1

ANALYSE

Exercice 1.01.

Soit (T_p) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}, T_0(x) = 1, T_1(x) = x \\ \forall\, p \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x) - T_p(x) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, T_p est une fonction polynôme de degré p et de coefficient dominant 2^{p-1}.

2. Montrer que pour tout $p \geqslant 0$, pour tout θ réel, $T_p(\cos\theta) = \cos(p\theta)$.

(on rappelle que $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$)

Désormais on suppose $p \geqslant 1$ et on étudie T_p sur l'intervalle $[-1, 1]$.

3. Déterminer $\max\limits_{x\in[-1,1]} |T_p(x)|$ ainsi que les points où ce maximum est atteint.

On les note $a_0, a_1, \ldots, a_p$ avec $a_0 > a_1 > \cdots > a_p$.

4. On note $\mathcal{U}_p$ l'ensemble des fonctions polynômes unitaires de degré p et $T_p^* = \dfrac{1}{2^{p-1}} T_p$.

Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{U}_p$ tel que $\|P\| = \max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| < \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

a) Soit $\Delta = T_p^* - P$. Étudier le signe de $\Delta(a_i)\times\Delta(a_{i+1})$, pour $i \in [\![0, p-1]\!]$. En déduire une contradiction.

b) Déterminer $\min\limits_{P\in\mathcal{U}_p} ||P||$.

5. Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{U}_p$ différent de T_p^* pour lequel $\|P\| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$ et soit $\lambda \in\,]0, 1[$.

a) Montrer que la fonction polynôme $T_p^* - \lambda P$ s'annule en exactement p points distincts du segment $[-1, 1]$.

b) En déduire que $\forall\, x \in [-1, 1]$, $|T_p^*(x) - \lambda P(x)| \leqslant (1-\lambda)2^p$.

c) En déduire que l'hypothèèse faite au début de cette question est absurde et conclure.

Solution :

1. Le résultat demandé est banal pour $p=1$, aisé pour $p=2$, et s'il est vrai jusqu'à un certain rang $p+1$, alors le terme dominant de T_{p+2} provient de $2xT_{p+1}(x)$ et on en déduit la propriété au rang $p+2$. On conclut par le principe de récurrence.

2. De la même façon, par récurrence :

$\rightarrow$ $T_0(\cos\theta)=1=\cos(0\times\theta)$ et $T_1(\cos\theta)=\cos\theta$.

$\rightarrow$ On suppose la propriété acquise jusqu'à un certain rang $p+1$ et au rang suivant :

$$\begin{aligned}T_{p+2}(\cos\theta) &= 2\cos(\theta)\cos((p+1)\theta)-\cos(p\theta)=\cos((p+2)\theta)+\cos(p\theta)-\cos(p\theta)\\ &=\cos((p+2)\theta)\end{aligned}$$

3. L'application $\theta\mapsto\cos(\theta)$ est une bijection continue de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Donc :

$$\max_{x\in[-1,1]}|T_p(x)|=\max_{\theta\in[0,\pi]}|T_p(\cos(\theta))|=\max_{\theta\in[0,\pi]}|\cos(p\theta)|=1$$

De plus : $|\cos(p\theta)|=1$ et $\theta\in[0,\pi]$, si et seulement si $\theta=\dfrac{k\pi}{p}$, avec $k\in[\![0,p]\!]$. Ainsi :

$$a_k=\cos\big(\frac{k\pi}{p}\big),k\in[\![0,p]\!]$$

4. a) On remarque que Δ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(p-1)$ et que $|P(a_i)|<\dfrac{1}{2^{p-1}}$. Ainsi :

$$\Delta(a_i)\Delta(a_{i+1})=\big(\frac{(-1)^i}{2^{p-1}}-P(a_i)\big)\times\big(\frac{(-1)^{i+1}}{2^{p-1}}-P(a_{i+1})\big)<0$$

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à Δ sur chaque intervalle $[a_i,a_{i+1}]$ indique que cette fonction s'annule en au moins p points distincts.
Or Δ est une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à p. Donc $\Delta=0$ et $P=T_p^*$ en contradiction avec $||P||<\dfrac{1}{2^{p-1}}$.

b) Ainsi pour tout $P\in\mathcal{U}_p$, on a $||P||\geqslant\dfrac{1}{2^{p-1}}$. Comme $||T_p^*||=\dfrac{1}{2^{p-1}}$, on obtient

$$\inf_{P\in\mathcal{U}_p}||P||=\min_{P\in\mathcal{U}_p}||P||=\frac{1}{2^{p-1}}$$

5. a) Comme $\lambda\in\,]0,1[$, on a $\|\lambda P\|<\dfrac{1}{2^{p-1}}$ et le même raisonnement que celui fait pour la question 4. a) montre que $T_p^*-\lambda P$ s'annule en p points de $[-1,1]$.

b) Si on les note $c_0,\dots,c_{p-1}$ la factorisation de $T_p^*-\lambda P$ est donc :

$$T_p^*-\lambda P=(1-\lambda)\prod_{k=0}^{p-1}(X-c_k)$$

Comme pour $x\in[-1,1]$, on a $|x-c_k|\leqslant 2$, la conclusion en résulte.

c) On fait alors tendre λ vers 1 et $\forall x \in [-1,1], |T_p^*(x) - P(x)| = 0$, ce qui montre que $T_p^* - P$ est le polynôme nul et contredit le fait que P a été supposé différent de T_p^*.

On conclut ainsi à l'unicité souhaitée.

Exercice 1.02.

Soit f la fonction de deux variables réelles définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x\,y - 1$$

1. a) Étudier les extremums locaux de f.

b) La fonction f admet-elle des extremums globaux sur $\mathbb{R}^2$?

c) La restriction de f à une droite passant par l'origine O a-t-elle un extremum en O ?

2. Montrer que, pour tout $x < 1/2$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x,y) = 0$.

On définit ainsi une fonction $\varphi : J =]-\infty, 1/2[\to \mathbb{R}$, qui à $x \in J$ associe l'unique y solution de l'équation $f(x,y) = 0$. On admet que la fonction φ est de classe C^∞ sur J.

3. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de φ.

Solution :

1. a) Déterminons les points critiques de f. On a $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$;

$$\partial_1(f)(x,y) = 3x^2 - 3y \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = 3y^2 - 3x$$

Les points critiques sont donc tels que $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$, ce qui donne $x^4 = x$ et donc $x = 0$ ou $x = 1$.

On achève alors la résolution et les points critiques sont $O = (0,0)$ et $A = (1,1)$.

De même :

$$r = \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 6x\,,\ s = \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = -3\,,\ t = \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 6y,$$

d'où les matrices hessiennes :

• en O, $H_0 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 3 et -3 : on a donc un point col, *i.e.* pas d'extremum ;

• en A, $H_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2 + H_0$, de valeurs propres 9 et 3, donc strictement positives ; on a un minimum local, de valeur $f(1,1) = -2$.

b) On a $f(x,0) = x^3 - 1$ qui tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$; donc il n'y a pas de maximum ni de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

c) • $f(0,y) = y^3 - 1$, qui ne présente pas d'extremum en 0 ;

• $f(x,0) = x^3 - 1$, qui ne présente pas d'extremum en 0 ;

• $f(x,-x) = 3x^2 - 1$, qui présente un minimum global en 0 ;

• pour $\lambda \notin \{-1,0\}$, on a $f(x,\lambda x) = (1+\lambda^3)\,x^3 - 3\lambda x^2 - 1 = h_\lambda(x)$, avec $h'_\lambda(x) = 3(1+\lambda^3)\,x^2 - 6\lambda x$. Cette dérivée s'annule et change de signe en 0, donc on a un extremum (local) en 0.

