# 1

# ANALYSE

---

**Exercice 1.01.**

1. Montrer la convergence des intégrales suivantes et les calculer :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

*(Pour $I_1$ et $I_3$, on pourra utiliser le changement de variable $t = \sin u$.)*

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence des intégrales suivantes :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,\ g(x) = \int_0^1 \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ et } h(x) = \int_0^1 \frac{-t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

**Dans toute la suite on admet** que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $f' = g$ et $f'' = h$.

3. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.

4. Soit $z$ la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par $z(x) = f(x)\sqrt{x}$.

a) Montrer que $z$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et trouver une fonction $q$ telle que :

$$\forall\, x \in I, z''(x) + q(x)z(x) = 0$$

b) En étudiant la fonction $x \mapsto \varphi(x) = q(x)z^2(x) + (z'(x))^2$, montrer qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que : $\forall\, x \in I, |f(x)| \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{x}}$.

---

**Solution :**

1. Les fonctions à intégrer sont continues sur $[0, 1[$ ; il y a un problème de convergence des intégrales en 1.
Pour tout $x \in ]0, 1[$, on effectue le changement de variable $t = \sin u$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ ; on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ de même nature et de même valeur en cas de convergence que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{|\cos u|}du$ qui existe et vaut $\frac{\pi}{2}$. Donc $I_1 = \frac{\pi}{2}$.

Pour tout $x \in ]-1,1[$, on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \big[-\sqrt{1-t^2}\big]_0^x = 1-\sqrt{1-x^2}$, qui a pour limite 1 quand $x$ tend vers 1 donc $I_2 = 1$.

Par le même argument que pour $I_1$, $I_3$ est de même nature (et a même valeur en cas de convergence) que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{|\cos u|}\cos u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos(2u))\,du,$$

Cette dernière intégrale est faussement impropre en 1, donc convergente, et :

$$I_3 = \big[\tfrac{1}{2}(u - \tfrac{1}{2}\sin(2u))\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. Comme $\dfrac{|\cos(xt)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, et que $I_1$ converge, par théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale qui définit $f$ est absolument convergente, donc convergente. Idem pour $g$ et $h$ avec $I_2$ et $I_3$.

3. Soit $a \in ]0,1[$. Intégrons par parties sur $[0,a]$, avec $u(t) = \sqrt{1-t^2}$, $u'(t) = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$, $v(t) = \sin(xt)$, $v'(t) = x\cos(xt)$ ($u, v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\int_0^a \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \big[\sqrt{1-t^2}\sin(xt)\big]_0^a - \int_0^a \sqrt{1-t^2}\times x\cos(xt)\,dt$$

d'où : $\displaystyle\int_0^a \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sqrt{1-a^2}\sin(xa) - x\int_0^a \frac{(1-t^2)\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$

En faisant tendre $a$ vers 1 on obtient :

$$f'(x) = -x(f(x) + f''(x))$$

4. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$. Ainsi la fonction $z$ est de classe $\mathcal{C}^2$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. En dérivant deux fois on obtient :

$$z''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}f(x) + x^{-\frac{1}{2}}f'(x) + x^{\frac{1}{2}}f''(x).$$

D'après le résultat de la question 3, on en déduit :

$$z''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}f(x) - x^{\frac{1}{2}}f(x) = -\big(1+\frac{1}{4x^2}\big)\sqrt{x}f(x),$$

soit $z''(x) + q(x)z(x) = 0$, avec $q(x) = 1 + \dfrac{1}{4x^2}$.

5. On a : $\varphi'(x) = q'(x)z^2(x) + 2z'(x)(q(x)z(x) + z''(x)) = q'(x)z^2(x) \leqslant 0$ donc $\varphi$ est décroissante sur $I$.

Donc, pour tout $x \in I$, on a : $q(x)z^2(x) + \underbrace{(z'(x))^2}_{\geq 0} = \varphi(x) \leqslant \varphi(1)$, donc : $q(x)z^2(x) \leqslant \varphi(1)$ ;

puisque $q(x) \geqslant 1 > 0$ on déduit $z^2(x) \leqslant \varphi(1)$, donc $|z(x)| \leqslant \sqrt{\varphi(1)} = M$ soit $z$ est bornée sur $I$.

Donc $\forall\, x \in I, |f(x)| \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{x}}$

**Exercice 1.02.**

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$.

1. Montrer que la fonction $f$ est définie sur $]-1,+\infty[$.

2. Vérifier que pour tout $x > -1$, on a : $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

3. a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|$$

b) En déduire que $f$ est continue sur son domaine de définition.

4. a) Montrer que l'application $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) En déduire que $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2x}$. Donner de même un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $-1$.

---

**Solution :**

1. L'application $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+t}$ est continue et positive sur $]0,1]$.
$\dfrac{t^x}{1+t} \underset{(t\to 0)}{\sim} \dfrac{1}{t^{-x}}$, donc par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$ converge si et seulement si $-x < 1$, *i.e.* $x > -1$.

2. Pour tout $x > -1, f(x) + f(x+1) = \displaystyle\int_0^1 t^x\,dt = \frac{1}{x+1}$ (linéarité pour les intégrales convergentes)

3. a) Soit $g : x \to t^x = \mathrm{e}^{x\ln t}$. L'inégalité des accroissements finis donne :

$$|t^x - t^y| \leqslant \sup_{u\in[x,y]} |(\ln t)\mathrm{e}^{u\ln t}| \times |x-y|$$

Or pour $0 < t1$, on a $\ln t0$ et pour $x$ et $y$ positifs ou nuls $u \ln t0$ sur le segment $[x, y]$, donc $|t^x - t^y| \ln t| \times |x-y|$, et on peut écrire :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \int_0^1 \frac{|\ln t|}{1+t} dt = C|x-y|$$

car l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln t|}{1+t} dt$ est convergente.

b) $\to$ Par la question précédente, la fonction $f$ est continue sur $[0,+\infty[$ car lipchitzienne.
$\to$ De plus $x > -1 \implies f(x) = \dfrac{1}{x+1} - f(x+1)$ et $x+10$, donc $f$ est continue sur $]-1,+\infty[$, par composition.

4. a) Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $-1 < a < b$. En multipliant par $\ln t$ négatif sur $]0,1]$ $a \ln t b \ln t$, puis $t^a t^b$, puis $\dfrac{t^a}{1+t} \dfrac{t^b}{1+t}$ et en intégrant $f(a)f(b)$.

La fonction $f$ est décroissante.

b) Par décroissance de $f$, pour $x > 0$ :
$\dfrac{1}{x+1} = f(x) + f(x+1) \leqslant 2f(x)$ et $\dfrac{1}{x} = f(x) + f(x-1) \geqslant 2f(x)$,
donc $\dfrac{x}{x+1} \leqslant 2xf(x) \leqslant 1$, et par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$, d'où $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

Enfin $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$ donne $f(x) \underset{(-1^+)}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$.

---

**Exercice 1.03.**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On notera $(S_n)$ la suite des sommes partielles, *i.e.* la suite définie, pour tout entier naturel $n$ non nul, par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

1. Exemples.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n}$. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{a_n}{1+na_n}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un entier } m \text{ tel que } n = 2^m - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Déterminer la nature de $\sum \dfrac{a_n}{1+na_n}$.

2. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)$ est à valeurs strictement positives.

Montrer que la série $\sum \dfrac{a_n}{1+n^2a_n}$ converge.

3. a) Montrer que si $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ converge, alors la suite $(a_n)$ converge vers 0.

b) Montrer que si la suite $(a_n)$ converge vers 0, alors $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

c) En déduire que $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

4. a) Soit $(u_n)$ une suite de réels positifs et $(T_n)$ la suite des sommes partielles de la série de terme général $u_n$. Montrer que si la suite $(T_n)$ converge, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, et tout $p \geqslant 0$, $|T_{n+p} - T_n| \leqslant \varepsilon$.

b) Soient $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geqslant 1 - \dfrac{S_n}{S_{n+k}}$.

c) En déduire que la série $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$ diverge.

---

**Solution :**

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $a_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\dfrac{a_n}{1+na_n} = \dfrac{1}{n+n}$ et $\sum \dfrac{a_n}{1+na_n}$ diverge.

b) Pour tout entier naturel $n$, notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{1+ka_k}$.

Comme la suite $(a_k)$ est à valeurs positives, alors $(S_n)_n$ est croissante.

De plus, $S_{2^m-1} = \sum_{k=0}^{2^m-1} \frac{a_n}{1+na_n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+(2^k-1)} = \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}$..

Ainsi, $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$ converge.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $1+n^2a_n \geqslant n^2a_n$ et $a_n > 0$, alors $0 \leqslant \frac{a_n}{1+n^2a_n} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Ainsi, $\sum \frac{a_n}{1+n^2a_n}$ est une série dont le terme général est positif et majoré par le terme d'une série convergente, donc $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

2. a) Supposons que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge. Alors, $r_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ converge vers 0, donc ($r_n \neq 1$) !) $a_n = \frac{r_n}{1-r_n}$ converge également vers 0, soit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Supposons que $(a_n)_n$ converge vers 0. Alors, $\frac{a_n}{1+a_n} \sim a_n$. Or, ces suites sont positives, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

c) Finalement, $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ est une série à termes positifs, donc soit elle converge, soit ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge. D'après les questions précédentes, $(a_n)$ tend vers 0 et la série diverge. On obtient ainsi une contradiction, et $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

3. a) Supposons que la suite $(T_n)_n$ converge vers un réel $\ell$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la limite, il existe un entier $n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|T_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant 0$. Alors, $n+p \geqslant n_0$ et

$$|T_{n+p} - T_n| \leqslant |T_{n+p} - \ell| + |T_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi,$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0, p \geqslant 0, |T_{n+p} - T_n| \leqslant \varepsilon$.

b) Comme la série $\sum a_n$ est à termes positifs, la suite $(S_n)$ est croissante.

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{n+j}}{S_{n+k}} \geqslant \frac{1}{S_{n+k}} \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j \geqslant \frac{S_{n+k} - S_n}{S_{n+k}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}.$$

Finalement, $\forall\, (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}$.

c) Pour tout entier naturel $n$ non nul, notons $T_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{S_j}$. D'après la question précédente, pour tout $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$T_{n+k} - T_n = \sum_{j=1}^{n+k} \frac{a_j}{S_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{S_j} = \sum_{j=1}^{n+k} \frac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}.$$

Or, comme $\sum a_n$ diverge, alors $\lim_{k\to\infty} 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}} = 1$..

Ainsi, $(T_n)$ ne satisfait pas le critère de convergence de la question 3. a), et $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge.

---

**Exercice 1.04.**

1. Déterminer les valeurs de $x$ réel pour lesquelles $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge. On note $D$ l'ensemble de ces valeurs.

*On pose alors pour tout $x \in D$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$.*

2. Montrer que pour tout $x \in D$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $(\star)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Montrer que $\ln(\Gamma(x))$ existe pour $x \in D$.

b) On admet que la fonction $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D$ et que pour tout $x \in D$

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt \quad \text{et} \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

i) Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles, telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} [g(t)]^2\,dt$ convergent. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)+\lambda g(t)]^2\,dt$ est convergente et que sa valeur, notée $\varphi(\lambda)$, est toujours positive ou nulle.

En déduire une inégalité liant $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\,dt$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} [g(t)]^2\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$

ii) Montrer que la fonction $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur $D$.

4. a) En utilisant la relation $(\star)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n2$ :

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

b) Montrer qu'il existe $a_n \in [n, n+1]$ tel que $\ln n = \dfrac{\Gamma'(a_n)}{\Gamma(a_n)}$.

c) En utilisant la convexité de la fonction $\ln \circ \Gamma$, montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$, où $\gamma$ est la constante d'Euler définie par $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\big)$.

---

**Solution :**

1. Ce sont des questions vues en cours. La fonction $\Gamma$ est définie sur $D = \mathbb{R}^{+*}$

2. Une intégration par parties donne $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et par récurrence $\Gamma(1) = 1$, puis $\Gamma(n) = (n-1)!$

3. $(\ln \circ \Gamma)(x)$ existe pour $x > 0$, car pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$, puisque $t \to t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive. On admet que l'on peut dériver et

$$\ln(\Gamma)'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \text{ et } \ln(\Gamma)''(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}$$

Cette dernière expression est positive, car le dénominateur l'est, tout comme le numérateur par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4. On dérive $(\star)$. Il vient : $\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x)$ et donc

$$\Gamma'(2) = \Gamma'(1) + \Gamma(1) \implies \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = \Gamma'(1) + 1$$

Supposons que $\dfrac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \Gamma'(1) + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. On a :

$$\Gamma'(n+1) = n\Gamma'(n) + \Gamma(n) \implies \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{n\Gamma'(n)}{n\Gamma(n)} + \frac{1}{n}$$

ce qui termine la récurrence.

5. a) La formule des accroissements finis appliquée à la fonction $\ln \Gamma$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ donne l'existence de $a_n \in [n, n+1]$ tel que

$$\ln n = \frac{\ln \Gamma(n+1) - \ln \Gamma(x)}{(n+1) - n} = \frac{\Gamma'(a_n)}{\Gamma(a_n)}$$

b) La croissance de la fonction $\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ (convexité de $\ln \Gamma$) permet d'écrire

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} \leqslant \frac{\Gamma'(a_n)}{\Gamma(a_n)} = \ln n \leqslant \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}$$

et par la question 4. a) :

$$\Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n \leqslant \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n)$ existe (on la note alors sa limite $\gamma$).

Pour cela il suffit de remarquer que $\dfrac{1}{k+1} \displaystyle\int_{k}^{k+1} \dfrac{dt}{t} \dfrac{1}{k}$, ce qui permet de montrer que la suite précédente est monotone et bornée.

---

**Exercice 1.05.**

1. Soit $f$ la fonction définie par $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1-t}$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ converge.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in ]0, 1[$,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \ln t + \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t}$$

c) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t \ln t}{1-t}$ définie sur $]0, 1[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1]$.

d) En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$ sous la forme d'une série de Riemann.

2. Pour tout $x \in ]-\infty, 1]$, on pose : $L(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$.

   a) Montrer que la fonction $L$ est bien définie sur $]-\infty, 1]$.

   b) Exprimer $L(1)$ à l'aide d'un résultat précédent.

3. a) Montrer que pour tout $x \in ]0,1[$ , $L(x) = -\ln(1-x)\ln(x) + L(1) - L(1-x)$.

   b) Déterminer la valeur de $L\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$.

4. Montrer que pour tout $x \in ]0, 1[$, $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}L(x^2)$.

---

**Solution :**

1. a) La fonction $f$ est définie, continue et négative sur $]0,1[$. Au voisinage de 0, $f(t) \sim \ln t$ et on sait que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge. Au voisinage de 1, $f(t) \sim -1$ : $f$ est ainsi prolongeable par continuité en $t = 1$ et l'intégrale est faussement impropre.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in ]0, 1[$,

$$\sum_{k=0}^{n} t^k \ln t + \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t} = \ln(t)\big(\sum_{k=0}^{n} t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}\big) = \ln(t)\big(\frac{1-t^{n+1}}{1-t} + \frac{t^{n+1}}{1-t}\big) = f(t)$$

c) La fonction $g$ est définie et continue sur $]0,1[$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$ et, au voisinage de 1, $g(t) \sim -1$ : donc $g$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. On confond par la suite $g$ et son prolongement.

d) Par linéarité de l'intégrale et convergence de chacune des intégrales,

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln t dt + \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln t dt + \int_0^1 t^n g(t)dt$$

Par intégration par parties (à faire sur $]\varepsilon, 1]$, ...), on trouve $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln t dt = \frac{-1}{(k+1)^2}$. De plus, $g$ (ou du moins son prolongement) est continue sur $[0,1]$ donc bornée (en valeur absolue) par un réel $M$. D'où,

$$\Big|\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}dt\Big| \leqslant M\int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1}$$

Finalement, en faisant tendre $n$ vers $+\infty$, on trouve

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{(k+1)^2} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad (= \frac{-\pi^2}{6})$$

2. a) Posons $\ell : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$. La fonction $\ell$ est définie et continue sur $]-\infty, 0[ \cup ]0,1[$. Au voisinage de 0, $\ell(t) \sim -1$ : ainsi, $\ell$ est prolongeable par continuité en $t = 0$. Au voisinage de 1, $\ell(t) \sim \ln(1-t)$. Or $\displaystyle\int_{1/2}^{1-\varepsilon} \ln(1-t)dt = \int_{\varepsilon}^{1/2} \ln(u)du$ a une limite finie lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 (voir ci-dessus).

On conclut que la fonction $L$ est bien définie sur $]-\infty, 1]$.
b) Le changement de variable affine $u = 1 - t$ donne :

$$L(1) = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}dt = -\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}du = -\int_0^1 f(u)du \quad (= \frac{\pi^2}{6})$$

3. a) Soit $x \in ]0, 1[$. Le même changement de variable donne $L(x) = \displaystyle\int_1^{1-x} \frac{\ln u}{1-u}du$. Soit $\alpha$ tel que $0 < 1 - x < 1 - \alpha < 1$.
Une intégration par parties donne :

$$\int_{1-\alpha}^{1-x} \frac{\ln u}{1-u}du = \big[-\ln(u)\ln(1-u)\big]_{1-\alpha}^{1-x} - \int_{1-\alpha}^{1-x} \frac{\ln(1-u)}{u}du$$

On fait alors tendre $\alpha$ vers 0 sachant que $\ln(1-\alpha)\ln(\alpha) \sim -\alpha\ln(\alpha) \longrightarrow 0$.
On trouve donc :
$$L(x) = -\ln(1-x)\ln(x) - \int_1^{1-x} \frac{\ln(1-u)}{u}du = -\ln(1-x)\ln(x) + L(1) - L(1-x)$$

c) En prenant $x = 1/2$ dans la formule précédente, on obtient $L\big(1/2\big) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

4. Soit $x \in ]0, 1[$. On a

$$\begin{aligned} -L(x) - L(-x) &= \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt + \int_0^{-x} \frac{\ln(1-t)}{t}dt \\ &= \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt + \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt \\ &= \int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\ln(1-u)}{u}du = -\frac{L(x^2)}{2} \end{aligned}$$

On a ainsi $L(x) + L(-x) = \dfrac{L(x^2)}{2}$.

---

**Exercice 1.06.**

Soit $f$ une fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $C^\infty$ sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, puis déterminer sa limite.

2. On suppose que $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini. En déduire la nature de la série de terme général $u_n$.

3. On suppose que $f(1) = 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n$.

4. Soit $h$ une fonction continue sur $[0, 1]$.
   a) En utilisant la continuité de $h$ au point 1, montrer que :
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big[n\int_0^1 x^n\big(h(x) - h(1)\big)dx\Big] = 0.$

b) En déduire que la suite $\left(n\displaystyle\int_0^1 x^n h(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et exprimer sa limite à l'aide de la fonction $h$.

---

**Solution :**

1. La fonction $f$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée et on peut poser $M = \sup\limits_{x\in[\![0,1]} |f(x)| \in \mathbb{R}$.

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant |u_n| = \big|\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx\big| \leqslant \int_0^1 x^n M dx = \frac{M}{n+1}$.

Par encadrement : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Une intégration par parties donne

$$u_n = \big[\frac{x^{n+1}}{n+1}f(x)\big]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx$$

Comme $f'$ est continue sur $[0,1]$, on pose $N = \sup_{x\in[\![0,1]} |f'(x)| \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\frac{1}{n+1}\big|\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\big| \leqslant \frac{N}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{N}{(n+1)(n+2)}$$

On en déduit que $\displaystyle\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx$ est négligeable devant $\displaystyle\frac{f(1)}{n+1}$. Par conséquent $u_n \sim \displaystyle\frac{f(1)}{n}$.

Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes de signe fixe, la série $\sum u_n$ diverge.

3. Si $f(1)=0$, l'intégration précédente montre que $|u_n|$ est majoré par une expression en $1/n^2$.

Ainsi, par critère de majoration des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ converge, il en est donc de même de la sŽrie $\sum u_n$.

4. a) Soit $\varepsilon>0$ un réel fixé.

Par continuité de $h$ au point $x=1$, $\exists\,\delta>0, |1-x|<\delta \implies |h(x)-h(1)|<\varepsilon$.

Par la relation de Chasles,

$$n\int_0^1 x^n(h(x)-h(1))dx = n\int_0^{1-\delta} x^n(h(x)-h(1))dx + n\int_{1-\delta}^1 x^n(h(x)-h(1))dx$$

On pose : $I_{1,n} = n\displaystyle\int_0^{1-\delta} x^n(h(x)-h(1))dx; I_{2,n} = n\int_{1-\delta}^1 x^n(h(x)-h(1))dx$.

- D'une part, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $|I_{2,n}| \leqslant n\varepsilon\displaystyle\int_{1-\delta}^1 x^n dx \leqslant n\varepsilon\int_0^1 x^n dx = \frac{n\varepsilon}{n+1} < \varepsilon$.
- D'autre part, en posant $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |h(x)| \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$|I_{1,n}| \leqslant 2Mn\int_0^{1-\delta} x^n dx = \frac{2Mn}{n+1}(1-\delta)^{n+1},$$

quantité qui tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Il existe donc un rang $n_1$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$, on a $|I_{1,n}| < \varepsilon$.

Ainsi, il existe un rang $n_1$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$ on a :

$$\left|n\int_0^1 x^n(h(x)-h(1))dx\right| < |I_{1,n}| + |I_{2,n}| < 2\varepsilon.$$

Ceci signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\int_0^1 x^n(h(x)-h(1))dx\right] = 0$.

b) On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[n\int_0^1 x^n h(x)dx\right] &= \lim_{n\to+\infty}\left[n\int_0^1 x^n h(1)dx\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)h(1) = h(1)\end{aligned}$$

On conclut que $\lambda = h(1)$.

---

**Exercice 1.07.**

Soit $\lambda$ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{nx}\, dx$$

1. a) Montrer que $1 - P_n(\lambda) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{\lambda} x^n \mathrm{e}^{-x}\, dx$.

b) Déterminer une relation entre $P_n(n)$ et $I_n$.

2. Pour tout $x \in ]0,1[$, on pose $\psi(x) = -\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$.

Montrer que $\psi$ admet un prolongement de classe $C^1$ sur $[0,1[$, prolongement que l'on note encore $\psi$.

Montrer que $\psi$ réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle à préciser.

3. Pour $\sigma \in ]0,1[$, on pose $\delta = \psi^{-1}\left(\dfrac{1}{2\sigma^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in ]0,1[$, $\left((1-x)\mathrm{e}^x\right)^n = e^{-nx^2\psi(x)}$.

b) Montrer que : $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{\delta\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

c) En déduire un équivalent de $I_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

d) Montrer que $1 - P_n(n)$ est équivalent à $\dfrac{n^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

4. En utilisant le théorème limite central, déterminer un équivalent de $n!$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

---

**Solution :**

1. a) On prouve la formule par récurrence sur $n$.

• Pour $n=0$, la formule donne $1-P_0(\lambda)=1-\mathrm{e}^{-\lambda}=\displaystyle\int_0^\lambda \mathrm{e}^{-x}dx$

• Hérédité. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!}\int_0^\lambda x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}dx &= \frac{-\lambda^{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\int_0^\lambda x^n\mathrm{e}^{-x}dx\\ &= \frac{-\lambda^{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(n+1)!}+1-P_n(\lambda)=1-P_{n+1}(\lambda)\end{aligned}$$

On conclut.

b) Les changements de variable successifs $u=1-x$, puis $v=nu$ de classe $C^1$ donnent

$$I_n=\int_0^1 u^n\mathrm{e}^{n(1-u)}du=\frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\int_0^n v^n\mathrm{e}^{-v}dv$$

Donc : $I_n=\dfrac{e^n}{n^{n+1}}\times n!(1-P_n(n))$, d'après la question 1.

2. On prolonge $\psi$ par continuité en 0 en posant $\psi(0)=1/2$. La fonction $\psi$ est dérivable sur $]0,1[$ avec

$$\psi'(x)=\frac{1}{x^3}\big(x+2\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}\big)=\frac{1}{x^3}\times h(x)$$

On a alors $h'(x)=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ et comme $h(0)=0$, $h$ qui est strictement croissante, est strictement positive sur $]0,1[$. Il en est de même de $\psi'$ et $\psi$ réalisé une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $[1/2,+\infty[$.

3. a) On commence par remarquer que pour tout $x\in]0,1[$, $((1-x)\mathrm{e}^x)^n=\mathrm{e}^{-nx^2\psi(x)}$.

b) Ainsi $I_n=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2\psi(x)}dx\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-u^2/2}du\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Puis $I_n=\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2\psi(x)}dx\geqslant\int_0^\delta\mathrm{e}^{-nx^2\psi(x)}dx\geqslant\int_0^\delta\mathrm{e}^{-nx^2\psi(\delta)}dx.$

Le changement de variable linéaire $x=\sqrt{2n\psi(\delta)}u$ donne :

$$I_n\geqslant\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\int_0^{\delta\sqrt{n}}e^{-x^2/2}dx$$

À $\delta$ fixé, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, il vient $\sigma\displaystyle\int_0^{\delta\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-x^2/2}dx\longrightarrow\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, puis, on fait tendre $\sigma$ vers 1, ce qui donne $I_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

En regroupant les questions, il vient $1-P_n(n)\sim\dfrac{n^n}{n!}e^{-n}\sqrt{\dfrac{\pi n}{2}}$.

4. On sait que $P_n(n)$ représente la probabilité que la variable aléatoire $S_n$ somme de $n$ varaibles aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1. Le théorème limite central nous assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, on démontre la formule de Stirling, soit :

$$n! \underset{(\infty)}{\sim} \sqrt{2\pi n}\times n^n \mathrm{e}^{-n}$$

---

**Exercice 1.08.**

**Partie A**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante convergente de limite $\ell$. On pose pour tout entier $n$ non nul :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

1. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante majorée, donc convergente.

2. Démontrer que pour tout entier $n$ non nul : $v_{2n} \geqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

3. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell$.

**Partie B**

*On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel $\ell$, alors on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = \ell \qquad (*).$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in [0,1[$ et par la relation, valable pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

2. Pour tout entier naturel $n$, on pose, $v_n = 1 - u_n$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}\right)$.
   b) Etudier la convergence de la suite $(nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) En déduire que $u_n = 1 - \dfrac{2}{n} + o(n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

---

**Solution :**

**Partie A**

1. Pour tout entier non nul $n$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n(n+1)}\Big(\sum_{k=1}^{n+1} nu_k + nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(n+1)u_k\Big)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}\Big(-\sum_{k=1}^{n} u_k + nu_{n+1}\Big) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(u_{n+1} - u_k)$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$ , $u_{n+1} \geqslant u_k$, d'où $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. La suite $(u_n)_n$ est majorée par $\ell$. Il en est donc de même de la suite $(v_n)_n$ et cette suite converge de limite $\ell'$ telle que $\ell'\ell$.

2. Pour tout entier non nul $n$, on a :

$$2v_{2n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = v_n + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \qquad (1)$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, $\forall\, k \in [\![n+1, 2n]\!]$ , $u_n \leqslant u_k$ d'où $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant nu_n$ et de (1) on tire

$$2v_{2n} \geqslant v_n + \frac{nu_n}{n} \implies v_{2n} \geqslant \frac{u_n + v_n}{2}. \qquad (2)$$

3. Le passage à la limite dans (2) donne : $\ell' \geqslant \dfrac{\ell + \ell'}{2}$, soit $\ell'\ell$ , d'où $\ell = \ell'$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite $\ell$.

**Partie B**

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \,]0;1[$ (récurrence immédiate) et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2} > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante majorée par 1, donc convergente vers $\ell \in \,]0,1]$.

• $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = x \iff x = 1$ et d'autre part $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n)$. On a donc $\ell = 1$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n - v_{n+1}}{v_{n+1}v_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(1-u_{n+1})(1-u_n)} = \frac{(u_n-1)^2}{2(1 - \frac{u_n^2+1}{2})(1-u_n)}$$
$$= \frac{(u_n-1)^2}{(1-u_n^2)(1-u_n)} = \frac{1}{1+u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

b) On déduit de ce qui précède : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{1}{v_k} - \dfrac{1}{v_{k-1}}\Big) = \dfrac{1}{2}$, ce qui donne après réduction : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_0}\Big) = \dfrac{1}{2}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = 2$.

c) Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-u_n) = 2$, d'où $u_n = 1 - \dfrac{2}{n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)$.

---

**Exercice 1.09.**

Dans tout l'exercice, $K$ est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$K(x) = P(x)\mathrm{e}^{-x/2},$$

où $P$ est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

L'objet de l'exercice est la recherche de fonctions continues $f$ de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel positif $x$ :

$$f(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t)f(t)\,dt \qquad (1)$$

1. On considère pour tout entier naturel $n$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,dt$.
Démontrer que cette intégrale converge et préciser sa valeur $J_n$ en fonction de $n$.

2. Dans cette question, on suppose que $P$ est la fonction polynôme constante égale à 1.

a) Soit $f$ une solution de (1). Montrer qu'il existe un réel $C$ tel que $f = CK$.

b) On considère réciproquement une fonction $f = CK$, où $C$ est un nombre réel donné. À quelle condition sur $C$ cette fonction est-elle solution de (1) ? En déduire que (1) n'a pas de solution.

3. Dans cette question, on désigne par $\lambda$ un nombre réel et l'on suppose que $P$ est la fonction polynôme $P : x \mapsto \lambda + x$.

a) Soit $E$ l'espace vectoriel engendré par les 2 applications de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ :

$$\Phi_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}; \qquad \Phi_1 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x/2}$$

i) Montrer que $(\Phi_0, \Phi_1)$ est une base de $E$.

ii) Soit $\Phi$ un élément de $E$ et $\Psi$ la fonction définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi(t)\,dt$$

Prouver que $\Psi$ est ainsi bien définie et montrer que $\Psi$ est un élément de $E$.

iii) Montrer que l'application $u \ : \Phi \in E \mapsto u(\Phi) = \Psi \in E$ est un endomorphisme de $E$. Déterminer la matrice $M$ de $u$ dans la base $(\Phi_0, \Phi_1)$. L'endomorphisme $u$ est-il un automorphisme de $E$ ?

b) Soit $f$ une solution de (1). Montrer qu'elle appartient à $E$.

c) On considère réciproquement une fonction $f = \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1$ de $E$, où $\alpha_0$ et $\alpha_1$ sont des nombres réels.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_0, \alpha_1)$ pour que cette fonction $f$ soit solution de (1). À quelle condition (1) admet-elle une seule solution ?

---

**Solution :**

1. On reconnaît dans l'intégrale demandée $\Gamma(n+1) = n!$.

2. a) Soit $f$ une solution de (1). La convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2} f(t)dt$ est acquise et un calcul immédiat donne pour tout $x \geqslant 0$ $f(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\big(1 + \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t/2}dt\big) = CK$, avec $C = 1 + \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t/2}dt$.

b) Réciproquement, soit $C \in \mathbb{R}$ et $f = CK$ ; la fonction $f$ est solution de (1) si et seulement si pour tout$x \geqslant 0$ : $C\mathrm{e}^{-x/2} = \mathrm{e}^{-x/2} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+t)/2} C\mathrm{e}^{-t/2}dt$.

Soit après simplification : $C = 1 + C\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt = 1 + C$. Il n'y a donc pas de solution.

3. a) i) Les deux fonctions $\Phi_0$ et $\Phi_1$ ne peuvent être liées vu leur allure au voisinage de $+\infty$ par exemple. Ainsi $(\Phi_0, \Phi_1)$ est une famille libre de $E$ et génératrice de $E$ par définition : c'est une base de $E$.

ii) Posons, pour tout réel $x$ positif

$$\Psi_0(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi_0(t)dt \text{ et } \Psi_1(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi_1(t)dt$$

Un calcul élémentaire donne :

$\Psi_0(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda + x + t)\mathrm{e}^{-\frac{x+t}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}dt = (\lambda+1)\Phi_0(x) + \Phi_1(x).$

De même : $\Psi_1(x) = (\lambda+2)\Phi_0(x) + \Phi_1(x)$.

Enfin, pour toute fonction $\Phi$ un élément de $E$, il existe un couple unique $(\alpha_0, \alpha_1)$ tel que $\Phi = \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1$. Par linéarité de l'intégration, $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi(t)dt$ est convergente pour tout réel positif $x$ et $\Psi = \alpha_0\Psi_0 + \alpha_1\Psi_1 \in E$.

iii) D'après ce qui précède l'application $u\ : \Phi \in E \mapsto u(\Phi) = \Psi \in E$ est un endomorphisme de $E$, dont la matrice dans la base $(\Phi_0, \Phi_1)$ est : $M = \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $u$ est un automorphisme car $M$ est clairement inversible.

b) Soit $f$ une solution de (1), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda a + x + t)\mathrm{e}^{-\frac{x+t}{2}} f(t)dt$ est donc convergente pour tout $x$ positif et on a $f(x) = (\lambda + x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda + x + t)\mathrm{e}^{-\frac{x+t}{2}} f(t)dt.$

D'où $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\Big(\lambda + \displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda+t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} f(t)dt + x\Big[1 + \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} f(t)dt\Big]\Big).$

Que l'on écrit : $f(x) = \alpha\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \beta x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \alpha\Phi_0(x) + \beta a\Phi_1(x)$, avec $\alpha$ et $\beta$ bien choisis, donc $f \in E$.

c) Soit $f = \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1$ un élément de $E$. $f$ est une solution de (1) si et seulement si :

$$f(x) = (\lambda + x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \alpha_0\Psi_0(x) + \alpha_1\Psi_1(x) \quad (*)$$

$$(*) \iff \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1 = \lambda\Phi_0 + \Phi_1 + \alpha_0\big((\lambda+1)\Phi_0 + \Phi_1\big) + \alpha_1\big((\lambda+2)\Phi_0 + \Phi_1\big)$$

Comme $(\Phi_0, \Phi_1)$ est une base de $E$, on déduit par identification des coefficients que $f$ est une solution de (1) si et seulement si : $\begin{cases} ((\lambda+1)-1)\alpha_0 & + & (\lambda+2)\alpha_1 & = & -\lambda \\ \alpha_0 & + & & = & -1 \end{cases}$

$f$ est définie de façon unique si et seulement si ce système admet une solution unique, c'est-à-dire si la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda+2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

On conclut que (1) admet une seule solution si et seulement si $\lambda \neq -2$.

