-ils inversibles avec un inverse dans E ? Sont-ils diagonalisables ?

On pose : $M_0 = \dfrac{1}{n}U$ *et* $M_1 = I - M_0$.

3. a) Montrer que M_0 et M_1 sont deux matrices de projecteurs formant une base de E.

b) Soit $A = \alpha I + \beta U \in E$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A^p dans la base (M_0, M_1).

Soit S l'ensemble des matrices $H = (h_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\begin{cases} \forall\, i, j \in [\![1, n]\!], h_{i,j} \geqslant 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant n \implies \sum\limits_{j=1}^{n} h_{i,j} = 1 \end{cases}$.

4. Soit A un élément de $E \cap S$. Montrer que les deux suites réelles $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, A^p = a_p M_0 + b_p M_1$$

sont convergentes sauf éventuellement lorsque $n = 2$.

Solution :

1. U n'est pas une matrice scalaire, donc la famille (I, U) est libre. Etant génératrice de E, c'est une base de E et $\dim(E) = 2$.

2. $\star$ La matrice $A = \alpha I + \beta U$ est inversible **dans** E si et seulement s'il existe $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tels que $(\alpha I + \beta U)(\alpha' I + \beta' U) = I$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha\alpha' = 1 \\ \beta'(\alpha + n\beta) = -\beta\alpha' \end{cases}$$

Ainsi, A est inversible dans E si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -n\beta$. Son inverse est alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha}I - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + n\beta)}U$$

$\star$ La matrice U est de rang 1 ; ses valeurs propres sont 0, de sous-espace propre associé $\mathrm{Ker}\, U$, et n de sous-espace propre de dimension 1 engendré par une colonne de U. La matrice I est diagonale. Il existe une matrice P orthogonale (car U est symétrique tout comme I) telle que $U = PD{}^tP$. Et $A = \alpha U + \beta I = P(\alpha D + \beta I){}^tP$. Ainsi toutes les matrices de E sont diagonalisables. Enfin, dans une base de diagonalisation de U, il vient :

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \alpha & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n\beta + \alpha \end{pmatrix} {}^tP$$

3. a) On vérifie que $M_0^2 = \dfrac{1}{n^2}U^2 = M_0$, et $M_1^2 = I + M_0^2 - 2M_0 = I - M_0 = M_1$.

On remarque que $M_0 M_1 = M_1 M_0 = 0$.

On a $\alpha M_0 + \beta M_1 = 0 \iff \beta I + (\dfrac{\alpha - \beta}{n})U = 0$, qui n'admet que $\alpha = \beta = 0$ comme solution. Donc, M_0 et M_1 sont deux matrices de projecteurs appartenant à E et formant une base de E.

b) En écrivant $A = \alpha I + \beta U = \alpha(M_0 + M_1) + n\beta M_0$, il vient :

$$A = (\alpha + n\beta)M_0 + \alpha M_1$$

Les matrices M_0 et M_1 commutant, on peut utiliser la formule du binôme et par la remarque précédente :

$$A^p = (\alpha + n\beta)^p M_0 + \alpha^p.M_1.$$

4. Dire que $A = \alpha I + \beta U \in E \cap S$ équivaut à dire que $\begin{cases} \beta \geqslant 0 \\ \alpha + \beta \geqslant 0 \\ \alpha + n\beta = 1 \end{cases}$.

Or $\beta \geqslant 0$ entraîne $\alpha = 1 - n\beta \leqslant 1$, et $\beta \geqslant -\alpha$ entraîne $\alpha \leqslant 1 + n\alpha$, soit $\alpha \geqslant \dfrac{-1}{n-1}$. Ainsi :

$$\alpha \in \left[\frac{-1}{n-1}, 1\right] \subset [-1, 1]$$

On a donc : $A^p = M_0 + \alpha^p M_1$.

- Si $-1 < \alpha < 1$: $\lim\limits_{p \to +\infty} \alpha^p = 0$ et $(A^p)_p$ converge vers M_0.
- Si $\alpha = 1$, alors $\beta = 0$ et $A = M_0 + M_1 = I$, donc $A^p = I$.
- Si $\alpha = -1$, alors $\beta = \dfrac{2}{n}$, $A = M_0 - M_1 \implies A^p = M_0 + (-1)^p M_1$ et la suite $(A^p)_p$ ne converge pas.

Mais dans ce cas $\alpha + \beta \geqslant 0 \implies \beta = \dfrac{2}{n} \geqslant 1 \implies n \leqslant 2 \implies n = 2$.

Dans ce cas : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^{2p} = I, A^{2p+1} = A$.

Ainsi, la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ diverge si et seulement si $n = 2$ et $\alpha = -1$.

Exercice 2.21.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 4. On note U l'ensemble des vecteurs de norme 1 de E.
Un endomorphisme q de E est dit orthogonal si : $\forall\, x, y \in E, \langle q(x), q(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
Un endomorphisme orthogonal q est appelé quart de tour si $q^2 = -Id$, où Id représente l'application identité.

On note Q l'ensemble des quarts de tour de E et on pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'un quart de tour transforme tout vecteur x de E en un vecteur orthogonal à x.

2. a) Soit q un endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormée est égale à M. Montrer que q est un quart de tour.

b) Soit q un quart de tour. Montrer que quel que soit $u \in U$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E avec $e_1 = u$ et telle que la matrice de q dans $\mathcal{B}$ soit égale à M.

3. Soit $q \in Q$ et $u \in U$. On note P le plan engendré par u et $q(u)$.

a) Montrer que $(u, q(u))$ est une base orthonormée de P.

b) Montrer que le plan P est invariant par q. Décrire géométriquement la restriction de q au plan P.

c) Si v est un vecteur unitaire de P, il existe un nombre réel θ tel que

$$v = \cos(\theta)u + \sin(\theta)q(u)$$

Déterminer les matrices de passage de la base $(u, q(u))$ à la base $(v, q(v))$ et de la base $(v, q(v))$ à la base $(u, q(u))$.

4. Soit $q \in Q$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f = \cos(\alpha)Id + \sin(\alpha)q$.

a) Montrer que f est un automorphisme orthogonal.

b) Montrer que tout vecteur unitaire u est contenu dans un plan P invariant par f. Décrire géométriquement la restriction de f à P.

Solution :

1. Soit $x \in E$ et $q \in Q$. On calcule le produit scalaire entre x et son image par q.

$$\begin{aligned}\langle q(x), x\rangle &= \langle q(x), -q^2(x)\rangle \qquad (\text{car } q^2 = -Id)\\ &= -\langle q(x), q(q(x))\rangle \qquad (\text{car } q \text{ est orthogonal})\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle q(x), x\rangle = 0$ et $q(x)$ est orthogonal à x

2. a) $\star$ On vérifie aisément que $M^2 = -I_4$.

$\star$ On vérifie également que ${}^tMM = I_4$ et donc pour toutes colonnes X et Y :

$$ {}^tXY = {}^tX({}^tMM)Y = {}^t(MX)(MY)$$

Ce qui traduit exactement la propriété : $\forall\, x, y, \langle x, y\rangle = \langle q(x), q(y)\rangle$.

b) Remarquons que pour tout vecteur x, on a en particulier $\|q(x)\| = \|x\|$, donc $\operatorname{Ker} q = \{0\}$ et un endomorphisme orthogonal est un automorphisme.

$\star$ Soit $u \in U$, $q(u)$ est orthogonal à u. On note $e_1 = u$ et $e_2 = q(u)$. On remarque que $q(e_2) = q^2(u) = -u = e_1$. Comme e_1 et e_2 sont orthogonaux et de norme 1, donc non nuls, ils forment une famille libre.

$\star$ Soit e_3 un vecteur unitaire orthogonal à e_1 et e_2 et posons $e_4 = q(e_3)$. Le vecteur e_3 est orthogonal à e_1 et e_2, donc e_4 est orthogonal à $q(e_1) = e_2$ et à $q(e_2) = -e_1$, donc à e_1. En clair (e_3, e_4) est en fait une base (orthonormée) du supplémentaire orthogonal de $\operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ et (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

Relativement à cette base, la matrice de q est M.

3. a) D'après la question 1, u et $q(u)$ sont deux vecteurs orthogonaux de norme 1, donc la famille $(u, q(u))$ est libre. Comme P est engendré par u et $q(u)$, cette famille est bien une base orthonormée de P.

b) Soit $x \in P$. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda u + \mu q(u)$.

Ainsi, $q(x) = \lambda q(u) - \mu u \in P$ et P est stable par q. Comme la matrice de $q_{|P}$ dans la base $(u, q(u))$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $q_{|P}$ est la rotation d'angle $\pi/2$ (dans le plan P ainsi orienté par la base $(u, q(u))$).

c) On remarque que $q(v) = -\sin\theta u + \cos\theta q(u)$. Ainsi, la matrice de passage de la base $(u, q(u))$ à la base $(v, q(v))$ vaut $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. On retrouve une matrice de rotation et la matrice de passage de la base $(v, q(v))$ à la base $(u, q(u))$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

4. a) Soient $x, y \in E$.

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= (\cos^2\alpha)\langle x, y\rangle + \cos\alpha\sin\alpha(\langle x, q(y)\rangle + \langle q(x), y\rangle)\\ &\qquad\qquad + (\sin^2\alpha)\langle q(x), q(y)\rangle\\ &= \langle x, y\rangle + \cos\alpha\sin\alpha(\langle -q^2(x), q(y)\rangle + \langle q(x), q(y)\rangle)\\ &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, f est bien un endomorphisme orthogonal.

b) Soit $u \in U$. Comme précédemment, on définit le plan P engendré par la famille $(u, q(u))$. On montre aisément que ce plan est stable par f. De plus, la matrice de $f_{|P}$ dans la base $(u, q(u))$ est $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Ainsi, la matrice de $f_{|P}$ dans la base $(u, q(u))$ est une matrice de rotation.

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

Soit n un entier $\geqslant 1$. Une urne contient n boules blanches et une boule rose. On effectue une succession de tirages d'une boule à chaque fois. Si on tire la boule rose, on la remet dans l'urne avant le tirage suivant ; si on tire une boule blanche, on ne la remet pas dans l'urne. Soit X le nombre de tirages juste nécessaires pour qu'il n'y ait plus aucune boule blanche dans l'urne.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$.

1. Calculer $P(X = n)$.

2. a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que : $\ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \ln n$.

En déduire un équivalent simple de $\sum\limits_{j=2}^{n} \dfrac{1}{j}$ quand n tend vers l'infini.

b) Trouver de même un équivalent simple de $\sum\limits_{j=2}^{n} \dfrac{\ln j}{j}$ quand n tend vers l'infini.

c) En déduire un équivalent simple de $\sum\limits_{j=2}^{n} \big(\dfrac{1}{j} \sum\limits_{i=2}^{j-1} \dfrac{1}{i}\big)$ quand n tend vers l'infini.