2. La fonction $g_x : y \mapsto f(x,y)$ vérifie $g'_x(y) = 3\,(y^2 - x)$;

• Si $x \leqslant 0$, on a : $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $g'_x(y) > 0$; on conclut par le théorème des valeurs intermédiaires strict et g_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

• Si $0 < x < 1/2$, On a alors :

y	$-\infty$		$-\sqrt{x}$		$\sqrt{x}$		$+\infty$
$g'_x(y)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g_x	$-\infty$	$\nearrow$	< 0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

En effet $g_x\big(-\sqrt{x}\big) = 2x^{3/2} + x^3 - 1 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{8} - 1 < 0$. Ainsi g_x s'annule encore une fois et une seule (et pour une valeur supérieure à $\sqrt{x}$).

3. On a $f(0,y) = 0 \iff y^3 = 1$ et $\varphi(0) = 1$.

Comme φ est de classe C^∞, la substitution du développement limité de φ en 0, de la forme :

$$\varphi(x) = a + b\,x + \frac{c}{2}\,x^2 + \frac{d}{6}\,x^3 + o(x^3),$$

dans $f\big(x,\varphi(x)\big) = 0$ donne

$$x^3 + \Big[a + b\,x + \frac{c}{2}\,x^2 + \frac{d}{6}\,x^3\Big]^3 - 3x\,\Big[a + b\,x + \frac{c}{2}\,x^2\Big] + o(x^3) - 1 = 0$$

Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} a^3 & = 1 \\ 3a^2\,b - 3a & = 0 \\ 3a\,b^2 - \dfrac{3}{2}a^2\,c - 3b & = 0 \\ 1 + b^3 + \dfrac{1}{2}a^2\,d - \dfrac{3}{2}c & = 0 \end{cases}, \text{ d'où : } \begin{cases} a & = 1 & = \varphi(0) \\ b & = 1 & = \varphi'(0) \\ c & = 0 & = \varphi''(0) \\ d & = -4 & = \varphi^{(3)}(0) \end{cases}$$

Exercice 1.03.

1. Soit $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante convergente et de limite nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^p b_p$.

a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ et que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ |\ell - S_k| \leqslant b_{k+1}$$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p b_p$ est bien défini.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction positive, dérivable, décroissante, convexe et telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose : $a_p = f(p) - f(p+1)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $u_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)$ est bien défini.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p a_p = 2u_n - (-1)^{n+1} f(n+1)$.

c) Montrer que la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Big|\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p a_p\Big| \leqslant f(n+1) - f(n+2)$.

b) En déduire que la série de terme général u_n converge.

Solution :

1. a) La suite (S_{2n}) décroît car $S_{2(n+1)} - S_{2n} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leqslant 0$, car (b_n) est décroissante.
La suite (S_{2n+1}) croît car $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geqslant 0$.

b) On a $S_{2n+1} - S_{2n} = -b_{2n+1} \to 0$, car $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = 0$. D'après la question précédente, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ; donc elles convergent vers la même limite notée ℓ et on a l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n+1} \leqslant \ell \leqslant S_{2n}$$

Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers ℓ, par exhaustion, il en est de même de la suite (S_n).

$\star$ Si k est pair ($k = 2n$) alors : $b_{k+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \leqslant \ell - S_{2n} \leqslant 0$, d'où $|S_k - \ell| \leqslant b_{k+1}$.

$\star$ Si k est impair ($k = 2n+1$) alors : $0 \leqslant \ell - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = b_{k+1}$, d'où $|S_k - \ell| \leqslant b_{k+1}$.

c) La série $\sum(-1)^n b_n$ converge car on vient de montrer que la suite (S_n) de ses sommes partielles converge. *A fortiori* $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p b_p$ est bien défini.

2. a) La suite de terme général $b_n = f(n)$ vérifie les hypothèses de la question 1 car f est décroissante et tend vers 0.

b) Comme $(-1)^p a_p = (-1)^p f(p) + (-1)^{p+1} f(p+1)$, la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente, comme somme de deux séries convergentes (voir question 1), et on a :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p a_p = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^{p+1} f(p+1)$$

$$= \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) + \sum_{p=n+2}^{+\infty} (-1)^p f(p) \text{ (décalage d'indice)}$$
$$= \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) + \Big(\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)\Big) - (-1)^{n+1} f(n+1)$$
$$= 2u_n - (-1)^{n+1} f(n+1)$$

c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, comme f est continue sur $[p, p+1]$ et dérivable sur $]p, p+1[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_p \in]p, p+1[$ tel que :

$$f(p+1) - f(p) = f'(c_p)\big((p+1) - p\big),$$

soit $a_p = -f'(c_p)$.
Comme $p < c_p < p+1 < c_{p+1} < p+2$ et que la fonction $-f'$ est décroissante (car f convexe), on en déduit que :

$$a_p = -f'(c_p) > -f'(c_{p+1}) = a_{p+1}.$$

Donc la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3. a) Comme $a_p = f(p) - f(p+1)$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, on en déduit $\lim(a_p) = 0$.

Par ailleurs, la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, d'après la question 1.c. la somme de la série proposée existe et la question 1.b donne l'inégalité voulue.

b) D'après la question 2.b, on a : $u_n = \dfrac{1}{2} \underbrace{\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p a_p}_{=\beta_n} + \dfrac{1}{2}(-1)^{n+1} f(n+1).$

Or la série $\sum (-1)^{n+1} f(n+1)$ converge (question 1), et, en ce qui concerne la série $\sum \beta_n$, on a : $0 \leqslant |\beta_n| \leqslant f(n+1) - f(n+2)$ (question 3.a), et $\sum (f(n+1) - f(n+2))$ converge (par télescopage)

Ainsi $\sum |\beta_n|$ converge par théorème de comparaison. Donc la série $\sum \beta_n$ converge absolument. Finalement, la série $\sum u_n$ converge, comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.

Exercice 1.04.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $\gamma_n = H_n - \ln n$.

Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est convergente, on note γ sa limite. (On pourra étudier la série de terme général $\gamma_{n+1} - \gamma_n$)

En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

2. a) Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites positives telles que $u_n \sim v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente.

On pose $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$. Montrer que $R_n \underset{(\infty)}{\sim} R'_n$.

b) En déduire que $H_n = \ln n + \gamma - \dfrac{1}{2n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)$.

3. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction « partie entière »

Esquisser la représentation graphique de f et déterminer l'ensemble de ses points de discontinuité.

4. Montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\, dx$ existe et vaut $1-\gamma$.

Solution :

1. On a $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{2(n+1)^2}\right)$.

La série de terme général $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ est convergente et par télescopage la suite (γ_n) est convergente. Ainsi $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

2. a) On revient à la définition d'équivalent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon v_n$$

(car $v_n \geqslant 0$). On a alors, pour $n \geqslant N$:

$$|R_n - R'_n| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k - v_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k = \varepsilon R'_n$$

et on a bien $R_n \sim R'_n$.

b) la comparaison entre la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ montre que $\sum_{n}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$. Ainsi

$$H_n = \ln n + \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. La fonction f est bornée sur $[0,1]$ par 0 et 1. La fonction f possède des points de discontinuité qui sont les réels $\frac{1}{n}$, pour $n \geqslant 2$. La fonction est aussi discontinue en 0, car pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = n - n = 0,\ f\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) = n + \frac{1}{2} - \lfloor n + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{1}{2}$$

et donc f n'a même pas de limite en 0.

Pour représenter f, on représente $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,1]$, on hachure le plan par les verticales d'abscisses $\frac{1}{n}$ et on « translate » verticalement les morceaux de branche d'hyperbole pour les faire « entrer » dans la bande $0 \leqslant y < 1$.

4. Soit N fixé.

$$\int_{1/(N+1)}^{1} f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{N} \int_{1/(n+1)}^{1/n} f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{N} \left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \ln(N+1) - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 - H_{N+1} + \ln(N+1)$$

Cette dernière quantité tend vers $1-\gamma$ lorsque N tend vers $+\infty$.

La fonction f étant positive et bornée sur $[0,1]$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt = 1-\gamma$.

En effet en choisissant n tel que $\dfrac{1}{n+1}\leqslant x<\dfrac{1}{n}$, il vient

$$\Big|\int_x^1 f(t)dt-\int_{1/(n+1)}^1 f(t)dt\Big|\leqslant \int_{1/(n+1)}^{1/n} f(t)dt=\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)-\frac{1}{n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

L'intégrale proposée a donc une limite qui vaut $1-\gamma$.

Exercice 1.05.

On dit qu'une suite d'entiers $(u_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $(\mathcal{C})$ si :

$$u_0>1 \text{ et } \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geqslant u_n^2-u_n+1.$$

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $(\mathcal{C})$.

a) Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante puis qu'elle diverge vers $+\infty$.

b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $(\mathcal{C})$. On suppose ici que $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ appartient à $\mathbb{Q}$ et on considère $(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que $S=\dfrac{x}{y}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $Y_n=\displaystyle\prod_{i=0}^n a_i$, $X_n=\displaystyle\sum_{j=0}^n\frac{Y_n}{a_j}$ et $\omega_n=\dfrac{X_{n+1}-X_n}{Y_{n+1}-Y_n}$

a) Montrer que la suite $(\omega_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.

b) Etablir que $\big(\dfrac{X_n}{Y_n}\big)_{n\geq 0}$ converge en croissant vers $\dfrac{x}{y}$.

c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1}=a_{n+1}X_n+Y_n$.

d) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\omega_{n+1}-\omega_n=\dfrac{1}{a_{n+2}-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}(a_{n+1}-1)}$.

e) Montrer que $(\omega_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\dfrac{x}{y}$ en décroissant.

3. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du 2., et que, de plus :

$$\exists\, n_0\in\mathbb{N},\forall\, n\geqslant n_0, a_{n+1}>a_n^2-a_n+1$$

a) Prouver que la suite $(xY_n-yX_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.

b) En déduire une contradiction.

4. Soit $(a_n)_{n\geq 0}\in(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$, tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $a_{n+1}>a_n^2-a_n+1$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{a_n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\notin\mathbb{Q}$.

Solution :

1. a) Par récurrence, on montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n>1$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \geqslant (a_n - 1)^2 > 0$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante, puis étant à valeurs entières elle diverge vers l'infini.

b) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant a_n - 1 + \dfrac{1}{a_n} > a_n - 1$, d'où $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, à partir d'un certain rang $n_1 \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 2$ et $a_n \geqslant 2^{n-n_1} a_{n_1}$. On en déduit que $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{a_n}$ converge.

2. a) On sait donc que (a_n) est strictement croissante et à valeurs dans $]1, +\infty[$. On en déduit que (Y_n) est strictement croissante et (ω_n) est bien définie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\dfrac{X_n}{Y_n} = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{1}{a_j}$. Ainsi, $\dfrac{X_n}{Y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x}{y}$ et $\big(\dfrac{X_n}{Y_n}\big)_{n\geq 0}$ est croissante.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$X_{n+1} = Y_{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{a_j} = a_{n+1} Y_n \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{a_j} \Big) + \frac{a_{n+1} Y_n}{a_{n+1}} = a_{n+1} X_n + Y_n.$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\omega_n = \dfrac{X_{n+1} - X_n}{Y_{n+1} - Y_n} = \dfrac{(a_{n+1} - 1) X_n + Y_n}{(a_{n+1} - 1) Y_n} = \dfrac{X_n}{Y_n} + \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

De plus, on a $\dfrac{X_{n+1}}{Y_{n+1}} - \dfrac{X_n}{Y_n} = \dfrac{X_{n+1} - a_{n+1} X_n}{Y_n a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_{n+1}}$.

Ainsi $\omega_{n+1} - \omega_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} + \dfrac{1}{a_{n+2} - 1} - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{a_{n+2} - 1} - \dfrac{1}{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)}$.

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la propriété $(\mathcal{C})$ et la question 1. a), on a :

$$a_{n+2} - 1 \geqslant a_{n+1}^2 - a_{n+1} = a_{n+1}(a_{n+1} - 1) > 0,$$

et donc $\omega_{n+1} - \omega_n \leqslant 0$ par la question précédente.

De plus, on a $\omega_n = \dfrac{X_n}{Y_n} + \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$. Comme (a_n) diverge vers $+\infty$, on a $\omega_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x}{y}$

3. a) D'après les calculs effectués à la question précédente, la suite (ω_n) décroît strictement à partir du rang n_0 vers $\frac{x}{y}$, *i.e.* $\forall\, n \in \mathbb{N}, x(Y_{n+1} - Y_n) < y(X_{n+1} - X_n)$, d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $xY_{n+1} - yX_{n+1} < xY_n - yX_n$. Ainsi $(xY_n - yX_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.

b) On remarque tout d'abord que $(xY_n - yX_n)_n$ est une suite d'entiers relatifs. De plus, comme $\big(\dfrac{X_n}{Y_n}\big)_n$ est croissante de limite $\dfrac{x}{y}$ (cf. la question 2. b)), on a $\dfrac{X_n}{Y_n} \leqslant \dfrac{x}{y}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* $xY_n - yX_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci est absurde car il n'existe aucune suite d'entiers naturels strictement décroissante.

4. Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe n_0, pour lequel :

$$n \geqslant n_0 \implies a_{n+1} > a_n^2 - a_n + 1$$

Comme $a_{n_0}^2 - a_{n_0} = a_{n_0}(a_{n_0} - 1) \geqslant 0$, on a $a_{n_0+1} > 1$ et la suite $(a_n)_{n \geq n_0+1}$ vérifie la propriété $(\mathcal{C})$. On déduit alors de la question précédente que $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n} \notin \mathbb{Q}$, et comme $\sum\limits_{n=0}^{n_0} \dfrac{1}{a_n} \in \mathbb{Q}$, on en déduit que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1.06.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $\gamma_n = H_n - \ln n$.

Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On note γ sa limite (on pourra étudier la série de terme général $\gamma_{n+1} - \gamma_n$).

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}$.

En déduire que la série $\sum\limits_{k \geq 1} \dfrac{(-1)^k}{k}$ converge et déterminer sa somme.

3. Dans cette question, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 1$ et $a_{3n+3} = -1$.

Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{a_k}{k}$?

Désormais, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{4n+1} = a_{4n+2} = 1$ et $a_{4n+3} = a_{4n+4} = -1$.

4.a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a : $\sum\limits_{n=0}^{N} \big(\dfrac{1}{4n+1} - \dfrac{1}{4n+3}\big) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1 - x^{4N+4}}{1 + x^2} dx$.

b) En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(\dfrac{1}{4n+1} - \dfrac{1}{4n+3}\big) = \dfrac{\pi}{4}$.

c) Calculer de même $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(\dfrac{1}{4n+2} - \dfrac{1}{4n+4}\big)$.

5. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} \ln 2$.

Solution :

1. On a $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\big(1 - \dfrac{1}{n+1}\big) = -\dfrac{1}{2(n+1)^2} + o\Big(\dfrac{1}{2(n+1)^2}\Big)$.

La série de terme général $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ est convergente et par télescopage la suite (γ_n) est convergente. Ainsi : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

2. On calcule $\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k} + H_{2n} = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k} = H_n$.

Alors $\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k} = \ln n - \ln(2n) + o(1) = -\ln 2 + o(1)$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$.

Egalement $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^k}{k} = -\ln 2 - \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n+1} = -\ln 2$.

3. On écrit $\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{1}{3n+3}=\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}+\dfrac{1}{3n+3}-\dfrac{2}{3n+3}$.
et $H_{3n+3}-\frac{2}{3}H_{n+1}=\ln 3+\ln(n+1)+\gamma-\frac{2}{3}\left(\ln(n+1)+\gamma\right)+o(1))$
Cette expression tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. La suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{a_n}{n}$ admet une sous-suite divergente : elle ne peut converger.

4.a) On remarque que $\displaystyle\int_0^1 t^k dt=\frac{1}{k+1}$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\Big)=\sum_{k=0}^{N}\int_0^1(t^{4k}-t^{4k+2})dt=\int_0^1\Big(\sum_{k=0}^{N}t^{4k}-\sum_{k=0}^{N}t^{4k+2}\Big)dt$$
$$=\int_0^1(1-t^2)\sum_{k=0}^{N}t^{4k}\,dt=\int_0^1(1-t^2)\times\frac{1-t^{4N+4}}{1-t^4}dt=\int_0^1\frac{1-t^{4N+4}}{1+t^2}dt$$

Or $\displaystyle\int_0^1\frac{1-t^{4N+4}}{1+t^2}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^1\frac{t^{4N+4}}{1+t^2}dt$, et :
$\displaystyle\Big|\int_0^1\frac{t^{4N+4}}{1+t^2}dt\Big|\leqslant\int_0^1 t^{4N+4}dt=\frac{1}{4N+5}$.
b) Il reste à faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\Big)=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$$

c) De la même façon :

$$\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\Big)=\int_0^1 t(1-t^2)\sum_{k=0}^{N}t^{4k}dt=\int_0^1 t(1-t^2)\times\frac{1-t^{4N+4}}{1-t^4}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2t}{1+t^2}dt-\int_0^1\frac{t^{4N+5}}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln 2-\int_0^1\frac{t^{4N+5}}{1+t^2}dt$$

La dernière intégrale tendant vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

5. Les deux questions précédentes montrent que $\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_{4N}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{4N}\frac{a_n}{n}=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$. Les sommes partielles $S_{4N+1},S_{4N+2},S_{4N+3}$ diffèrent de la somme S_{4N} par 1, ou 2 ou 3 termes tendant vers 0. Ainsi par exhaustion :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\pi+\ln 4}{4}$$

Exercice 1.07.

Si f est une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle, on lui associe la fonction g définie sur l'ouvert $O=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par :

$$g(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

1. On considère la fonction u définie sur O par $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
   a) Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur O.

b) Justifier le fait que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur O.

c) Soit $(x,y)\in O$, déterminer le gradient $\nabla(g)(x,y)$ de la fonction g en fonction de f.

Si h est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'un point (a,b) de $\mathbb{R}^2$, on définit le laplacien $\Delta(h)$ de h au point (a,b) par :

$$\Delta(h)(a,b)=\partial^2_{1,1}(h)(a,b)+\partial^2_{2,2}(h)(a,b)$$

2. On s'intéresse au laplacien de g dans l'ouvert O.

a) Calculer $\Delta(g)$ en fonction de f.

b) Montrer que $\Delta(g)(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in O$ si et seulement si la fonction f vérifie la condition suivante :

$$\forall\, t\in\mathbb{R}_+^*, f''(t)+\frac{f'(t)}{t}=0$$

3. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t)=tf'(t)$.

a) Calculer la dérivée de φ.

b) Déterminer la forme des solutions g définies sur O comme dans le préambule et vérifiant $\Delta(g)(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in O$.

c) Trouver la solution g de l'équation $\Delta(g)=0$ qui s'annule sur le cercle unité C :

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$$

et qui vaut 1 au point $(1,1)$.

Solution :

1.a) La fonction $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est polynomiale, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur O. L'image de O est $\mathbb{R}_+^*$ et sur cet intervalle la fonction $\varphi : t\mapsto\sqrt{t}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ (avec : $\varphi'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ et $\varphi''(t)=-\dfrac{1}{4}t^{-3/2}$). Donc la fonction composée u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur O.

b) Comme u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur O, arrive dans $\mathbb{R}_+^*$ et que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle, la fonction composée g est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur O.

c) En utilisant les règles usuelles de dérivation des fonctions composées, on trouve :

$$\nabla(g)(x,y)=f'(\sqrt{x^2+y^2})\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big).$$

2. a) Il vient

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1}(g)(x,y)&=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}f'(\sqrt{x^2+y^2})+\frac{x^2}{x^2+y^2}f''(\sqrt{x^2+y^2})\\&=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}f'(\sqrt{x^2+y^2})+\frac{x^2}{x^2+y^2}f''(\sqrt{x^2+y^2}).\end{aligned}$$

Comme $g(x,y)=g(y,x)$, on en déduit que $\partial^2_{2,2}(g)(x,y)=\partial^2_{1,1}(g)(y,x)$, et par suite

$$\partial^2_{2,2}(g)(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} f'(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{y^2}{x^2+y^2} f''(\sqrt{x^2+y^2}).$$

En sommant, on obtient :

$$\Delta(g)(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} f'(\sqrt{x^2+y^2}) + f''(\sqrt{x^2+y^2}).$$

b) Comme l'image de O par u est exactement $\mathbb{R}_+^*$, l'assertion « $\Delta(g)(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in O$ » est équivalente au fait que la fonction f vérifie pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f''(t) + \frac{f'(t)}{t} = 0.$$

3. a) Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\varphi'(t) = f'(t) + tf''(t) = t(f''(t) + \dfrac{f'(t)}{t})$.

b) La question précédente nous dit que si g convient, alors il existe une constante réelle A telle que $f'(t) = \dfrac{A}{t}$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est donc une primitive de $t\mapsto \dfrac{A}{t}$ et par suite $f(t) = A\ln(t) + B$ avec $B\in\mathbb{R}$. Il en résulte que g est de la forme $g(x,y) = A\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + B$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ (g est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur O).

c) Avec la question précédente, on voit que si g s'annule sur le cercle unité, on doit avoir $B=0$. La deuxième condition nous donne $1 = A\ln(\sqrt{2})$. Finalement, on trouve :

$$g(x,y) = \frac{2\ln(\sqrt{x^2+y^2})}{\ln 2}$$

Exercice 1.08.