**Exercice 1.10.**

Dans tout l'exercice, $a$ est un réel fixé supérieur ou égal à 1. On note, sous réserve d'existence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} t^n \, dt \text{ et } I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} \, \frac{\sin t}{t} dt$$

1. a) Prouver que pour tout entier $n$, l'intégrale définissant $I_n$ converge.

b) Établir, pour tout $n \geqslant 1$ , une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n-1}$. En déduire $I_n$ en fonction de $n$ et de $a$.

2. Démontrer que l'intégrale définissant $I$ est absolument convergente.

3. a) Soit $x$ un réel positif. Montrer que pour tout entier naturel $n$

$$\left|\sin x \;-\; \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\;\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

b) En déduire qu'il existe un réel $K_n$ dépendant de $n$ tel que :

$$\left|I - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{I_{2k}}{(2k+1)!}\right| \leqslant K_n I_{2n+1}$$

c) En déduire que la série $\sum\limits_{k \geq 0} (-1)^k \, \dfrac{1}{(2k+1)a^{2k+1}}$ est convergente de somme $I$.

4. a) Prouver que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \in [0,1]$ :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0,1], \left|\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$ .

c) En déduire une expression de $I$ en fonction de $a$.

---

**Solution :**

1. a) Pour tout entier naturel $n$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at} t^n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ , négligeable au voisinage de $+\infty$ devant $t^{-1525}$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} t^n dt$ converge.

b) En intégrant par parties, d'abord sur un segment, puis en passant à la limite , on obtient $I_n = \dfrac{n}{a} I_{n-1}$.

Par récurrence, il vient pour tout entier naturel $n$, $I_n = \dfrac{n!}{a^{n+1}}$.

2. a) On a $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, ce qui règle le problème en 0 et $\mathrm{e}^{-at} \dfrac{|\sin t|}{t}$ est négligeable devant $t^{-1515}$ au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve la convergence absolue de l'intégrale définissant $I$.

3. a) Le résultat demandé est banal par toute formule de Taylor.

b) Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ : $\left|\dfrac{\sin t}{t} - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k}\right| \leqslant \dfrac{t^{2n+1}}{(2n+2)!}$.

En multipliant par $\mathrm{e}^{-at} > 0$ et en intégrant (toutes les intégrales convergent) :

$\left|I - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{I_{2k}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$ et on peut prendre $K_n = \frac{1}{(2n+2)!}$.

c) On a : $\frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)a^{2n+2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

En passant à la limite dans l'expression précédente, il vient :

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{I_{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)a^{2k+1}}$$

4. a) Il s'agit simplement de l'identité géométrique.

b) En intégrant sur le segment $[0, x]$ :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Or : $0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^x t^{2n+2} dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3}$.

D'où le résultat demandé.

c) Par passage à la limite (légitime) : pour tout $x \in [0, 1]$ : $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$

Donc $I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1/a)^{2k+1}}{(2k+1)} = \arctan\left(\frac{1}{a}\right)$.

On peut aussi écrire : $I = \frac{\pi}{2} - \arctan(a)$.

---

**Exercice 1.11.**

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $a \in \mathbb{R}$.

a) Justifier que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ converge pour tout réel $x$. On note alors sa somme $\varphi(x)$.

b) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} \left[e^{-x} \varphi(x) - a\right] = 0$.

(On pourra écrire $e^x$ sous la forme d'une série et « couper la somme en deux ».)

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. On note :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \text{ et } U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

a) Justifier que les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{U_n}{n!} x^n$ convergent pour tout $x$ réel. On note leurs sommes respectives :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} x^n.$$

On admet que $f$ et $g$ sont dérivables et qu'on peut dériver terme à terme les séries ci-dessus pour tout $x$ réel.

b) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) + g(x)$.

c) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt = \mathrm{e}^{-x}\,[g(x) - f(x)]$.

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

3. Dans cette question, on prend : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$.
Calculer $f(x)$ et $g(x)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,[g(x) - f(x)]$.

Que dire de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ ?

---

**Solution :**

1. a) On écrit $\dfrac{a_n}{n!}\,x^n = O\Big(\dfrac{|x|^n}{n!}\Big)$ qui est le terme général d'une série exponentielle convergente.
b) On a $\forall\varepsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, \forall n \geq N\,,\ |a_n - a| < \varepsilon$
d'où, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}|\mathrm{e}^{-x}\,\varphi(x) - a| &\leqslant \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{N}|a_k - a|\frac{x^k}{k!} + \mathrm{e}^{-x}\,\varepsilon\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{N}|a_k - a|\frac{x^k}{k!} + \varepsilon\\ &\leqslant 2\varepsilon\end{aligned}$$

pour tout $x$ assez grand par croissances comparées.

2. a) On utilise la question 1.a, puisque $u_n \to 0$ et $U_n \to U$.

b) Par dérivation terme à terme et séparation en deux séries convergentes on a, pour tout $x$,

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\big[u_n + U_{n-1}\big]\,\frac{n\,x^{n-1}}{n!} = f'(x) + g(x)$$

c) Immédiat par dérivation et égalité en $t = 0$ car $g(0) = U_0 = u_0 = f(0)$.
On peut également multiplier par $\mathrm{e}^{-x}$, puis utiliser une intégration.
d) D'après la question 1. b

$$\int_0^{+\infty}\Big[f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\Big]dt = \lim_{x\to+\infty}\big[\mathrm{e}^{-x}\,\big[g(x) - f(x)\big]\big] = \lim_{n\to+\infty} U_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = U$$

3. On remarque que les résultats précédents ne s'appliquent pas car la série $\sum u_n$ diverge.
Cependant,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ et } g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} U_{2p}\,\frac{x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(2p)!} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

(partie paire de la fonction exponentielle), puis

$$\mathrm{e}^{-x}\,\big[g(x) - f(x)\big] = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{2} \to \frac{1}{2}$$

et

$$\int_0^{+\infty}\Big[f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\Big]dt = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}dt = \frac{1}{2}$$

---

**Exercice 1.12.**

Soit $\alpha$ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$$

0. Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$. On notera $f(\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha+1}}$

1. Montrer que pour tout réel $x$, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente. On note alors :

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

2. a) Montrer que la fonction $S$ est impaire.

b) Pour $n$ entier supérieur ou égal à 1, étudier les variations de $u_n$ sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire les variations de $S$ sur $[1, +\infty[$ puis sur $]-\infty, -1]$

3. a) Montrer que pour $x \geqslant 1$, et $n \geqslant 1$ :

$$\frac{x}{(1+x)^2} f(\alpha) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{x} f(\alpha)$$

(On pourra utiliser l'encadrement : $nx^2 < 1 + nx^2 < n(1+x)^2$.)

b) En déduire un équivalent de $S(x)$ et sa limite en $+\infty$.

4. On suppose $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$.

a) En minorant pour $x \geqslant 0$, après justification, la somme $S(x)$ par $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k(x)$, montrer que :

$$S\Big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\Big) \geqslant \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}$$

b) En déduire que $S$ n'est pas continue en 0.

c) Déterminer la limite de $S$ en 0.

---

**Solution :**

0. Si $x \neq 0$, $u_n(x) \sim \dfrac{1}{n^{\alpha+1}x}$ et il suffit d'appliquer le critère de Riemann, puisque $\alpha + 1 > 1$. Si $x = 0$, le résultat demandé est banal.

1. Pour $x = 0$, le terme général $u_n(0) = 0$ et la série converge vers 0. Pour $x > 0$, $u_n(x) \sim \dfrac{1}{x} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$

Ce dernier est le terme général d'une série de Riemann convergente, car $\alpha+1 > 1$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente pour $x > 0$.

On remarque que les fonctions $u_n$ sont impaires, il suffit de tout multiplier par $-1$ et ainsi on a aussi la convergence pour $x < 0$.

On a établi ainsi la convergence pour tout $x$ réel de la série de terme général
$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \text{ pour } n > 0$$

2. a) Les fonctions $u_n$ étant impaires, les sommes partielles le sont aussi et en passant à la limite, $S$ est aussi impaire.

b) La fonction $u_n$ est de type fraction rationnelle à dénominateur strictement positif pour $x \in \mathbb{R}$.
Cette fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$u_n'(x) = \frac{1}{n^\alpha}\frac{(1+nx^2) - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{(1-nx^2)}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$$
Ainsi, $u_n$ est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$, car
$$u_n'(x) > 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{n}} < x < \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } u_n'(x) < 0 \iff x > \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ou } x < -\frac{1}{\sqrt{n}}$$

c) Comme $\left[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \subset [-1, 1]$, $u_n$ est strictement décroissante sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
Par somme finie, les $S_n$ sont aussi décroissantes sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

d) Les sommes partielles $S_n$ sont strictement décroissantes sur $[1, +\infty[$. En passant à la limite, lorsque $n$ tend vers l'infini, il vient :
$\forall\, x, y, 1 \leqslant x \leqslant y \implies S(x) \leqslant S(y)$. La fonction $S$ est aussi décroissante sur $[1, +\infty[$. Par symétrie, $S$ étant impaire, elle est aussi décroissante sur $]-\infty, -1]$.

3. a) Pour $x \geqslant 1$, et $n \geqslant 1$, en utilisant la majoration $1 + nx^2 \leqslant n(1+x)^2$ équivalente à $1 + nx^2 \leqslant n + 2nx + nx^2$ ou encore à $1 \leqslant n + 2nx$ qui est vraie,
on obtient finalement :
$$\forall n > 0,\ \forall x \geqslant 1,\ \frac{x}{(1+x)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}} \leqslant S(x) \leqslant \frac{x}{x^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$$
$$\frac{x}{(1+x)^2}f(\alpha+1) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{x}f(\alpha+1)$$

b) Ainsi, $\dfrac{x^2}{(1+x)^2} \leqslant \dfrac{S(x)}{\frac{1}{x}f(\alpha+1)} \leqslant 1$. Comme $\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$ tend vers 1 lorsque $x$ tend vers $+\infty$,
on a par le théorème d'encadrement que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}f(\alpha+1) = \dfrac{1}{x}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^{\alpha+1}}$

Et la limite de $S(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ est 0.

c) Par imparité, on obtient le même résultat en $-\infty$

4. a) Pour $x \geqslant 0$, la série étant à termes positifs, et $\alpha > 0$, on minore sa somme par la somme des termes d'indices compris entre $n+1$ et $2n$, et le terme général dans cette somme par $\dfrac{x}{(2n)^\alpha(1+2nx^2)}$. On obtient :

$$S(\frac{1}{\sqrt{2n}}) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{(2n)^\alpha(1+2n\frac{1}{2n})} \geqslant \frac{n}{2^{\alpha+\frac{3}{2}} \times n^{\alpha+\frac{1}{2}}} = \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}$$

b) Le minorant obtenu tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Si $S$ était continue en $0^+$, la limite de la suite $S(\frac{1}{\sqrt{2n}})$ devrait être $S(0) = 0$, or par minoration cette limite est $+\infty$ Donc on a bien prouvé que $S$ n'est pas continue en $0^+$.

c) D'après la question précédente, la seule limite possible pour $S(x)$ en $0^+$ est $+\infty$.

Par imparité, on obtient comme seule limite possible pour $S(x)$ en $0^-$ la limite $-\infty$.

---

**Exercice 1.13.**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x$ réel :

$$g_n(x) = x(1+x)\big(1+\frac{x}{2}\big)\dots\big(1+\frac{x}{n}\big)n^{-x}$$

et

$$\forall\, n \geqslant 2, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots, -(n-1)\}, f_n(x) = \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)}$$

1. Soit $x \in E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

a) Montrer que la série de terme général $v_n(x) = x \ln\big(1 - \frac{1}{n}\big) + \ln\big(1 + \frac{x}{n}\big)$ est convergente. On note $L(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} v_n(x)$.

b) En déduire que la suite $(\ln(p_N(x))_N$ définie par $p_N(x) = \prod\limits_{n=2}^{N} f_n(x)$ converge et préciser sa limite en fonction de $L(x)$.

c) Déterminer la limite de la suite $N \mapsto w_N(x) = \prod\limits_{n=2}^{N} \dfrac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)}$, en fonction de $L(x)$.

d) En déduire que $\forall\, x \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g_1(x)\mathrm{e}^{L(x)}$.

*Dans la suite, nous noterons pour tout $x$ de $E$ : $g(x) = g_1(x)\mathrm{e}^{L(x)}$.*

2. Montrer que $\forall\, x \in E, g(x) = xg(x+1)$.

*On pose* $\forall x \in E, \Gamma(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

3. Justifier que la fonction $\Gamma$ est bien définie sur $E$.

4. a) Montrer que : $\forall\, x \in E, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

b ) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.

---

**Solution :**

1. a) La série de terme général $v_n(x) = x \ln\big(1 - \frac{1}{n}\big) + \ln\big(1 + \frac{x}{n}\big)$ est convergente. En effet, un développement limité à l'ordre 2 donne :

$$v_n(x) = x\big(\frac{-1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big) + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\big(\frac{x^2}{n^2}\big) \sim -\frac{x^2+x}{2n^2}$$

(car $x(x+1)$ est non nul par hypothèse). On conclut grâce au critère de comparaison avec une série de Riemann,

On a bien la convergence simple (à $x$ fixé dans $E$) de la série de terme général $v_n(x)$ sur $E$.

On note $L(x)$ la somme de cette série : $L(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n(x)$

b) On a :

$$\ln(p_N(x)) = \sum_{n=2}^{N} \ln(f_n(x)) = \sum_{n=2}^{N} \Big(x\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\Big) = \sum_{n=2}^{N} v_n(x).$$

En effet, On a :

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R}, g_n(x) &= x(1+x)\big(1+\frac{x}{2}\big)\dots\big(1+\frac{x}{n}\big)n^{-x}\\ &= \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!}n^{-x}\end{aligned}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,\dots-(n-1)\},\quad f_n(x) = \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)} = \big(1+\frac{x}{n}\big)\big(1-\frac{1}{n}\big)^x$$

c) Par continuité de l'exponentielle, on a donc :

$$\forall\, x \in E, \lim_{N\to+\infty} \ln\big(\prod_{n=2}^{N} f_n(x)\big) = L(x), \text{ d'où :}$$

$$\lim_{N\to+\infty} w_N = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=2}^{N} \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)} = \mathrm{e}^{L(x)}$$

d) On en déduit que $\forall\, x \in E, g_n(x) = g_1(x)f_2(x)\dots f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g_1(x)\mathrm{e}^{L(x)}$.

Dans la suite, nous noterons pour $x$ dans $E$, $g(x) = g_1(x)\mathrm{e}^{L(x)}$

2. On remarque que pour $x$ non entier négatif :

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{g(x+1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{g_n(x)}{g_n(x+1)} = \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}\frac{n^{-x}}{n^{-x-1}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x+1} = x\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\forall\, x \in E, g(x) = xg(x+1), \quad \forall\, x \in -\mathbb{N}, \quad g(x) = 0$.

En effet, dans le cas où $x = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \geqslant p$, $g_n(x) = 0$

3. La fonction $\Gamma$ est bien définie sur $E$, car $g(x) = x(x+1)\mathrm{e}^{L(x)}$ sur $E$ et n'est pas nulle sur $E$, tandis que $g$ s'annule sur les opposés des entiers, d'après ce qu'on vient de voir :

$$\forall\, x \in E, \Gamma(x) = \frac{1}{g(x)}$$

4. a) On a $\forall\, x \in E, \Gamma(x+1) = \dfrac{1}{g(x+1)} = \dfrac{x}{g(x)} = x\Gamma(x)$. Soit :

$\forall x \in E, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

b) $\Gamma(1) = \dfrac{1}{g(1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{g_n(1)} = 1$

En effet, $g_n(1) = \dfrac{(n+1)!}{n!} n^{-1} = \dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par récurrence, on en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

---

**Exercice 1.14.**

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Delta^2 u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \Delta u_n = u_n - u_{n+1}, \Delta^2 u_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n.$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convexe* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n \geqslant 0$.

1. a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n$ en fonction de $\Delta u_n$ et de $\Delta u_{n+1}$.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la suite réelle $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convexe.

*On suppose pour toute la suite de l'exercice que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe et bornée.*

2. a) Démontrer que la suite réelle $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite (on pourra raisonner par l'absurde).

b) Démontrer que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera $\ell$ sa limite, que l'on ne cherchera pas à determiner.

c) Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels tels que $n \geqslant 2p$. Démontrer que l'on a : $0 \leqslant n\Delta u_n \leqslant 2(u_p - u_n)$.

En déduire les limites des suites $(n\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\Delta u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k\Delta^2 u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta u_k - n\Delta u_{n+1}$.

e) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\Delta^2 u_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Delta u_k$.

---

**Solution :**

1. a) D'après la définition de $\Delta^2 u_n$ et de $\Delta u_n$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\Delta^2 u_n &= u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n)\\ &= \Delta u_n - \Delta u_{n+1}\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}$.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe si et seulement si $\Delta^2 u_n \geqslant 0$, par définition. Or on a vu, en *a.*, que $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe si et seulement si la suite $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Dans tout le reste de l'exercice, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée convexe et bornée.

a) On sait que $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire,

$$|\Delta u_n| \leqslant |u_n - u_{n+1}| \leqslant |u_n| + |u_{n+1}| \leqslant 2M.$$

La suite $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et monotone. On a ainsi, montré que $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $\ell$ sa limite.

Montrons par l'absurde que $\ell = 0$. On suppose tout d'abord que $\ell > 0$. Il existe alors $N_0$ tel que $\Delta u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ pour tout $n \geqslant N_0$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant N_0$, $u_{N_0} - u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=N_0}^{n} \Delta u_k \geqslant \frac{\ell(n - N_0 + 1)}{2}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$, ce qui est absurde puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On aboutirait de même à $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, en supposant $\ell < 0$. Donc on a montré par l'absurde que la limite de $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

b) Comme la suite $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0, elle est positive. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels tels que $n \geqslant 2p$. En utilisant la décroissance de $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient,

$$u_p - u_n = \sum_{k=p}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=p}^{n-1} \Delta u_k \geqslant (n-p)\Delta u_n$$

Comme $n - p \geqslant \dfrac{n}{2}$, on en déduit que $0 \leqslant n\Delta u_n \leqslant 2(u_p - u_n)$.

En particulier, pour $p = \lfloor n/2 \rfloor$, $0 \leqslant n\Delta u_n \leqslant 2\left(u_{\lfloor n/2\rfloor} - u_n\right)$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \lfloor n/2 \rfloor = \infty$, on en déduit que $(u_{\lfloor n/2\rfloor})_{n\in\mathbb{N}}$ est de même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par composition des limites. Ainsi, par encadrement $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta u_n = 0$.

Comme $n\Delta u_{n+1} = (n+1)\Delta u_{n+1} - \Delta u_{n+1}$, on obtient $\lim_{n\to\infty} n\Delta u_{n+1} = 0$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\Delta^2 u_k &= \sum_{k=1}^{n} k(\Delta u_k - \Delta u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} k\Delta u_k - \sum_{k=1}^{n} k\Delta u_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\Delta u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\Delta u_k = \Delta_1 + \sum_{k=2}^{n} \Delta u_k - n\Delta u_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Delta u_k - n\Delta u_{n+1}
\end{aligned}$$

e) De la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta u_k = u_1 - u_{n+1}$, et de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que les deux sommes infinies de l'énoncé existent et sont égales :

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\Delta^2 u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta u_k.$$

**Exercice 1.15.**

Soit $\lambda$ un réel fixé *strictement négatif.*

On note $E$ l'ensemble des fonctions de classe $C^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation $f''+\lambda f=0$.

On note $\varphi$ l'application de $E$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à toute fonction $f\in E$ associe $(f(0),f'(0))$.

1. Montrer que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que l'application $\varphi$ est linéaire.

2. On note $f_\lambda$ et $g_\lambda$ les deux applications définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x)=\mathrm{e}^{x\sqrt{-\lambda}},g_\lambda(x)=\mathrm{e}^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

a) Montrer que $(f_\lambda,g_\lambda)$ est une famille libre de $E$.

b) Soit $f$ un élément de $E$ non nul et non multiple de $f_\lambda$. Soit

$$h:x\to f'(x)f_\lambda(x)-f(x)f'_\lambda(x)$$

Montrer que $h$ est constante. En déduire que $\varphi$ est injective, puis donner la dimension de $E$.

3. On se propose dans cette question de déterminer toutes les fonctions $f$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x$ réel :

$$1+f(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\,dt \qquad (\star)$$

a) Soit $f$ une solution de l'équation précédente. Montrer que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire toutes les solutions de l'équation $(\star)$.

---

**Solution :**

1.Il suffit de revenir aux définitions d'espace vectoriel et de linéarité.

2. a) On vérifie facilement que $f_\lambda$ et $g_\lambda$ sont deux éléments de $E$.

Supposons que pour tout réel $x$, $af_\lambda(x)+bg_\lambda(x)=0$. En évaluant en 0, il vient $a+b=0$.

En dérivant puis en évaluant en 0, il vient $a-b=0$ ; ceci entraîne que $a=b=0$, donc que la famille $(f_\lambda,g_\lambda)$ est libre.

Ainsi $\dim E\geqslant 2$.

b) La fonction $h$ est de classe $C^1$. En dérivant, il vient

$$h'=f''f_\lambda-ff''_\lambda=-\lambda ff_\lambda+\lambda ff_\lambda=0$$

Ainsi la fonction $h$ est-elle constante sur $\mathbb{R}$, soit pour tout $x$ réel :

$$f'(x)f_\lambda(x)-f(x)f'_\lambda(x)=K$$

Si $f\in\operatorname{Ker}\varphi$, alors $f(0)=f'(0)=0$ et en remplaçant dans l'équation précédente, on obtient $K=0$. Donc

$$0=f'(x)f_\lambda(x)-f(x)f'_\lambda(x)=\mathrm{e}^{x\sqrt{-\lambda}}(f'(x)-\sqrt{-\lambda}f(x))\Rightarrow f'(x)-\sqrt{-\lambda}f(x)=0$$

Ainsi

$0=(f'(x)-\sqrt{-\lambda}f(x))\mathrm{e}^{-x\sqrt{-\lambda}}\Rightarrow(f(x)\mathrm{e}^{-x\sqrt{-\lambda}})'=0\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{-x\sqrt{-\lambda}}=C$ et

$$f(x) = C\mathrm{e}^{x\sqrt{-\lambda}} = Cf_\lambda(x)$$

Ceci est en contradiction avec l'énoncé, donc $C = 0$, et $f = 0$ ce qui montre que $\varphi$ est injective.

Ainsi $\dim E = \dim \operatorname{Im} \varphi \leqslant 2$.

Finalement $E$ est de dimension 2.

3. a) L'équation $(\star)$ se réécrit

$$f(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt - 1$$

Ceci montre que $f$ est de classe $C^1$. En dérivant, il vient $f'(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, ce qui montre que $f$ est de classe $C^2$, puis $f''(x) = f(x)$.
On est ainsi ramené à la question précédente avec $\lambda = -1$.

Ainsi si $f$ est solution, il existe $a$ et $b$ tels que : $f(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}$.

Il reste à regarder la réciproque. En réintroduisant $f$ dans l'équation $(\star)$, on obtient

$$1 + a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x} = -x(a-b) + a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x} - (a+b)$$

Ainsi $f$ est solution si et seulement si $\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = -1 \end{cases}$, soit $a = b = -1/2$.

---

**Exercice 1.16.**

Pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$, on pose :

$$h_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}h_n^{(n)}(x).$$

1. Calculer explicitement $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$ pour tout réel $x$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $L_n$ est une fonction polynomiale.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $h_n^{(n)}(x)$ et $h_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$, $L_n'(x)$ et $\mathrm{e}^{-x}$.
   b) En partant d'une relation entre $h_n$ et $h_{n+1}$, établir que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, L_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1}L_n'(x) + \big(1 - \frac{x}{n+1}\big)L_n(x)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $L_{n+1}' = L_n' - L_n$ en partant de la relation $\big(h_{n+1}^{(n+1)}\big)' = (h_{n+1}')^{(n+1)}$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x$ réel. Établir que $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$.

6. Démontrer que :
$$\forall\, (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, (n+1)L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

---

**Solution :**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On clairement $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$.

2. La fonction $h_n$ est de classe $C^\infty$ en tant que produit de fonctions de classe $C^\infty$, et, par la formule de Leibniz, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ :

$$h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x}$$

Ainsi $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} (-1)^{n-k}$ et $L_n$ est polynomiale.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $h_n^{(n)}(x) = n! e^{-x} L_n(x)$ et $h_n^{(n+1)}(x) = n! e^{-x}(L_n'(x) - L_n(x))$.

b) Pour tout réel $x$, $h_{n+1}(x) = x h_n(x)$.

En appliquant la formule de Leibniz à ce produit de fonctions de classe $C^\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} h_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \binom{n+1}{0} x h_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} h_n^{(n)}(x) \\ &= x h_n^{(n+1)}(x) + (n+1) h_n^{(n)}(x) \\ &= n! e^{-x} (x L_n'(x) - x L_n(x) + (n+1) L_n(x)) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} L_{n+1}(x) &= \frac{e^x h_{n+1}^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} = \frac{x L_n'(x) - x L_n(x) + (n+1) L_n(x)}{n+1} \\ &= \frac{x L_n'(x)}{n+1} + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x). \end{aligned}$$

4. Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On a :

$h_{n+1}'(x) = e^{-x}\left((n+1)x^n - x^{n+1}\right) = (n+1) h_n(x) - h_{n+1}(x)$. Ainsi,

$h_{n+1}^{(n+2)} = (h_{n+1}')^{(n+1)}(x) = (n+1) h_n^{(n+1)}(x) - h_{n+1}^{(n+1)}(x)$.

Comme $h_{n+1}^{(n+2)}(x) = \left(h_{n+1}^{(n+1)}\right)'$ et $h_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! e^{-x} L_{n+1}(x)$, on en déduit que :

$$(n+1) h_n^{(n+1)}(x) - h_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! e^{-x} \left(L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x)\right).$$

D'où

$$(n+1) n! e^{-x} (L_n'(x) - L_n(x)) - (n+1)! e^{-x} L_{n+1}(x) = (n+1)! e^{-x} (L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x)).$$

Ainsi, $L_{n+1}' = L_n' - L_n$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$L_{n+1}'(x) = \frac{x}{n+1}(L_n''(x) - L_n'(x)) + \frac{L_n'(x) - L_n(x)}{n+1} + L_n'(x)$$

puis que :

$$L_n'(x) - L_n(x) = \frac{x}{n+1}(L_n''(x) - L_n'(x)) + \frac{L_n'(x) - L_n(x)}{n+1} + L_n'(x).$$

Ainsi, $x L_n''(x) + (1-x) L_n'(x) + n L_n(x) = 0$.

6. Soient $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ et $\delta(x) = (n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\delta(x) &= xL_n'(x) + (n+1-x)L_n(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x)\\ &= xL_n'(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x)\\ &= x(L_{n-1}'(x) - L_{n-1}(x)) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = nL_{n-1}(x) - nL_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

---

**Exercice 1.17.**

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \dfrac{1}{k^x}$, où $k^x = \exp(x \ln(k))$.

1. On s'intéresse à la convergence des suites $(S_n(x))_{n\geq 1}$.

a) Soit $x > 0$. Etablir pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités

$$S_{2n+1}(x) \leqslant S_{2n+3}(x) \leqslant S_{2n+2}(x) \leqslant S_{2n}(x).$$

b) En déduire que les suites $(S_{2n+1}(x))_{n\geq 0}$ et $(S_{2n}(x))_{n\geq 1}$ convergent pour tout réel strictement positif $x$ et admettent la même limite.

c) Montrer que la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{k^x}$ converge pour $x > 0$. On notera désormais $f(x)$ la somme de cette série.

2. On va maintenant s'intéresser à une autre expression de la fonction $f$.

a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x)$ est la somme de la série de terme général $\Big(\dfrac{1}{(2p)^x} - \dfrac{1}{(2p-1)^x}\Big)_{p\geq 1}$, c'est-à-dire que l'on a $f(x) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \Big(\dfrac{1}{(2p)^x} - \dfrac{1}{(2p-1)^x}\Big)$.

b) Soient $p \geqslant 1$ et $x > 0$. Prouver que l'on a : $\Big|\dfrac{1}{(2p)^x} - \dfrac{1}{(2p-1)^x}\Big| \leqslant \dfrac{x}{(2p-1)^{x+1}}$ .

3. On considère une série convergente de terme général $r_p$, $(p \geqslant 1)$, positif ou nul et une suite $(u_p)_{p\geq 1}$ de fonctions continues sur un intervalle $I = ]a,b[ \subset \mathbb{R}_+^*$ qui vérifient $|u_p(x)| \leqslant r_p$ pour tout $p \geqslant 1$ et tout $x \in I$.

a) Pour tout $x \in I$, justifier la convergence de la série $\sum\limits_{p\geq 1} u_p(x)$. On notera $g(x)$ la somme de cette série.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un plus petit entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum\limits_{p=N+1}^{\infty} r_p < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

On notera $N(\varepsilon)$ cet entier.
Pour tout couple $(t,x) \in I^2$, prouver que l'on a :

$$|g(t) - g(x)| \leqslant \Big|\sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x)\Big| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) En déduire que la fonction $g$ est continue sur $I$.

4. Prouver que la fonction $f$ définie dans la première question est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Solution :**

1\. a) Soit $x > 0$, on a $S_{2n+3}(x) - S_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)^x} - \frac{1}{(2n+3)^x} \geqslant 0$.

De la même manière, on vérifie que

$S_{2n}(x) - S_{2n+2}(x) \geqslant 0$ et que $S_{2n+2}(x) - S_{2n+3}(x) \geqslant 0$.

b) D'après 1) a), les deux suites $(S_{2n+1}(x))_{n\geq 0}$ et $(S_{2n}(x))_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

La suite $(S_{2n+1}(x))_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par $S_2(x)$, elle converge donc vers une limite $l_1$. La suite $(S_{2n}(x))_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par $S_1(x)$, elle converge donc vers une limite $l_2$. Comme $S_{2n+1}(x) - S_{2n}(x) = -1/(2n+1)^x \longrightarrow 0$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, on voit que $l_1 = l_2 = f(x)$.

c) Les suites $(S_{2n+1}(x))_{n\geq 0}$ et $(S_{2n}(x))_{n\geq 1}$ convergent toutes les deux vers $f(x)$.

Donc, dès que l'on se donne un intervalle ouvert $I$ contenant $f(x)$, il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite $(S_{2n+1}(x))_{n\geq 0}$ en dehors de $I$ et un nombre fini de termes de la suite $(S_{2n}(x))_{n\geq 1}$ en dehors de $I$.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de termes de la suite $(S_n(x))_{n\geq 1}$ qui ne sont pas dans $I$, ce qui prouve bien que la série converge vers $f(x)$.

2\. a) Il suffit de remarquer que $\sum\limits_{p=1}^{m} \big(\dfrac{1}{(2p)^x} - \dfrac{1}{(2p-1)^x}\big) = S_{2m}(x)$ et de dire que $S_{2m}(x)$ converge vers $f(x)$ d'après 2) b).

b) Soient $p \geqslant 1$ et $x > 0$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\Big|\frac{1}{(2p)^x} - \frac{1}{(2p-1)^x}\Big| \leqslant \sup\Big\{\Big|-\frac{x}{t^{x+1}}\Big|; t \in [2p-1, 2p]\Big\} \leqslant \frac{x}{(2p-1)^{x+1}}.$$

3\. a) Si $x \in I$, le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs et l'inégalité $|u_p(x)| \leqslant r_p$ nous assurent que la série $\sum\limits_{p\geq 1} u_p(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

b) Comme la série à termes positifs $\sum\limits_{p\geq 1} r_p$ est convergente, ses restes décroissent vers 0. Il n'y a qu'un nombre fini $M$ de restes $\sum\limits_{p=m+1}^{+\infty} r_p$ qui sont en dehors de l'intervalle $[0, \varepsilon/4[$, il existe donc un plus petit entier $N(\varepsilon) = M + 1$ tel que $\sum\limits_{p=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} r_p < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Pour tout couple $(t, x) \in I^2$, on a

$$|g(t) - g(x)| \leqslant \Big|\sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x)\Big| + 2\sum_{p=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} r_p < \Big|\sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x)\Big| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Une somme finie de fonctions continues sur $I$ est encore continue, si $x \in I$ il existe un intervalle ouvert $J$ contenant $x$ tel que $\Big|\sum\limits_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum\limits_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x)\Big| < \varepsilon/2$ pour tout $t \in J$.

Par suite, si $x \in J$ on a $|g(t) - g(x)| < \varepsilon$. Comme $\varepsilon$ est arbitraire, la fonction $g$ est bien continue au point $x$.