3. Calculer $P(X = n+1)$, puis en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

4. Calculer $P(X = n+2)$, puis en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

Solution :

1. Soit B_k $(k \geqslant 1)$ l'événement « la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche ».
Alors $[X = n] = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$. Donc, par la formule des probabilités composées on a :
$P(X = n) = P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \ldots$

$$= \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{2} = \frac{1}{n+1}$$

2. a) Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. En sommant la première inégalité de $k = 1$ à $k = n - 1$, on obtient $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \ln n$; en sommant la seconde inégalité de $k = 2$ à $k = n$ on obtient, $\ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k}$. Comme $\ln n \sim \ln(n+1) - \ln 2$ on a donc :

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \sim \ln n$$

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ décroît sur $[e,+\infty[$ et donc sur $[3,+\infty[$. On obtient donc de même :

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_3^{n} \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

D'où en calculant aussi l'intégrale de gauche et comme $\ln(n+1) \sim \ln n$:

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{\ln j}{j} \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

c) Par sommation d'inégalités du 2. a) ($k = i$ et $n = j-1$), on a :

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}(\ln j - \ln 2) \leqslant \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j}\sum_{i=2}^{j-1} \frac{1}{i}\right) \leqslant \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\ln(j-1) \leqslant \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\ln j$$

D'après les questions 2. a et 2. b, comme $\ln n = o\big(\frac{1}{2}(\ln n)^2\big)$, on a :

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}(\ln j - \ln 2) = \big(\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\ln j\big) - \ln 2\big(\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\big) \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

d'où :

$$\sum_{j=3}^{n} \left(\frac{1}{j}\sum_{i=2}^{j-1} \frac{1}{i}\right) \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

3. L'événement $[X = n+1]$ est réalisé lorsque la boule rose est tirée une seule fois lors des $n+1$ premiers tirages, mais pas au $(n+1)$-ième rang (car sinon on réalise $X = n$), soit :

$$(X = n+1) = \bigcup_{k=1}^{n} [B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k} \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{n+1}]$$

Les évènements de la réunion sont incompatibles, donc :

$$P(X = n+1) = \sum_{k=1}^{n} P(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k} \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{n+1})$$

Par la formule des probabilités composées, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, on a :

$$\begin{aligned} &P(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k} \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{n+1}) \\ &\quad = P(B_1)P_{B_1}(B_2)\dots P_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(\overline{B}_k)P_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}}(B_{k+1}) \\ &\qquad\qquad \dots P_{B_1\cap\dots\overline{B_k}\cap\dots B_n}(B_{n+1}) \\ &\quad = \frac{n}{n+1}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-k+2}{n-k+3}\times\frac{1}{n-k+2}\times\frac{n-k+1}{n-k+2}\times\cdots\times\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, par simplifications en cascade :

$$P(X = n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)(n-k+2)} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}.$$

Donc, d'après la question 2. a) :

$$P(X = n+1) \sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} \sim \frac{\ln n}{n}.$$

4. L'événement $[X = n+2]$ est réalisé lorsque la boule rose est tirée deux fois lors des $n+2$ premiers tirages, mais pas au $(n+2)^{\text{ème}}$ rang (car sinon on réalise $X < n+2$). De même qu'à la question 3, on a donc :

$$\begin{aligned} P(X = n+2) &= \sum_{1\leq k<l\leq n+1} P(B_1 \cap \cdots \cap \overline{B_k} \cap \cdots \cap \overline{B_l} \cap \cdots \cap B_{n+2}) \\ &= \sum_{1\leq k<l\leq n+1} \frac{1}{(n+1)(n+2-k)(n+3-l)} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{2\leq i\leq j\leq n+1} \frac{1}{ij} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \sum_{j=2}^{n} \big(\frac{1}{j}\sum_{i=2}^{j-1} \frac{1}{i}\big) \end{aligned}$$

Donc, puisque le premier terme est de limite finie, donc négligeable devant le second :

$$P(X = n+2) \sim \frac{(\ln n)^2}{2n}$$

Exercice 3.2.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une variance et dont l'espérance $E(X) = \lambda$ est un paramètre réel inconnu.

Pour n entier $\geqslant 1$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon *i.i.d.* de la loi de X. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

On note S_λ l'ensemble des statistiques $U_n = g_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, où g_n est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, qui sont des estimateurs sans biais de λ et qui admettent une variance notée V.

On admet la propriété $\mathcal{P}$ suivante :

« Pour tout U_n de S_λ, on a : $\text{cov}(\overline{X}_n, U_n - \overline{X}_n) = 0$. »

On dit qu'un élément Z_n de S_λ est un *estimateur optimal* dans S_λ si pour tout U_n de S_λ, on a : $V(Z_n) \leqslant V(U_n)$.

1. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur optimal dans S_λ.

2. Soit Z_n un estimateur optimal dans S_λ. Pour α réel et U_n de S_λ, on pose :

$$W_n(\alpha) = \alpha U_n + (1 - \alpha) Z_n$$

a) Montrer que pour tout α réel, $W_n(\alpha)$ est élément de S_λ.

b) Calculer $V(W_n(\alpha))$. En déduire que $\text{Cov}(Z_n, U_n - Z_n) = 0$.

c) Montrer que $Z_n = \overline{X}_n$ presque sûrement.

3. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on admet que la propriété $(\mathcal{P})$ est vérifiée.

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose : $T_n = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$

a) Montrer que T_n est un estimateur sans biais de λ.

b) On admet sans démonstration l'existence de $V(T_n)$.

Montrer que $\text{Cov}(T_n, \overline{X}_n) = \frac{\lambda}{n}$.

Solution :

1. $\overline{X}_n$ s'écrit comme une fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$: c'est un estimateur. De plus, $\overline{X}_n$ admet une espérance égale à λ et une variance, ce qui entraîne que $\overline{X}_n$ appartient à S_λ.

Par la propriété $(\mathcal{P})$, on a : $\text{cov}(\overline{X}_n, U_n) = V(\overline{X}_n)$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, : $|\text{cov}(\overline{X}_n, U_n)|^2 \leqslant V(\overline{X}_n) V(U_n)$, donc $V(\overline{X}_n) \leqslant V(U_n)$, ce qui montre que $\overline{X}_n$ est optimal.

2. a) Question évidente, par linéarité de l'opérateur espérance et le fait que si U et V ont un moment d'orde deux, alors (U, V) a une covariance.

b) Bien évidemment :

$$\begin{aligned} V(W_n(\alpha)) &= \alpha^2 V(U_n) + (1-\alpha)^2 V(Z_n) + 2\alpha(1-\alpha)\text{cov}(U_n, Z_n) \\ &= \alpha^2 V(U_n - Z_n) - 2\alpha(V(Z_n) - \text{cov}(U_n, Z_n)) + V(Z_n) \end{aligned}$$

Or Z_n étant optimal, il vient, pour tout α réel :

$$\alpha^2 V(U_n - Z_n) - 2\alpha(V(Z_n) - \text{cov}(U_n, Z_n)) \geqslant 0$$

Ce trinôme du second degré en α restant positif ou nul, son discriminant est négatif, soit :
$(V(Z_n) - \text{Cov}(U_n, Z_n))^2 \leqslant 0$, donc $V(Z_n) = \text{Cov}(U_n, Z_n)$, ou

$$\text{Cov}(Z_n, U_n - Z_n) = 0.$$

c) On écrit : $Z_n = \overline{X}_n + (Z_n - \overline{X}_n)$ ce qui entraîne que

$$V(Z_n) = V(\overline{X}_n) + V(Z_n - \overline{X}_n) + 2\,\text{Cov}(\overline{X}_n, Z_n - \overline{X}_n).$$

Comme Z_n et $\overline{X}_n$ sont optimaux, il vient $V(Z_n - \overline{X}_n) + 2\,\text{Cov}(\overline{X}_n, Z_n - \overline{X}_n) = 0$ et toujours par optimalité de $\overline{X}_n$, $\text{Cov}(\overline{X}_n, Z_n - \overline{X}_n) = 0$.

Finalement, $V(Z_n - \overline{X}_n) = 0$ et $Z_n - \overline{X}_n = C$ p.s., donc $Z_n - \overline{X}_n = 0$ p.s.

3. a) En écrivant $X_i - \overline{X}_n = (X_i - \lambda + \lambda - \overline{X}_n)$, il vient :

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \lambda)^2 + n(\overline{X}_n - \lambda)^2 - 2n(\overline{X}_n - \lambda)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \lambda)^2 - n(\overline{X}_n - \lambda)^2$$

En prenant les espérances :

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\Big) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) - nV(\overline{X}_n) = (n-1)\lambda$$

Par suite $E(T_n) = \lambda$ et T_n est un estimateur sans biais de λ.

b) Comme T_n admet une variance, il appartient à S_λ et par la propriété $(\mathcal{P})$ et $T_n \neq \overline{X}_n$, il vient $\mathrm{Cov}(\overline{X}_n, T_n - \overline{X}_n) = 0$. Donc :

$$\mathrm{Cov}(T_n, \overline{X}_n) = \frac{\lambda}{n}$$

Exercice 3.3.

On observe le passage de véhicules à un carrefour. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on note X_t le nombre de véhicules qui passent entre les dates 0 et t, avec la convention $X_0 = 0$. On suppose que l'on définit ainsi une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant les propriétés suivantes :

• $E(X_t)$ existe pour tout $t \geqslant 0$ et la fonction $m(t) = E(X_t)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}^+$, sa dérivée étant notée $\lambda(t)$.

• Le nombre de passages $Y_{t_0,h}$ se produisant entre les instants t_0 et $t_0 + h$, avec $t_0 \geqslant 0$ et $h > 0$, est une variable aléatoire dont la loi est définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, P(Y_{t_0,h} = k) = \frac{\alpha^k \mathrm{e}^{-\alpha}}{k!} \text{ où } \alpha = \int_{t_0}^{t_0+h} \lambda(u)du = m(t_0 + h) - m(t_0)$$

(on notera donc que α dépend de t_0 et de h)

1. Soit T_1 la variable aléatoire représentant la date de passage du premier véhicule observé. Calculer $P(T_1 \geqslant t)$. En déduire une densité de T_1 en utilisant les fonctions λ et m.

2. a) On suppose que l'on connaît la date t_0 de passage du premier véhicule. Soit L_1 la longueur de l'intervalle de temps séparant les passages du premier et du deuxième véhicule. Calculer une densité de L_1 en fonction de t_0, λ et m.

b) On suppose dans cette question que pour $t \geqslant 0$, $\lambda(t) = at + b$, a et b étant des constantes positives. Déterminer une densité f_1 de L_1 dans ce cas.

3. On suppose désormais que pour tout $t \geqslant 0$: $\lambda(t) = \lambda_0$, constante positive. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit T_k la date de passage du k-ième véhicule.

a) Calculer $P(T_k \geqslant t)$ à l'aide de la loi de $Y_{0,t}$. Démontrer qu'une densité f_k de T_k est :

$$f_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0(\lambda_0 t)^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}}{(k-1)!} & \text{pour } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Calculer l'espérance de T_k.

Solution :

1. On a $P(T_1 \geqslant t) = P(X_t = 0) = P(Y_{0,t}) = 0) = \mathrm{e}^{-\alpha} = \mathrm{e}^{-m(t)}$.
D'où $P(T_1 < t) = 1 - \mathrm{e}^{-m(t)}$ et on peut prendre : $f_{T_1}(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{-m(t)}$ (bien sûr pour $t \geqslant 0$).