1. Soit $\varepsilon>0$. On considère une fonction convexe f qui est définie sur l'intervalle $I =]-\varepsilon,+\infty[$ et qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

a) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $t\in\,]0,x]$. Montrer que $f(t)\leqslant \big(1-\dfrac{t}{x}\big)f(0) + \dfrac{t}{x}\,f(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$x\Big[\frac{f(0)+f(x)}{2}\Big] \geqslant \int_0^x f(t)dt.$$

2. On considère une fonction convexe h définie sur I et de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle. On suppose que $h(0)=h'(0)=0$.

a) Montrer que h est positive sur I.

b) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $H(x) = 2h'(x)\displaystyle\int_0^x h(t)dt - (h(x))^2$.

Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+$.

c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$\frac{xh'(x)h(x)}{2} - h'(x)\int_0^x h(t)\,dt \leqslant \frac{h(x)}{2}\big(xh'(x)-h(x)\big)$$

d) Montrer que $h'(1) = 0$ implique que h est nulle sur $[0,1]$. En utilisant ce qui précède, établir que :

$$\frac{h(1)}{2} - \int_0^1 h(t)\,dt \leqslant \frac{h'(1)}{8}$$

3. Soit g une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. On pose $h(x) = g(x) - g(0) - xg'(0)$.
En utilisant la question 2., montrer que :

$$\frac{g(1)+g(0)}{2} - \int_0^1 g(t)\,dt \leqslant \frac{g'(1)-g'(0)}{8}$$

4. Soit f une fonction convexe et de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. En considérant les fonctions g_k $(k \geqslant 1)$ définies par $g_k(x) = f(x+k)$, prouver que :

$$0 \leqslant \frac{f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f(t)\,dt \leqslant \frac{f'(n)-f'(0)}{8}.$$

5. Déduire de ce qui précède un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^{n}(1+3k)^{\frac{3}{2}}$, lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. a) Cette inégalité fait penser à la définition de la convexité, c'est bien le cas puisqu(il suffit d'écrire : $t = (1-\frac{t}{x})\times 0 + \frac{t}{x}\times x$.

b) C'est évident pour $x = 0$, et pour $x > 0$, il suffit d'intégrer l'inégalité donnée dans la question 1. a).

2. a) Comme $h(0) = h'(0) = 0$, la tangente en 0 est l'axe des abscisses. La fonction h étant convexe, son graphe se situe au-dessus de ses tangentes et elle est donc positive sur I.

b) Les primitives de h étant de classe $\mathcal{C}^3$, une application directe du cours nous dit que H est de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, les règles de dérivation nous conduisent à :

$$H'(x) = 2h''(x)\int_0^x h(t)dt.$$

La fonction h étant convexe, sa dérivée seconde est positive.
Avec le résultat a), on voit que $\displaystyle\int_0^x h(t)\,dt \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$. La dérivée de H est donc positive et H est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) Comme H est croissante et que $H(0) = 0$, avec des simplification évidentes on voit que l'inégalité souhaitée provient de la positivité de H sur $\mathbb{R}_+$.

d) La fonction h' est croissante et $h'(0) = 0$, on voit donc que si $h'(1) = 0$, on a nécessairement $h' = 0$ sur $[0,1]$. Par suite, la fonction h est constante sur $[0,1]$ et donc nulle puisque $h(0) = 0$.

L'inégalité est triviale si $h'(1) = 0$ d'après ce qui précède. On peut donc supposer que $h'(1) > 0$. En utilisant c) et en divisant par $h'(1)$, on remarque qu'il suffit alors de montrer que l'on a $\dfrac{h(1)}{2h'(1)}[h'(1) - h(1)] \leqslant \dfrac{h'(1)}{8}$.

Or cette dernière inégalité est équivalente à $\big(h'(1) - 2h(1)\big)^2 \geqslant 0$, elle est donc vraie.

3. Il est clair que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. De plus, $h''(x) = g''(x) \geqslant 0$, la fonction h est donc convexe. Avec a) on voit que h vérifie l'inégalité établie en 2. d) et des calculs simples nous ramènent à l'inégalité souhaitée.

4. Comme le suggère l'énoncé, on considère les fonctions g_k et on leur applique les résultats des questions 1. b) et 2. Cela nous conduit aux inégalités :

$$0 \leqslant \frac{f(k+1) + f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8}.$$

Il suffit alors de sommer ces inégalités, pour k variant de 0 à $n-1$, pour aboutir au résultat.

5. La fonction f définie sur $I =]-\frac{1}{3}, +\infty[$ par $f(x) = \big(1 + 3x\big)^{3/2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. De plus, $f'(x) = \frac{9}{2}\big(1 + 3x\big)^{1/2}$ est clairement croissante, la fonction f est donc convexe. On applique alors le résultat de la question 4. et il vient :

$$\frac{2}{15}[(1+3n)^{5/2} - 1] \leqslant S_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+3n)^{3/2}$$
$$\leqslant \frac{2}{15}[(1+3n)^{5/2} - 1] + \frac{9}{16}[(1+3n)^{1/2} - 1].$$

On en déduit en isolant S_n et en considérant les termes dominants que :

$$S_n \sim \frac{2}{15}[(1+3n)^{5/2} - 1] \sim \frac{6\sqrt{3}}{5}\, n^{5/2}$$

Exercice 1.09.

On admet la propriété $\mathcal{C}$ suivante :

Pour toute suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big[a_1 + \cdots + a_n\big] = \ell$$

Autrement dit, si une suite converge vers une limite ℓ, alors la suite de ses moyennes converge aussi vers ℓ.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant 2,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n\sqrt{u_n u_{n-1}}}$$

a) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est correctement définie.

b) Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

d) Prouver que la suite $n \mapsto \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ converge vers 2. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = 1$ si n est pair et $u_n = 0$ si n est impair.

a) Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall\, n \geqslant 1, v_n = \frac{1}{n}\big[u_1 + \cdots + u_n\big]$$

b) Que pensez-vous de la réciproque de la propriété $\mathcal{C}$?

3. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ et on pose $w_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

a) On définit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall\, n \geqslant 1, v_n = \dfrac{1}{n}\big[u_1 + \cdots + u_n\big]$.

Soit $n \geqslant 2$. Prouver l'égalité : $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} kw_k$.

b) On suppose que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge et on note ℓ sa limite. On suppose également que $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n = 0$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge alors vers ℓ.