4. Si $x \in I$, on pose $a = x/2$, $b = 3x/2$ et $u_p(x) = \dfrac{1}{(2p)^x} - \dfrac{1}{(2p-1)^x}$. La question 2. b) nous assure que

$$|u_p(t)| \leqslant \frac{t}{(2p-1)^{t+1}} \leqslant \frac{3x}{2} \times \frac{1}{(2p-1)^{\frac{x}{2}+1}} = r_p$$

Le critère de Riemann et le théorème sur les équivalents donnent facilement la convergence de la série de terme général $r_p$.

Les hypothèses de la question 3) sont vérifiées et par suite $f$ est continue sur $]a, b[$, donc au point $x$.

---

**Exercice 1.18.**

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\, du$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note sous réserve d'existence :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n \text{ et } F(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)(1-xu)^2}\, du$$

1. a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $a_n$ existe et vérifie :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b) En déduire que la fonction $S$ est définie sur l'intervalle $]-1, 1[$.

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $F$.

3. Soit $x$ un réel de $[0, 1[$, on note : $\forall\, u \in [0,1], \forall\, p \in \mathbb{N}, A(u,p) = \dfrac{u^p x^p [p - pux + 1]}{(1+u^2)(1-xu)^2}$.

a) Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}, \forall\, u \in [0,1], A(u,p) \leqslant (p+1)\dfrac{x^p}{(1-x)^2}$.

En déduire que : $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \int_0^1 A(u,p)\, du = 0$.

4. Montrer que : $\forall\, v \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} (n+1) v^n = \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{v^p}{(1-v)^2}[p - pv + 1]$.

5. En déduire que : $\forall\, x \in [0, 1[,\ F(x) = S(x)$.

---

**Solution :**

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ ; l'intégrale $a_n$ existe car $\varphi : u \longrightarrow \dfrac{u^n}{1+u^2}$ est définie continue sur $[0,1]$. De plus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u \leqslant 1 \implies \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+u^2} \leqslant 1 \implies \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b) On a $0 \leqslant |(n+1)a_n x^n| \leqslant |x^n|$. Donc si $|x| < 1$ la série converge absolument et $S$ est bien définie sur $]-1,1[$.

2. Soit la fonction $f_x(u) = \dfrac{1}{(1+u^2)(1-xu)^2}$.

• Si $x < 1$ : la fonction $f_x$ est définie (le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$) et continue sur le segment $[0,1]$, l'intégrale $F(x)$ est bien définie.

• Si $x \geqslant 1$ : on a : $0 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$, branche infinie au voisinage de $\dfrac{1}{x}$. Or au voisinage de $\dfrac{1}{x}$ : $f_x(u) \sim \dfrac{1}{x^2+1}\dfrac{1}{(u-\frac{1}{x})^2}$. La fonction n'est pas intégrable (critère de comparaison aux intégrales de Riemann). Ainsi la fonction $F$ est définie sur $]-\infty,1[$

a) $u \in [0,1] \Longrightarrow u^p \leqslant 1$ ; $u \in [0,1] \Longrightarrow 1+u^2 \geqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{1+u^2} \leqslant 1$ ;
$u \in [0,1] \Longrightarrow 1-x \leqslant 1-ux \Longrightarrow \dfrac{1}{1-ux} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ ; $u \in [0,1] \Longrightarrow p - pux + 1 \leqslant p+1$.
Ce qui donne la majoration souhaitée.

b) Par positivité de l'intégrale, on obtient : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 A(u,p)du \leqslant (p+1)\frac{x^p}{(1-x)^2}$.

Comme $0 \leqslant x < 1$, on a $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}(p+1)\frac{x^p}{(1-x)^2} = 0$, et le théorème d'encadrement entraîne que :

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^1 A(u,p)du = 0$$

4. On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$\forall\, v \neq 1, \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} v^{n+1} = v\,\frac{v^p-1}{v-1}$.

On obtient le résultat souhaité en dérivant par rapport à la variable $v$ :

$$\forall\, v \neq 1,\quad \sum_{n=0}^{p-1}(n+1)v^n = \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{v^p}{(1-v)^2}[p - pv + 1]$$

5. On a

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{p-1}(n+1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{p-1}(n+1)\Big[\int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}du\Big].x^n \\
&= \int_0^1 \Big[\sum_{n=0}^{p-1}(n+1)(ux)^n\Big]\frac{du}{1+u^2} \\
&= \int_0^1 \Big[\frac{1}{(1-xu)^2} + \frac{u^{p+1}x^{p+1}}{(1-xu)^2} - (p+1)\frac{u^p x^p}{(1-xu)^2}\Big]\frac{du}{1+u^2} \\
&= F(x) - \int_0^1 A(u,p)du
\end{aligned}$$

d'où en passant à la limite quand $p \to +\infty$ : $\forall\, x \in [0,1[,\ F(x) = S(x)$.

# 2

# ALGÈBRE

---

**Exercice 2.01.**

Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n$ est un polynôme de degré $n$, de coefficient dominant que l'on explicitera. Montrer que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

2. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta$.

**a)** Montrer que pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

**b)** Calculer $I_{p,q}$.

3. Pour tout couple $(P, Q)$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ est convergente. On la note $\langle P, Q\rangle$.
Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\langle X^n, T_n\rangle$.

6. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur de :

$$d = \inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \left(\sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{(t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0))^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}\right)$$

---

**Solution :**

1. On montre aisément par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation :
« $\deg(T_n) = n$, le coefficient dominant de $T_n$ est $2^{n-1}$ et $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = (\cos n\theta)$ ».
La clé du dernier résultat est la formule : $2\cos p \cos q = \cos(p+q) + \cos(p-q)$, qui donne, en supposant la formule vraie jusqu'au rang $n+1$ :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta \\ &= \cos(n+2)\theta. \end{aligned}$$

et la formule est encore vraie au rang $n+2$.

2. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta))\,d\theta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q = 0\,. \\ \pi/2 & \text{si } p = q \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Il y a des problèmes de convergence de l'intégrale en $-1$ et $1$ (la fonction qu'on intègre est continue sur $]-1,1[$). Mais, au voisinage de 1 :

$$\Big|\frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\Big| \begin{cases} \sim \dfrac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} & \text{si } P(1)Q(1) \neq 0 \\ = o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\Big) & \text{si } P(1)Q(1) = 0 \end{cases}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ converge, donc par le théorème de comparaison l'intégrale définissant $\langle P, Q\rangle$ converge absolument en 1. Même raisonnement en $-1$.

• L'expression est symétrique et linéaire par rapport à la seconde variable, par linéarité de l'intégration.

• Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \geqslant 0$, par positivité de l'intégration puisqu'on intègre une fonction positive et que les bornes sont dans le sens croissant.

• Si $\langle P, P\rangle = 0$, comme la fonction intégrée est positive et continue sur $]-1,1[$, elle est nulle sur $]-1,1[$, donc $P$ est nul sur $]-1,1[$ ; donc $P = 0$ (polynôme ayant une infinité de racines).

4. La famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est échelonnée en degré, donc elle est libre. Elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et cet espace est de dimension $n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme la fonction cos est de classe $C^1$ strictement décroissante de $]0,\pi[$ dans $]-1,1[$, on peut faire le changement de variable $x = \cos(\theta)$, qui donne
(puisque $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ quand $\theta \in\ ]0,\pi[$) :

$$\langle T_p, T_q\rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_p(x)T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\,d\theta = I_{p,q} = 0 \text{ si } p \neq q$$

Ainsi la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est orthogonale. Elle n'est pas orthonormale puisque, par exemple $\|T_0\|^2 = \pi$, ou parce que $\forall\, k \geqslant 1,\ \|T_k\|^2 = \frac{\pi}{2} \neq 1$.

5. Pour $n \geqslant 1$, d'après la question 1, on a :

$$T_n - 2^{n-1}X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1}) \subset T_n^{\perp}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle T_n, X^n\rangle &= \frac{1}{2^{n-1}}\langle T_n, T_n - (T_n - 2^{n-1}X^n)\rangle \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\|T_n\|^2 + \frac{1}{2^{n-1}}\langle T_n, T_n - 2^{n-1}X^n\rangle = \frac{\pi}{2^n}.\end{aligned}$$

6. $d$ est la distance de $X^n$ à l'espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ; $d$ est donc la distance de $X^n$ à son projeté orthogonal sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or, comme la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une base orthogonale, en adaptant (par normalisation des $T_k$) la formule connue pour une base orthonormale, on a :

$$X^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle T_k, X^n\rangle}{||T_k||^2 T_k}}_{\in \mathrm{Vect}(T_0,\dots,T_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]} + \underbrace{\frac{\langle T_n, X^n\rangle}{||T_n}||^2 T_n}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}}$$

Donc : $d = \Big\| \dfrac{\langle T_n, X^n\rangle}{||T_n||^2} T_n \Big\| = \dfrac{|\langle T_n, X^n\rangle|}{||T_n||} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2^n}$.

---

**Exercice 2.02.**

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Si $C$ est une matrice carrée à coefficients réels, on rappelle que $\mathrm{Spec}(C)$ désigne l'ensemble de ses valeurs propres éventuellement complexes.

1. a) Quel est l'ordre de la matrice carrée $AB$ ? Quel est celui de la matrice $BA$ ?

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que si $X$ est un vecteur colonne propre de $AB$ associé à la valeur propre $\lambda$, alors $BX$ est un vecteur colonne propre de la matrice $BA$ associé à la valeur propre $\lambda$.

En déduire que $\mathrm{Spec}(AB) \setminus \{0\} = \mathrm{Spec}(BA) \setminus \{0\}$.

c) On pose $M = I_n - AB$ et $N = I_p - BA$. Montrer que la matrice $M$ est inversible si et seulement si la matrice $N$ est inversible.

d) On suppose que $1 \notin \mathrm{Spec}(BA)$. Montrer que la matrice $M$ est inversible et que son inverse $R$ vaut $R = I_n + AN^{-1}B$.
(On pourra écrire le produit $RM$ sous la forme $I_n + A(I_p - BA)^{-1}CB$ et constater que $C = 0$.)

2. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On considère deux vecteurs colonnes $X$ et $Y$ de $\mathbb{R}^n$ et on pose $A = X$ et $B = {}^tY$.

a) Écrire la matrice $N$ définie dans la question 1. c).

On suppose désormais que le produit scalaire $\langle X|Y\rangle$ est différent de 1.

b) Montrer que la matrice $M = I_n - AB$ est inversible et donner une expression de son inverse à l'aide de la question 1.d.

c) En déduire que le polynôme $P$ défini par $P(t) = \dfrac{1}{1-\langle X|Y\rangle}t^2 + \dfrac{(\langle X|Y\rangle - 2)}{1-\langle X|Y\rangle}t + 1$ est un polynôme annulateur de $M$.

3. On considère les deux vecteurs colonnes $X$ et $Y$ de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice $M$. Est-elle diagonalisable ?

4. On considère les deux vecteurs colonnes $X$ et $Y$ de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice $M$ et la matrice $M^{-1}$ après avoir justifié son existence. La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

---

**Solution :**

1. a) La matrice $AB$ est une matrice carrée d'ordre $n$ tandis que $BA$ est une matrice carrée d'ordre $p$.

b) Soit $X$ un vecteur colonne propre de $AB$ associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$. On a donc $ABX = \lambda X$, en multipliant à gauche par $B$ on obtient $(BA)BX = \lambda BX$.

On a $BX \neq 0$, sinon $\lambda X = 0$ et par suite $X = 0$ puisque $\lambda \neq 0$, ce qui est impossible. On a donc $\lambda \in \text{Spec}(BA)$.

On vient de montrer que $\text{Spec}(AB)\setminus\{0\} \subseteq \text{Spec}(BA)\setminus\{0\}$. Il suffit d'échanger les rôles de $A$ et $B$ pour conclure.

c) La matrice $M$ est inversible si et seulement si $1 \notin \text{Spec}(AB)\setminus\{0\}$, ce qui équivaut d'après la question précédente à dire que $N$ est inversible.

d) Comme $1 \notin \text{Spec}(BA)$, les matrices $M$ et $N$ sont inversibles d'après la question précédente. En effectuant le produit $RM$, on trouve

$$\begin{aligned} RM &= I_n + A(I_p - BA)^{-1}B - AB - A(I_p - BA)^{-1}BAB \\ &= I_n + A(I_p - BA)^{-1}B - A(I_p - BA)^{-1}(I_p - BA)B - A(I_p - BA)^{-1}BAB \\ &= I_n + A(I_p - BA)^{-1}[I_p - (I_p - BA) - BA]B = I_n \end{aligned}$$

2. a) D'après 1) a), on a $N \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, par suite $N$ est le scalaire $1 - \langle X|Y\rangle$.

b) Comme $N = 1 - \langle X|Y\rangle \neq 0$, $M$ est inversible d'après 1) c). Avec 1) d), on obtient :

$$M^{-1} = I_n + (1 - \langle X|Y\rangle)^{-1} X^tY.$$

c) On remarque que la question précédente nous conduit à

$$I_n = M + \frac{1}{1-\langle X|Y\rangle}(I_n - M)M = \Big(\frac{2-\langle X|Y\rangle}{1-\langle X|Y\rangle}\Big)M - \frac{1}{1-\langle X|Y\rangle}M^2.$$

Ce qui donne immédiatement $P$ comme polynôme annulateur de $M$.

3. On trouve : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme $0 = \langle X|Y\rangle \neq 1$, la question 2. d) nous dit que $P(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ est un polynôme annulateur de $M$. Le réel 1 est donc la seule valeur propre possible de $M$ (c'est effectivement le cas).

Or $M \neq I$, elle n'est donc pas diagonalisable.

4. Comme $10 = \langle X|Y\rangle \neq 1$, on voit que $M$ est inversible. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{7}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

Ici $P(t) = -\frac{1}{9}t^2 - \frac{8}{9}t + 1$, ses racines sont 1 et $-9$, et ce sont les seules valeurs propres possibles de $M$. On voit que l'équation du sous-espace propre associé à 1 est $x + 2y + 3z + 4t = 0$, il est donc de dimension 3.

Si $-9$ n'était pas une valeur propre, la matrice $M + 9I$ serait inversible et une factorisation de $P$ conduirait à $M = I$, ce qui est absurde (on peut aussi chercher un vecteur propre pour la valeur $-9$).

La somme des dimensions des sous-espaces propres est donc (au moins) 4, donc vaut 4 et par suite la matrice $M$ est diagonalisable.

---

**Exercice 2.03.**

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n$ ($n \geqslant 2$) à coefficients réels.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que $\mathrm{Spec}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de $A$.
Si $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Phi(M) = (m'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice carrée d'ordre $n$ dont les coefficients sont donnés par $m'_{i,j} = m_{n+1-j,n+1-i}$. La matrice $\Phi(M)$ est la symétrique de $M$ par rapport à la « deuxième diagonale ».

1. a) Vérifier que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\Phi^2$.

b) Montrer que $\Phi({}^tM) = {}^t(\Phi(M))$. On suppose que la matrice $M$ est symétrique, que peut-on dire de $\Phi(M)$ ?

c) Soient $A$ et $B$ deux matrices réelles carrées d'ordre $n$.
Prouver que $\Phi(AB) = \Phi(B)\Phi(A)$.

d) Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\Phi(M)$ est inversible. Vérifier dans ce cas que $(\Phi(M))^{-1} = \Phi(M^{-1})$. Prouver que $\mathrm{Spec}(\Phi(M)) = \mathrm{Spec}(M)$.

e) Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si $\Phi(M)$ l'est.

2. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bisymétrique si elle est symétrique par rapport aux deux diagonales (*i.e.* si ${}^tM = M$ et $\Phi(M) = M$). Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est une matrice colonne, on pose $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$.

On considère désormais une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est bisymétrique.

a) Justifier le fait que $A$ est diagonalisable, avec une matrice de passage diagonalisante orthogonale.

b) Montrer que si la colonne $X$ appartient au sous-espace $E_\lambda$ de $A$ propre associé à la valeur propre $\lambda$,
alors $\widetilde{X}$ appartient aussi à $E_\lambda$.

c) En déduire que si $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, alors il existe un vecteur colonne propre associé à $\lambda$ qui vérifie l'une des deux conditions : $\widetilde{X} = X$ ou bien $\widetilde{X} = -X$.

3. On considère la matrice $A$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $A$ est bisymétrique et montrer que le rang de $A$ est supérieur où égal à 3.

b) Déterminer le noyau de $A$.

c) Chercher les vecteurs colonnes propres de $A$ qui vérifient $\widetilde{X} = X$.

d) Diagonaliser la matrice $A$ avec une matrice de passage orthogonale.

---

**Solution :**

1. a) La linéarité est évidente. On voit immédiatement que $\Phi^2 = Id$.

b) On voit que $\Phi({}^tM) = \big(({}^tM)'_{i,j}\big) = (m_{n+1-i,n+1-j}) = {}^t\Phi(M)$.

Si la matrice $M$ est symétrique, on en déduit que la matrice $\Phi(M)$ est aussi symétrique.

c) Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices réelles carrées d'ordre $n$. D'après le cours, on a $C = AB = (c_{i,j})$ avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$. D'où $\Phi(C) = \big(c'_{i,j}\big)$ avec :

$$c'_{i,j} = c_{n+1-j,n+1-i} = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-j,k}b_{k,n+1-i} = \sum_{h=1}^{n} a_{n+1-j,n+1-h}b_{n+1-h,n+1-i}$$

$= \sum_{h=1}^{n} b'_{i,h} a'_{h,j}$.

Or cette dernière somme représente $(\Phi(B)\Phi(A))_{i,j}$, on a donc bien $\Phi(AB) = \Phi(B)\Phi(A)$.

d) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, il existe alors $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MN = NM = I$. Il vient $I = \Phi(I) = \Phi(MN) = \Phi(N)\Phi(M)$ et par suite $\Phi(M)$ est inversible et $\Phi(M)^{-1} = \Phi(M^{-1})$.

Or $\Phi^2 = Id$, on a donc bien l'équivalence souhaitée.

Comme $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ équivaut à $M - \lambda I$ non inversible, donc à $\Phi(M - \lambda I) = \Phi(M) - \lambda I$ non inversible, c.a.d. à $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Phi(M))$.

e) Supposons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, alors il existe $D$ diagonale et $P$ inversible telles que $M = PDP^{-1}$. Avec c) et d), on voit que $\Phi(P)$ est inversible et que l'on a $\Phi(M) = \Phi(P)^{-1}\Phi(D)\Phi(P)$. Il est clair que $\Phi(D)$ est encore diagonale, la matrice $\Phi(M)$ est donc diagonalisable.
Là encore, la propriété $\Phi^2 = Id$ nous donne immédiatement la réciproque.

2. a) Il suffit de dire qu'une matrice bisymétrique est déjà symétrique réelle.

b) Soit $x \in E_\lambda$, comme $A$ est bisymétrique ($a_{i,j} = a_{j,i} = a_{n+1-i,n+1-j}$) il vient :

$$(M\widetilde{x})_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\widetilde{x}_k = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_{n+1-k} = \sum_{h=1}^{n} a_{i,n+1-h}x_h = \sum_{h=1}^{n} a_{n+1-i,h}x_h$$
$$= \lambda x_{n+1-i} = \lambda \widetilde{x}_i.$$

c) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $x \in E_\lambda$, alors on a $M(x + \widetilde{x}) = \lambda(x + \widetilde{x})$ d'après la question précédente. Posons $y = x + \widetilde{x}$, si $y = 0$ alors $\widetilde{x} = -x$ et si $y \neq 0$ alors $y \in E_\lambda$ vérifie $\widetilde{y} = y$.

3. a) Il est clair que $A$ est bisymétrique. Ses trois premières colonnes sont libres, d'où $\mathrm{rg}(A) \geqslant 3$.

b) La dimension du noyau est 1 ou 0. Si c'est 1, d'après 2) c) on peut chercher un vecteur générateur du noyau sous la forme $(a, b, b, a)$ ou $(a, b, -b, -a)$.

On voit immédiatement que la première possibilité donne le vecteur nul et la deuxième nous conduit à $\ker(A) = \mathbb{R}(1, 1, -1, -1)$.

c) On cherche donc les vecteurs propres qui sont de la forme $(a, b, b, a)$. Les deux premières équations du système montrent que $(a, b)$ vérifie les équations $6a + 4b = \lambda a$ et $4a = \lambda b$. on en tire facilement $\lambda = -2$ ou $\lambda = 8$, et que les vecteurs cherchés appartiennent à $\mathbb{R}(1, -2, -2, 1) \subseteq E_{-2}$ ou à $\mathbb{R}(2, 1, 1, 2) \subseteq E_8$.

d) On cherche la dernière valeur propre éventuelle $\lambda$.

La matrice $A$ étant diagonalisable, on doit avoir $-2 = \mathrm{tr}(A) = 0 - 2 + 8 + \lambda$, on trouve donc $\lambda = -8$, les sous espaces propres sont donc tous de dimension 1. Les vecteurs de $E_{-8}$ sont nécessairement de la forme $(a, b, -b, -a)$ et sont orthogonaux aux autres sous espaces propres, d'où $E_{-8} = \mathbb{R}(1, -1, 1, -1)$.

La matrice $A$ se diagonalise donc sous la forme $A = PD{}^tP$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

---

**Exercice 2.04.**

Dans cet exercice on confondra vecteur de $\mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) et matrice colonne canoniquement associée. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

0. Montrer que $\text{rg}(AB)\,\text{rg}(A)$.

1. Dans cette question on choisit pour $A$ et $B$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les matrices $AB$ et $BA$.

b) Déterminer le rang de $AB$.

2. On se place dans le cas général où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère les applications linéaires :
$\varphi : \text{Ker}(AB - \lambda I_n) \to \mathbb{R}^p$ et $\psi : \text{Ker}(BA - \lambda I_p) \to \mathbb{R}^n$ définies par $\varphi(x) = Bx$ et $\psi(y) = Ay$.
Montrer que $\text{Im}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(BA - \lambda I_p)$ et que $\text{Im}(\psi) \subseteq \text{Ker}(AB - \lambda I_n)$.

b) En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\dim(\text{Ker}(AB - \lambda I_n)) = \dim(\text{Ker}(BA - \lambda I_p))$$

c) Justifier l'égalité $\text{Spec}_{\mathbb{C}}(AB) \setminus \{0\} = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(BA) \setminus \{0\}$ (on rappelle que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M$).

d) On considère les matrices $M = I_n + AB$ et $N = I_p + BA$. On suppose que $N$ est inversible, montrer alors que $M$ est aussi inversible.
Vérifier que si $x \in \mathbb{R}^n$ est solution de l'équation $x = M^{-1}y$ où $y \in \mathbb{R}^n$, alors on a $By = NBx$.
En déduire que $M^{-1} = I_n - AN^{-1}B$.

3. On revient au cas particulier des matrices $A$ et $B$ données dans la question 1.

a) Trouver les valeurs propres de la matrice $AB$. Est-elle diagonalisable ?

b) Justifier l'inversibilité de la matrice $M = I_n + AB$ et déterminer son inverse.

---

**Solution :**

1. a) On a : $AB = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = 2I_2$.

b) On voit immédiatement que $\mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, d'où

$$\mathrm{rg}(AB) = \dim(\mathrm{Im}(AB)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, A) = \mathrm{rg}(A)$$

c) Comme on a trivialement $\mathrm{rg}(A) = 2$, il vient $\mathrm{rg}(AB) \leqslant 2$ avec a). Les colonnes de $AB$ ne sont pas proportionnelles, on a donc $\mathrm{rg}(AB) = 2$.

2. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $z = \varphi(x) = Bx$ avec $x \in \mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n)$, on a $ABx - \lambda x = 0$, d'où $BAz - \lambda z = BABx - \lambda Bx = B(ABx - \lambda x) = 0$. On trouve donc bien $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(BA - \lambda I_p)$.

On prouve de façon analogue que $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n)$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, en appliquant le théorème du rang à l'application linéaire $\varphi$, on obtient

$$\dim(\mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n)) = \dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$$

Examinons $\mathrm{Ker}\,\varphi$ : si $0 = \varphi(x) = Bx$, alors on a $0 = \lambda x - ABx = \lambda x$ puisque $x \in \mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n)$, et par suite $\varphi$ est injective car $\lambda \neq 0$.

D'où $\dim(\mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n)) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(BA - \lambda I_p))$ d'après a).

Avec la même méthode, en utilisant cette fois l'application linéaire $\psi$, on montre que $\dim(\mathrm{Ker}(BA - \lambda I_p)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n))$. D'où l'égalité souhaitée.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\}$, alors on peut se servir de l'égalité précédente puisque $\lambda \neq 0$ et par suite $\lambda \in \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\}$.
En échangeant les rôles de $A$ et $B$, on obtient l'inclusion inverse, d'où :

$$\mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\}$$

c) Dire que $N$ est inversible revient à dire que $-1 \notin \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\}$ d'après la question précédente, et par suite $M = I + AB$ est inversible.
Si $x = M^{-1}y$, on a $ABx + x = y$, d'où $By = BABx + Bx = NBx$.

Par conséquent on a $Bx = N^{-1}By$ et en reportant dans la deuxième équation on obtient $AN^{-1}By + x = y$.

On en déduit que $M^{-1} = I_n - AN^{-1}B$.

3. a) On a vu au cours de la première question que $BA = 2I_2$.

On a donc $\{2\} = \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\}$. De plus, d'après 1) c) on a $\mathrm{rg}(AB) = 2$, donc $0 \in \mathrm{Sp}(AB)$. On aboutit finalement à $\mathrm{Sp}(AB) = \{0, 2\}$.

Avec 2. b), il vient $\dim(\mathrm{Ker}(AB - 2I_3)) = \dim(\mathrm{Ker}(BA - 2I_2)) = 2$. La somme des dimensions des sous-espaces propres de $AB$ est donc 3, par conséquent la matrice $AB$ est diagonalisable.

b) On voit que $-1 \notin \mathrm{Sp}(BA) = \{2\}$, il découle de 2. c) que $M$ est inversible et que

$$M^{-1} = I_3 - A(\frac{1}{3}I_2)B = I_3 - \frac{1}{3}AB.$$

D'où : $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2.05.**

$GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice $S$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0,$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives d'ordre $n$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre $n$.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer l'existence de $R$ orthogonale et $S$ symétrique définie positive telle que $M = RS$.

a) Montrer que la matrice ${}^tMM$ est symétrique définie positive.

b) En déduire qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = S^2$.

c) Montrer que $S$ est inversible et que $MS^{-1}$ est orthogonale.

d) Conclure.

*Dans la suite de cet exercice, on admettra l'unicité d'une telle factorisation.*

3. Soit $\Sigma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $P$ une matrice orthogonale telle que $D = P^{-1}\Sigma P$ soit diagonale. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de $D$.

Soit $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q_1$ telle que $\mathrm{tr}(Q\Sigma) = \mathrm{tr}(Q_1 D)$ et en déduire :

$$\mathrm{tr}(Q\Sigma) \leqslant \mathrm{tr}(\Sigma).$$

c) Montrer que $\sup_{Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \{\mathrm{tr}(Q\Sigma)\} = \mathrm{tr}(\Sigma)$.

---

**Solution :**

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. La matrice $S$ est diagonalisable via une matrice orthogonale $P$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux d'une telle réduite diagonale. On raisonne ensuite par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $X_i$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_i$. Alors, ${}^tX_iSX_i = \lambda_i \|X_i\|^2 > 0$. Ainsi, $\lambda_i > 0$.

($\Leftarrow$) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres. Il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$. Alors,

$$ {}^t XSX = \sum_{1\le i,j\le n} \mu_i\mu_j {}^t X_i S X_j = \sum_{1\le i,j\le n} \mu_i\mu_j\lambda_j {}^t X_i X_j = \sum_{i=1}^n \mu_i^2\lambda_i \|X_i\|^2 > 0. $$

Ce qui termine la question.

2. a) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. D'après les propriétés de la transposition, ${}^tMM$ est symétrique. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. Alors, ${}^tX{}^tMMX = {}^tMXMX = \|MX\|^2$.
Or, comme $M$ est inversible et $X$ est non nul, alors $MX$ est non nul et $\|MX\|^2 > 0$.
Ainsi, $M \in GL_n(\mathbb{R})$ entraîne que ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) D'après la question 1, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels strictement positifs et $P$ une matrice orthogonale telle que, en notant $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, ${}^tMM = PD{}^tP$.
Alors, en posant $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ qui est bien définie d'après la question 1 et $S = P\widetilde{D}{}^tP$, on obtient bien, toujours d'après la question 1 :

$$ S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } {}^tMM = S^2 $$

c) Comme les éléments diagonaux de $\widetilde{D}$ sont non nuls, en posant :

$$ T = P \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \ldots, \lambda_n^{-1/2}){}^tP, $$

on a $TS = ST = I_n$ et $S$ est inversible. Puis,

$$ {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = ({}^tS)^{-1}{}^tMMS = S^{-1}S^2S = I_n $$

et $MS^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
d) Finalement, pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = RS$.

3. a) Comme la trace est invariante par changement de base, $\operatorname{tr}\Sigma = \operatorname{tr} D = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.
b) Comme $\Sigma$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable et il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma = PD{}^tP$, avec $D$ diagonale.
Alors,

$$ \operatorname{tr}(Q\Sigma) = \operatorname{tr}(QPD{}^tP) = \operatorname{tr}({}^tPQPD) = \operatorname{tr}(Q_1D) $$

où $Q_1 = {}^tPQP$ appartient à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, notons $Q_1 = (q_{i,j})_{1\le i,j\le n}$. Alors,

$$ \operatorname{tr}(Q\Sigma) = \operatorname{tr}(Q_1D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{i,i} $$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$. De plus, comme $Q_1$ est orthogonale, on a $\sum_{k=1}^n q_{i,k}^2 = 1$ et $|q_{i,i}| \leqslant 1$.
Ainsi, $\operatorname{tr}(Q\Sigma) \leqslant \operatorname{tr}(\Sigma)$.
c) D'après la question 3. b), pour toute matrice $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(Q\Sigma) \leqslant \operatorname{tr}(\Sigma)$, cette inégalité étant une égalité lorsque $Q = I_n$. Ainsi :

$$ \sup_{Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \operatorname{tr}(Q\Sigma) = \max_{Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \operatorname{tr}(Q\Sigma) = \operatorname{tr}(\Sigma) $$

**Exercice 2.06.**

Soient $m$, $n$ et $p$ trois entiers naturels avec $p$ **impair** et $m \geqslant 2$. Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients **entiers** telles que $A$ soit symétrique, et

$$A = I_n + mB \text{ et } A^p = I_n.$$

1. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $(u_k)_k$ converge. Montrer que $(u_k)_k$ est constante à partir d'un certain rang.

2. Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{p}}$. Montrer que $\omega^p = 1$, puis en déduire l'ensemble $\mathcal{R}$ des racines du polynôme $X^p - 1$.

3. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $\lambda \in \mathcal{R}$.

4. a) Montrer que $B$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes de module strictement inférieur à 1.

b) En notant, pour tout entier naturel $k$, $B^k = (b_{i,j}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$, montrer que l'on a : $\lim\limits_{k\to+\infty} b_{i,j}^{(k)} = 0$.

c) En déduire que $A = I_n$.

---

**Solution :**

1. Soit $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$. Il existe un réel $n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{3}$.
Soit $n \geqslant n_0$. Alors, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant |u_{n+1} - \ell| + |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{2}{3} < 1$.
Ainsi, comme $u_n$ et $u_{n+1}$ sont entiers, alors $u_n = u_{n+1}$ et $(u_n)_n$ est constante à partir du rang $n_0$.

2. D'après les propriétés des nombres complexes, $\omega^p = 1$. De plus, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\omega^{kp} = 1$. Ainsi, les nombres complexes $\{\omega^k,\ k \in [\![0, p-1]\!]\}$ sont distincts deux à deux et racines du polynôme $X^p - 1$ de degré $p$, donc ce sont ses seules racines.

3. Comme $A^p = I_n$, toute valeur propre de $A$ satisfait $\lambda^p = 1$, donc appartient à $\mathcal{R}$.

4. Comme $A$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable. De plus, en notant $A = PDP^{-1}$ alors $B = P\dfrac{1}{m}(D - I)P^{-1}$. Soit $\mu$ une valeur propre de $B$. Il existe $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $\mu = \dfrac{\omega^k - 1}{m}$. Ainsi, si $k = 0$, alors $\mu = 0$. Sinon, $\omega^k$ et 1 ne sont pas colinéaires ($p$ impair) et d'après l'inégalité triangulaire,

$$|\mu| = \frac{|\omega^k - 1|}{m} < \frac{2}{m} \leqslant 1$$

a) D'après la question précédente, $B^k = P\big(\dfrac{D-I}{m}\big)^n P^{-1}$ et $b_{i,j}^{(k)}$ est une combinaison linéaire des $(\mu_i^k)$. Ainsi, $\lim\limits_{k\to\infty} b_{i,j}^{(k)} = 0$.

b) D'après la question précédente, comme $B$ est à coefficients entiers, il existe $k_0$ tel que $B^{k_0} = 0_n$. Ainsi, $B$ est diagonalisable et nilpotente donc c'est la matrice nulle et $A = I_n$.

**Exercice 2.07.**

Dans cet exercice, $A$ désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$.

1. a) Montrer que $A$ admet au moins une valeur propre complexe, c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs propres de $A$ n'est pas vide et qu'il existe un polynôme annulateur de $A$ tel que ses racines soient exactement les valeurs propres de $A$. Un tel polynôme est noté $m_A$ et on admet que l'on peut choisir $m_A$ à coefficients réels.

b) Montrer que si $m_A$ est de degré impair, $A$ admet au moins une valeur propre réelle.