2. a) On a : $P(L_1 > t) = P(Y_{t_0,t} = 0) = \mathrm{e}^{-(m(t_0+t)-m(t_0))}$.
D'où, $P(L_1 \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-(m(t_0+t)-m(t_0))}$ et,

$$f_{L_1}(t) = m'(t_0 + t)\mathrm{e}^{-(m(t_0+t)-m(t_0))} = \lambda(t_0 + t)\mathrm{e}^{-(m(t_0+t)-m(t_0))}$$

b) Dans ce cas $m(t) = a\dfrac{t^2}{2} + bt$, ce qui donne :

$$f_1(t) = (a(t_0+t)+b)\exp(-(a\frac{(t+t_0)^2}{2} + b(t+t_0) - a\frac{t_0^2}{2} - bt_0))$$

$$f_1(t) = \begin{cases} (a(t+t_0)+b)\exp(-(a\frac{t^2}{2} + (at_0+b)t)) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. a) Pour $t \geqslant 0$, on a, $P(T_k \geqslant t) = P(Y_{0,t} < k) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dfrac{\alpha^i \mathrm{e}^{-\alpha}}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dfrac{(\lambda_0 t)^i \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}}{i!}$

On en déduit : $f_{t_k}(t) = -\lambda_0 \sum\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{(\lambda_0 t)^{i-1}\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}}{(i-1)!} + \lambda_0 \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dfrac{(\lambda_0 t)^i \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}}{i!}$

$$f_{t_k}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0(\lambda_0 t)^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}}{(k-1)!} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Enfin :

$$\begin{aligned} E(T_k) &= \int_0^{+\infty} t f_k(t)dt = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^{+\infty} (\lambda_0 t)^k \mathrm{e}^{-\lambda_0 t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda_0 (k-1)!}\int_0^{+\infty} u^k \mathrm{e}^{-u} du = \frac{k}{\lambda_0} \end{aligned}$$

Exercice 3.4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \ldots, X_n$, qui suivent une loi normale d'espérance m et de variance σ^2.

On pose $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $U_n = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,j} = \begin{cases} n-1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$. Soit B le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.

c) Justifier l'existence d'une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ dont la dernière colonne est proportionnelle à B et telle que ${}^tPAP = D$, où D est une matrice diagonale à déterminer (on ne demande pas la matrice P).

d) On note ${}^tP = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

Montrer que pour tout i de $[\![1, n-1]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j} = 0$ et pour tout i de $[\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 = 1$.

2. On note $M = \dfrac{1}{n}A$ et q l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), q(X) = {}^tXMX$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\overline{x}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j$.

Montrer que $q(X) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2$, puis $q(X) = \sum\limits_{i=1}^{n-1}(\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}x_j)^2$.

3. Pour tout i de $[\![1, n-1]\!]$, on pose $Y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}X_j$.

a) Justifier que $E(Y_i) = 0$ et $V(Y_i) = \sigma^2$.

b) On suppose que les Y_i sont mutuellement indépendantes. Montrer que U_n suit la loi $\Gamma\big(2, \dfrac{n-1}{2}\big)$.

Solution :

1. a) La matrice A est symétrique réelle : elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

b) Si l'on note J la matrice dont tous les éléments valent 1, on a $A = nI - J$. Les valeurs propres de J sont 0 de sous-espace propre associé de dimension $n-1$ ($\operatorname{Ker} J$), et n dont le sous-espace propre associé est de dimension 1 engendré par le vecteur B (orthogonal à $\operatorname{Ker} J$).
Les valeurs propres de A sont donc n de sous-espace propre associé $\operatorname{Ker} J$ de dimension $n-1$, et 0 de sous-espace propre associé $\operatorname{Vect}(B)$.

c) La matrice D demandée est la matrice diagonale $\operatorname{diag}(n, \ldots, n, 0)$.

d) La matrice P étant orthogonale, la relation ${}^tPP = I$ donne : $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 = 1$. Si l'on note $C_1, \ldots, C_{n-1}$ les premières colonnes de la matrice P, elles représentent les coordonnées des vecteurs du noyau de J, ce qui donne la relation : $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j} = 0$.

2. L'écriture de l'application q donne :

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j)^2$$

La relation $q(X) = \sum\limits_{i=1}^{n-1}(\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}x_j)^2$ est obtenue à partir de l'écriture de q dans la base orthonormée de diagonalisation, c'est-à-dire $q(X) = {}^t(PX)D(PX)$.

3. a) On a $E(Y_i) = 0$ par linéarité de l'espérance et la relation $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j} = 0$.
Par indépendance des variables aléatoires (X_i), il vient :

$$V(Y_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 V(Y_j) = \sigma^2.$$

Enfin, on sait (encore l'indépendance des X_i) que les Y_i suivent encore des lois normales. Elles suivent donc la loi normale centrée de variance σ^2.

b) Grâce aux questions précédentes, on peut écrire :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}X_j\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{Y_i}{\sigma}\Big)^2$$

Donc, U_n est la somme des carrés de $n-1$ variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite. On sait alors que : $U_n \hookrightarrow \Gamma\left(2, \dfrac{n-1}{2}\right)$.

Exercice 3.5.

On considère une fonction F définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles, croissante, continue, telle que $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

1. On définit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n = F(n+1) - F(n)$.
Montrer que la série de terme général p_n est convergente et déterminer sa somme.

2. a) Soit x un réel fixé dans $[0, 1[$. Montrer que la série de terme général $F(x+n) - F(n)$ est convergente.

b) On considère la fonction φ définie sur $[0, 1[$ par : $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(F(x+n) - F(n))$.
Montrer que φ est croissante.

c) Soient x et y deux réels fixés de $[0, 1[$. Montrer que pour tout ε réel fixé strictement positif, il existe N_0 entier positif indépendant de x et y tel que, pour tout $N \geqslant N_0$:

$$\sum_{n=N}^{+\infty} |F(x+n) - F(y+n)| < \varepsilon$$

En déduire que φ est continue sur $[0, 1[$.

3. On considère désormais que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère les variables aléatoires notées $d(X)$ et $\lfloor X \rfloor$ définies par, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$d(X)(\omega) = X(\omega) - \lfloor X(\omega) \rfloor \text{ et } \lfloor X \rfloor (\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

a) Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$ à l'aide des (p_n) et la fonction de répartition de $d(X)$.

b) On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Expliciter la loi de $\lfloor X \rfloor$ et la fonction de répartition de $d(X)$. Déterminer une densité de $d(X)$, puis calculer les espérances de ces deux variables aléatoires.

Solution :

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{n=0}^{N} p_n = F(N+1)$. D'après les hypothèses, on en conclut que la série converge et que sa somme vaut 1.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant F(x+n) - F(n) \leqslant p_n$. Cela montre que la série considérée est convergente et que sa somme est inférieure à 1.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réels x et y tels que $x \geqslant y$, $F(x+n) - F(n) \geqslant F(y+n) - F(n)$ ce qui montre que $\varphi(x) \geqslant \varphi(y)$ et donc que la fonction φ est croissante.

c) De manière évidente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|F(x+n) - F(y+n)| \leqslant p_n$. D'où,

$$\forall N \in \mathbb{N}, N \geqslant N_0, \sum_{n=N}^{+\infty} |F(x+n) - F(y+n)| \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} p_n$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la convergence de la deuxième série implique qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que la somme considérée soit inférieure à ε, d'où le résultat.
On écrit alors :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \sum_{n=1}^{N_0} |F(x+n) - F(y+n)| + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |F(x+n) - F(y+n)|$$

La seconde somme est inférieure à ε, indépendamment de x et y, et par continuité d'une somme finie de fonctions continues, il existe $\delta > 0$ tel que la première somme soit inférieure à ε, pour $|x-y| < \delta$. Ceci montre la continuité de φ sur $0, 1[$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\lfloor X \rfloor = n) = p_n$, et :

$$P(d(X) < x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Sous les hypothèses de cette question, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(\lfloor X \rfloor = n) = \mathrm{e}^{-\lambda n} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(x+n)}) - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda n})\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-\lambda n} - \mathrm{e}^{-\lambda(x+n)}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda n}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-\lambda})^n = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Une densité de $d(X)$ est donnée par $f(x) = \dfrac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$, si $x \in [0, 1[$, et 0 sinon.
On a :

$$\begin{aligned} E(\lfloor X \rfloor) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(\mathrm{e}^{-\lambda n} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)}) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-\lambda n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1-1)\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \end{aligned}$$

et

$$E(d(X)) = E(X) - E(\lfloor X \rfloor) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} = \frac{1-(\lambda+1)\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda(1-\mathrm{e}^{-\lambda})}$$

Exercice 3.6.

Soit X une variable aléatoire réelle de densité g et de fonction de répartition G. On suppose que g est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$.

1. Exprimer, pour tout réel x, $G(-x)$ en fonction de $G(x)$.

2. On définit la fonction $\widetilde{g}$ par : $\widetilde{g}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 2g(t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$.

Vérifier que $\widetilde{g}$ est une densité de probabilité. On note $\widetilde{X}$ une variable aléatoire de densité $\widetilde{g}$.

3. Exprimer la fonction de répartition $\widetilde{G}$ de $\widetilde{X}$ en fonction de G.
Donner en particulier, pour $0 < a < b$, $\widetilde{G}(b) - \widetilde{G}(a)$ en fonction de $G(b)$ et de $G(a)$.

4. Pour tout m de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et tout réel t, on pose :

$$f_m(t) = 2(1-m)g(t) + (2m-1)\widetilde{g}(t).$$

a) Vérifier que f_m est une densité de probabilité et exprimer $f_m(t)$ en fonction de m et de $g(t)$.

b) Soit Y_m une variable aléatoire de densité f_m. Déterminer la fonction de répartition F_m de Y_m, en fonction de m et de G.

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\lfloor |Y_m| \rfloor$ (partie entière de la valeur absolue de Y_m) en fonction de G, puis de $\widetilde{G}$.

5. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que Y_m.
On pose, pour tout entier naturel n non nul, $Z_n = (X_1, \dots, X_n)$ et $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(X_i \geq 0)}$, c'est-à-dire que T_n est le nombre de variables du n-uplet Z_n qui sont positives. On pose enfin $S_n = \frac{1}{n} T_n$.

a) Donner la loi de T_n, son espérance, sa variance.

b) Montrer que S_n est un estimateur convergent de m.

6. Soit φ une fonction de $[\![0, n]\!]$ dans $\mathbb{R}$, telle que : $\forall m \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, E(\varphi(T_n)) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$.

Solution :

1. On a $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ et donc, $G(-x) = \int_{-\infty}^{-x} g(t)dt$. Avec le changement de variable $u = -t$, on obtient $G(-x) = \int_{+\infty}^{x} g(u)(-du) = \int_{x}^{+\infty} g(u)du$. Conclusion :

$$G(-x) = 1 - G(x).$$

2. La fonction $\widetilde{g}$ est évidemment continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et positive. De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{g}(t)dt = 2\int_{0}^{+\infty} g(t)dt = 1.$

3. Si $x < 0$, $\widetilde{G}(x) = 0$.
Si $x \geqslant 0$, $\widetilde{G}(x) = \int_{-\infty}^{x} \widetilde{g}(t)dt = 2\int_{0}^{x} g(t)dt = \int_{-x}^{x} g(t)dt = G(x) - G(-x)$

$$= 2G(x) - 1.$$

On a donc, pour $0 < a < b$, $\widetilde{G}(b) - \widetilde{G}(a) = 2(G(b) - G(a))$.

4. a) La fonction f_m est évidemment continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et positive.
De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t)dt = 2(1-m)\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt + (2m-1)\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{g}(t)dt$, soit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t)dt = 2(1-m) + (2m-1) = 1.$$

Si $t \leqslant 0$, on a $f_m(t) = 2(1-m)g(t)$.
Si $t > 0$, on a $f_m(t) = 2(1-m)g(t) + 2(2m-1)g(t) = 2mg(t)$.

b) Si $x \leqslant 0$, $F_m(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 2(1-m)g(t)dt = 2(1-m)G(x)$.