Solution :

1. a) Une récurrence immédiate montre que $u_n > 0$ pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc correctement définie.

b) On a $0 < u_2 \leqslant u_1$ et pour $n \geqslant 2$, le terme u_{n+1} est obtenu en divisant $u_n > 0$ par un nombre réel plus grand que 1. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc positive décroissante.

c) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite ℓ positive. Les propriétés sur le calcul des limites et la relation de récurrence nous conduisent à l'équation : $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$. Il en résulte que $\ell = 0$.

d) En utilisant la relation de récurrence définissant u_n, il vient :

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \sqrt{u_n u_{n-1}}.$$

Et par suite : $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} = \dfrac{1}{u_n^2} + u_n u_{n-1} + 2\sqrt{\dfrac{u_{n-1}}{u_n}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, on déduit de la relation de récurrence que $\dfrac{u_{n-1}}{u_n} \longrightarrow 1$, et par suite que $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ converge vers 2.

Avec la propriété $\mathcal{C}$ appliquée à la suite $(a_n) = \Big(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\Big)$, on obtient :

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{4}\Big) = 2$ et on en déduit que : $u_n \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

2. a) On a $v_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $v_{2n+1} = \dfrac{n}{2n+1}$. On voit donc que la suite (v_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

b) Comme la suite (u_n) est clairement divergente et que la suite (v_n) converge vers $1/2$, la réciproque de la propriété $\mathcal{C}$ est fausse en général.

3. a) On a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kw_k = \sum_{k=1}^{n-1} k(u_{k+1}-u_k) = \sum_{\ell=1}^{n} (\ell-1)u_\ell - \sum_{k=1}^{n-1} ku_k = (n-1)u_n - \sum_{\ell=1}^{n-1} u_\ell$$
$$= nu_n - \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

L'égalité souhaitée en découle aisément.

b) Il suffit d'utiliser l'égalité précédente et d'appliquer la propriété $\mathcal{C}$ à la suite $(a_n) = (nw_n)$ compte tenu du fait que $\lim\limits_{n\to\infty} nw_n = 0$.

On a donc obtenu une réciproque partielle de la propriété $\mathcal{C}$.

Exercice 1.10.

Pour $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$R(k,\ell) = \ln\left(\frac{\sup\limits_{x\in[0,1]} x^k(1-x)^\ell}{\displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^\ell dx}\right)$$

1. Montrer que $R(k,\ell)$ est bien défini pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$.

2. Montrer que $\sup\limits_{x\in[0,1]} x^k(1-x)^\ell$ existe et est atteint.
Calculer sa valeur en fonction de k et ℓ.

3. On pose $g(k,\ell) = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^\ell dx$. Calculer $g(k,\ell)$, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$.

4. a) Montrer que $R(k,\ell) \leqslant \ln(k+\ell+1)$.
b) Ce majorant est-il atteint ? Dans l'affirmative, en quels couples ?

Solution :

1. La fonction $f : x \to x^k(1-x)^\ell$ est continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée et son sup est atteint. Clairement $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > 0$. Ainsi le dénominateur définissant $R(k,\ell)$ ne s'annule pas.
Enfin par positivité du numérateur et du dénominateur, le logarithme est bien défini.

2. On sait que le polynôme f est borné sur $[0,1]$. Son maximum est atteint en un point où la dérivée $f'(x)$ s'annule. Or $f'(x) = x^{k-1}(1-x)^{\ell-1}(k-(k+\ell)x)$ ceci si $k \neq 0$ et $\ell \neq 0$.
Comme $f(0) = f(1) = 0$ et $f \geqslant 0$, on obtient, si $k \neq 0$ et $\ell \neq 0$

$$\sup_{x\in[0,1]} x^k(1-x)^\ell = f\big(\frac{k}{k+\ell}\big) = \big(\frac{k}{k+\ell}\big)^k\big(\frac{\ell}{k+\ell}\big)^\ell$$

Si $k=0$ ou $\ell=0$, $\sup\limits_{x\in[0,1]} x^k(1-x)^\ell = 1$.

3. On suppose k et ℓ non nuls. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} g(k,\ell) &= \int_0^1 x^k(1-x)^\ell dx = \Big[\frac{x^{k+1}(1-x)^\ell}{k+1}\Big]_0^1 + \frac{\ell}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{\ell-1}dx \\ &= \frac{\ell}{k+1} g(k+1,\ell-1) \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate :

$$g(k,\ell) = \frac{\ell!}{(k+1)(k+2)\dots(k+\ell)} g(k+\ell,0) = \frac{\ell!k!}{(k+\ell+1)!}$$

4. a) Supposons k et ℓ non nuls. En utilisant les résultats précédents :

$$\begin{aligned} R(k,\ell) &= \ln\Big((k+\ell+1)\binom{k+\ell}{k}\big(\frac{k}{k+\ell}\big)^k\big(\frac{\ell}{k+\ell}\big)^\ell\Big) \\ &= \ln(k+\ell+1) + \ln\Big(\binom{k+\ell}{k}\big(\frac{k}{k+\ell}\big)^k\big(\frac{\ell}{k+\ell}\big)^\ell\Big) \end{aligned}$$

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(k+\ell, \frac{k}{k+\ell})$, la seconde partie de la dernière expression représente $\ln(P(X=k)) < 0$. Ainsi $R(k,\ell) \leqslant \ln(k+\ell+1)$.

- si $k=\ell=0$, $R(k,\ell) = \ln 1 = 0$;
- si $k=0, \ell\neq 0$, $R(k,\ell) = \ln(\ell+1)$;
- si $k\neq 0, \ell = 0$, $R(k,\ell) = \ln(k+1)$.

Finalement, pour tout $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2, R(k,\ell) \leqslant \ln(k+\ell+1)$.

b) On a égalité si $k=0$ ou $\ell=0$. Par contre, si $k\neq 0$ et $\ell\neq 0$, le second logarithme de la question a) n'est jamais nul.
On a donc égalité si et seulement si $k=0$ ou $\ell=0$.

Exercice 1.11.

Pour $\alpha\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose, sous réserve d'existence :

$$J_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \big(\sin t\big)^\alpha \big(\cos t\big)^n dt$$

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de α l'intégrale précédente est-elle définie ?

2. a) Déterminer la nature de la série de terme général $J_n(1)$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $J_n(\alpha)$ pour $\alpha\leqslant 1$.

3. a) Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$; déterminer la limite de $u_n = \big[\cos\big(\frac{1}{\ln n}\big)\big]^n$, quand n tend vers l'infini.

b) En déduire la limite, quand n tend vers l'infini, de l'intégrale $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$.

4. On suppose $\alpha \geqslant 2$.

a) Soit g la fonction d'une variable réelle définie sur $]0, \pi/2]$ par $g(t) = \dfrac{(\sin t)^\alpha}{1 - \cos t}$.

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g(t)\, dt$.

b) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\pi/2} g(t)\, dt - \sum_{n=0}^{N} J_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} g(t)\,(\cos t)^{N+1}\, dt$$

c) En déduire la nature de la série de terme général $J_n(\alpha)$.

d) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} J_n(2)$.