*On suppose désormais que $m_A$ est de degré pair $2p$ et que les valeurs propres de $A$ sont toutes complexes non réelles.*

2. Existe-t-il une droite de $\mathbb{R}^n$ stable par l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ ?

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ une valeur propre de $A$. Montrer que $\overline{\lambda}$ (conjugué de $\lambda$) est également valeur propre de $A$ et que les sous-espaces propres associés à $\lambda$ et $\overline{\lambda}$ sont de même dimension.

4. Soit $X$ un vecteur colonne propre de $A$ associé à $\lambda$. En considérant les vecteurs $Y$ et $Z$ réels qui sont respectivement la partie réelle de $X$ et la partie imaginaire de $X$, montrer qu'il existe un plan $P$ de $\mathbb{R}^n$ stable par l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.

---

**Solution :**

On note $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A$. Le polynme $m_A$ sera aussi noté $m_f$.

1. a) L'endomorphisme $f$ admet un polynôme annulateur réel car la famille

$$(Id, f, f^2, \dots, f^{n^2})$$

est de cardinal $n^2 + 1$ donc liée. Les valeurs propres de $f$ sont incluses dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur.

On factorise ce polynôme sur $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert-Gauss, soit :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Supposons que $\lambda_p$ ne soit pas valeur propre de $f$. Alors l'endomorphisme $f - \lambda_p Id$ est inversible ainsi que $(f-\lambda_p Id)^{m_p}$. On peut ainsi composer à droite par l'inverse de $(f-\lambda_p I)^{m_p}$ et on obtient encore un polynôme annulateur après avoir supprimé une racine qui n'est pas valeur propre.

En recommençant ce processus, on récupère le polynôme $m_f$. En effet on ne peut épuiser ainsi toutes les racines de $P$ car alors on aurait $Id = 0$.

b) Le polynôme $m_f$ est réel et de degré impair. Il admet au moins une racine réelle (théorème des valeurs intermédiaires), donc il existe une valeur propre réelle et si $X$ est un vecteur propre associé, la droite vectorielle engendrée par $X$ est une droite stable.

2. Si $f$ admet une droite stable, et si $X$ est une base de cette droite, alors $f(X) = aX$ et $a$ est valeur propre réelle de $f$. Ainsi $f$ n'admet pas de droite stable.

3. Soit $X$ un vecteur colonne propre complexe de $A$ associé à $\lambda$. On a $AX = \lambda X$. En passant au conjugué, $A$ étant réelle, il vient $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$. Ainsi $\overline{\lambda}$ est valeur propre de $A$ associée au vecteur colonne propre $\overline{X}$.

On a également la réciproque (immédiat).

On montre enfin que $(X_1, \dots, X_q)$ est une base du sous-espace propre $E_\lambda$, si et seulement si $(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_q})$ est une base du sous-espace propre $E_{\overline{\lambda}}$.

4. On a $Y = \dfrac{X + \overline{X}}{2}$ et $Z = \dfrac{X - \overline{X}}{2i}$. Ce sont des vecteurs colonnes réels.

Soient $a, b$ réels tels que $aY + bZ = 0$. Alors $(a - ib)X + (a + ib)\overline{X} = 0$ ce qui entraîne que $a = b = 0$.

Ainsi la famille $(Y, Z)$ est libre et engendre un plan vectoriel.

Montrons que ce plan est stable par $A$.

On pose $\lambda = a + ib$, avec $b \neq 0$. Il vient

$$\begin{aligned} AY &= \frac{AX + A\overline{X}}{2} = \frac{1}{2}\big((a+ib)X + (a-ib)\overline{X}\big) \\ &= \frac{1}{2}\left((a+ib)(Y+iZ) + (a-ib)(Y-iZ)\right) \\ AY &= aY - bZ \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} AZ &= \frac{AX - A\overline{X}}{2i} = \frac{1}{2i}\big((a+ib)X - (a-ib)\overline{X}\big) \\ &= \frac{1}{2i}\left((a+ib)(Y+iZ) - (a-ib)(Y-iZ)\right) \\ AZ &= bY + aZ \end{aligned}$$

Le plan $\mathrm{Vect}(Y, Z)$ est bien stable.

---

**Exercice 2.08.**

Dans cet exercice, $n$ est un entier tel que $n \geqslant 2$ et $E = \mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique. On confondra les vecteurs de $E$ et les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ainsi que les endomorphismes de $E$ avec les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par $A$. Montrer que $F^\perp$ est stable par la transposée ${}^tA$ de $A$.

2. On appelle hyperplan de $E$ tout sous-espace vectoriel $H$ de $E$ de dimension $n - 1$.

Montrer que les hyperplans de $E$ stables par $A$ sont déterminés par les vecteurs propres de ${}^tA$.

3. On suppose la matrice $A$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $n$ hyperplans $H_1, \dots, H_n$ stables par $A$ tels que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$.

4. Réciproquement, on suppose qu'il existe $n$ hyperplans $H_1, \dots, H_n$ stables par $A$ tels que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**Solution :**

1. Soit $Y \in F^\perp$. On a ${}^tXY = 0$, pour tout $X \in F$. Et ${}^tX{}^tAY = {}^t(AX)Y = 0$ puisque $AX \in F$.

2. Soit $H$ un hyperplan de $E$ stable par $A$. La question précédente montre que $H^\perp$ est une droite stable par ${}^tA$.
Or une droite stable est engendrée par un vecteur propre puisque si $X$ engendre la droite stable $D$, alors $AX \in D \Rightarrow AX = \lambda X$. La réciproque de cette proposition est immédiate.

Réciproquement, si $D$ est une droite stable de ${}^tA$, cette droite est engendrée par un vecteur propre $X$ de ${}^tA$ et $D^\perp$ est un hyperplan stable par ${}^t({}^tA) = A$.

3. Notons $(X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de $A$, $D_i = \text{Vect}(X_i)$ et $H_i = D_i^\perp$. On a ainsi défini $n$ hyperplans. Chacun est stable par ${}^tA$.
Soit $X \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$. Alors ${}^tAX \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$, donc ${}^tAX \in H_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $AX \in H_i^\perp = D_i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui est impossible puisque les $D_i$ sont supplémentaires. Donc $X = 0$.

4. Réciproquement, on suppose qu'il existe $n$ hyperplans $H_1, \dots, H_n$ stables par $A$ tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i = \{0\}$. Alors, il existe $n$ droites $D_1, \dots, D_n$ stables par ${}^tA$, chacune de base $X_1, \dots, X_n$.
Chacun de ces vecteurs est un vecteur propre de ${}^tA$, et cette famille est libre. En effet, supposons par exemple que $X_n \in \text{Vect}(X_1, \dots, X_{n-1})$.

Soit $Y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$.

Alors $Y$ est orthogonal à $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ et $X_n$ donc à $\text{Vect}(X_1, \dots, X_{n-1})$ qui est un sous-espace de $E$ de dimension inférieure ou égale à $n - 1$. Il suffit de prendre $Y \in [\text{Vect}(X_1, \dots, X_{n-1})]^\perp$ pour obtenir une contradiction à $\bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i = \{0\}$.

On a ainsi obtenu que la matrice ${}^tA$ est diagonalisable et donc que $A$ est également diagonalisable.

---

**Exercice 2.09.**

Dans cet exercice, $E = \mathbb{R}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On définit une application $T$ sur $E$, par :

$$\forall\, P \in E, T(P)(X) = (3X + 8)P(X) - X(5 - X)P'(X) + X^2(1 - X)P''(X)$$

où $P'$ et $P''$ représentent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de $P$.

1. a) Montrer que l'application $T$ est un endomorphisme de $E$.
   b) Pour quelles valeurs de $n$, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est-il stable par $T$ ?
   c) L'application $T$ est-elle surjective sur $E$ ?

2. Soit $P$ un polynôme propre de $T$, c'est-à-dire un polynôme $P$ non nul tel que la famille $(P, T(P))$ soit liée.

a) Que peut valoir le degré de $P$ ?

b) Montrer que les polynômes propres de $T$ appartiennent à un sous-espace $F$ de $E$ de dimension finie et que la restriction de $T$ à $F$ induit un endomorphisme de $F$, que l'on note encore $T$.

3. a) Déterminer tous les couples $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times E$ tels que $T(P) = \lambda P$.

b) L'application $T$ est-elle injective ?

---

**Solution :**

1. a) L'application $T$ est linéaire par distributivité du produit sur l'addition et linéarité de la dérivation.

b) Supposons que $P(X) = a_n X^n + \ldots$, avec $a_n \neq 0$. On détermine alors le coefficient dominant de $T(P)$ :

$$T(P)(X) = X^{n+1}(3a_n + na_n - n(n-1)a_n) + \ldots = a_n(-n^2 + 2n + 3)X^{n+1} + \ldots$$

Ainsi $\deg(T(P)) = n+1$ sauf si $n = 3$ (l'autre racine est négative), donc seul $\mathbb{R}_3[X]$ est stable par $T$.

Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, alors :

$$T(P) = (3X+8)(aX^3 + bX^2 + cX + d) \\ -X(5-X)(3aX^2 + 2bX + c) + X^2(1-X)(6aX + 2b)$$

c) L'application $T$ ne peut être surjective, puisque les degrés 0 et 4 ne sont pas atteints. (Il suffit de construire la liste des degrés obtenus)

2. On vérifie que $T(1) = 3X + 8$ et $T(X) = 4X^2 + 3X$. Les polynômes de degré supérieur ou égal à 2 rentrent dans le cadre précédent. Ainsi un polynôme propre appartient obligatoirement à $\mathbb{R}_3[X]$ par la question précédente.

Le sous espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ est stable par $T$ (on l'a vérifié ci dessus).

3. a) On écrit la matrice de l'induit par $T$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, soit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire inférieure : ses valeurs propres sont les éléments diagonaux, soit $\{-1, 0, 3, 8\}$.

La matrice $A$ est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

- le polynôme $X^3$ est associé à la valeur propre $-1$
- le polynôme $3X^3 + X^2$ est associé à la valeur propre 0 (lien entre les deux dernières colonnes)
- le polynôme $3X^3 + 4X^2 + 3X$ est associé à la valeur propre 3
- le polynôme $10 + 6X + 3X^2 + X^3$ est associé à la valeur propre 8

b) L'application $T$ n'est pas injective car 0 est valeur propre de $T$.

**Exercice 2.10.**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$ diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres associés.

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$, tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Soit $x$ un vecteur de $F$.

1. Montrer qu'il existe un unique $p$-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$.

2. On suppose désormais $x \neq 0$. Montrer que, quitte à modifier l'ordre, on peut supposer qu'il existe $r \in [\![1, p]\!]$ tel que $x_i = 0$, pour $i > r$ et $x_i \neq 0$, pour $i \leqslant r$. On a alors $x = x_1 + \ldots + x_r$. On note $V_x$ le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \dots, x_r)$.

3. a) Montrer que $(x_1, \dots, x_r)$ est une base de $V_x$.

b) Montrer que pour tout $j \geqslant 0$, $f^j(x) \in V_x$.

c) Déterminer la matrice $A$ de la famille $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ dans la base $(x_1, \dots, x_r)$ de $V_x$.

Notons $C_1, \dots, C_r$ les colonnes de $A$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des réels tels que $\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j C_j = 0$. Montrer que le polynôme $P = \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j X^{j-1}$ est le polynôme nul. En déduire que $A$ est inversible.

d) Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in F$, puis que $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

4. Réciproquement, montrer que $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$ est un sous-espace de $E$ stable par $f$.

5. Soit $g$ un endomorphisme de $E$, diagonalisable et commutant avec $f$ (*i.e.* tel que $f \circ g = g \circ f$). Montrer qu'il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres communs à $f$ et $g$.

---

**Solution :**

1. L'endomorphisme $f$ est diagonalisable et $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i$. Ainsi, pour tout $x \in F$, il existe un unique $p$-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \ldots + x_p$.

2. Certains des vecteurs $x_i$ peuvent être nuls, mais pas tous si $x \neq 0$. Quitte à réordonner les sous-espaces propres, on peut supposer que les $x_i$ non nuls sont les $r$ premiers.

3. a) La famille $(x_1, \dots, x_r)$ est génératrice de $V_x$, elle est formée de vecteurs propres de $f$ associés à des valeurs propres distinctes : elle est donc libre.

b) Pour la même raison, pour tout $j \geqslant 0$, $f^j(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i^j x_i \in V_x$.

c) La matrice de la famille $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ dans la base$(x_1, \dots, x_r)$ est la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

$\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j C_j = 0$, donne en regardant coefficient par coefficient : $\forall\, i \in [\![1, r]\!], P(\lambda_i) = 0$. Ainsi le polynme $P$, qui est de degré inférieur ou égal à $r-1$ admet $r$ racines distinctes, donc est le polynme nul. Cela prouve que $A$ est inversible.

Ainsi la matrice $A$ est la matrice de passage d'une base à une famille libre, donc ici une base.

d) En écrivant chaque vecteur de la base $(x_1, \dots, x_r)$ dans cette nouvelle base, on obtient que $x_i \in F$, comme combinaison linéaire de la famille $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$.

Donc $x \in \bigoplus\limits_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$ et $F \subset \bigoplus\limits_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$. L'inclusion contraire est banale d'où le résultat.

4. La réciproque est évidente car des sous-espaces propres sont toujours stables. On vient ainsi de caractériser la forme des sous-espaces vectoriels de $E$ stables par $f$.

5. Comme $g$ est diagonalisable, on a $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{q} F_k$, où $F_k$ est le sous-espace propre de $g$ associé à la valeur propre $\mu_k$.

Or, comme $f$ et $g$ commutent, chaque $F_k$ est stable par $f$. Donc $F_k = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} (F_k \cap E_i)$.

Une base de $F_k \cap E_i$ est formée de vecteurs propres communs à $f$ et $g$. Comme $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{q} F_k$, on obtient une base de $E$ formée de vecteurs propres communs à $f$ et $g$.

---

**Exercice 2.11.**

Soit $(M_n)$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = \big(m_{i,j}(n)\big)_{1 \leq i,j \leq p}$. On dit que la suite $(M_n)$ est convergente si pour tout couple $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, la suite $(m_{i,j}(n))$ converge vers une limite réelle notée $m_{i,j}$.

On pose alors $M = [m_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq p}$, on dit que la suite $(M_n)$ converge vers $M$ et on écrit $\lim\limits_{n \to \infty} (M_n) = M$.

On admettra que si la suite $(M_n)$ converge vers $M$ et si $P$ et $Q$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients ne dépendent pas de $n$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} (PM_nQ) = PMQ$.

1. Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable. On note $I_p$ la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n$.

b) Montrer que la suite de matrices $\left(\left(I_p + \dfrac{1}{n}A\right)^n\right)_n$ converge. On note $E(A)$ sa limite.

c) Montrer que pour tout réel $x$, $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.

*Dans la suite, $A$ et $B$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisables et qui commutent ($AB = BA$). On note $u$ et $v$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à $A$ et $B$. On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ les valeurs propres de $u$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ les valeurs propres de $v$.*

2. On note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre de $u$ associé à une valeur propre $\lambda$. Montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par $v$.

*Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on note alors $v_i$ l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par la restriction de $v$ à $E_{\lambda_i}(u)$. L'objet de la question suivante est de montrer que $v_i$ est diagonalisable.*

3. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $v$. On suppose que chaque vecteur $x_j$ est écrit sous la forme

$$x_j = x_{1,j} + x_{2,j} + \cdots + x_{r,j}, \text{ avec } x_{k,j} \in E_{\lambda_k}(u) \text{ pour tout } k \text{ de } [\![1, r]\!]$$

a) Montrer que les vecteurs non nuls de la famille $(x_{k,1}, \ldots, x_{k,p})$ sont des vecteurs propres de $v$ et des vecteurs propres de $u$.

b) Montrer que cette famille est une famille génératrice de $E_{\lambda_k}(u)$.

c) En déduire que $u$ et $v$ admettent une base commune de vecteurs propres.

4. Montrer que $E(A + B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.

---

**Solution :**

1. a) On montre classiquement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

b) Comme $A$ est diagonalisable, il existe $P$ inversible et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I + \frac{1}{n}A = P(I_p + \frac{1}{n}D)P^{-1} \text{ et } \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n P^{-1}$$

avec $\left(I_p + \dfrac{1}{n}D\right)^n = \operatorname{diag}\left((1 + \dfrac{\lambda_1}{n})^n, \ldots, (1 + \dfrac{\lambda_p}{n})^n\right)$.

Ainsi, en utilisant 1. a) et la propriété donnée dans l'énoncé, la suite $\left((I_p + \dfrac{1}{n}A)^n\right)_n$ converge et sa limite vaut :

$$E(A) = P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_p})P^{-1}$$

c) Soit $x$ un réel. La matrice $A_x = xI_p + A$ reste diagonalisable et l'on a $A_x = PD_xP^{-1}$, où $D = \operatorname{diag}(x + \lambda_1, \ldots, x + \lambda_p)$

Le même raisonnement qu'à la question précédente montre que la suite $\left((I_p + \dfrac{1}{n}A_x)^n\right)_n$ converge et que sa limite vaut

$$\begin{aligned} E(xI_p + A) &= P \operatorname{diag}(e^{x+\lambda_1}, \ldots, e^{x+\lambda_p})P^{-1} = e^x P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_p})P^{-1} \\ &= e^x E(A) \end{aligned}$$

2. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors, $u(x) = \lambda x$. Comme $u$ et $v$ commutent, on obtient :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

ce qui montre que $v(x) \in E_\lambda(u)$. Ainsi, $E_\lambda(u)$ est stable par $v$.

3. a) Par définition, les $x_{k,i}$ non nuls sont des vecteurs propres de $u$. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On suppose que $x_j$ est vecteur propre de $v$ associé à la valeur propre $\mu_j$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_j x_{i,j} = \mu_j x_j = v(x_j) = v(x_{1,j}) + v(x_{2,j}) + \cdots + v(x_{p,j}) = \sum_{i=1}^{p} v(x_{i,j})$$

Or, d'après la question 2, chaque $v(x_{k,j})$ est dans $E_{\lambda_k}(u)$. Par unicité de la décomposition selon la somme directe, on a

$$\forall\, k \in [\![1,p]\!], v(x_{k,j}) = \mu_j x_{k,j},$$

les $x_{k,i}$ non nuls sont des vecteurs propres de $v$.

b) Soit $z \in E_{\lambda_k}(u)$. Le vecteur $z$ se décompose sur la base $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sous la forme $z = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Donc

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{p} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \big( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i,j} \big)$$

Mais $z \in E_{\lambda_k}(u)$. Donc $z = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i,k}$.

c) De la famille génératrice de la question précédente, on peut extraire une base de $E_{\lambda_k}(u)$ par le théorème de la base incomplète. On obtient ainsi pour chaque sous-espace propre de $u$ une base de vecteurs propres de $v$. En mettant ces bases bout à bout, on obtient une base de vecteurs propres commune à $u$ et $v$.

4. Comme $A$ et $B$ sont diagonalisables avec la même matrice de passage $P$ (question précédente), on peut écrire

$$\begin{aligned} E(A+B) &= P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1+\mu_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_p+\mu_p})P^{-1} \\ &= P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_p})P^{-1} \times P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mu_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mu_p})P^{-1} \\ &= E(A)E(B) = E(B)E(A) \end{aligned}$$

---

**Exercice 2.12.**

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour tout entier naturel $n$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

On pose $S_0 = 1$ et pour tout entier $k$ non nul, on désigne par $S_k$ le polynôme défini par :

$$S_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$$

1. a) Démontrer que, pour tout entier $n$, la famille $\big(S_k\big)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

b) Soit $m$ un entier naturel. Prouver que pour tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_m[X]$, il existe un unique $(m+1)$-uplet de réels $(a_k)_{0 \leq k \leq m}$ tel que $P = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k S_k$.

2. a) Pour tout entier naturel $n$ et tout entier naturel $k$ calculer $S_k(n)$.

b) Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$ écrit dans la base $\left(S_k\right)_{0\leq k\leqslant m}$ sous la forme : $P=\sum\limits_{k=0}^{m} a_k S_k$.

i) Démontrer que pour tout entier $N \geqslant m$ :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{(n-k)!}$$

ii) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{P(n)}{n!}$ converge et calculer sa somme en fonction des $a_k$, $k \in [\![0, m]\!]$.

c) Soit $p$ un entier naturel non nul.
Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^2(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{n!}$ et calculer sa somme.

---

**Solution :**

1. a) Les éléments de la famille sont des polynômes de degrés échelonnés, la liberté en découle.

b) On sait que $\mathbb{R}_m[X]$ est un espace vectoriel de dimension $m+1$, contenant les $m+1$ polynômes $S_k$, $0 \leqslant k \leqslant m$. Comme ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_m[X]$, c'est une base de cet espace et $P$ s'y décompose de façon unique.

2. a) $\star$ Si $n \geqslant k$, alors $S_k(n) = n(n-1)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
$\star$ Si $n < k$, alors $n$ est une racine de $S_k$, donc $S_k(n) = 0$.

b) Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$ écrit dans la base $(S_k)_{0\leq k\leq m}$ sous la forme : $P = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k S_k$.

i) On a :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{S_k(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{n=0}^{N} \frac{S_k(n)}{n!} \quad (1)$$

Or $S_k(n) = 0$ si $n \leqslant k-1$, on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{n=k}^{N} \frac{S_k(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{n=k}^{N} \frac{n!}{(n-k)!n!} = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{(n-k)!}$$

ii) On a : $\sum\limits_{n=k}^{N} \dfrac{1}{(n-k)!} = \sum\limits_{i=0}^{N-k} \dfrac{1}{i!} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$

On déduit alors ($m$ est fixé) la convergence de la série proposée, avec :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} = \mathrm{e} \sum_{k=0}^{m} a_k$$

c) On pose $P(X) = X^2(X-1)\dots(X-p+1)$.

On a : $P(X) = XS_p = (X-p)S_p + pS_p = S_{p+1} + pS_p$.

Les coordonnées de $P$ dans la base $(S_k)_{0\leq k\leq p+1}$ de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ sont $(0,0,\dots,0,p,1)$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{n^2(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{n!}$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{n!}=(p+1)\mathrm{e}$$

---

**Exercice 2.13.**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on note $I_n$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels. On identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes d'ordre $n$.

L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\langle X,Y\rangle={}^tXY$$

La norme euclidienne associée est notée $\|.\|$. On note $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $R(A)$ la partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$$R(A)=\{\ {}^tXAX,\ X\in\mathbb{R}^n,\|X\|=1\}$$

1. Trouver des éléments de $R(A)$ en prenant successivement pour $X$ un vecteur propre normé de $A$, puis pour $1\leqslant i\leqslant n$, le vecteur $e_i$.

2. Soient $a$ et $b$ deux réels de $R(A)$ tels que : $a<b$. On considère $X_1$ un vecteur normé de $\mathbb{R}^n$ tel que ${}^tX_1AX_1=a$ et $X_2$ un vecteur normé de $\mathbb{R}^n$ tel que ${}^tX_2AX_2=b$. Pour $\alpha\in[0,1]$, on pose : $X_\alpha=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2$

a) Montrer que pour tout $\alpha\in[0,1], X_\alpha\neq 0$.

b) Montrer que l'application :

$$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R},\quad \alpha\mapsto\frac{{}^tX_\alpha AX_\alpha}{\|X_\alpha\|^2}$$

est continue.

c) En déduire que $R(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

3. Soit $Q$ une matrice orthogonale réelle, montrer que : $R(A)=R({}^tQAQ)$.

4. Dans cette question on prend $n=2$.

a) Soit $A$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant 2 valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$. Justifier l'existence d'une matrice diagonale réelle $D$ et d'une matrice orthogonale $P$ telles que : $A={}^tPDP$.

Déterminer $R(A)$ en fonction de $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

b) Soient $A$ et $B$ deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant respectivement pour valeurs propres $\lambda_1\leqslant\lambda_2$ et $\mu_1\leqslant\mu_2$ , montrer que :

$$\mathrm{tr}(AB)\leqslant\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2$$

---

**Solution :**

1. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X$ un vecteur colonne propre normé associé : ${}^tXAX = {}^tX\lambda X = \lambda$, donc $\mathrm{Sp}(A) \subset R(A)$.

On a ${}^te_iAe_i = a_{i,i}$ donc $R(A)$ contient tous les éléments de la diagonale principale de $A$.

2. Soit $a < b$.
a) Par l'absurde : si $\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2 = 0$, alors

• si $\alpha = 0$ alors $X_2$ est nul , il n'est donc pas normé.

• sinon $X_1 = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}X_2$ et $||X_1|| = 1$ entraîne $\alpha = \dfrac{1}{2}$

d'où : $X_2 = -X_1$ et ${}^tX_2AX_2 =^t X_1AX_1$ ce qui entraîne $a = b$ : absurde.

Donc pour tout $\alpha \in [0,1], X_\alpha \neq 0$.

b) La fonction $\varphi$ est une fonction rationnelle à dénominateur jamais nul : elle est bien continue sur $[0,1]$.

c) Soient $a < b$ 2 réels de $R(A)$, on applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue $\varphi$ sur $[a,b] \subset [0,1]$ : soit $c \in [a,b]$, on a : $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$ il existe donc $\alpha_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi(\alpha_0) = c$.

Soit le vecteur normé : $X = \dfrac{X_{\alpha_0}}{||X_{\alpha_0}||}$, on a : $\varphi(\alpha_0) = \dfrac{{}^tX_{\alpha_0}AX_{\alpha_0}}{||X_{\alpha_0}||^2} = {}^tXAX = c$. Donc $c \in R(A)$ ce qui prouve que $R(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

3. Soit $a \in R({}^tQAQ)$. Il existe $X$ un vecteur normé de $\mathbb{R}^n$, tel que : ${}^tX{}^tQAQX = a$, soit ${}^t(QX)A(QX) = a$. Or : $||QX||^2 = {}^t(QX)(QX) = {}^tX{}^tQQX = {}^tXX = ||X||^2 = 1$ donc $a \in R(A)$.

On prouve l'autre inclusion de la même manière en écrivant $A$ sous la forme : ${}^t({}^tQ)({}^tQAQ){}^tQ$.
Ainsi $X \in R(A) \implies {}^tX{}^t({}^tQ)({}^tQAQ){}^tQX = {}^t({}^tQX)({}^tQAQ){}^tQX$, avec

$$||{}^tQX||^2 = {}^t({}^tQX){}^tQX = {}^tXQ{}^tQX = {}^tXX = ||X||^2 = 1$$

4. a) La matrice $A$ est symétrique réelle donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée formée de vecteurs propres (théorème spectral). On suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ : il existe $P$ orthogonale telle que $A = {}^tQPQ$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

D'après les questions 1.a et 2 on peut affirmer : $[\lambda_1, \lambda_2] \subseteq R(A)$.

Montrons que $R(A) \subseteq [\lambda_1, \lambda_2]$.

On a $R(A) = R(D)$ (question 3).

Soit $X$ vecteur normé de $\mathbb{R}^2$ défini par ${}^tX = (x, y)$ avec $x^2 + y^2 = 1$.

Alors ${}^tXDX = \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 \geqslant \lambda_1(x^2+y^2) = \lambda_1$, et ${}^tXD \leqslant \lambda_2(x^2+y^2) = \lambda_2$ d'où

$R(D) \subseteq [\lambda_1, \lambda_2] \implies R(A) \subseteq [\lambda_1, \lambda_2]$.

b) Le théorème spectral appliqué à $B$ donne : $B = {}^tQ\Delta Q$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2)$ et $Q$ matrice de passage orthogonale. Ainsi

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A{}^tQ\Delta Q) = \mathrm{tr}(\Delta QA{}^tQ)$$

si on note $QA{}^tQ = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ alors,

$\mathrm{tr}(AB) = \mu_1\alpha_{11} + \mu_2\alpha_{22} = \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \mu_1(\alpha_{11} - \lambda_1) + \mu_2(\alpha_{22} - \lambda_2)$

$= \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + (\alpha_{11} - \lambda_1)(\mu_1 - \mu_2)$
car $\alpha_{11} + \alpha_{22} = \mathrm{tr}(QA{}^tQ) = \mathrm{tr}({}^tQQA) = \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.
Or $\lambda_1 \leqslant \alpha_{11}$ car $\alpha_{11} \in R(QA{}^tQ) = R(A) = Sp(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$,
d'où le résultat demandé.

---

**Exercice 2.14.**

On note $\|.\|$ la norme usuelle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.
Soit deux entiers $r$ et $n$ tels que $2 \leqslant r \leqslant n$ et $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r$. On note $f$ et $g$ les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à $A$ et ${}^tAA$.

1. a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA) = r$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale réelle $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ telles que : ${}^tAA = PD{}^tP$.

c) Déterminer le signe des réels $\lambda_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

d) Montrer que parmi les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, il y a $r$ nombres strictement positifs et $n-r$ nuls.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que :
- $\forall\, i \in [\![1, r]\!], \lambda_i > 0$.
- $\forall\, i > r, \lambda_i = 0$.

On pose pour $i \in [\![1, n]\!], \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

2. a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}_1 = (X_i)_{1\leq i\leq n}$ orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $g$ avec pour tout $i \in [\![r+1, n]\!], X_i \in \mathrm{Ker}(f)$.

b) On pose pour tout $i \in [\![1, r]\!], Y_i = \dfrac{1}{\sigma_i} AX_i$, montrer que la famille de vecteurs $(Y_1, \ldots, Y_r)$ est orthonormée. On complète cette famille en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ notée $\mathcal{B}_2$.

c) Déterminer la matrice $\Delta$ de $f$ dans les bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et en déduire l'existence de deux matrices orthogonales $P_1$ et $P_2$ telles que : $A = P_1\,\mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \cdots, 0)P_2$.

3. Soit la matrice $A' = {}^tP_2\,\mathrm{diag}(\dfrac{1}{\sigma_1}, \ldots, \dfrac{1}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0){}^tP_1$.

a) Calculer $AA'$ et montrer que l'endomorphisme $h$ de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $AA'$ est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$.

b) Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ fixé. Montrer que la fonction $X \mapsto \|AX - Y\|$ atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$ en $X_0 = A'Y$.

---

**Solution :**

1. a) $X \in \mathrm{Ker}(A) \implies AX = 0 \implies {}^tAAX = 0$
$X \in \mathrm{Ker}({}^tAA) \implies {}^tAAX = 0 \implies {}^tX({}^tAAX) = 0 \implies ||AX||^2 = 0 \implies AX = 0$
Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}({}^tAA)$ et par le théorème du rang : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA)$

b) La matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle. Le théorème spectral assure la diagonalisabilité de ${}^tAA$ dans une base orthonormale $\mathcal{B}_d$ de vecteurs propres. Si on note $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^tAA$, on pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ et $P$ la matrice de passage entre les deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_d$, $P$ est orthogonale : $P^{-1} = {}^tP$ et ${}^tAA = PD{}^tP$

c) Soit $X_i$ vecteur propre non nul de ${}^tAA$ ou de $D$ associé à la valeur propre $\lambda_i$. On a :

$$ {}^tAAX_i = \lambda_i X_i \implies ||AX_i||^2 = \lambda_i ||X_i||^2$$

avec $||X_i|| > 0$ car $X_i \neq 0$, d'où $\lambda_i = \dfrac{||AX_i||^2}{||X_i||^2} \geqslant 0$

d) On sait que $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(D) = r$ donc $r$ valeurs propres seulement sont non nulles. Quitte à les renommer,on peut prendre $\lambda_i > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$.

2. a) On prend pour $\mathcal{B}_1$ la base orthonormée $\mathcal{B}_d$ de diagonalisation de $g$ :

- $g(X_i) = \lambda_i X_i, 1 \leqslant i \leqslant n$
- $r+1 \leqslant i \leqslant n, X_i \in \text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$. (q.1.a)

b) On a pour $1 \leqslant i, j \leqslant r$

$$\begin{aligned}\langle Y_i, Y_j\rangle &= \langle \frac{1}{\sigma_i} AX_i, \frac{1}{\sigma_j} AX_j\rangle = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}({}^tX_i{}^tAAX_j) = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}({}^tX_i\lambda_j X_j)\\ &= \frac{\sigma_j}{\sigma_i} < X_i, X_j >= \delta_{ij}\end{aligned}$$

c) On a $(1 \leqslant i \leqslant r) \implies AX_i = \sigma_i Y_i$, puis $(r+1 \leqslant i \leqslant n) \implies AX_i = 0$ car $\text{rg}(A) = r$.

D'où $\Delta = \text{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r, 0, \cdots, 0)$.

Soit $P_1 = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}$ et $P_2 = P_{\mathcal{B}_\in,\mathcal{B}}$.

Ces deux matrices de passage sont orthogonales (passage d'une base orthonormée à une base orthonormée) et vérifient : $A = P_1 \Delta P_2$

3. a) Alors $AA' = P_1 \,\text{diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0){}^tP_1$ ($r$ 1 suivis de $n-r$ 0).

D'où : $AA'AA' = P_1 \,\text{diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0){}^tP_1 P_1 \,\text{diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0){}^tP_1$,

qui est égal à $P_1 \,\text{diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0){}^tP_1 = AA'$. Donc $(AA')^2 = AA'$.

De plus ${}^t(AA') = {}^tP_1 \,\text{diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0){}^tP_1 = AA'$, donc l'endomorphisme $h$ associé est un projecteur orthogonal de rang $r$.

b) On sait que $\text{rg}(h) = \text{rg}(f)$ et $Y \in \text{Im}(h) \implies Y = AA'X = A(A'X)$ donc $\text{Im}(h) \subset \text{Im}(f)$ et donc $\text{Im}(h) = \text{Im}(f)$.

Ainsi $h$ est-il le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(f)$.

c) La distance de $Y$ a un élément de $\text{Im}(f)$ est supérieure à la distance de $Y$ à son projeté orthogonal sur $\text{Im}(f)$.