Si $x > 0, F_m(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 2(1-m)g(t)dt + \int_0^x 2mg(t)dt = 1 - m + 2m(G(x) - \frac{1}{2})$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} P(\lfloor |Y_m| \rfloor = k) &= P(k \leqslant |Y_m| < k+1) \\ &= P(k \leqslant Y_m < k+1) + P(-k-1 < Y_m \leqslant -k). \end{aligned}$$

Soit $P(\lfloor |Y_m| \rfloor = k) = F_m(k+1) - F_m(k) + F_m(-k) - F_m(-k-1)$. En remplaçant F_m à l'aide de G, on trouve :

$$P([|Y_m|] = k) = 2(G(k+1) - G(k)) = \widetilde{G}(k+1) - \widetilde{G}(k).$$

5. a) La variable aléatoire T_n suit une loi binomiale dont le paramètre est

$$p = P(X_i \geqslant 0) = \int_0^{+\infty} f_m(t)dt = m.$$

On en déduit que $E(T_n) = nm$ et $V(T_n) = nm(1-m)$.

b) On a donc $E(S_n) = m$ et $V(S_n) = \dfrac{m(1-m)}{n}$. Ceci prouve, via l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef, que S_n converge en probabilité vers m et est donc un estimateur convergent de m.

6. On a : $E(\varphi(T_n)) = 0 \iff \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi(k)\binom{n}{k} m^k (1-m)^{n-k} = 0$

$$\iff \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)\binom{n}{k}\Big(\frac{m}{1-m}\Big)^k = 0.$$

Considérons le polynôme P défini par $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi(k)\binom{n}{k} X^k$. Ce polynôme s'annule pour tout les réels $\alpha_m = \dfrac{m}{1-m}$ obtenus lorsque m parcourt l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1[$. Il possède donc une infinité de racines, c'est donc le poynôme nul.

Conclusion : $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \varphi(k) = 0$ et φ est la fonction nulle.

Exercice 3.7.

1. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à densité définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ et f_Y une densité de Y. Pour tout z réel, justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant z - y)\, f_Y(y)dy$$

On admet que, si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\forall z \in \mathbb{R}, P(X + Y \leqslant z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant z - y)\, f_Y(y)dy$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit la loi exponentielle de paramètre $k\alpha$.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, Φ_n la fonction de répartition de S_n et $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

2. Montrer que : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*), (\forall z \in \mathbb{R}_+), \Phi_n(z) = \big(1 - \mathrm{e}^{-\alpha z}\big)^n$.

(*On pourra employer (en le justifiant) le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-\alpha x}$.*)

3. a) Calculer l'espérance $E(T_n)$ de la variable aléatoire T_n. A-t-elle une limite pour n tendant vers $+\infty$? Déterminer un équivalent de $E(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Calculer la variance de T_n. A-t-elle une limite pour n tendant vers $+\infty$?

4.Étudier la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution :

1. Par comparaison : $\forall\, z\in\mathbb{R}, 0\leqslant P(X\leqslant z-y)f_Y(y)\leqslant f_Y(y)$ qui est une fonction d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$. La convergence en résulte.

2. La variable $S_1=X_1$ suit la loi $\mathcal{E}(\alpha)$ et par récurrence, pour $z\geqslant 0$ comme $S_n(\Omega)=\mathbb{R}^+$:
$P(S_{n+1}\leqslant z)=P(S_n+X_{n+1}\leqslant z)=\displaystyle\int_0^{+\infty}P\big(S_n\leqslant z-x\big)\,(n+1)\alpha\mathrm{e}^{-(n+1)\alpha x}dx$

Comme $P(S_n\leqslant z-x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\geqslant z\\ \big(1-\mathrm{e}^{-\alpha(z-x)}\big)^n & \text{si } x\leqslant z\end{cases}$, en posant $u=\mathrm{e}^{-\alpha x}$ il vient :

$$\begin{aligned}P(S_{n+1}\leqslant z)&=(n+1)\int_0^z\big(1-\mathrm{e}^{-\alpha(z-x)}\big)^n\,\alpha\mathrm{e}^{-(n+1)\alpha x}dx\\ &=(n+1)\int_{\mathrm{e}^{-\alpha z}}^1\big(1-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha z}}{u}\big)^n u^n du=(n+1)\int_{\mathrm{e}^{-\alpha z}}^1\big(u-\mathrm{e}^{-\alpha z}\big)^n du\\ &=\big(1-\mathrm{e}^{-\alpha z}\big)^{n+1}\end{aligned}$$

3. a) Vu que $E(\mathcal{E}(\lambda))=\dfrac{1}{\lambda}$, on a par linéarité $E(T_n)=\dfrac{1}{n\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$ et on en déduit classiquement (par comparaison série–intégrale) :

$$E(T_n)\underset{(\infty)}{\sim}\frac{\ln n}{n\alpha}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Comme $V\big(\mathcal{E}(\lambda)\big)=\dfrac{1}{\lambda^2}$, on a par indépendance des X_k :

$$V(T_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n V(X_k)=\frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

4. La fonction de répartition F_n de T_n est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et, pour $x\geqslant 0$,

$$F_n(x)=P(S_n\leq n\,x)=\Phi_n(n\,x)=\big(1-\mathrm{e}^{-\alpha n\,x}\big)^n$$

À $x>0$ fixé, un développement limité donne :
$F_n(x)=\exp\big[n\ln\big(1-\mathrm{e}^{-\alpha nx}\big)\big]=\exp\big[-n\mathrm{e}^{-\alpha nx}+o\big(n\mathrm{e}^{-\alpha n\,x}\big)\big]\to\mathrm{e}^0=1$
Donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend en loi vers la variable constante égale à 0.

Exercice 3.8.

Une boîte contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire un jeton au hasard, on note son numéro et on le remet dans la boîte. Si le numéro de ce jeton est i, alors on tire au hasard et sans remise i jetons de la boîte que l'on distribue au hasard dans trois urnes U_1, U_2 et U_3 (vides au départ). Pour tout k de $[\![1,3]\!]$, on note X_k la variable aléatoire désignant le nombre de jetons de l'urne U_k après cette opération.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du jeton que l'on a tiré au départ dans la boîte. Quelle est la loi de X ? Déterminer la loi conjointe du couple (X_k,X), où $k\in[\![1,3]\!]$.

2. Calculer pour tout $k\in[\![1,3]\!]$, l'espérance de X_k.

3.a) Trouver la loi du vecteur aléatoire (X_1,X_2,X).

b) En déduire la loi du vecteur aléatoire (X_1,X_2,X_3).

4. On définit pour tout $k\in[\![1,3]\!]$, la variable aléatoire Y_k par : $Y_k=\dfrac{X_k}{X}$.

Calculer les espérances des variables aléatoires Y_k et $(Y_k)^2$. Donner un équivalent de la variance de Y_k, lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. X suit la loi uniforme sur $\{1,\ldots,n\}$. La variable X_k est à valeur $\{0,\ldots,n\}$. Soit $(i,j)\in\{0,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}$. On commence par remarquer que $P\left((X_k=i)\cap(X=j)\right)=0$ si $i>j$.
Pour $i\leqslant j$, on a :

$$P((X_k=i)\cap(X=j))=P_{(X=j)}(X_k=i)P(X=j)=\frac{1}{n}P_{(X=j)}(X_k=i)$$

La loi de X_k sachant $X=j$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(j,1/3)$. D'où :

$$P_{(X=j)}(X_k=i)=\binom{j}{i}\big(\frac{1}{3}\big)^i\big(\frac{2}{3}\big)^{j-i}.$$

D'où :

$$P((X_k=i)\cap(X=j))=\begin{cases}0 & \text{si } i>j\\ \dfrac{1}{n}\dbinom{j}{i}\dfrac{2^{j-i}}{3^j} & \text{si } 0\leqslant i\leqslant j\end{cases}$$

2. On remarque que $X_1+X_2+X_3=X$. Or $E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)$, d'où

$$E(X_k)=\frac{E(X)}{3}=\frac{n+1}{6}$$

3.a) Soit $(i,j,k)\in\{0,\ldots,n\}^2\times\{1,\ldots,n\}$.
On observe que $P((X_1=i)\cap(X_2=j)\cap(X=k))=0$ si $i+j>k$.
Si $i+j\leqslant k$, on a :

$$P_{(X=k)}((X_1=i)\cap(X_2=j))=\frac{1}{3^k}\binom{k}{i}\binom{k-i}{j}$$

D'où :

$$P((X_1=i)\cap(X_2=j)\cap(X=k))=\begin{cases}0 & \text{si } i+j>k\\ \dfrac{1}{n}\dfrac{k!}{i!j!(k-i-j)!}\big(\dfrac{1}{3}\big)^k & \text{si } i+j\leqslant k\end{cases}$$

b) Soit $(i,j,k)\in\{0,\ldots,n\}^3$.
Si $i+j+k>n$ on a $P((X_1=i)\cap(X_2=j)\cap(X_3=k))=0$.
Lorsque $i+j+k\leqslant n$, on voit que :

$$\begin{aligned}p_{i,j,k}&=P((X_1=i)\cap(X_2=j)\cap(X_3=k))\\&=P((X_1=i)\cap(X_2=j)\cap(X=i+j+k))\\&=\frac{1}{n}\frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}\big(\frac{1}{3}\big)^{i+j+k}\end{aligned}$$

4. La variable Y_k est à valeur dans $\Omega=\{a/b;(a,b)\in\{0,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}\}$. On observe que $Y_1+Y_2+Y_3=1$. Par ailleurs et par symétrie, on a :

$$E(Y_1)=E(Y_2)=E(Y_3),\text{ d'où } E(Y_k)=1/3.$$

Utilisons la formule de l'espérance totale par rapport au système complet d'événements $(X=j)$ pour $j=1,\ldots,n$. Il vient :

$$E(Y_k^2)=\sum_{j=1}^{n}E_{(X=j)}(Y_k^2)P(X=j)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tfrac{1}{j^2}E_{(X=j)}(X_k^2)$$

Or nous avons remarqué que la loi de X_k sachant $X=j$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(j,1/3)$ d'espérance $\dfrac{j}{3}$ et de variance $\dfrac{2j}{9}$, d'où :

$$E(Y_k^2)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\big(\frac{2j}{9}+\big(\frac{j}{3}\big)^2\big)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\big(\frac{2}{9}+j\frac{1}{9}\big)=\frac{2}{9n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+\frac{1}{9}.$$

Avec la formule de Huygens, on obtient :

$$V(Y_k)=E(Y_k^2)-E(Y_k)^2=\frac{2}{9n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$$

On démontre, par comparaison série-intégrale, que l'on a $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sim \ln n$, et on obtient :

$$V(Y_k) \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{2\ln n}{9n}$$

Exercice 3.9.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, toutes de même loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on réordonne par ordre croissant les réels

$$X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega)$$

et on note $M_n(\omega)$ le terme médian, c'est-à-dire le $(n+1)^{\text{ème}}$ de ces termes dans l'ordre croissant.

1. Pour tout réel x de $[0, 1]$, exprimer $P(M_n \leqslant x)$ à l'aide d'une somme.

2. En considérant les variables aléatoires $X'_k = 1 - X_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'espérance de la variable aléatoire M_n est égale à $\frac{1}{2}$.

3. Prouver l'égalité : $E(M_n) = \int_0^1 P(M_n > x)\, dx$.

4. Pour tous entiers naturels k et m tels que $0 \leqslant k \leqslant m$ calculer l'intégrale : $I_{k,m} = \int_0^1 x^k(1-x)^{m-k}\, dx$.