Solution :

1. On a $t \mapsto \sin^\alpha t\, \cos^n t \in C^0\big(]0, \pi/2]\big)$ et au voisinage de 0 est équivalente à t^α. Ainsi l'intégrale converge si et seulement si $\alpha > -1$.

Donc $J_n(\alpha)$ est bien défini si et seulement si $\alpha > -1$.

2. a) On a $t \mapsto \sin t\, \cos^n t \in C^0([0, \pi/2])$ donc $J_n(1)$ définie, et :

$$J_n(1) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)\, \cos^n t dt = \Big[-\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}$$

donc la série $\sum J_n(1)$ diverge.

b) $-1 < \alpha \leqslant 1 \implies \forall t \in\,]0, \pi/2], (\sin t)^\alpha \geqslant \sin t$ donc $J_n(\alpha) \geqslant J_n(1)$, d'où la divergence de la série $\sum J_n(\alpha)$.

3. a) Par développement limité :

$$u_n = \exp\Big[n \ln\Big(1 - \frac{1}{2\ln^2 n} + o\Big(\frac{1}{\ln^2 n}\Big)\Big)\Big] = \exp\Big[-\frac{n}{2\ln^2 n} + o\Big(\frac{n}{\ln^2 n}\Big)\Big] \to 0$$

b) Par la relation de Chasles et décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \pi/2]$:

$$0 \leqslant W_n \leqslant \int_0^{1/\ln^2 n} dt + \int_{1/\ln^2 n}^{\pi/2} u_n dt \leqslant \frac{1}{\ln^2 n} + \frac{\pi}{2}\, u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. a) On a $g \in C^0(]0, \pi/2])$ et $g(t) \underset{(0)}{\sim} 2\, t^{\alpha-2}$, donc g est prolongeable par continuité pour $\alpha \geqslant 2$. Donc l'intégrale est faussement impropre et converge.

b) Il suffit d'invoquer la linéarité de l'intégration, et l'identité géométrique habituelle.

c) Soit M un majorant de $|g|$ sur $]0, \pi/2]$ (possible d'après la question 4.a). Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\Big|\int_0^{\pi/2} g(t)\, dt - \sum_{n=0}^{N} J_n(\alpha)\Big| \leqslant M \times W_{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\sum\limits_{n\geq 0} J_n(\alpha)$ converge vers $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g(t)dt$.

d) $S(2) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1-\cos t} dt = \int_0^{\pi/2} (1+\cos t)dt = \frac{\pi}{2} + 1$.

Exercice 1.12.

Pour toute fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt$$

(La valeur de cette intégrale est la longueur de la courbe représentative de f.)

1. Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

2. a) Calculer la dérivée sur $[0;1]$ de $h : t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(2t + \sqrt{1+4t^2})$.

b) Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t^2$. Calculer $L(f)$.

3. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.

c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est convergente.

d) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt$ est divergente.

En déduire la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

4. On désigne par g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(t) = \dfrac{1}{t}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ et par f la fonction définie sur le même intervalle par $f(x) = \displaystyle\int_x^1 g(t)\, dt$.

a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.

b) Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0,1]$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \int_x^1 |g(t)|\, dt = +\infty$.

d) Pour tout réel $x \in\,]0,1]$, on désigne par $\lambda(x)$ la longueur de la courbe représentative de la restriction de f au segment $[x,1]$.

Donner une expression intégrale de $\lambda(x)$, pour tout $x \in]0,1]$, puis montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) = +\infty$.

Solution :

1. On a : $1+[f'(t)]^2 = 1+\dfrac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4} = \dfrac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4} = [f(t)]^2$. Donc

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{f(t)^2}dt = \int_0^1 f(t)\,dt = \Big[\frac{e^t-e^{-t}}{2}\Big]_0^1 = \frac{e-e^{-1}}{2} = \frac{e^2-1}{2e}$$

2. a) Il vient :

$$h'(t) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2t+\sqrt{1+4t^2}}\times\big(2+\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}\big) = \frac{1}{2t+\sqrt{1+4t^2}}\times\frac{\sqrt{1+4t^2}+2t}{\sqrt{1+4t^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$$

b) Par intégration par parties suggérée par la question a) :

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt = \big[t\times\sqrt{1+4t^2}\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{1+4t^2}}dt$$
$$= \sqrt{5} - \int_0^1 \frac{4t^2+1-1}{\sqrt{1+4t^2}}dt = \sqrt{5} - L(f) + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}dt.$$

Donc :

$$2L(f) = \sqrt{5}+\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}dt = \sqrt{5}+\big[\frac{1}{2}\ln(2t+\sqrt{1+4t^2})\big]_0^1 = \sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}),$$

et :

$$L(f) = \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

3. a) La fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0 ; l'intégrale est faussement impropre en 0.

b) On a pour $A>1$: $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \big[-\frac{\cos t}{t}\big]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$

Avec $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, la règle de Riemann montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt$ est absolument convergente, donc convergente. On peut passer à la limite lorsque A tend vers $+\infty$ et $\dfrac{\cos A}{A}$ est de limite nulle.

Donc l'intégrale proposée converge.

c) On procède comme en b) par intégration par parties pour augmenter la puissance au dénominateur.

d) On a : $\dfrac{\sin^2(t)}{t} = \dfrac{1-\cos(2t)}{2t}$, donc :

$$\int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t}dt = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t}dt$$

Quand x tend vers $+\infty$, la dernière intégrale converge et $\dfrac{1}{2}\ln x$ tend vers l'infini. D'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}dt = +\infty$. Enfin, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\sin^2 t}{t} \leqslant \dfrac{|\sin t|}{t}$. Donc par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}dt$ diverge.

4. a) Soit $x \in]0,1]$. Par le changement de variable $u = 1/t$,
$$f(x) = \int_x^1 g(t)dt = \int_1^{1/x} \frac{\sin u}{u} du.$$
Et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge, on peut prolonger f par continuité en 0.

b) Sur $]0,1]$, f est l'unique primitive de $-g$ nulle en 1, donc f qui est continue en 0 est clairement de classe C^∞ sur $]0,1]$.

c) Comme en a), on a : $\displaystyle\int_x^1 |g(t)|dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{|\sin u|}{u} du$: la divergence de l'intégrale à l'infini et la positivité de la fonction à intégrer donnent le résultat.

d) On a $f'(t) = -g(t)$. Donc :
$$\forall\, x \in\,]0,1], \lambda(x) = \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}\sin^2(\frac{1}{t})}dt \geqslant \int_x^1 \big|\frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})\big|dt \geqslant \int_x^1 |g(t)|dt$$
Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \lambda(x) = +\infty$. On a ainsi un exemple de courbe image d'une fonction continue sur un segment et de longueur infinie ...

Exercice 1.13.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle vérifiant pour tous n, m entiers naturels non nuls :
$$u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$$
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \displaystyle\min_{k\in[\![1,n]\!]} \frac{u_k}{k}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ admet une limite ℓ dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tous n, m entiers naturels non nuls, on a $u_{nm} \leqslant m u_n$.