Or $AX_0 = AA'Y$ est le projeté orthogonal de $Y$ sur $\text{Im}(f)$.

Donc le vecteur $X_0 = A'Y$ minimise la fonction $X \mapsto ||AX - Y||$ sur $\mathbb{R}^n$.

---

**Exercice 2.15.**

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} v_i$.

   a) Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle qu'on ait l'égalité matricielle :

$$(\, u_0 \quad \cdots \quad u_n \,) = (\, v_0 \quad \cdots \quad v_n \,)\, P$$

b) On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$ et $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ sa base canonique.

Montrer que $\mathcal{B}_1 = (1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que $P$ est inversible et calculer son inverse.

(On pourra montrer que $P$ est la matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}_n[X]$)

c) En déduire l'expression de $v_n$ en fonction des $u_i, 0 \leqslant i \leqslant n$ :

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} u_i$$

2. On note $d_n$ le nombre de permutations sans point fixe de $[\![1, n]\!]$ (*i.e.* de permutations $\sigma$ de $[\![1, n]\!]$ telles que $\forall\, i, \sigma(i) \neq i$) et on pose : $d_0 = 1$.

a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, montrer la relation : $n! = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i$

b) En déduire l'expression de $d_n$ en fonction de $n$ pour $n \geqslant 0$.

c) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = (n+1)a_n + (-1)^{n+1}$.

Montrer que les deux suites $(a_n)$ et $(d_n)$ sont égales.

3. On note pour tout entier naturel $n$ : $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, dx$.

a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, dt$.

b) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, d_n = \frac{1}{e}(n! + (-1)^n J_n)$$

c) Montrer que lorsque $n$ tend vers $+\infty$ : $J_n \sim \dfrac{\mathrm{e}}{n}$.

En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(n-1)!}{\mathrm{e}} - \dfrac{d_n}{n}$.

---

**Solution :**

1. a) La matrice $P$ est $\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

b) La famille $\mathcal{B}_1 = (1, 1+X, (1+X)^2, \cdots, (1+X)^n)$ est une famille de $(n+1)$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degrés. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

La matrice $P$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}_1$ car $(1+X)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i$.

Elle est donc inversible et $P^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_0$.

Or pour $0 \leqslant j \leqslant n, X^j = ((1+X)-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}(1+X)^i(-1)^{j-i}$ d'où :

$$P^{-1} = \left(\binom{j}{i}(-1)^{j-i}1_{i\leqslant j}\right)_{0\leq i,j\leq n}$$

c) On a : $(v_0, \cdots, v_n) = (u_0, \cdots, u_n)P^{-1}$ d'où : $v_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i}u_i$

2. a) Soit $0 \leqslant n$, et $0 \leqslant i \leqslant n$. Le nombre de permutations à $i$ points fixes est $\binom{n}{i}d_{n-i}$ En effet : $\binom{n}{i}$ façons de choisir les $i$ points fixes et $d_{n-i}$ façons de permuter sans point fixe les $n-i$ éléments restant.
On partitionne l'ensembles des $n!$ permutations de $[\![1,n]\!]$ selon le nombre de points fixes, et $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}d_{n-i}$. En posant $j = n-i$ : $n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j}d_j \implies n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}d_j$

b) On applique la question 1.c : $d_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i}i!$ et en changeant $i$ en $n-i$ :

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i(n-i)! = n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

c) On vérifie l'égalité par récurrence sur $n$ : on a $d_0 = a_0 = 1$ et

$(n+1)d_n + (-1)^{n+1} = (n+1)n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^{n+1} = d_{n+1}$

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$,et $n \in \mathbb{N}$. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Laplace à l'ordre $n$ à la fonction $t \mapsto e^t$ sur l'intervalle d'extrémités 0 et $x$ :

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,pour $x = -1$ on obtient : $\mathrm{e}^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \int_0^{-1} \frac{(-1-u)^n}{n!}\mathrm{e}^u du.$

On pose $t = 1+u$ dans l'intégrale : $\mathrm{e}^{-1} = \frac{d_n}{n!} + \int_0^1 \frac{1}{n!}(-1)^n t^n e^{t-1}dt = \frac{d_n}{n!} + \frac{(-1)^n J_n}{en!}$.
Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}, d_n = \frac{1}{\mathrm{e}}(n! - (-1)^n J_n)$

c) Sur $[0,1], \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e} \implies \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x dx \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{e} dx = \frac{\mathrm{e}}{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} J_n = 0$

Une intégration par parties donne :

$J_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)J_n \implies nJ_n = \mathrm{e} - J_{n+1} - J_n \implies \lim_{n\to+\infty} nJ_n = \mathrm{e}$, soit lorsque $n$ tend vers $+\infty$, $J_n \sim \frac{\mathrm{e}}{n}$.

On a : $\dfrac{d_n}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}[(n-1)! + \dfrac{(-1)^n}{n} J_n] \implies |\dfrac{1}{\mathrm{e}}(n-1)! - \dfrac{d_n}{n}| = \dfrac{J_n}{\mathrm{e}n} \sim \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(n-1)!}{\mathrm{e}} - \dfrac{d_n}{n}$ converge absolument.

---

**Exercice 2.16.**

1. Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de $M$.

a) Justifier que $\mathcal{A}$ n'est pas réduit au polynôme nul.

b) Vérifier que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

c) Montrer que $\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \forall\, Q \in \mathcal{A}, P\,Q \in \mathcal{A}$.

d) Montrer qu'il existe un polynôme non nul de $\mathcal{A}$ de degré minimal. Soit $K \in \mathcal{A}$ un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient du terme de plus haut degré égal à 1) de degré minimal.

En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que $K$ divise tout polynôme de $\mathcal{A}$. En déduire que

$$\mathcal{A} = \{KQ, Q \in \mathbb{C}[X]\}$$

Un tel polynôme $K$ s'appelle polynôme minimal de $M$.

2. Exemples.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le polynôme minimal de $\lambda\, I_n$, où $I_n$ est la matrice identité d'ordre $n$.

b) Soit $P$ la matrice d'un projecteur $p$ distinct de 0 et $Id$. Déterminer le polynôme minimal de $P$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $K$. Montrer que l'ensemble des racines de $K$ est égal à l'ensemble des valeurs propres de $M$.

4. a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = e_1, \quad f(e_3) = e_2$$

Soit $M$ la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer le polynôme minimal de $M$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$, tel que $1 \leqslant p \leqslant n$. Existe-t-il des matrices $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^p$ ?

c) Soit $p \in \mathbb{N}$, tel que $p > n$. Existe-t-il des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^p$ ? (On pourra s'intéresser aux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f^k)$, où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a pour matrice $M$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.)

---

**Solution :**

1. a) La famille $(M^k)_{0\leq k\leq n^2}$ est liée puisque $\dim(\mathcal{M}_n(C)) = n^2$.

b) La vérification et immédiate.

c) La démonstration de cette question tient au fait que :

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

d) Soit $P \in \mathcal{A}$ tel que $P = KQ + R$ et $\deg(R) < \deg(K)$ (division euclidienne) ; alors $R = P - KQ \in \mathcal{A}$ ce qui entraîne que $R = 0$. La réciproque est claire grâce à la question c.

2. a) Le polynôme $K(X) = X - \lambda$ est annulateur de degré minimal.

b) On a $p^2 = p$, donc $K(X) = X(X-1)$ est annulateur, de degré minimal car $q \neq 0$ et $q \neq Id$.

3. On a $\mathrm{Sp}(M) \subseteq \mathrm{Rac}(K)$ car $K$ est annulateur (c'est du cours). Mais si $\lambda$ est une racine de $(K) \setminus \mathrm{Sp}(M)$, alors $K(X) = (X - \lambda)Q(X)$ et $0 = K(M) = (M - \lambda I_n)Q(M)$ avec $M - \lambda I_n$ inversible, donc $Q$ annulateur, en contradiction avec la minimalité de $\deg(K)$.

4. a) On a $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$. Ainsi $K(X) = X^3$ est-il le polynôme minimal de $M$.

b) De même avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice $M$ dans $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$, défini par

$f(e_1) = \cdots = f(e_{n-p+1}) = 0, f(e_{n-p+2}) = e_{n-p+1}, f(e_{n-p+3}) = e_{n-p+2}, \ldots,$

$f(e_n) = e_{n-1}$

La matrice $M$ est triangulaire supérieure stricte, donc $\mathrm{Spec}(M) = \{0\}$ et $K$ de la forme $X^k$ ; on a facilement $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ Donc le polynôme minimal de $M$ est $K(X) = X^p$.

c) La suite $\big(\mathrm{Ker}(f^k)\big)$ est croissante pour l'inclusion ;

s'il existe $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \setminus \mathrm{Ker}(f^k)$, alors $f^j(x) \in \mathrm{Ker}(f^{k+1-j}) \setminus \mathrm{Ker}(f^{k-j})$ ; donc la suite $(\mathrm{Ker}(f^k))$ est strictement croissante puis stationnaire puisque l'on travaille en dimension finie.

Si $K(X) = X^p$ avec $p > n$, alors la suite $\big(\mathrm{Ker}(f^k)_{1 \leq k \leq p}\big)$ est strictement croissante à plus de $n$ termes, ce qui est contradictoire avec la notion de dimension finie.

---

**Exercice 2.17.**

Soit $\big(E, \langle\ ,\ \rangle\big)$ un espace euclidien muni de la norme $\|.\|$ associée au produit scalaire, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall\, x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$$

1. a) Soit $x$ un vecteur appartenant à $\mathrm{Ker}(u - id) \cap \mathrm{Im}(u - id)$.

Justifier qu'il existe $y \in E$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n\, x = u^n(y) - y$.

b) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u - id) \oplus \mathrm{Im}(u - id)$.

2. On pose : $\forall p \in \mathbb{N}, v_p = \dfrac{1}{p+1} \sum\limits_{k=0}^{p} u^k$ , et on note $w$ le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - id)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - id)$.

Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $\big(v_p(x)\big)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $w(x)$, c'est-à-dire que

$$\forall\, x \in E, \lim_{p\to\infty} \|v_p(x) - w(x)\| = 0$$

3. Soit $Q$ un projecteur de $E$, distinct de l'application nulle.

a) Montrer que si $\mathrm{Ker}(Q)$ et $\mathrm{Im}(Q)$ sont orthogonaux, alors

$$\forall\, x \in E, \|Q(x)\| \leqslant \|x\|$$

b) Réciproquement, on suppose que : $\forall\, x \in E, \|Q(x)\| \leqslant \|x\|$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(Q)$ et $y \in \mathrm{Ker}(Q)$. En considérant les vecteurs $z = x + \lambda\, y$ pour $\lambda$ quelconque dans $\mathbb{R}$, montrer que $\langle x, y\rangle = 0$.

c) En déduire qu'un projecteur $Q$ non nul est orthogonal si et seulement si

$$\forall\, x \in E, \|Q(x)\| \leqslant \|x\|$$

4. En déduire que $w$ est un projecteur orthogonal.

---

**Solution :**

1. a) Il existe $y$ tel que $u(x) = x = u(y) - y = u^{k+1}(y) - u^k(y)\,,\ \forall k$. Ensuite, par somme télescopique, il vient : $nx = u^n(y) - y$.

b) On écrit, pour tout $n \geqslant 1$, $n||x|| \leqslant ||u^n(y)|| + ||y|| \leqslant 2||y||$, par hypothèse sur $u$ et récurrence ; donc en prenant la limite, $x = 0$. On conclut par le théorème du rang.

2. Soit $x = a + b$ une décomposition de $x$ sur $E = \mathrm{Ker}(u - I) \oplus \mathrm{Im}(u - I)$.

Alors $w(x) = a$.

D'autre part, $u(a) = a \Rightarrow \forall k\,,\ u^k(a) = a \Rightarrow \forall p\,,\ v_p(a) = a$

et $\forall p\,,\ v_p(b) = \frac{1}{p+1} \sum\limits_{k=0}^{p} \Big[u^{k+1}(b) - u^k(b)\Big] = \dfrac{u^{p+1}(b) - b}{p+1} \Rightarrow ||v_p(b)|| \leqslant \dfrac{2||b||}{p+1} \to 0$ comme ci-dessus.

Alors $\lim\limits_{p\to+\infty} v_p(x) = a = w(x)$.

3. a) Il suffit d'utiliser le théorème de Pythagore.

b) On a

$\forall\lambda\,,\ ||x||^2 = ||Q(x + \lambda\, y)||^2 \leqslant ||x + \lambda\, y||^2 \Rightarrow \forall\lambda\,,\ 0 \leqslant 2\,\langle x, y\rangle\,\lambda + ||y||^2\,\lambda^2$, ce qui donne $\langle x, y\rangle = 0$

c) C'est une conséquence des résultats a) et b).

4. Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, x\,,\ \forall\, p\,,\ ||v_p(x)|| \leqslant \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} ||u^k(x)|| \leqslant \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} ||x||$$

donc par passage à la limite $||w(x)|| \leqslant ||x||$.

---

**Exercice 2.18.**

Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $\mathbb{C}^2$ qui commutent ( c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$).

On note $A$ et $B$ les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ canoniquement associées à $f$ et $g$. On suppose que les matrices $A$ et $B$ ne sont pas des matrices scalaires (c'est-à-dire ne sont pas proportionnelles à la matrice identité).

1. On suppose que $f$ admet deux valeurs propres $\lambda, \mu$, avec $\lambda \neq \mu$.

a) Montrer que chaque sous-espace propre de $f$ est stable par $g$.

b) Montrer que $f$ et $g$ sont diagonalisables dans une même base.

c) Montrer qu'il existe deux polynômes $P_1, P_2$ de $\mathbb{C}_1[X]$ et une matrice $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que $A = P_1(K)$ et $B = P_2(K)$.

2. On suppose désormais que $f$ et $g$ n'admettent chacun qu'une seule valeur propre.

a) Montrer que $f$ et $g$ admettent un vecteur propre commun noté $e_1$.

b) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta$ complexes tels que les matrices $A$ et $B$ sont semblables respectivement aux matrices $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

c) Montrer qu'il existe deux polynômes $P_1, P_2$ de $\mathbb{C}_1[X]$ et une matrice $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que $A = P_1(K)$ et $B = P_2(K)$.

---

**Solution :**

1. a) Soit $E_\lambda$ un sous-espace propre de $f$ qui est de dimension 1. Soit $x \in E_\lambda$. Alors

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ainsi $g(x) \in E_\lambda$.

b) L'endomorphisme $f$ est diagonalisable car il possède deux valeurs propres distinctes.
Si l'on note $\tilde{g}$ la restriction de $g$ à $E_\lambda(f)$, cette restriction induit un endomorphisme de $E_\lambda(f)$ qui est un espace de dimension 1. Si $x$ en est une base, alors $(g(x), x)$ étant liés, il existe $\nu \in \mathbb{C}$ tel que $g(x) = \nu x$, ce qui entraîne que $g$ et $f$ admettent $x$ comme vecteur propre commun.
De la même façon, $f$ et $g$ admettent un second vecteur propre commun $y$ vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\mu$.
On obtient ainsi une base de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres communs à $f$ et $g$. Ainsi $g$ est diagonalisable et admet deux valeurs propres différentes (car la matrice $B$ n'est pas scalaire)

c) Les matrices $A$ et $B$ sont semblables avec la même matrice de passage $Q$ aux matrices $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $D_2 = \begin{pmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \mu' \end{pmatrix}$.
Il existe un polynôme $P_1$ tel que $P_1(1) = \lambda$ et $P_1(-1) = \mu$ (polynôme interpolateur) et un polynôme $P_2$ tel que $P_2(1) = \lambda'$ et $P_2(-1) = \mu'$.
En notant $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, il vient $D_1 = P_1(K), D_2 = P_2(K)$. Finalement

$$A = QD_1Q^{-1} = P_1(QKQ^{-1}), \quad B = QD_2Q^{-1} = P_2(QKQ^{-1})$$

2. a) On remarque que les endomorphismes $f$ et $g$ ne sont pas diagonalisables, car autrement les matrices $A$ et $B$ seraient scalaires.
Sur $\mathbb{C}$ tout endomorphisme admet au moins une valeur propre. Alors la dimension du sous-espace propre associé est de 1 (car autrement $A$ serait scalaire). Soit $e_1$ un vecteur propre associé de $f$. Le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est stable par $g$ et $e_1$ est un vecteur propre commun à $f$ et $g$.

b) On complète $e_1$ en une base $(e_1, e_2)$ de $\mathbb{C}^2$ et on obtient le résultat demandé.

c) Les matrices $A$ et $B$ sont semblables avec la même matrice de passage $Q$, respectivement à $\lambda I_2 + N_1$ et $\mu I_2 + N_2$, avec $N_1 = \alpha N, N_2 = \beta N$ et $N^2 = N_1^2 = N_2^2 = 0$.

Il reste à poser $K = N$, $P_1(X) = \lambda + \alpha X, P_2(X) = \mu + \beta X$.

---

**Exercice 2.19.**

On note $C$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. A tout élément $f \in C$, on associe la fonction $g = D(f)$ définie par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } g(x) = D(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

1. Dans cette question, $F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité $X$. On note $g = D(F)$.

a) Montrer que $g$ est une densité de probabilité.

b) Déterminer $g$ quand $X$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. On dit qu'un réel $\lambda$ est une valeur propre de $D$ s'il existe une application non nulle $f$ de $C$ telle que $D(f) = \lambda f$.

Déterminer les valeurs propres de $D$.
(On pourra utiliser les fonctions $h_a : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ et $k_a : x \mapsto \sin(\pi x)\mathrm{e}^{ax}$).

3. Dans cette question, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

a) Montrer que la restriction de $D$ à $E_n$ induit un endomorphisme de $E_n$ ; on le note $D_n$.

b) Cet endomorphisme $D_n$ est-il diagonalisable ?

c) Soit $(H_n)_{n\geq 0}$ la suite de polynômes définie par $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \geqslant 1$, $H_k(X) = \prod\limits_{i=0}^{k-1} (X - i)$.

Montrer que $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base de $E_n$. Donner la matrice associée à $D_n$ dans cette base.

d) On écrit $X^n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k H_k$.

Soit $Y$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Montrer que :

$$E(Y^p) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k$$

---

**Solution :**

1. a) La fonction $F$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. Cela entraîne que la fonction $g$ vérifie

- la fonction $g$ est positive et continue comme différence de fonctions continues.
- pour $B < A$, par la relation de Chasles

$$\int_B^A g(t)dt = \int_B^A (F(t+1) - F(t))dt = \int_A^{A+1} F(t)dt - \int_B^{B+1} F(t)dt$$

Or $\left|\int_A^{A+1} F(t)dt - 1\right| \leqslant \int_A^{A+1} |F(t) - 1|dt$ et, pour $\varepsilon > 0$, il existe $X$ tel que pour tout $t > X$, $|F(t) - 1| < \varepsilon$. Ainsi, pour $A > X$

$$\left|\int_A^{A+1} F(t)dt - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

De même Il existe $Y$ tel que si $t < Y$, $|F(t) < \varepsilon$ et pour $B + 1 < Y$

$$\left|\int_B^{B+1} F(t)dt\right| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui montre, en prenant les limites lorsque $A$ tend vers $+\infty$ et $B$ vers $-\infty$, que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = 1$.

b) Un calcul immédiat donne $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

2. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x+1) - f(x) = \lambda f(x)$, pour tout $x$ réel, soit $f(x+1) = (\lambda+1)f(x)$.

- Si $\lambda = -1$, il vient $f(x+1) = 0$ pour tout $x$, soit $f$ identiquement nulle.
- Si $\lambda \neq -1$, on pose $\mu = \lambda + 1$. On remarque que $D(h_a) = (e^a - 1)h_a$. Donc si $1 + \mu > 0, a = \ln(1+\mu)$ ce qui fournit une fonction propre $h_a$ pour tout $\mu > -1$
- De même $D(k_a) = -(e^a + 1)k_a$. Donc pour $1 + \mu < 0$, $a = \ln(-1-\mu)$ est valeur propre de fonction propre associée $k_a$.

Ainsi tout réel différent de $-1$ est valeur propre de $D$.

3. a) $D$ est linéaire et si $P$ est un polynôme de degré $k$, $D(P) = P(X+1) - P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k-1$. On définit ainsi un endomorphisme de $E_n$.

b) Pour des raisons de degré, la seule valeur propre possible de $D$ est 0, qui est valeur propre puisque $D(1) = 0$.
L'endomorphisme $D$ n'est pas diagonalisable.

c) La famille $(H_n)_{n\geq 0}$ est échelonnée en degrés. Elle est libre et $\deg H_k = k$ pour tout $k \geqslant 0$. C'est donc une base de $\mathbb{R}[X]$.

$D(H_p) = \prod_{k=0}^{p-1}(X-k+1) - \prod_{k=0}^{p-1}(X-k) = p\prod_{k=0}^{p-2}(X-k) = pH_{p-1}$
La matrice demandée est donc strictement triangulaire supérieure avec une sur-diagonale $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

d) Par le théorème de transfert

$$E(H_k(Y)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\lambda^n}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-k)!} = \lambda^k$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(Y^p) = \sum_{k=0}^{n} b_k E(H_k(Y)) = \sum_{k=0}^{n} b_k\lambda^k$$

---

**Exercice 2.20.**

Soient $\mu$ un réel tel que $\mu \geqslant 1$ et $E$ un espace vectoriel euclidien de produit scalaire et de norme notés respectivement $\langle .,. \rangle$ et $\|.\|$.

Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de $E$ est dite $\mu$-presque orthogonale si

▷ Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|u_i\| = 1$,

▷ Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\frac{1}{\mu}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \big\|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i\big\|^2 \leqslant \mu\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

1. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille $\mu$-presque orthogonale de vecteurs de $E$.
Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

2. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de $E$. Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est 1-presque orthogonale si et seulement si $(u_1, \ldots, u_n)$ est orthonormale.
*(Pour l'une des implications, on pourra considérer la combinaison linéaire $u_i + u_j$ avec $i \neq j$.)*

3. Soit $f$ un endomorphisme de $E$.

a) Montrer qu'il existe un réel $k$ tel que

$$\forall\, x \in E, \|f(x)\|k\|x\|$$

b) Montrer que si $f$ est un automorphisme de $E$, alors il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \frac{1}{\lambda}\|x\|\|f(x)\|\lambda\|x\|$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de vecteurs unitaires de $E$.
Montrer l'existence d'un réel $\mu \geqslant 1$ tel que $(u_1, \ldots, u_n)$ soit $\mu$-presque orthogonale.

---

**Solution :**

1. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille $\mu$-presque orthogonale de vecteurs de $E$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i = 0$.

On a alors $0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \| \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \|^2 = 0$, et donc $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$, d'où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

2. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de $E$.
▷ Supposons $(u_1, \ldots, u_n)$ orthonormale.

Alors, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\| \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$,
donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est 1-presque orthogonale.
▷ Réciproquement, supposons $(u_1, \ldots, u_n)$ est 1-presque orthogonale. Soient $i$ et $j$ distincts dans $[\![1, n]\!]$. On a $1^2 + 1^2 = 2 \leqslant \|u_i + u_j\|^2 \leqslant 2$.
Ainsi, $\|u_i + u_j\|^2 = \|u_i\|^2 + \|u_j\|^2 + 2(u_i|u_j) = 2 + 2(u_i|u_j) = 2$,
et donc $\langle u_i, u_j \rangle = 0$. Comme les $u_k$ sont unitaires, on en déduit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est orthonormale.

3. a) Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de $E$, $x \in E$ et $(x_1, \ldots, x_p)$ les coordonées de $x$ dans cette base. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\|f(x)\|^2 = \| \sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i) \|^2 \leqslant \Big( \sum_{i=1}^{p} \|x_i f(e_i)\| \Big)^2 = \Big( \sum_{i=1}^{p} |x_i| \|f(e_i)\| \Big)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^p$, on a

$$\Big( \sum_{i=1}^{p} |x_i| \|f(e_i)\| \Big)^2 \leqslant \Big( \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \Big) \times \Big( \sum_{i=1}^{p} \|f(e_i)\|^2 \Big) = ||x||^2 \times \sum_{i=1}^{p} \|f(e_i)\|^2$$

car $(e_i)$ orthonormale.

En posant $k = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \|f(e_i)\|^2 + 1}$, on a bien $k > 0$ et pour tout $x \in F$, $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$.

b) Appliquons la question précédent, à $f$ et $f^{-1}$ ; il existe des constante $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que

$$\forall\, x \in E, \|f(x)\| \leqslant k_1\|x\| \text{ et } \|f^{-1}(x)\| \leqslant k_2\|x\|.$$

En particulier, pour tout $x \in E$, $\|x\| \leqslant k_2\|f(x)\|$ et donc

$$\forall x \in E, \ \frac{1}{k_2}\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant k_1\|x\|$$

En posant $\lambda = \max(k_1, k_2, 1)$, on a bien $\lambda \geqslant 1$ et

$$\forall x \in F, \frac{1}{\mu}\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \mu\|x\|$$

c) Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $F$. Soit $f : F \to F$ l'unique application linéaire vérifiant $f(e_i) = u_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (définition d'un endomorphisme par l'image d'une base). D'après 3.$b$., il existe $\lambda \geqslant 1$ tel que

$$\forall x \in F, \ \frac{1}{\lambda}\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \lambda\|x\|$$

Soient $\mu = \lambda^2$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. On a $\mu \geqslant 1$ et

$$\frac{1}{\mu}||x||^2 = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \|\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\|^2 = ||f(x)||^2 \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \mu||x||^2$$

car $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale.
On en déduit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est $\mu$-presque orthogonale.

---

**Exercice 2.21.**

Pour $n$ entier naturel tel que $n \geqslant 2$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle .,. \rangle$, et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est la norme euclidienne associée.

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est noté aussi bien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $N(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$, où $\mathrm{Spec}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de $A$. Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $q_A(x) = \langle Ax, x \rangle$.

Enfin, on désigne par $H_n$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $H_n = (a_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n}$, avec $a_{j,k} = \dfrac{1}{j+k-1}$.

On utilisera sans démonstration la relation : $\forall\, t > 0, \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique :

$$N(A) = \sup\{|q_A(x)|, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$$

2. On note : $K_n = \displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\arctan(x)}{x}\, dx$ et $L_n = \displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) dx$.

On pose $J_n = K_n - L_n$, et on cherche un équivalent de $J_n$.

a) Montrer que pour $t0$, $\arctan tt$. En déduire que $0 < L_n \leqslant 1$.

b) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Montrer que $K_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$.

c) En déduire que $J_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$.

3. On note $a$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ défini par : $a = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}})$

a) Montrer que $\|a\|^2 \leqslant 1 + \ln(n)$.

b) On note $q_n = q_{H_n}$ et on admet que $4J_n \leqslant q_n(a)$ et que $N(H_n) \leqslant \pi$. Montrer que :

$$\frac{4J_n}{1+\ln(n)} \leqslant q_n\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$$

En déduire la limite de $N(H_n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

---

**Solution :**

1. La matrice $A$ est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormée et toutes ses valeurs propres sont réelles. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, non nécessairement distinctes, rangées par ordre de valeur absolue décroissante.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres, avec $e_i$ vecteur propre associé à $\lambda_i$. Ainsi, $N(A) = |\lambda_1|$.
D'autre part, pour un vecteur $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ de norme 1, en utilisant l'expression du produit scalaire en base orthonormée, on a $|q_A(x)| = |\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2| \leqslant |\lambda_1| \|x\|^2 = |\lambda_1|$ Ce maximum est atteint pour $x = e_1$, et l'on a bien :

$$N(A) = |\lambda_1| = \sup\{|q_A(x)|, \|x\| = 1\} = \max\{|q_A(x)|, \|x\| = 1\}.$$

2. a) On pose $f(t) = t - \arctan(t)$, alors $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2} > 0$.

La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est nulle en zéro, donc strictement positive pour $t > 0$. On a donc $\forall t \geqslant 0,\ \arctan(t) \leqslant t$.
On en déduit par croissance de l'intégrale sur $[1, \sqrt{n}]$, les bornes étant bien dans le bon ordre, que $L_n \leqslant \displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}}\, dx = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$.
Par ailleurs, $L_n$ est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle. C'est donc un réel strictement positif. Ainsi, $0 < L_n \leqslant 1$

b) La fonction $h \ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}\arctan(\dfrac{1}{x})$ est continue, positive sur $[1, +\infty[$ et équivaut au voisinage de $+\infty$ à $1/x^2$. Par critère de comparaison des intégrales de fonctions continues positives, $h$ est ainsi intégrable sur $[1, +\infty[$. Avec la formule rappelée en début de partie, on a

$$K_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\pi/2 - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\, dx = \frac{\pi}{4}\ln(n) - \int_1^{\sqrt{n}} h(x)\, dx$$

Quand $n \to +\infty$, le second terme admet une limite finie et est donc négligeable devant le premier qui tend vers $+\infty$. On a donc $K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{4}\ln(n)$.

c) On a $J_n = K_n - L_n$ et $K_n \to +\infty$ alors que $(L_n)$ est bornée entre 0 et 1. On a donc aussi $K_n - 1 \leqslant J_n = K_n - L_n \leqslant K_n$, $K_n$ étant strictement positive comme intégrale sur un segment avec bornes bien rangées d'une fonction continue positive non identiquement nulle, on peut diviser par $K_n$ .
Ainsi : $1 - \dfrac{1}{K_n} \leqslant J_n \leqslant 1$ et par le théorème d'encadrement :

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\ln(n)$$

3. a) On remarque que $\|a\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ décroît sur $[1, +\infty[$, on a $\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

En sommant ces inégalités de 2 à $n$ pour $n \geqslant 2$, on a donc

$$\|a\|^2 \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n)$$

b) On a admis que $4J_n \leqslant q_n(a)$. Avec la question précédente, on en déduit que

$$0 \leqslant \frac{4J_n}{1+\ln(n)} \leqslant \frac{4J_n}{\|a\|^2} \leqslant q_n\Big(\frac{a}{\|a\|}\Big) = \frac{q_n(a)}{\|a\|^2}$$

c) D'après les questions 1. et 3.b, $H_n$ étant symétrique réelle,

$$N(H_n) = \sup\nolimits_{\|x\|=1} |q_n(x)| \geqslant q_n\Big(\frac{a}{\|a\|}\Big) \geqslant \frac{4J_n}{1+\ln(n)}.$$

On suppose acquis que $N(H_n) \leqslant \pi$. On a ainsi $\dfrac{4J_n}{1+\ln(n)} \leqslant N(H_n) \leqslant \pi$

La question 2.c montre que le minorant tend vers $\pi$. On a donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} N(H_n) = \pi$$

---

**Exercice 2.22.**

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Soit $T$ l'application définie sur $E$, par :

$$\forall\, f \in E, T(f)(x) = \frac{1}{2}\Big(f\big(\frac{x}{2}\big) + f\big(\frac{x+1}{2}\big)\Big)$$

1. Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$. Est-il injectif ?

2. On note $T^n$ la composée de $T$ avec lui même $n$ fois. Donner une expression de $T^n(f)$ en fonction de $f$ et de $n$.

3. On appelle valeur propre de $T$ tout réel $\lambda$ pour lequel il existe $f \in E$, $f \neq 0$, tel que $T(f) = \lambda f$.

On dit alors que $f$ est une fonction propre pour la valeur propre $\lambda$.

a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $T$. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

b) Montrer que 1 est valeur propre de $T$. Déterminer les fonctions propres associées.

c) Montrer que $-1$ n'est pas valeur propre de $T$.

---

**Solution :**

1. L'application $T$ est linéaire. De plus $T(f)$ est une fonction définie sur $[0, 1]$ (car $x/2$ et $(x + 1)/2$ appartiennent à $[0, 1]$) et continue sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions continues.
L'application $T$ n'est pas injective. Il existe en effet des fonctions $f$ telles que pour tout $x \in [0, 1], f(x/2) + f((x + 1)/2) = 0$. Par exemple $f(x) = \sin(2\pi x)$ vérifie

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=\sin(\pi x)+\sin(\pi x+\pi)=0$$

2. On calcule $T^2(f)$. Il vient :

$$T^2(f)(x)=\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{x}{4}\right)+f\left(\frac{x+1}{4}\right)+f\left(\frac{x+2}{4}\right)+f\left(\frac{x+3}{4}\right)\right]$$

On montre alors par récurrence sur $n$ que :

$$T^n(f)(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

- vérifié pour $n=1,2$.
- supposons la relation vérifiée pour $n$. Alors

$$\begin{aligned}
T^{n+1}(f)(x) &= \frac{1}{2}\left(T^n(f)\left(\frac{x}{2}\right)+T^n(f)\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x/2+k}{2^n}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{(x+1)/2+k}{2^n}\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+2k}{2^{n+1}}\right)+\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+2k+1}{2^{n+1}}\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

3. a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $T$ de fonction propre associée $f$. Par la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $\lambda^n f(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$.

Or la fonction $f$ étant continue sur $[0,1]$ elle est majorée en valeur absolue par un nombre $M$ et

$$|T^n(f)(x)\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)\right|\leqslant M$$

Donc la suite $(\lambda^n f)$ est bornée, ce qui entraîne que $|\lambda|\leqslant 1$.

b) Pour $\lambda=1$, on cherche $f$ non nulle telle que $T(f)=f$ ce qui entraîne que pour tout $n\in\mathbb{N}, T^n(f)=f$, soit

$$f(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

Cette dernière expression est une somme de Riemann associée à la fonction $f$.

À la limite $f(x)=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$, ce qui signiife que $f$ est constante.

La réciproque est aisée à vérifier.

Ainsi 1 est valeur propre de $T$ et le sous-espace propre associé est $\mathbb{R}_0[X]$.

c) Le réel $-1$ ne peut être valeur propre car, on aurait

$$(-1)^n f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt$$

alors que la partie gauche de l'équation n'a pas de limite.