5. Retrouver ainsi, par un calcul, la valeur de l'espérance de M_n.

Solution :

1. Soit x élément de $[0, 1]$ fixé. On définit la variable aléatoire Z_x par :

$$\forall\, \omega \in \Omega \qquad Z_x(\omega) = \text{card}\{i \in [\![1, 2n+1]\!] \qquad X_i(\omega) \leqslant x\}$$

La variable Z_x suit la loi binomiale de paramètres $(2n + 1, x)$. On a donc :

$$\forall\, k \in [\![0, 2n+1]\!], P(Z_x = k) = \binom{2n+1}{k} x^k(1-x)^{2n+1-k}$$

Ainsi : $P(M_n \leqslant x) = P(Z_x \geqslant n+1) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} P(Z_x = k)$

En résumé :

$$P(M_n \leqslant x) = \begin{cases} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k(1-x)^{2n+1-k} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Sous cette forme, il apparaît que la fonction de répartition de M_n est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable à dérivée continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. M_n est une variable à densité. Elle admet une espérance car son univers image est inclus dans $[0, 1]$.

2. Si l'on range les valeurs $X_1(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega)$ dans l'ordre croissant sous la forme :

$$Y_1(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega) \leqslant Y_{n+1}(\omega) \leqslant Y_{n+2}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_{2n+1}(\omega)$$

on obtient : $M_n(\omega) = Y_{n+1}(\omega)$.
On a :

$$1 - Y_{2n+1}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant 1 - Y_{n+1}(\omega) \leqslant 1 - Y_n(\omega) \leqslant \cdots \leqslant 1 - Y_1(\omega)$$

On définit alors $M'_n(\omega)$, terme médian de $X'_1(\omega)$, ... , $X'_{2n+1}(\omega)$. Il vient :

$$\forall\, \omega \in \Omega, M'_n(\omega) = 1 - Y_{n+1}(\omega) = 1 - M_n(\omega)$$

d'où l'on déduit que $M_n + M'_n = 1$ et donc $E(M_n) + E(M'_n) = 1$.

Par ailleurs, X_k et $1 - X_k$ ont la même loi, donc il en va de même de M_n et M'_n. Leurs espérances sont donc égales et toutes deux égales à $1/2$.

3. Soit f_n une densité de M_n. Elle est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[0,1]$. Une primitive de f_n est la fonction de répartition F_n de M_n trouvée dans la première question. Mais on peut prendre pour primitive $F_n(x)-1$, *i.e.* $-P(M_n > x)$. Il vient, par intégration par parties :

$$E(M_n) = \int_0^1 x f_n(x)dx = \big[-xP(M_n > x)\big]_0^1 + \int_0^1 P(M_n > x)dx$$

et le résultat demandé se déduit du fait que $P(M_n > 1) = 0$.

4. Supposons tout d'abord $k < m$. En intégrant par parties :

$$I_{k,m} = \int_0^1 x^k(1-x)^{m-k}dx = \frac{m-k}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{m-(k+1)}dx = \frac{m-k}{k+1}I_{k+1,m}$$

D'où :

$I_{k,m} = \dfrac{m-k}{k+1}\times\dfrac{m-(k+1)}{k+2}\times\cdots\times\dfrac{1}{m}I_{k+(m-k),m}$, donc :

$$I_{k,m} = \frac{(m-k)!k!}{m!}I_{m,m}$$

relation valable lorsque $k = m$.

Comme, en outre, $I_{m,m} = \displaystyle\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ on a, finalement :

$$I_{k,m} = \frac{1}{m+1}\times\frac{(m-k)!k!}{m!} = \frac{1}{m+1}\binom{m}{k}^{-1}$$

5. On a :

$E(M_n) = \displaystyle\int_0^1 [1 - P(M_n \leqslant x)]dx = 1 - \int_0^1 \Big[\sum_{k=n+1}^{2n+1}\tbinom{2n+1}{k}x^k(1-x)^{2n+1-k}\Big]dx$

donc : $E(M_n) = 1 - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1}\tbinom{2n+1}{k}I_{k,2n+1} = 1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1}\tbinom{2n+1}{k}\tbinom{2n+1}{k}^{-1}\frac{1}{2n+2}$, d'où :

$$E(M_n) = 1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3.10.

Soit n un entier $\geqslant 2$ et $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels donnés non tous égaux. On pose : $M = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $m = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1. Soit Y une variable aléatoire à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit la loi uniforme sur le segment $[m, M]$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on considère l'événement $A_i = [Y \leqslant x_i]$.

a) Déterminer l'événement $\displaystyle\bigcup_{i=1}^n A_i$; en déduire sa probabilité.

b) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, calculer $P(A_i)$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, calculer $P(A_i \cap A_j)$. Pour toute partie I de $[\![1,n]\!]$, exprimer $P\big(\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i\big)$ à l'aide de $\displaystyle\min_{i\in I} x_i$.

c) Montrer que :

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_i\leq n}\min(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_i})$$

2. Dans cette question, les nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont supposés strictement positifs.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}(x_1^N + \cdots + x_n^N)^{\frac{1}{N}} = M$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}(x_1^{-N} + \cdots + x_n^{-N})^{-\frac{1}{N}}$.

Solution :

1. a) On a $\displaystyle\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ de probabilité 1.

b) De même $P(A_i) = \dfrac{x_i - m}{M - m}$;

$P(A_i \cap A_j) = P(Y \leqslant \min(x_i, x_j)) = \dfrac{\min(x_i, x_j) - m}{M - m}$

Plus généralement :

$$P\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \frac{\min\limits_{i\in I} x_i - m}{M - m}$$

c) D'après la formule du crible on a :

$$\begin{aligned}
P\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{1\leq k_1<\cdots<k_i\leq n} P\big(\bigcap_{j=1}^{i} A_{k_j}\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{1\leq k_1<\cdots<k_i\leq n} \frac{\min(x_{k_1}, \dots, x_{k_i}) - m}{M - m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) &= \frac{1}{M-m}\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{1\leq k_1<\cdots<k_i\leq n} \min(x_{k_1}, \dots, x_{k_i})\Big)\\
&\qquad - \frac{m}{M-m}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{1\leq k_1<\cdots<k_i\leq n} 1\\
&= \frac{1}{M-m}\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{1\leq k_1<\cdots<k_i\leq n} \min(x_{k_1}, \dots, x_{k_i})\Big)\\
&\qquad - \frac{m}{M-m}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}\\
&= \frac{1}{M-m}\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{1\leq k_1<\cdots<k_i\leq n} \min(x_{k_1}, \dots, x_{k_i})\Big) - \frac{m}{M-m}
\end{aligned}$$

(la dernière égalité étant obtenue par la formule du binôme), d'où :

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{1\leq k_1<\cdots<k_i\leq n} \min(x_{k_1}, \dots, x_{k_i}) - m = M - m$$

et le résultat annoncé.

2. a) On a : $\dfrac{1}{M}(x_1^N + \cdots + x_n^N)^{\frac{1}{N}} = \exp\Big[\dfrac{1}{N}\ln\Big(\big(\dfrac{x_1}{M}\big)^N + \cdots + \big(\dfrac{x_n}{M}\big)^N\Big)\Big]$

Or, pour tout i on a :

$$\lim_{N\to+\infty}\big(\frac{x_i}{M}\big)^N = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i < M\\ 1 & \text{si } x_i = M\end{cases}$$

Donc : $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{1}{N}\ln\Big(\big(\dfrac{x_1}{M}\big)^N + \cdots + \big(\dfrac{x_n}{M}\big)^N\Big) = 0$ (car la quantité placée sous le logarithme a une limite appartenant à $\mathbb{N}^*$), d'où le résultat annoncé.

b) On a : $(x_1^{-N} + \cdots + x_n^{-N})^{-\frac{1}{N}} = \dfrac{1}{\big[(\frac{1}{x_1})^N + \cdots + (\frac{1}{x_n})^N\big]^{\frac{1}{N}}}$

D'après la question 2.a), le dénominateur tend vers $\max\big(\dfrac{1}{x_1}, \dots, \dfrac{1}{x_n}\big)$ donc :

$$\lim_{N\to+\infty}(x_1^{-N} + \cdots + x_n^{-N})^{-\frac{1}{N}} = \frac{1}{\max\big(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\big)} = m$$

Exercice 3.11.

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}$,

c'est-à-dire par : $(J)_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } q - p = 1\\ 1 & \text{si } p = n, q = 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$, où $n \geqslant 2$.

1. Calculer J^n. En déduire les valeurs propres réelles ou complexes possibles de J.

2. Déterminer les valeurs propres de J, en exhibant pour chacune un vecteur propre (réel ou complexe) associé. En déduire que la matrice J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

3. Dans cette question n désigne un **entier naturel impair supérieur ou égal à 3**. On note $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ les n points du plan, d'affixes respectives $z_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
• au temps $t = 0$, une puce se trouve en A_0.
• si à l'instant t, elle se trouve en A_k, pour $k \in [\![1, n-2]\!]$, elle se trouvera à l'instant $t+1$, soit en A_{k-1} soit en A_{k+1}, ceci avec équiprobabilité.
• si à l'instant t, elle se trouve en A_0, elle se trouvera à l'instant $t+1$, soit en A_{n-1} soit en A_1, ceci avec équiprobabilité.
• si à l'instant t, elle se trouve en A_{n-1}, elle se trouvera à l'instant $t+1$, soit en A_{n-2} soit en A_0, ceci avec équiprobabilité.

Pour tout m de $\mathbb{N}$, on note X_m la variable aléatoire définie par :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], (X_m = k) = \text{« la puce est en } A_k \text{ à l'instant } m \text{ »}.$$

On pose, pour tout m de $\mathbb{N}$, $U_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ P(X_m = 1) \\ \vdots \\ P(X_m = n-1) \end{pmatrix}$.

a) Déterminer U_0

b) Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout m : $U_{m+1} = AU_m$.

c) Exprimer A à l'aide de puissances de la matrice J.

d) En déduire les valeurs propres de la matrice A. Montrer que la matrice A est diagonalisable et que l'on peut choisir la matrice de passage diagonalisante P orthogonale. Déterminer un vecteur propre associé à la valeur propre de module maximal.

e) Déterminer la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

Solution :

1. L'endomorphisme j canoniquement associé à J est l'endomorphisme de la permutation circulaire $(e_1, e_2, \dots, e_n) \mapsto (e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$. Donc $j^n = Id$ et $J^n = I$.
Les valeurs propres de J sont incluses dans l'ensemble des racines du polynôme $X^n - 1$, soit $\{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

2. On résout le système d'équation $JX = \lambda X$, où $\lambda = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Cela donne :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases}, \text{ soit : } X = x_1 \begin{pmatrix} 1, \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, sur $\mathbb{C}$, J admet n valeurs propres distinctes et est diagonalisable. Chaque sous-espace propre est de dimension 1.

3. a) $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) c) On a par la formule des probabilités totales (en supposant les événements $(X_m = k)$ de probabilités non nulles) :

$$P(X_{m+1}=j)=\sum_{k=0}^{n-1}P_{(X_m=k)}(X_{m+1}=j)P(X_m=k)$$

Toutes les probabilités conditionnelles sont nulles sauf deux qui valent $1/2$. On obtient ainsi

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(J+J^{n-1})=\frac{1}{2}(J+J^{-1})$$

Le résultat restant valable même en présence d'événements quasi-impossibles.

d) Les valeurs propres de A sont $\frac{1}{2}\big(e^{2ik\pi/n}+e^{-2ik\pi/n}\big)=\cos(2k\pi/n)$, pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, les vecteurs propres associés étant ceux obtenus en 2.