---

**Exercice 2.23.**

Dans cet exercice, $E$ désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n$, et $f$ un endomorphisme de $E$. On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec $f$ et $R[f]$ l'ensemble des polynômes en $f$ :

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \ / \ f \circ g = g \circ f\}, \text{ et } R[f] = \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{R}[X]\}$$

1. a) Montrer que $C(f)$ et $R[f]$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que $R[f] \subset C(f)$.

*On dit qu'un endomorphisme $f$ de $E$ est cyclique s'il existe au moins un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de $E$.*

2. Montrer que $f$ est cyclique si et seulement il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ et des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

On considère dans toute la suite un endomorphisme cyclique de $E$.

3. Soit $P(f) = f^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$. Montrer que $P(f) = 0$.

4. a) Déterminer une base de $R[f]$

b) En déduire que $C(f) = R[f]$.

5. On suppose $\alpha_0 = 0$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ si et seulement si $\alpha_1 \neq 0$.

---

**Solution :**

1. a) On vérifie aisément cette question.

b) Question également évidente, par linéarité et puisque $f$ commute avec toute puissance de $f$.

2. Il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de $E$. Dans cette base, la matrice associée à $f$ est de la forme proposée puisqu'on écrit en colonnes les coordonnées des vecteurs $f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0), f^n(x_0))$, ce dernier vecteur s'écrivant sous la forme $f^n(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)$ par définition d'une base.

Réciproquement supposons qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$ dans laquelle la matrice associée à $f$ est $M$.
Alors $f(e_i) = e_{i+1}, i \in [\![1, n-1]\!]$.
On pose $x_0 = e_1$ et il vient $e_2 = f(x_0), e_3 = f^2(x_0), \dots, e_n = f^{n-1}(x_0)$.

3. On remarque que $P(f)(x_0) = 0$ et par commutation, pour tout $k$ :

$$P(f)(f^k(x_0)) = f^k(P(f)(x_0)) = 0$$

Ainsi $P(f)$ est-il nul sur une base de $E$ donc identiquement nul.

4. a) On a donc par la question précédente que $f^n \in \mathrm{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$. Par une récurrence immédiate pour tout $p \geqslant 0$, on a $f^{n+p} \in \mathrm{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$, ce qui entraîne que la famille $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ engendre $R[f]$.

De plus cette famille est libre car

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0 \implies \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) = 0 \implies a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$$

Ainsi $\mathbb{R}[f] = \mathrm{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$, qui est de dimension $n$.

b) Soit $h \in C(f)$. On écrit $h(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$.

On pose $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$. On a alors

- $P(x_0) = h(x_0)$
- par commutation, pour tout $i$, $P(f^i(x_0)) = h(f^i(x_0))$.

Donc $h = P$.

5. On suppose dans cette question que $\alpha_0 = 0$.

On remarque qu'à cause du décalage des 1, les $(n-1)$ premières colonnes de $M$ forment une famille libre.

Donc $\mathrm{rg}(M) \geqslant n-1$. Or $\alpha_0 = 0$ donne une ligne de 0 et $\mathrm{rg}(M) \leqslant n-1$. Ainsi $\mathrm{rg}(M) = n-1$ et $\dim \mathrm{Ker}\, M = 1$.
Or

$$P(x_0) = 0 \implies f\left(f^{n-1}(x_0) - \alpha_1 x_0 - \cdots - \alpha_{n-1} f^{n-2}(x_0)\right) = 0$$

Donc $\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Vect}(f^{n-1}(x_0) - \alpha_1 x_0 - \cdots - \alpha_{n-1} f^{n-2}(x_0))$.

- si $\alpha_1 = 0$, la base de $\mathrm{Ker}\, f$ trouvée ci-dessus est également élément de $\mathrm{Im}\, f$.
- si $\alpha_1 \neq 0$, alors $u = -\alpha_1 x_0 - \cdots - \alpha_{n-1} f^{n-2}(x_0) + f^{n-1}(x_0) \notin \mathrm{Im}\, f$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$.

# 3

# PROBABILITÉS

---

**Exercice 3.01.**

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes, de même loi et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $Y_n$ par :

$$Y_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i$$

1. Exprimer la fonction de répartition de $Y_n$ à l'aide de la fonction $k \mapsto P(X_1 \geqslant k)$.

2. **Dans cette question seulement** on suppose que les $X_i$ suivent la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0, 1[\,$ ; on note $q = 1 - p$.

   a) Calculer l'espérance de $Y_n$.

   b) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Montrer que la série de terme général $P(X_1 k)$ converge si et seulement si $X_1$ admet une espérance et qu'alors :

$$E(X_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 k)$$

4. En déduire que si $X_1$ admet une espérance, alors $Y_n$ admet une espérance et comparer ces deux espérances.

5. Soit $N$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des $X_i$, et soit $Y$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, Y(\omega) = \inf_{1\leq i\leq N(\omega)} X_i(\omega)$$

Montrer que si $X_1$ admet une espérance, alors $Y$ admet une espérance et que l'on a $E(Y) \leqslant E(X_1)$.

**Solution :**

1. La variable $Y_n$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (les $X_i$ sont indépendantes et de même loi que $X_1$) on a :

$$\begin{aligned} P(Y_n \leqslant k) &= 1 - P(X_1 > k, \dots, X_n > k) = 1 - P(X_1 > k) \cdots P(X_n > k) \\ &= 1 - P(X_1 > k)^n = 1 - P(X_1 \geqslant k+1)^n \end{aligned}$$

On en déduit que :

$P(Y_n = k) = P(Y_n \leqslant k) - P(Y_n \leqslant k-1) = P(X_1 \geqslant k)^n - P(X_1 \geqslant k+1)^n$.

2. a) Si $X_1$ suit la loi géométrique de paramètre $p$, on a $P(X_1 \geqslant k) = q^{k-1}$ donc :

$$P(Y_n = k) = q^{n(k-1)} - q^{nk} = (1 - q^n)\,(q^n)^{k-1}$$

on reconnaît la loi géométrique de paramètre $p' = 1 - q^n$.

Donc $E(Y_n) = \dfrac{1}{1 - q^n}$.

b) Comme $q \in \,]0, 1[$, et $P(Y_n = k) = (1 - q^n)(q^n)^{k-1}$, on a :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \lim_{n\to\infty} P(Y_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 1 \\ 1 & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

On reconnaît donc que $(Y_n)$ converge en loi vers la variable constante égale à 1. (On peut raisonner sur les probabilités ponctuelles plutôt que sur les fonctions de répartition car toutes les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.)

3. On remarque que :

$P(X_1 \geqslant k) = \sum\limits_{j=k}^{+\infty} P(X_1 = j)$ et que $jP(X_1 = j) = \sum\limits_{k=1}^{j} P(X_1 = j)$.

Par sommation par paquets (tout est positif), on a donc l'équivalence des convergences et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \leq k} P(X_1 = j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} P(X_1 = j) = \sum_{j=1}^{\infty} jP(X_1 = j) \\ &= E(X_1) \end{aligned}$$

4. D'après les calculs de la question 1, on a :

$$0 \leqslant P(Y_n \geqslant k) = 1 - P(Y_n \leqslant k-1) = P(X_1 > k-1) = P(X_1 \geqslant k) \leqslant P(X_1 \geqslant k)$$

car $P(X_1 \geqslant k) \in \,]0, 1[$. Par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, comme la série $\sum P(X_1 \geqslant k)$ converge, il en est de même de la série $\sum\limits_{k\geq 0} P(Y_n \geqslant k)$.

D'après la question précédente, la variable $Y_n$ (à valeurs dans $\mathbb{N}$) a pour espérance $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(Y_n \geqslant k)$ et celle-ci est inférieure à $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X_1 \geqslant k)$, soit $E(Y_n) \leqslant E(X_1)$.

(cette dernière inégalité provient aussi directement de $Y_n \leqslant X_1$)

5. C'est un théorème (admis) du cours ; ici on le démontre dans un cas particulier.

Comme $E(Y|N=n)=E(Y_n)$, on a
$$0 \leqslant E(Y|N=n)P(N=n) \leqslant E(X_1)P(N=n),$$
donc par comparaison à la série de terme général $E(X_1)P(N=n)$ qui est convergente , la série $\sum E(Y|N=n)P(N=n)$ converge.

Comme $Y$ est une variable aléatoire positive, la formule de l'espérance totale s'applique, et on a :
$$E(Y)=\sum_{n=0}^{\infty} E(Y|N=n)P(N=n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1)P(N=n)=E(X_1)$$

---

**Exercice 3.02.**

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ donné. Pour tout ensemble fini $E$, on note $\mathrm{card}(E)$ son cardinal (nombre de ses éléments).

Soit $\lambda>0$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur le segment $[0,1]$. Soit $Z$ une variable aléatoire indépendante des $X_n$ et qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

1. Soit $a\in ]0,1]$. On définit les variables aléatoires $N$ et $N_n$, pour $n\geqslant 1$, par :
$$\forall\,\omega\in\Omega,\ N_n(\omega)=\mathrm{card}\{i\in [\![0,n-1]\!]/X_i(\omega)\in[0,a]\}$$
$$\forall\,\omega\in\Omega,\ N(\omega)=\mathrm{card}\{i\in [\![0,Z(\omega)-1]\!]/X_i(\omega)\in[0,a]\}$$
La variable aléatoire $N_0$ est la variable certaine égale à 0.

a) Pour tout $n\geqslant 1$, déterminer la loi, l'espérance et la variance de $N_n$.

b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $N$.

c) Pour tout $\lambda>0$, on pose $F_n(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\lambda}\frac{u^n}{n!}\mathrm{e}^{-u}\,du$.

Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ sur l'intervalle $[0,1]$. En déduire que $P(Z\geqslant n+1)=F_n(\lambda)$ ainsi qu'une expression de $P(N\geqslant n+1)$ à l'aide de $F_n$.

2. On définit la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geq 0}$ en posant, pour tout événement $\omega\in\Omega$, que les $Z(\omega)$ premiers termes $T_0(\omega),T_1(\omega),\dots,T_{Z(\omega)-1}(\omega)$ sont les nombres $X_0(\omega),X_1(\omega),\dots,X_{Z(\omega)-1}(\omega)$ rangés dans l'ordre croissant, et pour tout $n\geqslant Z(\omega)$, $T_n(\omega)=2$.

Déterminer la fonction de répartition de $T_n$.

La variable aléatoire $T_n$ est-elle discrète ? Est-elle à densité ?

3. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

**Solution :**

1. a) Les $n$ événements $(0\leqslant X_i\leqslant a)_{0\leq i\leq n-1}$ sont indépendants de même probabilité $a$.

Or $N_n$ compte le nombre de ces événements qui sont réalisés, donc $N_n$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $a$, d'espérance $na$ et de variance $na(1-a)$.

Le résultat reste vrai même pour $n=0$.

b) Pout tout $k \in N(\Omega)=\mathbb{N}$, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}P(N=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{(Z=n)}(N=k)P(Z=n) = \sum_{n=k}^{\infty} P(N_n=k)P(Z=n)\\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a^k(1-a)^{n-k}\times\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+k}{k} a^k(1-a)^j\times\frac{\lambda^{j+k}}{(j+k)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\ &= \frac{(a\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[(1-a)\lambda]^j}{j!} = \frac{(a\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-a\lambda}\end{aligned}$$

Donc $N$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda a$ et $E(N)=V(N)=\lambda a$.

c) La formule de Taylor avec reste intégral est :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Pour la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ sur l'intervalle $[0,1]$, cela donne :

$$\mathrm{e}^{\lambda}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\lambda^{n+1}\mathrm{e}^{\lambda t}\,dt$$

En divisant par $\mathrm{e}^{\lambda}$ et en faisant le changement de variable $u=(1-t)\lambda$ on obtient :

$$1=P(Z\leqslant n)+\int_0^{\lambda}\frac{u^n}{n!}\mathrm{e}^{-u}\,du,\text{ soit } P(Z\geqslant n+1)=F_n(\lambda)$$

Comme ceci est vrai pour n'importe quelle loi de Poisson, on a : $P(N\geqslant n+1)=F_n(\lambda a)$.

2. D'après leur définition les $T_n$ sont à valeurs dans $[0,1]\cup\{2\}$ et on a :

$\rightarrow$ si $a\in\,]0,1]$, $(T_n\leqslant a)=(N<n)=(N\geqslant n+1)$.

$\rightarrow$ si $1<a<2$, $(T_n\leqslant a)=(T_n\leqslant 1)$

Donc :

$$P(T_n\leqslant x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ F_n(\lambda x) & \text{si } x\in\,]0,1]\\ F_n(\lambda) & \text{si } x\in\,]1,2[\\ 1 & \text{si } x\geqslant 2\end{cases}$$

La variable $T_n$ n'est pas à densité car sa fonction de répartition est discontinue en 2 (puisque $F_n(\lambda)\neq 1$) ; elle n'est pas discrète car sa fonction de répartition n'est pas en escalier.

3. On a : $F_n(\lambda)=P(Z\geqslant n+1)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty}P(T_n\leqslant x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<2\\ 1 & \text{si } x\geqslant 2\end{cases}$$

*i.e.* $(T_n)_n$ converge en loi vers la variable constante égale à 2.

**Exercice 3.03.**

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, où $\Omega$ est un ensemble fini.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur $\Omega$ (qui sont toutes les applications de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$). On rappelle que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Si $A$ est une partie de $\Omega$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction caractéristique de $A$, c'est-à-dire l'application définie par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit $A \subset \Omega$. Calculer l'espérance $E(\mathbf{1}_A)$ de $\mathbf{1}_A$.

2. Montrer que l'application $\varphi : (X, Y) \mapsto E(XY)$ définie sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tout $\omega \in \Omega$, on a : $P(\{\omega\}) > 0$.

**Dans la suite de l'exercice, on supposera que $P$ vérifie cette propriété et $\mathcal{F}$ sera muni de ce produit scalaire.**

3. Soient $X, Y \in \mathcal{F}$ deux variables aléatoires non constantes.

On note $G$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par $X$ et la variable aléatoire constante égale à 1, c'est-à-dire que $G = \text{Vect}(X, \mathbf{1}_\Omega)$.

a) Montrer l'existence et l'unicité de $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Y - a_0X - b_0$ est orthogonal à tout élément de $G$.

b) En déduire l'expression de la projection orthogonale de $Y$ sur $G$.

On la notera $p_G(Y)$.

c) Comparer $E(p_G(Y))$ et $E(Y)$.

d) On suppose que $X = \mathbf{1}_A$, où $A$ est une partie de $\Omega$ non vide et distincte de $\Omega$.

Montrer que pour tout $B \subset \Omega$ :

$$p_G(\mathbf{1}_B) = P_A(B)\times\mathbf{1}_A + P_{\overline{A}}(B)\times\mathbf{1}_{\overline{A}},$$

où $P_V(U)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement $U$, sachant que l'événement $V$ est réalisé.

---

**Solution :**

1. $E(\mathbf{1}_A) = 1.P(A) + 0.P(\overline{A}) = P(A)$.

2. • L'application $\varphi$ est bilinéaire (par linéarité de l'espérance), symétrique (par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, donc dans $\mathcal{F}$),

et positive (car si $X \in \mathcal{F}, \varphi(X, X) = E(X^2) \geqslant 0$).

• $\to$ Si $\varphi$ est un produit scalaire, alors pour tout $\omega \in \Omega$, $X = \mathbf{1}_{\{\omega\}}$ est un élément non nul de $\mathcal{F}$, donc $\varphi(X, X) = E({\mathbf{1}_{\{\omega\}}}^2) = E(\mathbf{1}_{\{\omega\}}) = P(\{\omega\}) > 0$.

$\to$ Réciproquement, soit $X \in \mathcal{F}$ non nulle. Alors il existe $\omega_0 \in \Omega$ tel que $X(\omega_0) \neq 0$ et on a :

$$\varphi(X, X) = E(X^2) \geqslant X^2(\{\omega_0\})P(\{\omega_0\}) > 0$$

donc $\varphi$ est bien un produit scalaire.

3. a) On a :

$$Y - a_0X - b_0 \in G^{\perp} \iff \begin{cases} \varphi(Y - a_0X - b_0, \mathbf{1}_{\Omega}) = 0 \\ \varphi(Y - a_0X - b_0, X) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_0E(X) + b_0 = E(Y) \\ a_0E(X^2) + b_0E(X) = E(XY) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_0 = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{V(X)} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)} \\ b_0 = E(Y) - E(X)\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)} \end{cases}$$

Notons que $V(X) \neq 0$, puisque $X$ n'est pas (quasi)-constante.

b) Comme $p_G(Y)$ est l'unique élément $Z$ de $G$ tel que $Y - Z \in G^{\perp}$, on a :

$$p_G(Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}\, X + E(Y) - E(X)\, \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}$$

c) On a : $E(p_G(Y)) = a_0E(X) + b_0 = E(Y)$ (calcul de $a_0$, ou conséquence de $Y - p_G(Y) \perp \mathbf{1}_{\Omega}$)

d) Comme $A \neq \Omega$ et $A \neq \emptyset$, la variable aléatoire $X = \mathbf{1}_A$ n'est pas constante ; on peut donc utiliser la formule obtenue à la question b) :

• Or

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) &= E(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B) = E(\mathbf{1}_{A\cap B}) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B) \\ &= P(A \cap B) - P(A)P(B).\end{aligned}$$

• $V(\mathbf{1}_A) = P(A)P(\overline{A})$ (car $\mathbf{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$).

Comme

$$\begin{aligned} b_0 &= E(\mathbf{1}_B) - E(\mathbf{1}_A)\frac{\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)}{V(\mathbf{1}_A)} = P(B) - \frac{P(A\cap B) - P(A)P(B)}{P(\overline{A})} \\ &= P_{\overline{A}}(B), \\ a_0 + b_0 &= E(\mathbf{1}_B) + \frac{\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)}{V(\mathbf{1}_A)}(1 - E(\mathbf{1}_A)) \\ &= P(B) + \frac{P(A\cap B) - P(A)P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P_A(B) \end{aligned}$$

on a bien :

$$p_G(\mathbf{1}_B) = a_0\mathbf{1}_A + b_0(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{\overline{A}}) = (a_0 + b_0)\mathbf{1}_A + b_0\mathbf{1}_{\overline{A}} = P_A(B)\mathbf{1}_A + P_{\overline{A}}(B)\mathbf{1}_{\overline{A}}.$$

---

**Exercice 3.04.**

On dit que le réel $m$ est une médiane de la variable aléatoire à densité $X$ si, et seulement si :

$$P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m) = \frac{1}{2}$$

**Partie I**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité $f_X$, à valeurs dans $X(\Omega) = ]a, b[$, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

On note $F_X$ sa fonction de répartition.

1. Montrer que l'équation $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue réelle $x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

2. On suppose que $F_X$ est strictement croissante sur $]a, b[$. Montrer que l'équation $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue réelle $x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Cette valeur s'appelle **la médiane** de $X$ et sera notée $m(X)$.

**Partie II**
Soit $U$ et $V$ deux variables indépendantes suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(]0,1[)$.
1. a) Déterminer $m(U)$ et $E(U)$.
 b) Déterminer $m(U^2)$ et $E(U^2)$.
2. On définit la variable $Z$ par $Z = \dfrac{U}{V}$.
 a) Déterminer la loi de $-V$.
 b) En déduire une densité de $U - V$.
 c) En déduire la médiane de $Z$.

---

**Solution :**

Partie I.
1. La variable aléatoire $X$ est à densité, donc $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$, et $0 < 1/2 < 1$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $F_X(x) = 1/2$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

2. Comme $\lim_{x\to a} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to b} F(x) = 1$, la stricte croissance de $F$ sur $]a, b[$ assure l'unicité de $m$ dans $]a, b[$ (et il ne peut pas y en avoir d'autres en dehors de cet intervalle !).

Partie II.
1. a) Pour $x \in [0,1], F_U(x) = x$, donc $m(U) = \dfrac{1}{2}$. D'autre part, $E(U) = \dfrac{1}{2}$ (c'est du cours)

b) $U^2(\Omega) = [0,1]$ et pour $x \in [0,1]$ ,
$F_{U^2}(x) = P(U^2 \leqslant x) = P(U \leqslant \sqrt{x}) = F_U(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$,
donc $m(U^2) = \dfrac{1}{4}$.
Par la formule de Koenig-Huygens, $E(U^2) = V(U) + E(U)^2 = \dfrac{1}{12} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$.
La médiane n'est donc pas toujours la moyenne !

2. a) D'après le cours, comme $V$ suit une loi uniforme, alors $-V$ suit aussi une loi uniforme. On a donc $-V \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,0])$.

b) Comme $U$ et $V$ sont indépendantes, alors d'après le lemme des coalitions, $U$ et $-V$ le sont.

La fonction $f_U$ étant bornée, on peut prendre pour densité de $U - V$ :
$g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_{-V}(x-t)dt = \int_0^1 f_{-V}(x-t)dt.$
Comme $-V \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,0])$, on a :

$$f_{-V}(x-t) = 1 \iff -1 \leqslant x - t \leqslant 0 \iff t \in \ [x, x+1].$$

On a donc : $g(x) = \displaystyle\int_{\max(0,x)}^{\min(1,x+1)} 1dt = \min(1, x+1) - \max(0,x).$
Ainsi :

$$-1 \leqslant x \leqslant 0 \implies g(x) = \int_0^{x+1} 1dt = x+1,\ 0 < x \leqslant 1 \implies g(x) = \int_x^1 1dt = 1 - x,$$

sinon, $g(x) = 0$.
c) On a : $[Z \leqslant 1] \iff [U \leqslant V] \iff U - V \leqslant 0$.
Ainsi, $P(Z \leqslant 1) = P(U - V \leqslant 0) = \displaystyle\int_{-\infty}^0 g(t)\,dt = \int_{-1}^0 (t+1)\,dt = \big[\frac{t^2}{2} + t\big]_{-1}^0 = \frac{1}{2}$, donc :

$$m(Z) = 1$$

---

**Exercice 3.05.**

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $X_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in \,]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}X_{n+2}$.

On admettra que si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell$, alors la suite de ses moyennes $(\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers $\ell$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de $Y_n$.

2. Soient $i$ et $j$ deux entiers strictement positifs et distincts. Étudier l'indépendance de $Y_i$ et $Y_j$ selon les valeurs de $i$ et de $j$. Calculer la covariance des variables aléatoires $Y_i$ et $Y_j$.

3. Pour tout entier $n$ strictement positif, on pose $Z_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$.
   a) Calculer l'espérance de $Z_n$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $V(Z_n) \leqslant \dfrac{8}{n}$.

4. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires $U$ et $V$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un nombre réel $c$ et un réel strictement positif $\varepsilon$.
   a) Montrer que : $\big[|U - c| \geqslant \varepsilon\big] \subseteq \Big[|U - V| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\Big] \cup \Big[|V - c| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\Big]$.
   b) En déduire que $P(|U - c| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|U - V| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) + P(|V - c| \geqslant \frac{\varepsilon}{2})$.

5. On suppose dans cette question que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $p$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire que l'on déterminera.

---

**Solution :**

1. En utilisant l'indépendance des variables de Bernoulli $X_n$, on trouve :

$$E(Y_n) = E(X_n) + E(X_{n+1})E(X_{n+2}) = p_n + p_{n+1}p_{n+2}$$

De plus, on a :

$$E(Y_n^2) = E(X_n + X_{n+1}X_{n+2} + 2X_nX_{n+1}X_{n+2}) = p_n + p_{n+1}p_{n+2} + 2p_np_{n+1}p_{n+2}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} V(Y_n) = E(Y_n^2) - E(Y_n)^2 &= p_n + p_{n+1}p_{n+2} + 2p_np_{n+1}p_{n+2} - (p_n + p_{n+1}p_{n+2})^2 \\ &= p_n + p_{n+1}p_{n+2} - p_n^2 - p_{n+1}^2p_{n+2}^2 = p_n(1-p_n) + p_{n+1}p_{n+2}(1 - p_{n+1}p_{n+2}). \end{aligned}$$

2. Par symétrie, on peut supposer que $i < j$. On voit (lemme des coalitions) que les variables $Y_i$ et $Y_j$ sont indépendantes dès que $j > i + 2$ et dans ce cas $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$. Elle semblent clairement dépendantes lorsque $j = i + 1$ ou $j = i + 2$ (ce qui sera confirmé par le calcul de la covariance).

Posons $q_k = 1 - p_k$, en utilisant la bilinéarité de la covariance et l'indépendance, il vient :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) &= \text{Cov}(X_{i+1}X_{i+2}, X_{i+1}) + \text{Cov}(X_{i+1}X_{i+2}, X_{i+2}X_{i+3}) \\ &= E(X_{i+1}X_{i+2}) - E(X_{i+1}X_{i+2})E(X_{i+1}) + E(X_{i+1}X_{i+2}X_{i+3}) \\ &\qquad - E(X_{i+1}X_{i+2})E(X_{i+2}X_{i+3}) \\ &= p_{i+1}p_{i+2}q_{i+1} + p_{i+1}p_{i+2}p_{i+3}q_{i+2}2 \end{aligned}$$

De façon analogue, on trouve $\text{Cov}(Y_i, Y_{i+2}) = p_{i+1}p_{i+2}q_{i+2}1$.

3. a) Par linéarité de l'espérance, on obtient : $E(Z_n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k + p_{k+1}p_{k+2})$.

b) Compte tenu des expressions trouvées précédemment, les propriétés de la variance nous donnent pour $n \geqslant 3$ :

$$\begin{aligned} V(Z_n) &= \tfrac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) + 2\sum_{i=1}^{n-2}\text{Cov}(Y_i, Y_{i+2})\right] \\ &\leqslant \frac{2n + 4(n-1) + 2(n-2)}{n^2} \leqslant \frac{8}{n}. \end{aligned}$$

On vérifie que le résultat final reste valide pour les premières valeurs de $n$.

4. a) Si $\omega$ appartient au complémentaire de l'ensemble de droite, l'inégalité triangulaire nous dit que $\omega$ est dans le complémentaire de l'ensemble de gauche.

b) Il suffit d'utiliser la question précédente et le fait que pour deux événements $A$ et $B$ on a toujours $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

5. Comme la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers $p$, on déduit de la propriété admise que $E(Z_n)$ tend vers $p + p^2$, donc que la suite de variables certaines $(E(Z_n))_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine $p + p^2$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev et la question 4. b) permettent d'écrire :

$$P(|Z_n - (p^2+p)|\varepsilon) \leqslant \frac{32}{n\varepsilon^2} + P(|E(Z_n) - p^2 - p| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La suite de variables aléatoires $(Z_n)_n$ converge donc en probabilité vers la variable constante égale $p^2 + p$.

---

**Exercice 3.06.**

Dans cet exercice, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour $\alpha > 0$ donné, on dit qu'une variable aléatoire $X$ est *$\alpha$-sous-gaussienne* si pour tout $t$ réel,

$$E(\mathrm{e}^{tX}) \leqslant \mathrm{e}^{\alpha^2 t^2/2}$$

1. Soit $X$ de loi normale centrée réduite. Montrer que $X$ est 1-sous-gaussienne.

2. Montrer que pour tout $t$ réel $\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$. (on pourra utiliser l'écriture de l'exponentielle sous forme de série).

3. Soit $t$ réel. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$, on a

$$\mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1+x}{2} \times \mathrm{e}^t + \frac{1-x}{2} \times \mathrm{e}^{-t}$$

4. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et $\alpha$-sous-gaussiennes. Soit $\mu_1, \dots, \mu_n$ des réels tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 1$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est $\alpha$-sous gaussienne.

5. Soit $X$ $\alpha$-sous-gaussienne et $\lambda > 0$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\big(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\big)$$

b) En déduire que

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2 \exp\big(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\big)$$

---

**Solution :**

1. Par le théorème de transfert et parce que $u \to \mathrm{e}^{tu - t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $1/u^2$ au voisinage de l'infini :

$$E(\mathrm{e}^{tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{tu - u^2/2} du = \mathrm{e}^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-1/2(t-u)^2}\, du = \mathrm{e}^{t^2/2}$$

$X$ est bien 1-sous gaussienne.

2. On sait que $\mathrm{e}^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!}$. Donc :

$$\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = \mathrm{e}^{t^2/2}$$

3. On remarque que $0 \leqslant \dfrac{1-x}{2}$, que $\dfrac{1+x}{2} \leqslant 1$ et que $\dfrac{1-x}{2} + \dfrac{1+x}{2} = 1$. Il reste à utiliser la convexité de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[-t, t]$.

4. Par le lemme des coalitions et par indépendance, en notant $S_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ :

$$E(\mathrm{e}^{tS_n}) = E(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mu_i X_i}) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{t\mu_i X_i}) \leqslant \prod_{i=1}^{n} e^{(\alpha^2\mu_i^2 t^2)/2} = \mathrm{e}^{(\alpha^2 t^2)/2}$$

5. En utilisant la croissance de la fonction exponentielle, $t > 0$, et l'inégalité de Markov, il vient

$$P(X \geqslant \lambda) = P(\mathrm{e}^{tX} \geqslant \mathrm{e}^{t\lambda}) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{tX})}{\mathrm{e}^{t\lambda}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\alpha^2 t^2/2}}{\mathrm{e}^{t\lambda}} = \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

De la même façon, car $-X$ est $\alpha$-sous gaussienne par la question précédente :

$$P(-X \geqslant \lambda) = P(\mathrm{e}^{-tX} \geqslant \mathrm{e}^{t\lambda}) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{-tX})}{\mathrm{e}^{t\lambda}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\alpha^2 t^2/2}}{\mathrm{e}^{t\lambda}} = \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

Donc

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

ceci pour tout $t > 0$.

En prenant $t = \dfrac{\lambda}{\alpha^2}$, (une étude rapide de la fonction associée montre que c'est la valeur qui minimise l'exposant de l'exponentielle), on obtient le résultat demandé.

---

**Exercice 3.07.**

Dans cet exercice, $X_1, \ldots, X_n$ désignent des variables aléatoires **non nécessairement indépendantes** définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$ l'application définie sur $\Omega$ par, pour tout $\omega \in \Omega$ :

$$M_n(\omega) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i(\omega)$$

1. Montrer que $M_n$ est une variable aléatoire réelle.

2. Montrer que pour tout réel $t$, $P(M_n > t) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X_i > t)$.

3. On suppose dans cette question que les $X_i$ suivent la même loi admettant un moment d'ordre $p + 1$, avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\dfrac{1}{n^{1/p}} \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |X_i|$ converge en probabilité vers 0.

4. On suppose dans cette question que les $X_i$ suivent la même loi normale centrée réduite.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, $P(|X_1| > t) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t}$ .

b) En déduire un majorant de $P(\sup\limits_{1 \leq i \leq n} |X_i| \geqslant t)$, pour $t > 0$.

c) Montrer que pour tout $s > \sqrt{2}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[P(\sup\limits_{1 \leq i \leq n} |X_i| \geqslant s(\ln n)^{1/2})\right] = 0$.

**Solution :**

1. Pour montrer que $M_n$ est une variable aléatoire, il suffit d'écrire que pour tout $t$, $[M_n < t] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i < t]$, intersection d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$ donc élément de ladite tribu.

2. On a

$$\{\omega / M_n(\omega) > t\} = \{\omega / \exists i / X_i(\omega) > t\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega / X_i(\omega) > t\}$$

et

$$P(M_n > t) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} [X_i > t]\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X_i > t)$$

3. Dans ce cas, la majoration précédente devient : $P(M_n > t) \leqslant nP(X > t)$.
On utilise alors l'inégalité de Markov et $|X_i|$ au lieu de $X_i$. On note $Y_n = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |X_i|$ et il vient, pour $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} P(Y_n > n^{1/p}\varepsilon) &\leqslant nP(|X| > n^{1/p}\varepsilon) = nP(|X|^{p+1} > n^{1+1/p}\varepsilon^{p+1}) \\ &\leqslant n\,\frac{E(|X|^{p+1})}{n^{1+1/p}\varepsilon^{p+1}} = \frac{C(\varepsilon, p)}{n^{1/p}} \end{aligned}$$

dernière quantité qui tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

4. a) On utilise une intégration par parties :

$$\begin{aligned} P(|X| \geqslant t) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u} du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big( \Big[ - \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u} \Big]_t^{+\infty} - \int_t^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u^2} du \Big) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t} \end{aligned}$$

b) D'après les questions précédentes, pour $t > 0$

$$P(\sup_{1 \leq i \leq n} |X_i| \geqslant t) \leqslant n\,\frac{e^{-t^2/2}}{t}$$

c) Enfin, pour $s^2 > 2$ :

$$\begin{aligned} P(\sup_{1 \leq i \leq n} |X_i| \geqslant s(\ln n)^{1/2}) &\leqslant nP(|X| < s\sqrt{\ln n}) \\ &\leqslant n\frac{\mathrm{e}^{-s^2 \ln n/2}}{s\sqrt{\ln n}} \leqslant n\frac{\mathrm{e}^{-2\ln n/2}}{s\sqrt{\ln n}} = \frac{1}{s\sqrt{\ln n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

---

**Exercice 3.08.**

Dans cet exercice, $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires positives à densité, indépendantes de même loi. De même $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une autre suite de variables aléatoires positives, à densité, indépendantes de même loi. On suppose que les densités de $X_1$ et $Y_1$ sont continues strictement positives sur $\mathbb{R}$ et que $X_1$ et $Y_1$ admettent une espérance.

Enfin, on suppose que pour tout $n \geqslant 1$, on a $E(\min\limits_{1 \leq i \leq n} X_i) = E(\min\limits_{1 \leq i \leq n} Y_i)$.

1. Soit $Z$ une variable aléatoire positive à densité admettant une espérance.
Montrer que $E(Z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(Z > t)\, dt$.

2. On note $F$ la fonction de répartition de $X_1$ et $G = 1 - F$. Exprimer la fonction de répartition $F_n$ de $\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$, puis $G_n = 1 - F_n$ en fonction de $G$.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} [G(t)]^n dt = \int_0^1 nu^{n-1}G^{-1}(u)\, du$, où $G^{-1}$ désigne la bijection réciproque de $G$ (on effectuera le changement de variable $u = G(t)$).

*On admet le résultat suivant : si $f$ est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et si pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $\displaystyle\int_a^b Q(t)f(t)\, dt = 0$, alors $f$ est la fonction nulle sur $[a, b]$.*

4. Montrer que $X_1$ et $Y_1$ suivent la même loi.

---

**Solution :**

1. Soit $F$ la fonction de répartition de $Z$ et $f$ une densité. Pour tout $A > 0$ :

$$\int_0^A tf(t)\, dt = \big[t(F(t) - 1)\big]_0^A + \int_0^A (1 - F(t))\, dt$$

Or $A(1 - F(A)) = A\displaystyle\int_A^{+\infty} f(u)\, du \leqslant \int_A^{+\infty} uf(u)\, du \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (reste d'une intégrale convergente).

Donc, par passage à la limite : $E(Z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt = \int_0^{+\infty} P(Z > t)dt$.

2. Pour tout $t > 0$ : $\inf\limits_{1\leq i\leq n}(X_i > t) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i > t)]$.

et, par indépendance :

$G_n(t) = P\big(\inf\limits_{1\leq i\leq n} X_i > t\big) = P\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} (X_i > t)\big) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i > t) = [G(t)]^n$.

3. La variable aléatoire $X_1$ étant à densité strictement positive, la fonction $G$ est strictement croissante et de classe $C^1$. Donc $G^{-1}$ existe. En utilisant le changement de variable $u = G(t)$ de classe $C^1$, il vient

$$\int_0^A G(t)^n dt = \int_1^{G(A)} u^n d(G^{-1})$$

Une intégration par parties donne

$$\int_1^{G(A)} u^n d(G^{-1}) = \Big[u^n G^{-1}(u)\Big]_1^{G(A)} - \int_1^{G(A)} nu^{n-1}G^{-1}(u)du$$

On a $G^{-1}(1) = 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} G(A) = 0$. Ainsi si $Z = \inf\limits_{1\leqslant i\leq n} X_i$, $E(Z)$ existe et comme

$$AG(A)^n = AP(Z > t) = A\int_A^{+\infty} f_Z(t)dt \leqslant \int_A^{+\infty} tf_Z(t)dt \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a finalement

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} G(t)^n dt = \int_0^1 nu^{n-1}G^{-1}(u)du$$

4. Si $F_1$ et $F_2$ représentent les fonctions de répartition de $X_1$ et $Y_1$, la question précédente donne : pour tout $n \geqslant 1$

$$\int_0^1 u^{n-1}F_1^{-1}(t)dt = \int_0^1 u^{n-1}F_2^{-1}(t)dt$$

Par linéarité de l'intégration et le théorème admis, $F_1^{-1}(t) = F_2^{-1}(t)$ pour tout $t > 0$ et par bijectivité $F_1(t) = F_2(t)$, pour tout $t > 0$.

Donc $X_1$ et $Y_1$ suivent la même loi.

---

**Exercice 3.09.**

Les variables aléatoires de cet exercice sont, soit à densité définie et continue sur $\mathbb{R}$, soit discrètes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Elles sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit qu'une variable aléatoire $X$ est *symétrique* si pour tout $x \in X(\Omega)$, on a : $P(X \leqslant x) = P(X \geqslant -x)$.

1. a) Donner un exemple de variable aléatoire symétrique.

b) Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in\, ]0, 1[$. Déterminer la loi de $Y = 2X - 1$. Pour quelles valeurs de $p$, $Y$ est-elle une variable aléatoire symétrique ?

c) Soit $X$ une variable aléatoire symétrique admettant une espérance $E(X)$. Calculer $E(X)$.

2. a) Dans cette question, $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires symétriques et indépendantes. Montrer que $X + Y$ est une variable aléatoire symétrique. On ne fera la démonstration que dans le cas où $X$ et $Y$ sont à densité et on l'admet dans le cas discret.

b) Montrer que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires symétriques indépendantes, alors leur somme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_i$ est symétrique.

3. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires symétriques et indépendantes de même loi. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} X_j$. Soit $x \geqslant 0$ fixé. On définit une suite d'événements $(\Omega_k)_{k\geq 1}$ par :

$$\Omega_1 = [X_1 > x], \text{ et pour } k \geqslant 2, \Omega_k = \Big[\sup_{1\leq j\leq k-1} S_j \leqslant x\Big] \cap [S_k > x]$$

a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $[S_n - S_k \geqslant 0] \cap \Omega_k \subseteq [S_n > x] \cap \Omega_k$.

b) Montrer que $P([S_n - S_k \geqslant 0] \cap \Omega_k) \geqslant \dfrac{1}{2}P(\Omega_k)$.

4. a) Montrer que $\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k = \big[\sup_{1\le j\le n} S_j > x\big]$.

b) En déduire l'inégalité suivante :

$$P\big(\sup_{1\le j\le n} S_j > x\big) \leqslant 2P(S_n > x)$$

**Solution :**

1. a) Un exemple est $X$ suivant une loi normale centrée ou la variable constante nulle ! !.

b) On a $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(Y = 1) = P(X = 1) = p$ et
$P(Y = -1) = P(X = 0) = 1 - p$.
Cette loi est symétrique si et seulement si $p = 1/2$, puisque $Y$ ne prend que deux valeurs.
c) Si l'espérance existe, par convergence et symétrie : $E(X) = 0$

2. a) Soit $U$ une variable à densité symétrique.
On a pour tout $x$ réel $F(x) = P(U \leqslant x) = P(U \geqslant -x) = 1 - F(-x)$.
Par dérivation, il vient $F'_U(x) = F'_U(-x)$, ce qui montre que l'on peut choisir une densité $f_U$ paire.
Réciproquement si $f_U$ est une fonction paire, le changement de variable $t \to -t$ donne :

$$\int_{-\infty}^{x} f_U(t)dt = \int_{-x}^{+\infty} f_U(t)dt$$

et $U$ est symétrique.
Par indépendance, une densité de $X + Y$ est

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_X(x-t) f_Y(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f_X(-x+t) f_Y(-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f_X(-x-t) f_Y(t)dt \\ &= f_{X+Y}(-x) \end{aligned}$$

Donc $X + Y$ est symétrique.
b) Par récurrence sur $n$ et la question précédente.

3. a) Pour $k = 1$, $[S_n - S_1 \geqslant 0] \cap \Omega_1 = [S_n \geqslant S_1] \cap [X_1 > x] = [S_n > x)] \cap \Omega_1$.
Pour $k \geqslant 2$, $[S_n - S_k \geqslant 0] \cap \Omega_k = [S_n \geqslant S_k] \cap [S_k > x] \cap \Omega_k \subseteq [S_n > x)] \cap \Omega_k$.
b) En utilisant le système complet d'événements $[S_n - S_k \geqslant 0) \cap \Omega_k$ et $[S_n - S_k < 0) \cap \Omega_k$, il vient

$$P(\Omega_k) = P([S_n - S_k \geqslant 0] \cap \Omega_k) + P([S_n - S_k < 0] \cap \Omega_k)$$

puis comme $S_n - S_k = \sum_{k+1}^{n} X_i$ est symétrique.

$$\begin{aligned} P(\Omega_k) &= P([S_n - S_k \geqslant 0] \cap \Omega_k) + P([S_n - S_k > 0] \cap \Omega_k) \\ &\leqslant 2P([S_n - S_k \geqslant 0] \cap \Omega_k) \end{aligned}$$

4. a) Soit $\omega \in \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k$ ; il existe $k$ tel que $\omega \in \Omega_k$, et donc $S_k > x$ ce qui entraîne que $\max\limits_{1\leq j\leq n} S_j > x$.

Réciproquement si $\omega \in \Omega$ vérifie $\max\limits_{1\leq j\leq n} S_j(\omega) > x$, alors il existe $k \in [\![1, n]\!]$, tel que $S_k(\omega) > x$.

On note $k_1, < k_2 < \cdots$ la suite croissante d'indices pour lesquels $S_{k_i}(\omega) > x$, alors pour tout $j < k_1$, on a $S_j(\omega) \leqslant x$ et $S_{k_1}(\omega) > x$ ; donc $\omega \in \Omega_{k_1}$.

Si cette suite commence en $k_1 = 1$, on a $\omega \in \Omega_1$.

b) On remarque que les $(\Omega_k)$ sont deux à deux disjoints.

Ainsi il existe un unique $k$ tel que $(\max\limits_{1\leq j\leq n} S_j > x) = \Omega_k$.

$$\begin{aligned} P\big(\max_{1\leq j\leq n} S_j > x\big) &= P(\Omega_k) \leqslant 2P([S_n - S_k \geqslant 0] \cap \Omega_k) \leqslant 2P([S_n > x] \cap \Omega_k) \\ &\leqslant 2P(S_n > x) \end{aligned}$$

---

**Exercice 3.10.**

**Partie A**

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ de loi uniforme sur $\big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big]$.

1. Déterminer la fonction de répartition de $X$.
2. Prouver que $X$ et $-X$ ont même loi.
3. Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de $X$.
4. Démontrer que pour tout réel $\lambda > 0$, $\mathrm{e}^{\lambda X}$ admet une espérance et calculer sa valeur.

**Partie B**

*Dans la suite de l'exercice, $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes et toutes de même loi que $X$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.*

1. Démontrer que $S_n$ et $S_n^2$ admettent une espérance et calculer $E(S_n)$ et $E(S_n^2)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Prouver que pour tout réel $\lambda > 0$, on a :

$$E\big(\mathrm{e}^{\lambda S_n}\big) = \Big(\frac{f(\frac{\lambda}{2})}{\frac{\lambda}{2}}\Big)^n$$

3. Prouver que pour tout réel $u > 0$ , on a : $\dfrac{f(u)}{u} \leqslant \exp\big(\dfrac{u^2}{6}\big)$ (on pourra commencer par démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(2k+1)!6^k k!$).

4. Démontrer que pour tous réels $t$ et $\lambda > 0$, on a : $P\big(S_n \geqslant t\big) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t + n\frac{\lambda^2}{24}}$ .

5. En déduire que pour tout réel $t > 0$, on a : $P\big(S_n \geqslant t\big) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{6t^2}{n}}$

6. Soit $Z$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, exploiter la question précédente et le théorème limite central pour établir que, pour tout réel $t > 0$ :

$$P(Z \geqslant t) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

---

**Solution :**

**Partie A**.

1. Si $F$ est la fonction de répartition de $X$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1/2 \\ \dfrac{1}{2} + x & \text{si } -1/2 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1/2 \end{cases}.$$

2. Clair !

3. On a $E(X) = 0$ et $\sigma^2(X) = \dfrac{1}{12}$

4. Le théorème du transfert assure que

$$E\big(\mathrm{e}^{\lambda X}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\lambda t} f_X(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}\big(\mathrm{e}^{\lambda/2} - \mathrm{e}^{-\lambda/2}\big).$$

**Partie B**.

1. Immédiatement $E(S_n) = E(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = 0$ par linéarité.

De plus $S_n^2 = \big(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\big)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$. Par indépendance des $(X_i)_{i \geq 1}$ , on a :

$E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) = 0$, d'où :

$$E\big(S_n^2\big) = E\big(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j\big) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{n}{12}$$

2. Comme $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, on a $\mathrm{e}^{\lambda S_n} = \mathrm{e}^{\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda X_i}$. Pour tout entier $n$ non nul, l'indépendance mutuelle des $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ , assure que les variables $(\mathrm{e}^{\lambda X_i})_{1 \leq i \leq n}$ sont elles-mêmes mutuellement indépendantes et donc :

$$\begin{aligned} E(\mathrm{e}^{\lambda S_n}) &= E\big(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda X_i}\big) = \prod_{i=1}^{n} E\big(\mathrm{e}^{\lambda X_i}\big) = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{\lambda}\big(\mathrm{e}^{\lambda/2} - e^{-\lambda/2}\big) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} 2 f(\lambda/2) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \big(\frac{f(\lambda/2)}{\lambda/2}\big) \end{aligned}$$

D'où : $E\big[\mathrm{e}^{\lambda S_n}\big] = \big(\dfrac{f(\lambda/2)}{\lambda/2}\big)^n$.

3. Pour tout réel $u$ :

$$f(u) = \frac{1}{2}\big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i u^i}{i!}\big) = \frac{1}{2}\big(\sum_{k=0}^{\infty} 2 \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

D'où pour tout réel $u > 0$ : $\dfrac{f(u)}{u} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{u^{2k}}{(2k+1)!}$.

D'autre part : $e^{\frac{u^2}{6}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{u^{2k}}{6^k k!}$ .

Pour tout entier $k$, on considère la propriété : $\mathcal{P}(k)$ : $(2k+1)! \geqslant 6^k k!$.

$\to$ la relation $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

$\to$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain rang $k$, on a

$$\begin{aligned}(2(k+1)+1)! &= (2k+3)(2k+2)(2k+1)! = 2(2k+3)(k+1)(2k+1)!\\ &\geqslant 6(k+1)(2k+1)! \geqslant 6(k+1)6^k k!\end{aligned}$$

Donc $(2(k+1)+1)! \geqslant 6^{k+1}(k+1)!$ et $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Ainsi $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout entier $k$, en conséquence , pour tout $k$ : $\dfrac{u^{2k}}{(2k+1)!} \leqslant \dfrac{u^{2k}}{6^k k!}$, ce qui établit que : $\forall\, u > 0$, $\dfrac{f(u)}{u} \leqslant e^{\frac{u^2}{6}}\,(*)$.

4. Pour tous réels $t$ et $\lambda > 0$ : $S_n \geqslant t \iff e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda t}$, d'où $P\big(S_n \geqslant t\big) = P\big(e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda t}\big)$.
Comme $e^{\lambda S_n}$ est positive et admet une espérance, par l'inégalité de Markov , on a :

$$P\big(e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda t}\big) \leqslant \frac{E(e^{\lambda S_n})}{e^{\lambda t}} \text{ puis (1) entraîne } P\big(e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda t}\big) \leqslant \frac{\big(\frac{f(\lambda/2)}{\lambda/2}\big)^n}{e^{\lambda t}}$$

De $(*)$ on déduit : $P\big(S_n \geqslant t\big) \leqslant e^{-\lambda t + n\frac{\lambda^2}{24}}$.

5. Pour $t$ et $n$ fixés, le polynôme $q : \lambda \mapsto -\lambda t + n\dfrac{\lambda^2}{24}$ est minimum pour $\lambda = \dfrac{12t}{n}$ et son minimum est $q(\dfrac{12t}{n}) = -\dfrac{6t^2}{n}$. On déduit pour $\lambda = \frac{12t}{n}$ que $P\big(S_n \geqslant t\big) \leqslant e^{-\frac{6t^2}{n}}$.

6. Pour tout entier $i$, $V(X_i) = \sigma^2 = \dfrac{1}{12}$, le théorème central limite s'applique.
Pour tout $t \geqslant 0$ , $\lim\limits_{n\to\infty} P\big(\dfrac{S_n}{\sqrt{n/12}} \geqslant t\big) = P\big(Z \geqslant t\big)$ , où $Z$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Or $P\big(S_n \geqslant \sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{12}}t\big) \leqslant e^{-\frac{6\left(\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{12}}t\right)^2}{n}}$, d'où $P\big(\dfrac{S_n}{\sqrt{n/12}} \geqslant t\big) \leqslant e^{-\frac{t^2}{2}}$ et il n'y a plus qu'à faire $n \to \infty$.

---

**Exercice 3.11.**

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $\lambda$ et $p$ deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$.
On considère le couple de variables aléatoires $(X, Y)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi définie par :

$$\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2, P(X = n, Y = k) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.

2. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire $X$, puis celle de la variable aléatoire $Y$. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire $Y$, sachant que $(X = n)$ est réalisé.

4. Soit $Z$ la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z$.

5. Les variables aléatoires $Y$ et $Z$ sont-elles indépendantes ?

---

**Solution :**

Remarquons que la loi du couple $(X, Y)$ peut s'écrire :

$$P[\{X = n, Y = k\}] = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}\,\mathbf{1}_{\{0\leq k\leq n\}}$$

1. Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $P[\{X = n, Y = k\}] \geqslant 0$. Il suffit de vérifier que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} P[X = n, Y = k] = 1$.
On écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P[X = n, Y = k] &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}\,\mathbf{1}_{\{0\leq k\leq n\}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,p^k(1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(1+(1-p))^n
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P[X = n, Y = k] = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

2. Par définition, la loi marginale de la variable aléatoire $X$ est donnée par, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$P[X = n] = \sum_{k=0}^{\infty} P[X = n, Y = k] = \sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n p^k(1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Ainsi $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Par définition, la loi marginale de la variable aléatoire $Y$ est donnée par, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
P[Y = k] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[X = n, Y = k] = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$P[Y = k] = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} :$$

$Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda p > 0$.

On a : $P[X = 0] = \mathrm{e}^{-\lambda}$, $P[Y = 0] = \mathrm{e}^{-\lambda p}$, $P[X = 0, Y = 0] = \mathrm{e}^{-\lambda}$, et $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda p} \neq \mathrm{e}^{-\lambda}$.
D'ou on déduit que les variables aléatoires $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

3. La loi conditionnelle de la variable aléatoire $Y$ sachant $\{X = n\}$ est bien définie et est donnée par, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$P_{(X=n)}[Y = k] = \frac{P[X = n, Y = k]}{P[X = n]} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k(1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}\mathbf{1}_{\{0\leq k\leq n\}}\frac{n!}{e^{-\lambda}\lambda^n}$$

$$P_{(X=n)}[Y = k] = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\mathbf{1}_{\{0\leq k\leq n\}}$$

Ainsi, la loi conditionnelle de la variable aléatoire $Y$ sachant $\{X = n\}$, est la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

4. D'après la formule des probabilités totales on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P((X = n + k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+k}p^k(1-p)^n}{k!n!}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

$$P(Z = n) = e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}$$

On voit que la variable aléatoire $Z$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p) > 0$.

5. Nous avons, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ :

$\star$ $P[Y = k]P[Z = n] = e^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda(1-p)}\dfrac{[\lambda(1-p)]^n}{n!} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+n}p^k(1-p)^n}{k!n!}$

$\star$ $P[Y = k, Z = n] = P[Y = k, X - Y = n] = P[X = n + k, Y = k]$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+k}p^k(1-p)^n}{k!n!},$$

On en déduit que les variables aléatoires $Y$ et $Z$ sont indépendantes.

---

**Exercice 3.12.**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ inconnu.

Pour $n2$, on pose $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que pour tout $c > 0$, la variable aléatoire $e^{-cM_n}$ admet une espérance, et la calculer.

2. Pour $n2$, soit $c_n = n\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$. On choisit $T_n$ comme estimateur de $e^{-\theta}$, où $T_n$ est défini par :

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = e^{-c_n M_n}.$$

a) Montrer que $T_n$ est un estimateur sans biais de $e^{-\theta}$.

b) Calculer la variance de $T_n$.

c) Montrer que, pour tout $\theta > 0$, $(T_n)_n$ converge en probabilité vers $e^{-\theta}$.

---

**Solution :**

1. La variable aléatoire $M_n$ étant à valeurs dans $\mathbb{N}$ et la constante $c$ étant positive, on déduit que : $0 \leqslant \mathrm{e}^{-cM_n} \leqslant 1$. Ainsi, la variable aléaotire $\mathrm{e}^{-cM_n}$ est bornée et admet donc une espérance.

$$E[e^{-cM_n}] = E[\mathrm{e}^{-\frac{c}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}] = E[\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{c}{n}X_k}] = \prod_{k=1}^{n} E[\mathrm{e}^{-\frac{c}{n}X_k}] = \Big(E[\mathrm{e}^{-\frac{c}{n}X_1}]\Big)^n$$

D'après le théorème de transfert :

$$E[\mathrm{e}^{-\frac{c}{n}X_1}] = \mathrm{e}^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{c}{n}k}\frac{\theta^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}^{-\frac{c}{n}}\theta)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\theta}\mathrm{e}^{\theta\mathrm{e}^{-\frac{c}{n}}} = \mathrm{e}^{-\theta(1-\mathrm{e}^{-\frac{c}{n}})}.$$

On conclut que : $E[\mathrm{e}^{-cM_n}] = \mathrm{e}^{-n\theta(1-\mathrm{e}^{-\frac{c}{n}})}$.

2. a) D'après la question précédente, nous savons que cette espérance existe et vaut :

$$E[T_n(X_1,\dots,X_n)] = E[\mathrm{e}^{-c_nM_n}] = \mathrm{e}^{-n\theta(1-\mathrm{e}^{-\frac{c_n}{n}})}$$

De plus, $\mathrm{e}^{-\frac{c_n}{n}} = \mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \dfrac{n-1}{n}$. Ainsi, $1-\mathrm{e}^{-\frac{c_n}{n}} = \dfrac{1}{n}$ et on conclut :

$$E[T_n(X_1,\dots,X_n)] = \mathrm{e}^{-n\theta\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{-\theta}.$$

Par définition, cela signifie que $T_n$ est un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\theta}$.

b) D'après la question 1, $T_n$ admet un moment d'ordre 2 et par définition

$$V[T_n(X_1,\cdots,X_n)] = E[\mathrm{e}^{-2c_nM_n}] - E[\mathrm{e}^{-c_nM_n}]^2 = E[\mathrm{e}^{-2c_nM_n}] - \mathrm{e}^{-2\theta},$$

d'après la question 2 a)

D'après la question 1, $E[\mathrm{e}^{-2c_nM_n}] = \mathrm{e}^{-n\theta(1-\mathrm{e}^{-\frac{2c_n}{n}})}$.

De plus, $\mathrm{e}^{-\frac{2c_n}{n}} = (\dfrac{n-1}{n})^2$ et $1-\mathrm{e}^{-\frac{2c_n}{n}} = \dfrac{2n-1}{n^2}$. Ainsi :

$$E[\mathrm{e}^{-2c_nM_n}] = \mathrm{e}^{-\theta\frac{2n-1}{n}} = \mathrm{e}^{-2\theta}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{n}}$$

et on conclut que :

$$V[T_n(X_1,\dots,X_n)] = \mathrm{e}^{-2\theta}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{n}} - \mathrm{e}^{-2\theta} = \mathrm{e}^{-2\theta}(\mathrm{e}^{\frac{\theta}{n}}-1).$$

c) D'après la question 1, la variable aléatoire $\mathrm{e}^{-c_nM_n}$ a un moment d'ordre 2, on peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient en utilisant les questions 2 a) et b) :

$$P[|\mathrm{e}^{-c_nM_n} - \mathrm{e}^{-\theta}| > \varepsilon] \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-2\theta}(\mathrm{e}^{\frac{\theta}{n}}-1)}{\varepsilon^2}.$$

Étant donné que $\mathrm{e}^{\frac{\theta}{n}}$ admet 1 comme limite quand $n$ tend vers l'infini. On déduit de la question 2. c que, pour tout $\theta > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_{n\to\infty} P[|T_n(X_1,\dots,X_n) - \mathrm{e}^{-\theta}| > \varepsilon] = 0,$$

ce qui signifie que pour tout $\theta > 0$, $(T_n(X_1,\dots,X_n))_n$ converge en probabilité vers $\mathrm{e}^{-\theta}$.

---

**Exercice 3.13.**

On considère une suite de variables aléatoires $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

On pose $T_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $T_n$ la variable aléatoire définie par :

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

1. Pour tout entier naturel $n$, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $T_n$.

2. Soit $t$ un réel positif ou nul.

a) Pour tout entier naturel $n$ strictement supérieur à $t$, justifier la relation :

$$(T_n < t) \subset (|T_n - n| \geqslant n - t)$$

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} P(T_n < t)$.

c) Montrer que l'événement $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (T_k < t)$ est de probabilité nulle.

3. Soit $t$ un réel positif ou nul. Étant donné un élément $\omega$ de $\Omega$, on note $N(t)(\omega)$ le plus grand élément de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \ / \ T_n(\omega) \leqslant t\}$ (qui contient 0) si cet ensemble est fini, et 0 sinon.

Montrer que l'application $N(t)$ est une variable aléatoire réelle vérifiant :
$P(N(t) = 0) = P(T_1 > t)$.

4. a) Pour tout entier naturel $n$ non nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire $T_n$.

b) Montrer que pour tout réel strictement positif $t$ et pour tout entier naturel $n$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \mathrm{e}^{-t}}{k!} + \mathrm{e}^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} \mathrm{e}^u \, du = 1$$

c) En remarquant que pour tout entier naturel $n$, $P(N(t) \leqslant n) = P(T_{n+1} > t)]$, en déduire l'égalité :

$$P(N(t) \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k e^{-t}}{k!}$$

d) Pour tout réel $t$ positif ou nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

---

**Solution :**

1. La variable aléatoire $T_n$ admet une espérance et une variance comme somme finie de variables aléatoires admettant une espérance et une variance.

$E[T_n] = E[\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_k] = \sum\limits_{k=1}^{n} E[\Delta_k] = nE[\Delta_1] = n, V[T_n] = V[\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_k] = \sum\limits_{k=1}^{n} V[\Delta_k]$

Soit :$E(T_n) = V(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$

car les variables aléatoires $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ sont indépendantes et car $E(\Delta_1) = V[\Delta_1] = 1$.

2. a) $(T_n < t) \subset (|T_n - n| n - t)$ (le deuxième événement est $(T_n t) \cup (T_n 2n - t)$)

b) La variable aléatoire a une variance car somme finie de variables aléatoires ayant une variance. Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall \varepsilon > 0, P[|T_n - E[T_n]| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{V[T_n]}{\varepsilon^2} = \frac{n}{\varepsilon^2}$$

Pour $\varepsilon = n - t > 0$, et en utilisant la question 2 a), on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > t$ :

$$0 \leqslant P[\{T_n < t\}] \leqslant P[\{|T_n - n| \geqslant n - t\}] \leqslant \frac{n}{(n-t)^2}.$$

Comme $\dfrac{n}{(n-t)^2}$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, on en déduit par encadrement que :

$$\lim_{n \to \infty} P[\{T_n < t\}] = 0.$$

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $A_k = \{T_k < t\}$. Alors, étant donné que les variables aléatoires $\Delta_k$ sont positives, la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, ainsi d'après un théorème du cours :

$$P[\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k] = \lim_{n \to \infty} P[A_k] = 0.$$

3. D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} P[\{N(t) = 0\}] &= P[(T_1 > t) \cup \{\bigcap_{k=1}^{\infty} (T_k < t)\}] = P[T_1 > t] + P[\bigcap_{k=1}^{\infty} (T_k < t)] \\ &= P[\{T_1 > t\}], \end{aligned}$$

4. a) La variable aléatoire $T_n$, qui est somme de $n$ variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1, suit une loi gamma de paramètres $n$ et 1.

b) Pour tout réel $t$, $\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{t} = 1$. Le résultat est obtenu en remarquant que l'application exp est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n+1$ en 0.

c) D'après l'énoncé, $P[\{N(t) \leqslant n\}] = P[\{T_{n+1} > t\}]$. D'après la question 4 a), la variable aléatoire $T_{n+1}$ suit une loi gamma de paramètres $n+1$ et 1.

$$P[N(t) \leqslant n] = P[T_{n+1} > t] = 1 - P[T_{n+1} \leqslant t] = 1 - \int_0^t \frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} dx$$

En effectuant le changement de variables $x = t - u$ qui est $C^1$, nous obtenons :

$$P[N(t) \leqslant n] = 1 - \mathrm{e}^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} \mathrm{e}^{u} du = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \mathrm{e}^{-t}}{k!}$$

d) Pour tout réel $t$ strictement positif et pour tout entier naturel $n$, nous avons :

$$P[N(t) = n] = P[N(t) \leqslant n] - P[N(t) \leqslant n - 1] = \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{n!}$$

Ainsi, on conclut que pour tout réel $t$ strictement positif, la variable aléatoire $N(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre $t$.

Si $t = 0$, alors $P[N(0) = 0] = P[T_1 > 0] = 1$. Ainsi, $N(t)$ est la variable aléatoire constante égale à 0 (qui est aussi, si on ose, une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 0).

**Exercice 3.14.**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace, mutuellement indépendantes de même loi ayant pour densité la fonction :

$$f : t \mapsto \frac{2t}{\theta^2}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(t)$$

où $\theta$ est un paramètre réel strictement positif.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

1. a) Calculer $E(X_1)$ et en déduire que pour tout $n > 0$, la variable aléatoire $T_n = \frac{3}{2}\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais du paramètre $\theta$.

b) Calculer son risque quadratique $r_{T_n}(\theta)$ et étudier la convergence en probabilités de la suite d'estimateurs $(T_n)_{n>0}$.

2. Appliquer le théorème limite central à $(\overline{X_n})$. En déduire un intervalle de confiance au niveau 95% pour $\theta$, basé sur l'estimateur $\overline{X_n}$ . (Si on note $\Phi$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, on donne, pour $t = 1,96$ : $2\Phi(t) - 1 = 0,95$)

3. Soit la variable aléatoire : $M_n = \sup\{X_1, \dots, X_n\}$.

a) Calculer la fonction de répartition $G$ de $M_n$.

b) Soit $\delta \geqslant 0$. Étudier la convergence de la série de terme général $P(|M_n - \theta| > \delta)$.

c) Calculer $E(M_n)$ et étudier les propriétés de la variable aléatoire $M_n' = \frac{2n+1}{2n}M_n$ en tant qu'estimateur du paramètre $\theta$.

---

**Solution :**

1. a) On a $E(X) = \displaystyle\int_0^\theta t\times\frac{2t}{\theta^2}dt = \frac{2}{3}\theta$.

Pour $n > 0, E(T_n) = \frac{3}{2}E(\bar{X}) = \theta$ donc $T_n$ est un estimateur sans biais du paramètre $\theta$.

b) On a $r_{T_n}(\theta) = V(T_n) + (E(T_n) - \theta)^2 = V(T_n) + 0 = V(\frac{3}{2}\bar{X}) = \frac{9}{4}\times\frac{1}{n^2}\times nV(X_1)$ (car les $X_i$ sont indépendants).

Or $V(X_1) = \displaystyle\int_0^\theta t^2\times\frac{2t}{\theta^2}dt - (\frac{2}{3}\theta)^2 = \frac{\theta^2}{18n}$ d'où : $r_{T_n}(\theta) = \frac{\theta^2}{8n}$.

L'inégalité de Bienaymé Tchebychev permet de conclure à la convergence de la suite d'estimateurs $(T_n)_n$

2. On applique le théorème limite central à la suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ : la suite de variables aléatoires réelles : $Z_n = \sqrt{n}\dfrac{\bar{X} - \frac{2}{3}\theta}{\frac{\theta}{\sqrt{18}}} = \dfrac{\sqrt{18n}}{\theta}\bar{X_n} - 2\sqrt{2n}$ converge en loi vers une variable aléatoire $Z$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Ainsi $P(-t \leqslant Z_n \leqslant t) = 2\Phi(t) - 1 \geqslant 0.95 \Longleftrightarrow \Phi(t) \geqslant 0,975 \Longleftrightarrow t \geqslant 1,96$
soit

$$\begin{aligned} -t \leqslant Z_n \leqslant t &\Longleftrightarrow \sqrt{2n} - t \leqslant \frac{\sqrt{18n}}{\theta}\bar{X}_n \leqslant \sqrt{2n} + t \\ &\Longleftrightarrow \frac{3\sqrt{2n}\bar{X}_n}{2\sqrt{2n}+1,96} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\sqrt{2n}\bar{X}_n}{2\sqrt{2n}+1,96}. \end{aligned}$$

D'où l'intervalle de confiance cherché : $\left[\frac{3\sqrt{2n}\bar{X}_n}{2\sqrt{2n}+1,96}, \frac{3\sqrt{2n}\bar{X}_n}{2\sqrt{2n}-1,96}\right]$.

3. a) Soit un réel $x$, on a $P(M_n \leqslant x) = \prod_{i=1}^{n} P(X \leqslant x)$ (intersection d'événements indépendants et de même probabilité) et $P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x^2}{\theta^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 1 & \text{si } x \geqslant \theta \end{cases}$

D'où la fonction de répartition : $G(x) = P(M_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ (\frac{x}{\theta})^{2n} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 1 & \text{si } x \geqslant \theta \end{cases}$.

b) $\star$ Si $0 < \delta \leqslant \theta$. Alors :

$$\begin{aligned} P(|M_n - \theta| > \delta) &= P(M_n < \theta - \delta) + 1 - P_\theta(M_n < \theta + \delta) \\ &= G(\theta - \delta) + 1 - G(\theta + \delta) = (\frac{\theta - \delta}{\theta})^{2n} + 1 - 1 \\ &= (\frac{\theta - \delta}{\theta})^{2n} \end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique de raison $< 1$ donc convergente.
$\star$ Si $\theta < \delta$, tous les termes de la série sont nuls.
c) Une densité de $M_n$ est $g(x) = \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1} \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$.