La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. Elle est semblable, avec une matrice de passage orthogonale, à la matrice diagonale

$$\operatorname{diag}(1,\cos(2\pi/n),\cos(4\pi/n),\dots,\cos((2n-2)\pi/n)).$$

La valeur propre 1 est dominante, les autres valeurs propres étant en valeur absolue strictement inférieures à 1 (ceci parce que n est impair, donc -1 n'est pas valeur propre de A).

Le vecteur propre unitaire associé à $\lambda=1$ est $X=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

e) On a $A=PD^tP$, la première colonne de P étant constituée du vecteur colonne X.
Pour tout m de $\mathbb{N}$, $A^m=PD^{m\,t}P$.
De plus, $\lim\limits_{m\to+\infty}D^m=\operatorname{diag}(1,0,\dots,0)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}U_m&=\lim_{m\to+\infty}A^mU_0=P\operatorname{diag}(1,0,\dots,0)^tPU_0\\ &=\begin{pmatrix}1/\sqrt{n} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1/\sqrt{n} & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{n} & \dots & 1/\sqrt{n}\\ * & \dots & *\\ \vdots & & \vdots\\ \star & \star & \star\end{pmatrix}U_0=\begin{pmatrix}1/n\\ \vdots\\ 1/n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (X_m) tend en loi vers la loi uniforme sur $[\![0,n-1]\!]$

Exercice 3.12.

Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Une urne contient n boules rouges et m boules bleues. Les boules rouges sont numérotées de 1 à n. Les boules sont tirées (sans remise) au hasard et une à une de l'urne jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée. On note alors les numéros des boules rouges qui ont été tirées. Soit X le plus grand de ces numéros et Y le plus petit. Si la première boule tirée est bleue, on pose $X=Y=0$. On note également T le nombre de boules rouges tirées. L'expérience est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},P)$.

1. Soient A,B,C trois événements. Montrer que :

$$P(\overline{A}\cap B\cap C)=P(\overline{A})-P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{C})+P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}).$$

2. Étude de T.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T.

b) Calculer $P(T=0),P(T=1)$.

c) Soit $k\in[\![2,n]\!]$. Calculer $P(T=k)$.

3. Soit R une partie de l'ensemble des boules rouges de cardinal r. Montrer que la probabilité q_r qu'aucune boule rouge de R n'ait été tirée au cours du jeu vaut $\dfrac{m}{m+r}$.

4. Soient $i,j\in[\![0,n]\!]$. On cherche à déterminer $p_{i,j}=P[(X=i)\cap(Y=j)]$.

a) Calculer $p_{0,0}$.

b) On suppose que $i = j \neq 0$. Montrer que $p_{i,j} = \dfrac{m}{(n+m)(n+m-1)}$.

c) On suppose que $i > j > 0$. On note $t = i - j$. Montrer que

$$p_{i,j} = \frac{2m}{(n+m-t-1)(n+m-t)(n+m-t+1)}.$$

Solution :

1. Par la formule d'inclusion-exclusion :

$$P(\overline{A} \cap B \cap C) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) = P(\overline{A}) - P((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C}))$$
$$= P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$$

2. a) Clairement $T(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

b) $\star$ Le nombre de boules rouges tirées vaut 0 si et seulement si la première boule tirée est bleue. Ainsi, $P(T = 0) = \dfrac{m}{n+m}$.

$\star$ Le nombre de boules rouges tirées vaut 1 si et seulement si la première boule tirée est rouge et la deuxième est bleue. Ainsi,

$$P(T = 1) = \frac{n}{n+m} \times \frac{m}{n+m-1} = \frac{nm}{(n+m)(n+m-1)}.$$

c) En reprenant l'argumentaire précédent et pour $k \geqslant 1$:

$$P(T = k) = \frac{n}{n+m} \times \frac{n-1}{n+m-1} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n+m-k+1} \times \frac{m}{n+m-k}$$
$$= \frac{m.n!(n+m-k-1)!}{(n-k)!(n+m)!}$$

3. La probabilité qu'aucune boule de R n'ait été tirée au cours du jeu est égale à la probabilité que la première boule tirée parmi la réunion des boules bleues et de R soit une boule bleue. Ainsi, par symétrie, cette probabilité vaut $q_r = \dfrac{m}{m+r}$.

4. a) Lorsque $i = j = 0$, aucune boule rouge n'a été tirée. Ainsi, d'après la question précédente, $p_{0,0} = \dfrac{m}{n+m}$.

b) Lorsque $i = j > 0$, les boules rouges ayant des numéros deux à deux distincts, seule la boule numérotée j a été tirée. Ainsi, la première boule tirée est la boule rouge numéro j et la deuxième boule tirée est une boule bleue. Ainsi,

$$p_{j,j} = \frac{1}{n+m} \times \frac{m}{n+m-1} = \frac{m}{(n+m)(n+m-1)}.$$

c) Lorsque $i > j$, les boules rouges numérotées i et j sont tirées et aucune boule rouge dont le numéro appartient à $[\![1, i-1]\!] \cup [\![j+1, n]\!]$ n'est tirée.
Ainsi, en utilisant la formule obtenue dans la première question (avec $\overline{A}$ = « ne tirer aucune boule rouge de numéro appartenant à $[\![1, i-1]\!] \cup [\![j+1, n]\!]$ », B = « tirer la boule rouge numéro i », C = « tirer la boule rouge numéro j » et en appliquant trois fois le résultat de la question 3.

$$p_{i,j} = q_{n+m-t-1} - 2q_{n+m-t} + q_{n+m-t+1}$$
$$= m\frac{(n+m-t)^2 + n + m - t - 2((n+m-t)^2 - 1) + (n+m-t)^2 - (n+m-t)}{(n+m-t-1)(n+m-t)(n+m-t+1)}$$
$$= \frac{2m}{(n+m-t-1)(n+m-t)(n+m-t+1)}$$

Exercice 3.13.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de cet exercice. Soit $(Y_k)_{k \geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $b > 0$. Soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre s, où $0 < s < 1$, indépendante des variables aléatoires Y_k.
On pose $Z = \sup(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$. On admet que Z est une variable aléatoire à densité.

1. a) Déterminer une densité de Z.

b) Montrer que Z admet une espérance $E(Z)$ et montrer que $E(Z) = \dfrac{-\ln s}{b(1-s)}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que : $\forall\, t \geqslant 0, \forall\, n \in \mathbb{N},\ g(t) = g(t)e^{-(n+1)t} + \sum\limits_{k=0}^{n} t.e^{-(k+1)t}$.

3. a) Justifier que pour tout k de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t.e^{-(k+1)t}dt$ est convergente et la calculer.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est convergente et égale à $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

c) A l'aide du changement de variable $t = -\ln s$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 E(Z)ds$.

Solution :

1. a) Pour tout $j \geqslant 1$, $P_{(N=j)}(Z \leqslant t) = P_{(N=j)}(\bigcap\limits_{i=1}^{j}(Y_i \leqslant t))$ et par indépendance des variables en jeu :

$$P_{(N=j)}(Z \leqslant t) = \prod_{i=1}^{j} P(Y_i \leqslant t) = (1 - e^{-bt})^j$$

La famille $([N = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements. Ainsi, pour tout $t > 0$:
$P(Z \leqslant t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} P_{(N=j)}(Z \leqslant t)P(N = j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (1 - e^{-bt})^j s(1-s)^{j-1}$

$$P(Z \leqslant t) = \frac{s(1 - e^{-bt})}{1 - (1 - e^{-bt})(1-s)}$$

car $0 \leqslant (1 - e^{-bt})(1-s) < 1$. Ainsi, par dérivation, une densité de Z est donnée par :

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{sbe^{-bt}}{(1-(1-e^{-bt})(1-s))^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

b) Soit $A > 0$. En intégrant par parties, il vient :

$$\int_0^A tf_Z(t)dt = \big[t(F_Z(t) - 1)\big]_0^A - \int_0^A (F_Z(t) - 1)dt$$

$\displaystyle\int_0^A tf_Z(t)dt = \big[t(F_Z(t) - 1)\big]_0^A - \big[\frac{1}{(1-s)b}\ln(1 - (1-s)(1-e^{-bt}))\big]_0^A$

En faisant tendre A vers $+\infty$, il vient :

$$E(Z) = -\frac{\ln s}{(1-s)b}$$

2. a) Comme $1 - e^{-t} \underset{(0)}{\sim} t$, on a $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 1 = g(0)$ et g est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}^+$. De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$ entraîne que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b) Il suffit de remarquer que pour tout $t \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{-(k+1)t} = e^{-t} \times \dfrac{1 - e^{(n+1)t}}{1 - e^{-t}}$.

3. a) Le changement de variable C^1 bijectif, $u = (k+1)t$ donne :

$$\int_0^{+\infty} te^{-(k+1)t}dt = \frac{1}{(k+1)^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u}du = \frac{1}{(k+1)^2}$$

ce qui donne l'existence et le calcul de l'intégrale proposée.

b) On utilise la question 2. b)

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(k+1)t}dt + \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-(n+1)t}dt$$

Or : $|g(t)\mathrm{e}^{-(n+1)t)}| \leqslant M\mathrm{e}^{-(n+1)t)}$ donne $\left|\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-(n+1)t)}dt\right| \leqslant \dfrac{M}{n+1}$,
quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En résumé :

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

c) On utilise le changement de variable suggéré ($-t = \ln s$), qui est de classe C^1, bijectif de $]0,1[$ sur $]0,+\infty]$. Il vient :

$$\int_0^1 E(Z)ds = \int_0^1 \frac{-\ln s}{b(1-s)}ds = \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}dt = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

Exercice 3.14.

On considère une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $N, X_1, \dots, X_n, \dots$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que N est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ possédant un moment d'ordre 2 et que les variables aléatoires (X_i), $i \in \mathbb{N}^*$, suivent la même loi que X, où X est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ et possédant un moment d'ordre 2.

On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ c'est-à-dire :

$$\forall\, \omega \in \Omega, Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

1. Déterminer l'espérance $E(Y)$ en fonction de $E(X)$ et de $E(N)$.

2. En utilisant la formule de l'espérance totale, déterminer $E(Y^2)$ en fonction de $E(X)$, $V(X)$, $E(N)$ et $E(N^2)$.

3. En déduire $V(Y)$ en fonction de $E(X)$, $V(X)$, $E(N)$ et $V(N)$.

4. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n et on dispose d'une pièce de monnaie qui donne le côté pile avec la probabilité p, où $0 < p < 1$. Un joueur tire un jeton dans l'urne et lance ensuite la pièce de monnaie autant de fois que le numéro indiqué par le jeton.
Calculer la moyenne et la variance de la variable aléatoire comptabilisant le nombre de pile obtenu.

Solution :

1. La famille $(Y = k)_{k\geq 0}$ constitue un système complet d'événements. Soit n un élément fixé de $N(\Omega)$. On a :

$$E_{(N=n)}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP_{(N=n)}(Y = k)$$

à condition que cette série converge.
Or :

$$\begin{aligned} P_{(N=n)}(Y = k) &= \frac{P((N = n) \cap (Y = k))}{P(N = n)} \\ &= \frac{P((N = n) \cap (X_1 + \cdots + X_n = k))}{P(N = n)} \\ &= P(X_1 + \cdots + X_n = k) \end{aligned}$$

On en déduit la convergence de la série précédente, avec :

$$E_{(N=n)}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X_1 + \cdots + X_n = k) = E(X_1 + \cdots + X_n) = nE(X)$$

puis :

$$E(Y) = \sum_{n\in N(\Omega)} E_{(N=n)}(Y)P(N = n) = \sum_{n\in N(\Omega)} nE(X)P(N = n)$$

$= E(X) \sum_{n\in N(\Omega)} nP(N=n)$

Cette dernière série converge et sa somme vaut $E(N)$. On a, finalement :

$$E(Y) = E(N)E(X)$$

2. De façon analogue :

$$E_{(N=n)}(Y^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP((X_1+\cdots+X_n)^2 = k) = E((X_1+\cdots+X_n)^2)$$

donc :

$E_{(N=n)}(Y^2) = V(X_1+\cdots+X_n) + [E(X_1+\cdots+X_n)]^2 = nV(X) + (nE(X))^2$

du fait de l'indépendance des variables. Ainsi :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{n\in N(\Omega)} E_{(N=n)}(Y^2)P(N=n) \\ &= \sum_{n\in N(\Omega)} nV(X)P(N=n) + \sum_{n\in N(\Omega)} n^2(E(X))^2 P(N=n) \end{aligned}$$

et, finalement : $E(Y^2) = V(X)E(N) + (E(X))^2E(N^2)$.

3. Maintenant :

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = V(X)E(N) + (E(X))^2E(N^2) - (E(X))^2(E(N))^2$

d'où : $V(Y) = V(X)E(N) + (E(X))^2V(N)$.

4. La variable N suit la loi uniforme discrète sur $[\![1,n]\!]$. Les variables X_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p. La variable Y représente en fait le nombre de pile obtenu. On a :

$$E(X) = p, E(N) = \frac{n+1}{2}, V(X) = p(1-p) \text{ et } V(N) = \frac{n^2-1}{12}$$

On en déduit : $E(Y) = \frac{n+1}{2}p$

puis :

$$V(Y) = p(1-p)\frac{n+1}{2} + p^2\frac{n^2-1}{12} = p\frac{n+1}{12}[(n-7)p+6]$$

Exercice 3.15.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre réel inconnu $\lambda > 0$.

Pour n entier $\geqslant 1$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon *i.i.d.* de la loi de X. On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

1. a) Rappeler la loi de S_n, ainsi que son espérance et sa variance.

b) Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de λ.

2. Montrer que $\exp(-\overline{X}_n)$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\exp(-\lambda)$.

Dans la suite de l'exercice, s désigne un entier naturel.

3. a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $[S_n = s]$.

b) Soit T_n la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par $T_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$

Montrer que T_n est un estimateur sans biais de $\exp(-\lambda)$.

c) Calculer la variance de T_n. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\exp(-\lambda)$.

4. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un n-uplet de $\mathbb{N}^n$.

a) Calculer $P([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n] \cap [S_n = s])$.

b) Montrer que la probabilité conditionnelle $P_{[S_n=s]}([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n])$ est indépendante de la valeur de λ.

Solution :

1. a) Par stabilité de la loi de Poisson, il vient $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$ et $E(S_n) = n\lambda$, $V(S_n) = n\lambda$.

b) Comme $\overline{X}_n$ est une fonction de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est un estimateur. De plus $E(\overline{X}_n) = \lambda$, il est sans biais et $V(\overline{X}_n) = \dfrac{\lambda}{n}$, il est convergent.

2. a) Par le théorème de transfert :

$E(\exp(-\overline{X}_n)) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k/n}\mathrm{e}^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}(\mathrm{e}^{-1/n}n\lambda)^k$ Soit :

$$E(\exp(-\overline{X}_n)) = \mathrm{e}^{-n\lambda}\exp(\mathrm{e}^{-1/n}n\lambda) = \mathrm{e}^{-n\lambda(1-\mathrm{e}^{-1/n})}$$

Ainsi $\overline{X}_n$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\exp(-\lambda)$, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-\mathrm{e}^{-1/n}) = -1$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\overline{X}_n) = \exp(-\lambda)$.

3. a) Si $k \notin [\![0, s]\!]$, alors $P_{[S_n=s]}(X_1 = k) = 0$.

Si $k \in [\![0, s]\!]$, alors $P_{[S_n=s]}(X_1 = k) = \dfrac{P([S_n = s] \cap [X_1 = k])}{P([S_n = s])}$. Donc,

$$\begin{aligned} P_{[S_n=s]}(X_1 = k) &= \frac{P([X_1 = k] \cap [X_2 + \cdots + X_n = s - k])}{P([S_n = s])} \\ &= \frac{P(X_1 = k)P(X_2 + \cdots + X_n = s - k)}{P(S_n = s)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda}\frac{((n-1)\lambda)^{s-k}}{(s-k)!}}{\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^s}{s!}} \end{aligned}$$

$$P_{[S_n=s]}(X_1 = k) = \binom{s}{k}\Big(\frac{1}{n}\Big)^k\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{s-k}$$

en remarquant que $X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $(n-1)\lambda$, et après simplifications. Ainsi, la loi conditionnelle de X_1 sachant $[S_n = s]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(s, 1/n)$.

b) Par le théorème du transfert :

$E(T_n) = \sum\limits_{s=0}^{\infty}\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)^s\mathrm{e}^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^s}{s!} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\sum\limits_{s=0}^{\infty}\dfrac{((n-1)\lambda)^s}{s!} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\times\mathrm{e}^{(n-1)\lambda}$

$$E(T_n) = \mathrm{e}^{-\lambda}$$

ce qui montre que T_n est un estimateur sans biais de $\exp(-\lambda)$.

c) De même :

$$\begin{aligned} E(T_n^2) &= \sum_{s=0}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{2s}\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^s}{s!} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}((1 - \frac{1}{n})^2 n\lambda)^s \\ &= \mathrm{e}^{-n\lambda}\mathrm{e}^{n\lambda(1-\frac{1}{n})^2} = \mathrm{e}^{-2\lambda+\frac{\lambda}{n}} \end{aligned}$$

et donc

$$V(T_n) = \mathrm{e}^{-2\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda/n} - 1)$$

Par l'inégalité de Tchébichev, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|T_n - \mathrm{e}^{-\lambda}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}}{\varepsilon^2}\big(\mathrm{e}^{\lambda/n} - 1\big)$$

quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc en probabilité vers la variable certaine égale à $\exp(-\lambda)$.

4. a) On a

$$([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2] \cap \cdots \cap [X_n = x_n] \cap [S_n = s]) = \\ ([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = x_{n-1}] \cap [X_n = s - \sum_{i=1}^{n-1} x_i])$$

Par indépendance des X_i, on en déduit :

$$\delta = P([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2] \cap \cdots \cap [X_n = x_n] \cap [S_n = s])$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \mathrm{e}^{-n\lambda} \dfrac{\lambda^s}{x_1! \dots x_n!} & \text{si } s = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$$

b) Par définition des probabilités conditionnelles :

$$P_{[S_n=s]}([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \dfrac{s!}{x_1! \dots x_n!} \Big(\dfrac{1}{n}\Big)^s & \text{si } s = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$$

Exercice 3.16.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice.

Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. a) Montrer que, pour toute fonction g définie sur $\mathbb{N}$ telle que les espérances existent, on a :

$$E\big[N\, g(N)\big] = \lambda E\big[g(N+1)\big]$$

b) Calculer $E\big(\dfrac{1}{N+1}\big)$.

2. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe un réel λ vérifiant, pour toute fonction g telle que les espérances existent,

$$E\big[Tg(T)\big] = \lambda E\big[g(T+1)\big]$$

La variable aléatoire T suit-elle une loi de Poisson ?

3. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit une variable aléatoire S par :

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k \text{ c'est-à-dire } \forall\, \omega \in \Omega : S(\omega) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) & \text{si } N(\omega) \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que, pour toute fonction g telle que les espérances existent, on a :

$$E\big[Sg(S)\big] = \lambda E\big[X_0\, g(S + X_0)\big]$$

Solution :

Toutes les espérances sont supposées exister, donc les séries écrites sont toutes supposées absolument convergentes et les calculs effectués sont légitimes.

1. a) On a donc :

$$E(Ng(N)) = \sum_{n=0}^{+\infty} ng(n)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} g(n)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} g(n+1)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda E\big(g(N+1)\big)$$

b) La fonction $g(x) = 1/x$ n'est pas définie en 0, valeur prise par N : on ne peut donc pas appliquer le résultat précédent !

Un calcul direct – et correct – donne :

$$E\Big(\frac{1}{N+1}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\big(\mathrm{e}^{\lambda} - 1\big)$$

Soit

$$E\Big(\frac{1}{N+1}\Big) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$$

2. Soit $p_n = P(T = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. La relation donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ng(n)p_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} g(n+1)p_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} g(n)p_{n-1}$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $g(n_0) = 1$ et $g(n) = 0$ pour $n \neq n_0$. Alors, il ne reste dans les sommes que $n_0 p_{n_0} = \lambda p_{n_0-1}$, d'où, par récurrence, $p_n = p_0 \dfrac{\lambda^n}{n!}$, puis $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ donne $p_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}$ et :

$$T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda).$$

3. On a, en notant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$:

$$\begin{aligned}
E\big(Sg(S)\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} E_{(N=n)}\big(Sg(S)\big)P(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} E\big(S_n g(S_n)\big)\, P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} E\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big)g(S_n)\Big)P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \big(nE\big(X_n g(S_n)\big)\big)P(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} E\big(X_n g(S_n)\big)\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{(n-1)!} \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} E\big(X_{n+1} g(S_{n+1})\big)\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}
\end{aligned}$$

par symétrie et en décalant les indices. Ainsi :

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}g(S_{n+1})) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kg(S_n+k)P(X_{n+1}=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} kg(S_n+k)P(X_0=k) = E(X_0 g(S_n+X_0))
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
E(Sg(S)) &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} E(X_0 g(S_n+X_0))\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} E_{(N=n)}(X_0 g(S+X_0))P(N=n)
\end{aligned}$$

$$E(Sg(S)) = \lambda E(X_0 g(S+X_0))$$

Exercice 3.17.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, le moment $E(X^{2n})$.

2. a) Déterminer la loi de X^2.

b) Soit m un entier supérieur ou égal à 2, et $(X_1, \dots, X_m)$, un m-échantillon i.i.d de la loi de X. Déterminer la loi de $Y = \sum\limits_{i=1}^{m} X_i^2$.

c) En déduire le moment $E(Y^n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $a_1, \dots, a_m$ des réels. On admet que pour tout $n \geqslant 1$:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2)^n = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots i_m \in \mathbb{N} \\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}} \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_m!} a_1^{2i_1} a_2^{2i_2} \cdots a_m^{2i_m}$$

En déduire que :

$$E(Y^n) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots i_m \in \mathbb{N} \\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}} \frac{n!}{2^n} \binom{2i_1}{i_1}\binom{2i_2}{i_2} \cdots \binom{2i_1}{i_m}$$

4. Montrer que :

$$\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots i_m \in \mathbb{N} \\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}} \frac{n!}{2^n} \binom{2i_1}{i_1}\binom{2i_2}{i_2} \cdots \binom{2i_1}{i_m} = \frac{2^n \Gamma(m/2+n)}{\Gamma(m/2)}$$

Solution :

Nous noterons comme d'habitude Φ la fonction de répartition de X et φ la densité obtenue par dérivation de Φ sur $\mathbb{R}$, donc telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

1. Sous réserve de convergence, on a :

$$E(X^{2n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{2n}\, \mathrm{e}^{-x^2/2} dx$$

La fonction à intégrer est continue et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 . x^{2n} \mathrm{e}^{-x^2/2} = 0$, la convergence résulte de la règle de Riemann.