On a : $E(M_n) = \int_0^\theta \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n} dx = \frac{2n}{2n+1}\theta$,

$M_n$ est un estimateur biaisé de $\theta$ ce défaut est corrigé avec $M_n^{'} = \frac{2n+1}{2n} M_n$,

On a : $r_{M_n'}(\theta) = V_\theta(M_n') + (E_\theta(M_n') - \theta)^2 = V_\theta(M_n') = (\frac{2n+1}{2n})^2 V_\theta(M_n)$

$$\begin{aligned} \text{Or } V(M_n) = E_\theta(M_n^2) - (\frac{2n}{2n+1})^2\theta^2 &= \int_0^\theta \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n+1} dx - (\frac{2n}{2n+1})^2\theta^2 \\ &= (\frac{n}{n+1})\theta^2 - (\frac{2n}{2n+1})^2\theta^2 = \frac{\theta^2}{(n+1)(2n+1)^2} \end{aligned}$$

d'où $r_{M_n'}(\theta) = \frac{\theta^2}{4n^2(n+1)} < r_{T_n}(\theta)$.
Cet estimateur de $\theta$ est donc de meilleure qualité que $T_n$.

**Exercice 3.15.**

On considère un jeu de roulette avec $n$ issues possibles (les numéros allant de 1 à $n$). Une partie est constituée d'exactement $n$ lancers successifs de la boule. Pour une partie donnée, on note :

- $A_n$ l'événement : chaque numéro sort exactement une fois,
- $X_i$ la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions du numéro $i$,
- $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(X_i=0)}$

1. Calculer la probabilité de l'événement $A_n$.

2. Donner un équivalent de $P(A_n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini. (On pourra utiliser la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\big(\frac{n}{\mathrm{e}}\big)^n$ ).

*Dans toutes les questions suivantes, le nombre $n$ est fixé.*

3. a) Quelle est la loi de $X_i$ ?

b) Pour $j, k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{(X_1+\cdots+X_{n-1}=j)}(X_n = k)$. Les variables aléatoires $X_i$ , $1 \leqslant i \leqslant n$ sont-elles indépendantes ?

4. Que représente $\dfrac{S_n}{n}$ ? Calculer $E(\dfrac{S_n}{n})$ puis en donner un équivalent pour $n \to +\infty$.

5. On note $S'_n$ le nombre de numéros sortis exactement une fois lors d'une partie et $S''_n$ le nombre de numéros sortis au moins deux fois lors d'une partie. Calculer $E(\dfrac{S'_n}{n})$ et $E(\dfrac{S''_n}{n})$.

6. a) On effectue une suite de parties toutes de même nombre de lancers $n$ fixé. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note $T_j, T'_j, T''_j$ respectivement les proportions de numéros sortis 0, 1 ou au moins 2 fois au cours des $n$ lancers de la $j$ ième partie. Montrer que les trois variables aléatoires $\dfrac{1}{N}(T_1 + \cdots + T_N)$, $\dfrac{1}{N}(T'_1 + \cdots + T'_N)$ et $\dfrac{1}{N}(T''_1 + \cdots + T''_N)$ convergent en probabilité.

b) Pour une roulette standard : $n = 37$ numéros, on donne $(\frac{36}{37})^{37} = 0.362$ et $(\frac{36}{37})^{36} = 0.372$. Conclure.

---

**Solution :**

1. Les résultats des lancers sont indépendants ; chaque nouveau lancer doit faire apparaître un numéro différent : $P(A_n) = \dfrac{n}{n} \times \dfrac{n-1}{n} \times \cdots \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{n!}{n^n}$.

2. On a $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$ donc $P(A_n) \sim \sqrt{2\pi n}\mathrm{e}^{-n}$.

3. a) On a $X_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j}$ où $b_{i,j}, 1 \le j \le n$ est une variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si le numéro $i$ sort lors du $j$ème lancer, son paramètre est $\dfrac{1}{n}$ Il y a répétition de $n$ épreuves indépendantes donc $X_i$ suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n, 1/n)$.

b) On remarque : $X_1 + \cdots + X_n = n$, d'où pour $j, k \geqslant 0$,

$$P_{(X_1+\cdots+X_{n-1}=j)}(X_n = k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ k = n-j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si les $X_i$ étaient indépendantes alors les variables $X_1 + \cdots + X_{n-1}$ et $X_n$ devraient aussi être indépendantes (lemme des coalitions) ce qui contredit la calcul de la probabilité conditionnelle ci-dessus.

Donc les variables aléatoires $X_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ ne sont pas indépendantes.

4. La fraction $\frac{S_n}{n}$ est la proportion de numéros jamais sortis au cours des $n$ tirages. Par linéarité de l'espérance, et le fait que tous les $X_i$ ont même loi, il vient :

$$E(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(X_i = 0) = P(X_1 = 0) = \binom{n}{0}(\frac{1}{n})^0(1-\frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n})^n \sim \mathrm{e}^{-1}$$

5. On a

$$E(\frac{S'_n}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(X_i = 1) = P(X_1 = 1) = \binom{n}{1}(\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})^{n-1} = n\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1}$$
$$= (1-\frac{1}{n})^{n-1}$$

et

$$S_n + S'_n + S''_n = n \implies E(\frac{S''_n}{n}) = 1 - E(\frac{S_n}{n}) - E(\frac{S'_n}{n}) = 1 - (2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})^{n-1}$$

6. a) Pour $n$ fixé, les variables $T_j, 1 \leq j \leq N$ sont indépendantes de même loi et admettent une espérance $E(T_j) = (1-\frac{1}{n})^n$ et une variance ; la loi faible des grands nombres s'applique :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim_{N\to\infty} P\Big[|\frac{1}{N}(T_1 + \cdots T_N) - (1-\frac{1}{n})^n| > \varepsilon\Big] = 0$$

Il en est de même pour $T'_j$ et $T''_j$, d'où les convergences en probabilité :

$$\frac{1}{N}(T_1 + \cdots T_N) \to (1-\frac{1}{n})^n = (\frac{n-1}{n})^n$$
$$\frac{1}{N}(T'_1 + \cdots T'_N) \to (1-\frac{1}{n})^{n-1} = (\frac{n-1}{n})^{n-1}$$
$$\frac{1}{N}(T''_1 + \cdots T''_N) \to 1 - (2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})^{n-1}$$

b) Pour une roulette standard : $n = 37$ numéros, $(\frac{36}{37})^{37} = 36,2\%$ des numéros ne sortent pas, $(\frac{36}{37})^{36} = 37,2\%$ des numéros sortent 1 seule fois et les autres $26,4\%$ sortent au moins 2 fois.

---

**Exercice 3.16.**

1. Soit $(a_n)$ une suite réelle croissante qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant \ell$.

2. On pose pour tout entier $n > 0$ : $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

a) Montrer grâce à la formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}$ que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel à déterminer.

b) Montrer que pour tout entier $n > 0$ :

$$0 \leqslant a_{n+1} - a_n = a_n \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{8n(n+1)} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)$$

c) Montrer que pour tous les entiers $k$, tels que $1 \leqslant k < p$ :

$$0 \leqslant a_p - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$$

et en déduire, pour tout entier $k > 0$ :

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}, \text{ puis } \frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4\pi k^2} \leqslant \frac{a_k^2}{k} \leqslant \frac{1}{\pi k}$$

3. Dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une puce située à un instant $t$ au point de coordonnées $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ se déplace aléatoirement pour aller en l'un des 4 points $(i+1, j-1)$, $(i+1, j+1)$, $(i-1, j-1)$, $(i-1, j+1)$ avec la même probabilité à l'instant $t+1$. La puce est à l'origine $O$ à l'instant $t = 0$ et chaque saut est indépendant du précédent. On note $X_k$ et $Y_k$ les coordonnées de la puce à l'instant $k$.

a) Calculer la probabilité des événements $(X_k = 0)$ et $(Y_k = 0)$.

b) Pour $n \geqslant 1$, on note $U_n$ le nombre de passages à l'origine $O$ entre les instants 1 et $2n$. Montrer que : $E(U_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k^2}{k}$.

c) En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. (On pourra utiliser : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ lorsque $n \to +\infty$.)

---

**Solution :**

1. Par l'absurde : s'il existe $n_0$ tel que : $a_{n_o} > \ell$ alors $\forall n \geqslant n_0, a_n \geqslant \ell + \epsilon$ (en posant $\epsilon = \dfrac{a_{n_0} - \ell}{2}$ )
d'où en passant à la limite : $\ell \geqslant \ell + \epsilon \implies \epsilon \leqslant 0$. Ce qui est absurde.

2. a) Soit $n > 0$. On a $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\dfrac{(\frac{2n}{\mathrm{e}})^{2n}\sqrt{4\pi n}}{(\frac{n}{\mathrm{e}})^{2n} 2\pi n} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

b) Pour tout entier $n > 0$ :

- $a_{n+1} - a_n = a_n\Big(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1\Big) = a_n \dfrac{2n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = a_n \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$, donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$
- $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = \dfrac{(n+1)-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} \leqslant \dfrac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}$,

car $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 - 4\sqrt{n(n+1)} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 \geqslant 0$

- d'où : $0 \leqslant a_{n+1} - a_n = a_n \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \leqslant a_n \dfrac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}\dfrac{1}{2\sqrt{n(n+1)}}$

$$\leqslant \frac{a_n}{8n(n+1)}$$

- enfin, $a_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ entraînent : $a_{n+1} - a_n \leqslant \dfrac{1}{8\sqrt{\pi}}\left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right]$.

c) Soit $1 \leqslant k < p$ :

- $a_p - a_k \geqslant 0$ car la suite $(a_n)$ est croissante.
- et par télescopage : $0 \leqslant a_p - a_k \leqslant \dfrac{1}{8\sqrt{\pi}}(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{p}) \leqslant \dfrac{1}{8k\sqrt{\pi}}$
- pour tout entier $k > 0$, on fait tendre $p$ vers $+\infty$, on obtient : $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leqslant \dfrac{1}{8k\sqrt{\pi}}$
- puis : $\dfrac{1}{k\pi}(1 - \dfrac{1}{8k})^2 \leqslant \dfrac{a_k^2}{k} \leqslant \dfrac{1}{\pi k}$, ce qui implique que $\dfrac{1}{\pi k} - \dfrac{1}{4\pi k^2} \leqslant \dfrac{a_k^2}{k} \leqslant \dfrac{1}{\pi k}$

3. a) Par symétrie : $P(X_k = 0) = P(Y_k = 0)$.

Pour $k$ impair : il est impossible de revenir en 0 après un nombre impair de déplacements. Pour $k = 2p$ pair : il faut autant de déplacements vers la droite (+1) que de déplacements vers la gauche (-1)

$P(X_{2p} = 0) = \dbinom{2p}{p}\dfrac{1}{2^{2p}} = \dfrac{a_p}{\sqrt{p}}$

b) Si $n \geqslant 1$, $U_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} 1_{X_k=Y_k=0}$. Par indépendance des variables aléatoires $X_k$ et $Y_k$ :

$$\begin{aligned} E(U_n) &= \sum_{k=1}^{2n} P(X_k = 0 \cap Y_k = 0) = \sum_{k=1}^{2n} P(X_k = 0)P(Y_k = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X_{2k} = 0)P(Y_{2k} = 0) = \sum_{k=1}^{n} (P(X_{2k} = 0))^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k} \end{aligned}$$

On utilise la question 2.c : $\dfrac{1}{\pi k} - \dfrac{1}{4\pi k^2} \leqslant \dfrac{a_k^2}{k} \leqslant \dfrac{1}{\pi k}$ , d'où en sommant :

$\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4\pi k^2} \leqslant E(U_n) \leqslant \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$

Or la série harmonique diverge vers $+\infty$ et la série $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4\pi k^2}$ est une série de Riemann convergente d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(U_n)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = \dfrac{1}{\pi}$ et $E(U_n) \sim \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \sim \dfrac{\ln(n)}{\pi}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

---

**Exercice 3.17.**

1. Dans un schéma de Bernoulli de probabilité de succès $p \in ]0,1[$, on définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $X_n$ égale au nombre d'échecs avant le $n^{\text{ème}}$ succès. Déterminer la loi de $X_n$.

*On dit que $X_n$ suit la loi binomiale négative de paramètres $n$ et $p$.*

*Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ ; on note : $\forall\, k \in \mathbb{N}, P(X = k) = p_k$.*

*On dit que $X$ appartient à $\mathcal{E}$, si $X$ vérifie la propriété suivante notée $(\mathcal{P})$ :*

$$\exists\, a \in \left]-\infty, 1\right[, \exists\, b \in \mathbb{R}_+^*, \ \textit{tels que} \ \begin{cases} a = 0 \ \textit{ou}\ b/a \in \mathbb{Z} \\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*\,,\ p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1} \end{cases}$$

*On cherche à déterminer les lois des variables aléatoires appartenant à $\mathcal{E}$.*

2. a) On suppose $a = 0$.
Quelles variables aléatoires vérifiant $(\mathcal{P})$ obtient-on ?

b) Vérifier que toute variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ appartient à $\mathcal{E}$. Que valent alors $a$ et $b$ ?

c) Même question pour une loi binomiale négative.

d) On suppose que $X \in \mathcal{E}$ admet une espérance. Exprimer $E(X)$ en fonction de $a$ et $b$. Vérifier ce résultat pour les variables aléatoires obtenues aux questions a) et b).

3. Dans cette question, on suppose que $X$ vérifie $(\mathcal{P})$ avec $a \neq 0$.

a) Montrer que : $\exists\, c \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{N}^*, p_k = p_0\, \dfrac{a^k}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (c + i)$.

b) Déterminer la loi de $X$ si $a < 0$.

c) Déterminer la loi de $X$ si $a \in \left]0, 1\right[$.

d) Conclure.

---

**Solution :**

1. C'est une question classique : $X_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X_n = k) = \dbinom{n+k-1}{k} p^n\, (1-p)^k$.

2. a) Si $a = 0$ alors $p_k = \dfrac{b^k}{k!}\, p_0$ (par récurrence), et $p_0 = e^{-b}$ par poids total de 1, donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$. On vérifie la réciproque.

b) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors, pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$p_k = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} \Rightarrow \frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}\, \frac{p}{q} = \left(-1 + \frac{n+1}{k}\right) \frac{p}{q}$$

d'où $a = -p/q$ et $b = -(n+1)\, a$, avec $b/a \in \mathbb{Z}$, qui conviennent ; on a bien $p_k = 0$ pour $k > n$.

c) Si $X \hookrightarrow \mathcal{BN}(n, p)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{n+k-1}{k}\, q = \left(1 + \frac{n-1}{k}\right) q$$

donc $a = q$ et $b = (n-1)\, a$ conviennent, avec $b/a \in \mathbb{Z}$.

d) En sommant pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k\, p_k = a\,(k-1)\, p_{k-1} + a\, p_{k-1} + b\, p_{k-1} \Rightarrow E(X) = a\, E(X) + a + b \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{1-a}$$

Puis :

- $X \hookrightarrow \mathcal{P}(b) \Rightarrow E(X) = b$ ;
- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \Rightarrow E(X) = n\,p$.

3. a) $k = 1$ donne nécessairement $c = 1 + b/a$ ; puis vérification par récurrence.

b) Si $a < 0$ et $b/a \in \mathbb{Z}$, on pose $n = -\dfrac{b}{a} - 1 \in \mathbb{N}$, d'où

$$p_k = p_0\,\frac{a^k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(-n+i) \Rightarrow p_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ p_0\dbinom{n}{k}(-a)^k & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \end{cases}$$

Puis $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^n}$ par poids total 1, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}\Big(n, \dfrac{-a}{1-a}\Big)$.

c) De même, si $a \in \,]0,1[$, on pose $n = 1 + \dfrac{b}{a} \in \mathbb{N}$, puis

$$\forall k\,,\ p_k = p_0\binom{n+k-1}{k}a^k$$

avec $p_0 = (1-a)^n$, donc $X \hookrightarrow \mathcal{BN}\big(n, 1-a\big)$.

d) Les lois des $X \in \mathcal{E}$ sont les lois binomiales, binomiales négatives ou de Poisson.

---

**Exercice 3.18.**

Soit $h$ la fonction définie sur $[0,1]$ par : $h(x) = \begin{cases} -x\dfrac{\ln x}{\ln 2} & \text{si } x \in \,]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Soit $n$ un entier naturel tel que $n2$.

a) Soit $\mathcal{O} = \{(p_1,\ldots,p_{n-1}) \in \ (\mathbb{R}_+^*)^{n-1}\ /\ 1 - p_1 - \cdots - p_{n-1} > 0\}$.

Pour $(p_1,\ldots,p_{n-1}) \in \mathcal{O}$, on pose

$$h_n((p_1,\ldots,p_{n-1})) = h(1 - p_1 - \cdots - p_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} h(p_k).$$

Montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$. Montrer que $h_n$ admet au plus un extremum sur $\mathcal{O}$.

b) Soit $(p_1,\ldots,p_{n-1},p_n) \in \,]0,1]^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} h(p_k) \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2}$.

c) Soit $X$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1,\ldots,x_n\}$.

On pose $H(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$.

Montrer que $H(X) \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2}$. Quand a-t-on égalité ?

2. Soit $Y$ une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1]$. On note $p_k = P(Y = k)$ et $m = E(Y)$.

a) Montrer que $H(Y)$ existe et déterminer sa valeur.

b) Soit $X$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*, E(X) = m$ et $H(X)$ existe.

On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $q_k = P(X = k) > 0$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \ln(p_k) - \ln(q_k) \leqslant \dfrac{p_k}{q_k} - 1$. En déduire que $H(X) \leqslant H(Y)$.

---

**Solution :**

1. a) L'ensemble $\mathcal{O}$ est ouvert car défini à partir d'une inéquation stricte polynomiale. On cherche alors les points critique de $h_n$ sur $\mathcal{O}$. Il vient,

$$h_n(x) = \frac{1}{\ln 2}\big[\big(\sum_{k=1}^{n-1} p_k - 1\big)\ln\big(1-\sum_{k=1}^{n-1} p_k\big) - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\ln(p_k)\big]$$

et pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ $\partial_i h_n = \dfrac{1}{\ln 2}\big[\ln\big(1-\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\big) - \ln(p_i)\big]$

On trouve ainsi un unique point critique qui est $p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} = \frac{1}{n}$

b) On vérifie que la fonction $-h$ est convexe, donc $h$ concave. Comme $p_n = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k$, on a

$$h\big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\big) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(p_k)$$

et comme $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$, il vient $\sum\limits_{k=1}^{n} h(p_k) \leqslant nh(1/n) = \dfrac{\ln n}{\ln 2}$

c) On pose $p_k = P(X = k)$.

- si $p_k > 0$ pour tout $k$, par la question précédente $H(X) \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2}$.

Si $X$ suit la loi uniforme sur $(x_1, \dots, x_n)$, alors $p_k = 1/n$ et on vérifie que $H(X) = \dfrac{\ln n}{\ln 2}$.

Réciproquement si on a égalité $H(X) = \dfrac{\ln n}{\ln 2}$, alors

$$H(X) = h(p_n) + \sum_{k=1}^{n-1} h(p_k) = h(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k) + \sum_{k=1}^{n-1} h(p_k) = h_n(p_1, \dots, p_{n-1})$$

Ainsi $h_n$ atteint son maximum en un point critique et par la question précédente, on a pour tout $k \in [\![1, n-1]\!], p_k = 1/n$ et donc $p_n = 1/n$.

- sinon on peut supposer que $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ et $p_{m+1} = \cdots = p_n = 0$.

On a alors $H(X)\sum\limits_{k=1}^{m} h(p_k) \leqslant \dfrac{\ln m}{\ln 2} \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2}$.

Si $X$ suit la loi uniforme, la démonstration est identique à la précédente et réciproquement, en cas d'égalité $\dfrac{\ln n}{\ln 2} \leq H(X) \leqslant \dfrac{\ln m}{\ln 2} \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2}$. Donc $m = n$.

2. a) On a $m = 1/p, h(p_k) = h(pq^{k-1}) = \dfrac{1}{\ln 2}\big(-\ln(p/q)pq^{k-1} - (\ln q)kpq^{k-1}\big)$ et

$$H(Y) = \frac{\ln(q/p)}{\ln 2} - \frac{1}{p}\frac{\ln q}{\ln 2} = \frac{-q\ln q - p\ln p}{p\ln 2}$$

b) Comme $\ln x \leqslant x - 1$, on a $\ln p_k - \ln q_k \leqslant p_k/q_k - 1$. En s'affranchissant du dénominateur $\ln 2$, il vient

$$\begin{aligned}
H(Y)-H(X) &= \sum_{k=1}^{n} q_k \ln(q_k) - p_k \ln(p_k) = \sum_{k=1}^{n} q_k(\ln(q_k)-\ln(p_k)) + (q_k-p_k)\ln(p_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} q_k(\ln(q_k)-\ln(p_k)) + \sum_{k=1}^{n} (q_k-p_k)\ln(pq^{k-1}) \\
H(Y)-H(X) &= \sum_{k=1}^{n} q_k(\ln(q_k)-\ln(p_k)) + \sum_{k=1}^{n} (q_k-p_k)(\ln p + (k-1)\ln q) \\
&= \sum_{k=1}^{n} q_k(\ln(q_k)-\ln(p_k)) \quad (\text{ même espérance})) \\
&= \sum_{k=1}^{n} q_k(\ln(q_k)-\ln(p_k)) - \sum_{k=1}^{n} q_k \left(1-(\frac{p_k}{q_k})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} q_k \left(\ln(q_k)-\ln(p_k)-1+\frac{p_k}{q_k}\right)
\end{aligned}$$

$$H(Y)-H(X) \geqslant 0$$

---

**Exercice 3.19.**

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

1. Soit $T$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ et $m \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\lfloor mT \rfloor + 1$ (où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière).

2. Soit $T$ une variable aléatoire positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \lfloor 2^n T \rfloor + 1$ est une variable aléatoire suivant une loi géométrique. On note $p_n \in \,]0,1[$ son paramètre et l'on pose $q_n = 1 - p_n$.

a) Montrer que, pour tout réel $x$, $\lfloor x \rfloor = 0$ si et seulement si $\lfloor 2x \rfloor = 0$ ou $\lfloor 2x \rfloor = 1$.

b) En considérant $P(X_n = 1)$, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} = \sqrt{q_n}$.

c) Montrer que, pour tout $(x,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$, on a :

$$(X_n \geqslant \lfloor 2^n x \rfloor + 2) \subset (T \geqslant x) \subset (X_n \geqslant \lfloor 2^n x \rfloor)$$

d) En déduire que $T$ suit une loi exponentielle et déterminer son paramètre en fonction de $q_0$.

---

**Solution :**

1. On note $Y = \lfloor mT \rfloor + 1$. On remarque que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
P(Y=n) = P(n-1 \leqslant mT < n) &= \int_{\frac{(n-1)}{m}}^{\frac{n}{m}} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = -e^{\lambda n/m} + e^{-\lambda(n-1)/m} \\
&= (1-p)^{n-1} p.
\end{aligned}$$

où $p = 1 - e^{-\lambda/m}$. On en déduit que $T$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda/m}$.

2. a) Il suffit de revenir à la défintion de la partie entière. En effet,

$\triangleright$ si $\lfloor x \rfloor = 0$, alors $0 \leqslant 2x < 2$, et donc $\lfloor 2x \rfloor = 0$ ou $\lfloor 2x \rfloor = 1$.

$\triangleright$ si $\lfloor 2x \rfloor = 0$, alors $0 \leqslant 2x < 1$, donc $\lfloor x \rfloor = 0$ et si $\lfloor 2x \rfloor = 1$, alors $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$, donc là encore $\lfloor x \rfloor = 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $(X_n = 1) = (\lfloor 2^n T \rfloor = 0)$. D'après 2.$a$., cet événement est donc la réunion disjointe des événements $(\lfloor 2^{n+1} T \rfloor = 0)$ et $(\lfloor 2^{n+1} T \rfloor = 1)$. Ainsi,

$$P(X_n = 1) = P(X_{n+1} = 1) + P(X_{n+1} = 2).$$

soit $p_n = p_{n+1} + (1 - p_{n+1}) p_{n+1}$, que l'on peut réécrire, sous la forme :

$$1 - q_n = 1 - q_{n+1} + (1 - q_{n+1}) q_{n+1}.$$

Ainsi, $q_{n+1} = \sqrt{q_n}$.

c) Soit $(x, n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$. Si $X_n \geqslant \lfloor 2^n x \rfloor + 2$, alors $\lfloor 2^n T \rfloor \geqslant \lfloor 2^n x \rfloor + 1 \geqslant 2^n x$, et donc $2^n T \geqslant 2^n x$, *i.e.* $T \geqslant x$. De plus, si $T \geqslant x$, alors $2^n T \geqslant 2^n x \geqslant [2^n x]$ et donc $X_n \geqslant \lfloor 2^n x \rfloor$. On en déduit que

$$(X_n \geqslant \lfloor 2^n x \rfloor + 2) \subset (T \geqslant x) \subset (X_n \geqslant \lfloor 2^n x \rfloor).$$

d) Soit $(x, n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$. De l'inclusion de la question précédente, on déduit que

$$P(X_n \geqslant \lfloor 2^n x \rfloor + 2) \leqslant P(T \geqslant x) \leqslant P(X_n \geqslant \lfloor 2^n x \rfloor).$$

Ainsi, puisque $X_n$ suit la loi géométrique de paramètre $p_n = 1 - q_n$,

$$q_n^{\lfloor 2^n x \rfloor + 1} \leqslant P(T \geqslant x) \leqslant q_n^{\lfloor 2^n x \rfloor - 1}.$$

Comme $q_n = q_0^{2^{-n}}$, on obtient

$$q_0^{\lfloor 2^n x \rfloor / 2^n + 1/2^n} \leqslant P(T \geqslant x) \leqslant q_0^{\lfloor 2^n x \rfloor / 2^n - 1/2^n}.$$

Or on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} = x$. On déduit de ce qui précde qu'en faisant tendre $n$ vers $+\infty$, que $P(T \geqslant x) = q_0^x = \mathrm{e}^{-\lambda x}$ où $\lambda = -\ln(q_0)$.

On reconnaît ainsi la fonction de répartition d'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre $-\ln(q_0)$.

---

**Exercice 3.20.**

Soit $p \in \,]0, 1[$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels strictement positifs. On pose

$$f(x) = \begin{cases} p\,\mu\,\mathrm{e}^{\mu x} & \text{si } x < 0 \\ (1-p)\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

*On note $X$ une variable aléatoire de densité $f$.*

2. Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi que $X$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$I_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_n(\omega) > 0 \\ 0 & \text{si } Y_n(\omega) \leqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que $(I_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que l'on précisera.

3. Soit $Z_n = I_n Y_n$.

a) Montrer que $(Z_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. Déterminer la fonction de répartition de $Z_1$.

b) On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$ et $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$. Les deux variables aléatoires $S_n$ et $V_n$ sont-elles indépendantes ? Donner la loi de $S_n$.

4. a) Déterminer la loi suivie par la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes, toutes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ (on pourra commencer par le cas $n = 2$).

b) Déterminer, à l'aide d'une intégrale, pour tout $n \geqslant 1, k \in [\![1, n]\!]$ et $x \geqslant 0$ : $P_{(S_n=k)}(V_n \leqslant x)$.

c) En déduire une expression de la loi de $V_n$.

---

**Solution :**

1. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et positive. De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = p \int_{-\infty}^{0} \mu e^{\mu t} dt + (1-p) \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = p + 1 - p = 1$$

2. Les variables aléatoires $I_n$ sont indépendantes, car $I_n$ ne dépend que de $Y_n$ et les $(Y_n)$ sont indépendantes.

$I_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(Y_n > 0) = P(X > 0) = 1 - p$.

3. a) Les variables aléatoires $Z_n$ sont indépendantes, car $Z_n$ ne dépend que de $I_n$ et $Y_n$. On rappelle que les variables $Y_n$ ne chargent pas les points. La loi de $Z_n$ est ainsi donnée par $P(Z_n < 0) = 0$, $P(Z_n = 0) = P(Y_n \leqslant 0) = p$ et pour $x > 0$

$$P(Z_n \leqslant x) = P([I_n = 1] \cap [0 < Y_n \leqslant x]) = P(0 < Y_n \leqslant x) = (1-p)(1 - e^{-\lambda x})$$

car $I_n = 1$ si et seulement si $Y_n > 0$.

Les $Z_n$ suivent la même loi de fonction de répartition

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } x = 0 \\ (1-p)(1 - e^{-\lambda x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) Les variables aléatoires $S_n$ et $V_n$ ne sont pas indépendantes, car

$$[S_n = n] = \bigcap_{j=1}^{n} (I_j = 1), \quad [V_n = 0] = \bigcap_{j=1}^{n} (I_j = 0) \text{ et } P([S_n = n] \cap [V_n = 0]) = 0$$

La loi suivie par $S_n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-p)$.

4. a) La loi suivie par la somme de $n$ variables indépendantes, toutes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ est la loi Gamma de paramètres $(\alpha, n)$, de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^{-\alpha x} \alpha^n x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) Réaliser l'événement $[S_n = k]$ c'est choisir parmi $I_1, \dots, I_n$ les $k$ variables qui prennent alors la valeur 1, les autres prenant la valeur 0 ; et alors $[V_n \leqslant x] = [V_k \leqslant x]$. On a également la réciproque de manière immédiate. Ainsi

$$P_{(S_n=k)}(V_n \leqslant x) = P(V_k \leqslant x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

c) La famille $([S_n = k])_{0\leq k\leq n}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, pour tout $x$ :

$$P(V_n \leqslant x) = \sum_{k=0}^{n} P_{(S_n=k)}(V_n \leqslant x)P(S_n = k)$$

et

- si $x < 0$, $F_n(x) = 0$
- $F_n(0) = P_{(S_n=0)}(V_n \leqslant 0)P(S_n = 0) = P(X \leqslant 0)^n (p)^n = p^{2n}$
- si $x > 0$, $F_n(x) = p^{2n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k} \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}dt.$

# 5

# QUESTIONS SANS PRÉPARATION

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On définit les deux variables $D_1$ et $D_2$ par :

$$D_1 = \lfloor 10X \rfloor \qquad \text{et} \qquad D_2 = \lfloor 10^2 X - 10 D_1 \rfloor$$

(on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel $x$.)

a) Que représentent les variables $D_1$ et $D_2$ ?

b) Déterminer les lois des variables $D_1$ et $D_2$.

c) $D_1$ et $D_2$ sont-elles indépendantes ?

---

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est strictement croissante.

2. En déduire que si $P$ est un polynôme réel tel que : $P(X^2+1) = [P(X)]^2 + 1$ et $P(0) = 0$, alors $P = X$.

---

Soit $n$ un entier tel que $n \geqslant 1$ et $p$ un nombre réel tel que $p \in \,]0,1[$. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé et telles que $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et $Y$ est à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$.

Que pensez-vous de l'équivalence suivante ?

$$Y \text{ suit la loi } \mathcal{B}(n,p) \text{ si et seulement si } X+Y \text{ suit la loi } \mathcal{B}(2n,p)$$

---

On considère une variable aléatoire $X$ définie sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit $t$ un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $\exp(tX)$ admet une espérance et la calculer.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, prouver que : $P(X \geqslant n) \leqslant \mathrm{e}^{-tn} E(\exp(tX))$.

3. En déduire que : $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^n \big(\dfrac{\lambda}{n}\big)^n$.

---

On utilise une pièce de monnaie qui donne pile avec la probabilité $p \in ]0,1[$.
On commence par lancer la pièce jusqu'à obtenir une première fois Pile et on note $N$ le nombre de lancers nécessaires. Si le premier Pile a été obtenu au $n$-ième lancer, on lance ensuite cette même pièce $n^2$ fois et on note $X$ le nombre de Pile obtenus au cours de ces $n^2$ lancers.

1. Quelle est la loi suivie par $N$ ? Donner l'espérance et la variance de $N$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi conditionnelle de $X$ sachant l'événement $(N = n)$.

3. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance de $X$.

---

On dit qu'une application $f$ de $E$ dans $E$ admet $x$ pour point fixe si $f(x) = x$.

Soit $f$ et $g$ deux applications définies sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, continues et telles que $f \circ g = g \circ f$ et $f \leqslant g$.

1. Montrer que $f$ admet au moins un point fixe $x_0$ et qu'alors $g(x_0)$ est encore point fixe pour $f$.

2. En utilisant une suite définie à partir de $x_0$, montrer que $f$ et $g$ ont un point fixe commun.

---

Soit $N$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ nilpotente, *i.e.* telle qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $N^p = 0$.

1. Montrer que la matrice $A = I - N$ est inversible et determiner son inverse.

2. Montrer que $I - A^{-1}$ est nilpotente.

---

Soit $p \in ]0,1[$. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et de même loi géométrique de paramètre $p$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f : (u,v) \longmapsto (4Xu - 6Yv, 2Xu - 3Yv)$.

Quelle est la probabilité $r$ que $f$ soit un projecteur ?

---

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. On justifiera la réponse soit par une démonstration, soit par un contre-exemple.

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{E}$.

a) Tout sous-espace propre de $f$ est stable par $f$.

b) Tout sous-espace vectoriel distinct de $E$ stable par $f$ est un sous-espace propre de $f$.

c) Toute droite de $E$ stable par $f$ est un sous-espace propre de $f$.

d) Tout sous-espace vectoriel distinct de $E$ stable par $f$ est stable par $f^2$.

e) Tout sous-espace vectoriel distinct de $E$ stable par $f^2$ est stable par $f$.

---

1. Expliciter la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(u) = \displaystyle\int_0^1 \max(x,u)\,dx$.

2. Soit $U$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Comparer :

$$I = \int_0^1 E\big(\max(x,U)\big)\,dx \quad \text{et} \quad J = E\Big(\int_0^1 \max(x,U)\,dx\Big)$$

Soit $f$ une fonction continue de $[1, +\infty[$, à valeurs réelles telle que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ converge.