Pour $n \geqslant 1$, on écrit : $E(X^{2n}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n-1} \times x\, \mathrm{e}^{-x^2/2} dx$.

On effectue alors l'intégration par parties ainsi préparée :

$$\begin{cases} u(x) = x^{2n-1} \implies u'(x) = (2n-1)x^{2n-2} \\ v'(x) = x\, \mathrm{e}^{-x^2/2} \impliedby v(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2} \end{cases}$$

Comme $u(0)v(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)v(x) = 0$, on peut réaliser cette intégration par parties directement avec les bornes données et :

$$E(X^{2n}) = (2n-1) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{2n-2}\, \mathrm{e}^{-x^2/2} dx = (2n-1)E(X^{2n-2})$$

Comme $E(X^0) = 1$, il vient, par le principe de récurrence :

$$E(X^{2n}) = (2n-1)(2n-3)\cdots 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Cette dernière formule étant valable aussi pour $n = 0$.

2. a) La variable aléatoire X^2 est à valeurs positives. Pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$$

Par dérivation, une densité de X^2 est donc :

$$f_{X^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} \mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui prouve que X^2 suit la loi $\Gamma(2, 1/2)$.

b) Par stabilité de la loi Gamma, Y suit la loi $\Gamma(2, m/2)$, de densité :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m/2) 2^{m/2}} \times y^{\frac{m}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} & \text{si } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Donc, en utilisant encore le théorème du transfert (la convergence est banale)

$$E(Y^n) = \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} \int_0^{+\infty} y^{n+\frac{m}{2}-1} \mathrm{e}^{-y/2} dy$$

Le changement de variable $y = 2x$, donne alors :

$$\begin{aligned} E(Y^n) &= \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} \int_0^{+\infty} 2^{n+\frac{m}{2}-1} x^{n+\frac{m}{2}-1} \mathrm{e}^{-x} 2dx \\ &= \frac{2^n}{\Gamma(m/2)} \int_0^{+\infty} x^{n+\frac{m}{2}-1} \mathrm{e}^{-x} dx. \end{aligned}$$

$$E(Y^n) = \frac{2^n \Gamma(\frac{m}{2} + n)}{\Gamma(\frac{m}{2})}$$

3. Par le résultat admis, on a donc en substituant les X_k aux a_k :

$$E(Y^n) = \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots i_m\in\mathbb{N}\\ i_1+i_2+\dots+i_m=n}} \frac{n!}{i_1!i_2!\dots i_m!}E(X_1^{2i_1})\cdots E(X_m^{2i_m})$$

et par la première question

$$\begin{aligned} E(Y^n) &= \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots i_m\in\mathbb{N}\\ i_1+i_2+\dots+i_m=n}} \frac{n!}{i_1!i_2!\dots i_m!}\times\frac{(2i_1)!}{2^{i_1}i_1!}\times\cdots\times\frac{(2i_m)!}{2^{i_m}i_m!} \\ &= \frac{n!}{2^n}\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots i_m\in\mathbb{N}\\ i_1+i_2+\dots+i_m=n}} \binom{2i_1}{i_1}\cdots\binom{2i_m}{i_m} \end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{n!}{2^n}\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots i_m\in\mathbb{N}\\ i_1+i_2+\dots+i_m=n}} \binom{2i_1}{i_1}\binom{2i_2}{i_2}\cdots\binom{2i_1}{i_m} = \frac{2^n\Gamma(m/2+n)}{\Gamma(m/2)}$$

Exercice 3.18.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout x de $[-1,1]$, la série $\sum P(X=n)x^n$ converge. On note $G_X(x)$ sa somme.

b) Montrer que $G_X(x)=E(x^X)$.

On admet que si une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nx^n$ est telle que pour tout x de $[-1,1]$, on a : $G_X(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n=P(X=n)$.

2. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Dire pourquoi pour tout (x,y) de $[-1,1]^2$, la série

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P(X=n\cap Y=m)x^ny^m$$

converge. On note $G_{(X,Y)}(x,y)$ sa somme.

b) Montrer que $G_{(X,Y)}(x,y)=E(x^Xy^Y)$.

On suppose désormais que pour tout (x,y) de $[-1,1]^2$,

$$G_{(X,Y)}(x,y)=\frac{py}{\ln(1-p)}\times\frac{\ln(1-pxy)}{1-(1-p)y},$$

où p est un réel de $]0,1[$.

3. a) Déterminer $G_X(x)$ pour tout x de $[-1,1]$.

b) En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour tout x de $[-1,1]$: $\ln(1-px)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p^n}{n}x^n$.

(On pourra étudier les variations de la fonction $\psi : x\mapsto \frac{u-x}{1-x}$ sur l'intervalle $[0,u]$ ou $[u,0]$, lorsque $|u|<1$)

c) En déduire la loi marginale de X.

4. a) Montrer que les variables aléatoires X et $Y-X$ vérifient, pour tout (x,y) de $[-1,1]^2$:

$$G_{(X,Y-X)}(x,y)=G_X(x)G_{Y-X}(y).$$

b) Déterminer la loi de $Y-X$.

Solution :

1. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, pour tout x de $[-1,1]$: $|P(X=n)||x^n|\leqslant P(X=n)$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(X=n)=1$. Par la règle de majoration, la série proposée est absolument convergente et la fonction G_X est donc bien définie sur $[-1,1]$.

b) Par définition de l'espérance et par application du théorème de transfert :

$$G_X(x)=E(x^X).$$

2. Pour tout (n,m) de $\mathbb{N}^2$, pour tout (x,y) de $[-1,1]^2$, on a :

$$|P(X=n\cap Y=m)x^ny^m|\leqslant P(X=n\cap Y=m)$$

Or : $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}P(X=n\cap Y=m)=P(\Omega)=1$.

Par application du théorème de Fubini, la fonction $G_{(X,Y)}$ est donc bien définie sur $[-1,1]^2$.

b) Par définition de l'espérance et théorème du transfert, on a :

$$G_{(X,Y)}(x,y)=E(x^Xy^Y).$$

3. a) On a $G_X(x)=E(x^X)=E(x^X1^Y)=G_{(X,Y)}(x,1)=\dfrac{\ln(1-px)}{\ln(1-p)}$.

b) La formule de Taylor avec reste intégral pour $u\mapsto\ln(1-u)$, avec $-1<u<1$, donne, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\ln(1-u)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{u^k}{k}+\int_0^u\frac{(x-u)^n}{(1-x)^{n+1}}dx$$

la fonction $\psi : x\to\dfrac{u-x}{1-x}$ est monotone telle que $\psi(0)=u$ et $\psi(u)=0$. Ainsi, en distinguant les deux cas $u\in\,]-1,0[$ et $u\in[0,1[$, on a, $[0,u]$ désignant le segment d'extrémités 0 et u, même pour u négatif :

$$\forall\, x\in[0,u],\left|\frac{x-u}{1-x}\right|\leqslant|u|$$

Par conséquent, pour u tel que $-1<u<1$:

$$\left|\int_0^u\frac{(x-u)^n}{(1-x)^{n+1}}dx\right|\leqslant\left|\int_0^u\left|\frac{x-u}{1-x}\right|^n\frac{dx}{1-x}\right|\leqslant|u|^n\left|\int_0^u\frac{dx}{1-x}\right|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

En revenant à la formule de Taylor, on peut donc passer à la limite lorsque n tend vers l'infini, et :

$$\forall\, u\in\,]-1,1[,\ln(1-u)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k}$$

En particulier :

$$\forall\, x\in[0,1],\ln(1-px)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n}{n}\,x^n$$

c) Ainsi, pour $x\in[-1,1]$:

$$G_X(x)=\frac{1}{\ln(1-p)}\ln(1-px)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{p^n}{n\ln(1-p)}\,x^n$$

Ainsi :

$$P(X=0)=0,\forall\, n\geqslant1,P(X=n)=-\frac{p^n}{n\ln(1-p)}$$

4. a) On a :

$$G_{(X,Y-X)}(x,y)=E(x^Xy^{Y-X})=E((\frac{x}{y})^Xy^Y)=G_{(X,Y)}(\frac{x}{y},y)$$
$$=\frac{py}{1-(1-p)y}\times\frac{\ln(1-px)}{\ln(1-p)}$$

Or on a vu que $G_X(x)=\dfrac{1}{\ln(1-p)}\ln(1-px)$ et de la même façon :

$$G_{Y-X}(y)=E(y^{Y-X})=E(1^Xy^{Y-X})=G_{(X,Y-X)}(1,y)$$
$$=\frac{py}{1-(1-p)y}\times\frac{\ln(1-p)}{\ln(1-p)}=\frac{py}{1-(1-p)y}$$

Donc

$$G_{(X,Y-X)}(x,y)=G_X(x)G_{Y-X}(y).$$

b) Par le résultat admis, la loi de $Y-X$ se déduit de la connaissance de G_{Y-X} :
Comme $|(1-p)y|<1$, on peut écrire, grâce à l'identité geométrique :

$$G_{Y-X}(y)=\frac{py}{1-(1-p)y}=py\sum_{n=0}^{\infty}\big((1-p)y\big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}p(1-p)^ny^{n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}p(1-p)^{n-1}y^n$$

Donc : $P(Y-X=0)=0$ et $\forall\, n\geqslant1,P(Y-X=n)=p(1-p)^{n-1}$:

$$Y-X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$$

5

QUESTIONS COURTES

1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.
2. Déterminer la loi de la borne supérieure M_n de n variables aléatoires indépendantes de même loi de fonction de répartition F.
3. Étudier la convergence en loi de la suite $\big(M_n - \ln n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
1. Montrer que pour tout réel u tel que $|u| \leqslant 1$, $E(u^X)$ existe.
2. Montrer que pour tout $|u| < 1$:

$$\frac{1-E(u^X)}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)u^k$$

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = P(N=n)$.
Soit X une variable aléatoire définie sur le même univers Ω et telle que, pour tout $n \in N(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $[N=n]$ est la loi uniforme sur $\{0,1,\dots,n\}$.
1. Comparer la loi de X et celle de $N-X$.
2. Si N suit une loi géométrique de paramètre p, calculer $E(X)$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^*$, telle que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \qquad P(X=-n) = P(X=n) = \frac{1}{2n(n+1)}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement $[(X=-n)\cup(X=n)]$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet une espérance conditionnelle relative à A_n.
Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} E_{A_n}(X)\,P(A_n)$.
La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Soient trois nombres complexes a, b, c. Calculer la matrice A^7, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{3} & a & b \\ 0 & 1-i\sqrt{3} & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} > 1$ pour tout i.
Montrer que A est définie positive, c'est-à-dire que A est symétrique réelle telle que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^tXAX > 0$.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires.
A-t-on : $[\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$ ou $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f]$?

Soient a et b deux nombres réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + |x|$.

1. A quelle condition sur a et b la fonction f est-elle bijective ?
2. On suppose cette condition remplie. Calculer $f^{-1}(y)$ en fonction de y.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x f(t)dt$$

Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que la fonction h est décroissante.
2. En déduire que la fonction f est identiquement nulle.

Soit un réel a et f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que

$$\sup\{|f''(t)|, t \in \mathbb{R}\} = M \in \mathbb{R}.$$

On considère la fonction G définie par :

$$G(x) = \int_a^{a+x} f(u)du - xf(a + \tfrac{x}{2})$$

1. Interpréter géométriquement le nombre $G(x)$, pour f positive et $x > 0$.
2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ |G'(x)| \leqslant M\frac{x^2}{4}$$

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|G(x)| \leqslant M\dfrac{|x|^3}{12}$