3. On suppose dans cette question que ℓ ne vaut pas $-\infty$. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_m}{m} \leqslant \ell + \varepsilon$.

b) En utilisant la division euclidienne de n par m, montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la suite, on appelle *chemin sans croisement de longueur* n toute suite $M_0, \ldots, M_n$ de points du plan à coordonnées entières vérifiant :

i) $M_0 = O$ (origine du plan) ;

ii) pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la distance entre M_i et M_{i+1} est égale à 1 ;

iii) pour tout $i \neq j$, on a $M_i \neq M_j$.

On note N_n le nombre de chemins sans croisement de longueur n.

a) Montrer que $N_n \leqslant 4^n$.

b) Montrer que pour tous n, m entiers naturels non nuls, $N_{n+m} \leqslant N_n N_m$.

c) Quelle relation vérifie $u_n = \ln N_n$?

d) En déduire que la suite $(N_n^{1/n})_n$ converge.

Solution :

1. La suite (v_n) est décroissante (à cause du min...) Soit elle est minorée, auquel cas elle converge vers sa borne inférieure, soit elle tend vers $-\infty$.

2. On montre cette relation par récurrence.

- pour $m = n$, $u_{2n} \leqslant 2u_n$;
- supposons que $u_{mn} \leqslant mu_n$. Alors

$$u_{(m+1)n} = u_{mn+n} \leqslant u_{mn} + u_n \leqslant mu_n + u_n = (m+1)u_n$$

3. a) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, il existe $n \geqslant 1$ tel que $\min\limits_{k\in[\![1,n]\!]} \frac{u_k}{k} \leqslant \ell + \varepsilon$ et comme c'est un minimum, il existe $m \geqslant 1$ tel que $\frac{u_m}{m} \leqslant \ell + \varepsilon$.

b) Soit m fixé et n grand. Il existe un unique couple (q, r) avec $0 \leqslant r < m$ tel que $n = mq + r$. Ainsi :

$$\frac{u_n}{n} = \frac{u_{mq+r}}{n} \leqslant \frac{u_{mq}}{n} + \frac{u_r}{n} \leqslant q\,\frac{u_m}{n} + \frac{u_r}{n} = \frac{n-r}{n} \times \frac{u_m}{m} + \frac{u_r}{n} \leqslant \frac{u_m}{m} + \frac{u_r}{n}$$

Comme $r \in [\![0, m-1]\!]$, on a $u_r \leqslant \max(u_1, \ldots, u_{m-1}) \leqslant C_m$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_r}{n} = 0$, et il existe N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$, $\frac{u_n}{n} \leqslant \ell + 2\varepsilon$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, par décroissance, il existe N_2 tel que si $n \geqslant N_2$, $\frac{u_n}{n} \geqslant \ell - 2\varepsilon$.
Ainsi pour $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, $\left|\frac{u_n}{n} - \ell\right| < 2\varepsilon$.

4. a) On part de $M_0 = (0, 0)$. Il y a 4 choix possibles pour M_1 qui sont $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$ et $(0, -1)$. Si M_k est placé, il y a alors 4 positions possibles pour M_{k+1}. Par récurrence immédiate $N_n \leqslant 4^n$.

b) Il y a N_n chemins sans croisement de M_0 à M_n et au plus N_m chemins sans croisement et ne croisant par $M_0, \ldots, M_n$ de M_n à M_{n+m}. Donc :

$$N_{n+m} \leqslant N_n N_m$$

c) La suite (u_n) vérifie $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$.

d) La suite (v_n) correspondante ne peut tendre vers $-\infty$ puisque $u_n = \ln(N_n) \geqslant 0$.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell \in \mathbb{R}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \ln[(N_n)^{1/n}] = \ell \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} N_n^{1/n} = e^{\ell} \in \mathbb{R}_+^*$$

Exercice 1.14.

1. Déterminer les réels x pour lesquels $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$ converge.

On note alors $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$.

2. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En évaluant $F(n) - F(n+1)$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre $F(n)$ et $F(n+1)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F(-n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{1}{2k+1}$.

5. Étudier les variations de la fonction F sur son domaine de définition.

6. a) Pour $x < 0$ fixé, étudier les variations de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^x}$ sur $[0, 1]$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

7. a) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\, dt$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Solution :

1. Pour un réel x fixé, la fonction $f_x : t \mapsto e^{-x \ln(1+t^2)}$ est continue sur $[0, 1]$ donc la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. On a $F(0) = \displaystyle\int_0^1 dt = 1$ et $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \big[\arctan t\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité,

$$F(n) - F(n+1) = \int_0^1 \Big(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\Big) dt = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt$$
$$= \int_0^1 \frac{t}{2} \times \frac{2t}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt$$

Posons $u(t) = \dfrac{t}{2}$ et $v(t) = \dfrac{-1}{n(1+t^2)^n}$ Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, donc en intégrant par parties :

$$F(n) - F(n+1) = \Big[\frac{t}{2} \times \frac{-1}{n(1+t^2)^n}\Big]_0^1 + \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{-1}{n2^{n+1}} + \frac{1}{2n} F(n).$$

Finalement :

$$F(n+1) = \frac{2n-1}{2n} F(n) + \frac{1}{n2^{n+1}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $F(-n) = \displaystyle\int_0^1 (1+t^2)^n\, dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{2k} dt$, donc par linéarité :

$$F(-n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$$

5. Pour un réel $t \in [0, 1]$ fixé, la fonction $x \mapsto f_x(t)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc, $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \leqslant x' \implies f_x(t) \geqslant f_{x'}(t)$, puis par croissance de l'intégrale avec $0 < 1$, il vient $F(x) \geqslant F(x')$ donc F est décroissante sur $\mathbb{R}$.

6. a) Pour $x < 0$ fixé, la fonction f_x est dérivable sur $[0, 1]$ et :

$$\forall t \in [0, 1], f_x'(t) = \mathrm{e}^{-x \ln(1+t^2)} \times \frac{-2xt}{1+t^2}.$$

Ainsi f_x est croissante sur $[0,1]$ et $f_x(\frac{1}{2}) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$.

b) Soit $x < 0$. D'après la question précédente, $\forall\, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], f_x(t) \geqslant f_x\left(\frac{1}{2}\right)$, donc par croissance de l'intégrale avec $\frac{1}{2} < 1$, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_x(t)dt \geqslant \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_x\left(\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2} f_x\left(\frac{1}{2}\right)$.

D'autre part, la fonction f_x étant positive sur $[0,1], F(x) \geqslant \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_x(t)dt$ donc

$$F(x) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^x$$

Par comparaison $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$

7. a) En étudiant la fonction $t \mapsto \ln(1+t) - \frac{t}{2}$ sur $[0,1]$, on montre facilement que $\forall\, t \in [0,1]$, $\ln(1+t) \geqslant \frac{t}{2}$. Or si $t \in [0,1]$, alors $t^2 \in [0,1]$, donc $\ln(1+t^2) \geqslant \frac{t^2}{2}$, donc $f_x(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}$.

En intégrant, il vient : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\, dt$.

b) En effectuant le changement de variable affine $u = \sqrt{x}\times t$, d'où $du = \sqrt{x}\, dt$, il vient :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ (densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$), alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\, dt = 0$$

Or clairement, $F(x) \geqslant 0$, donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Exercice 1.15.

Soit $a > 0$, $I = [0,a]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que :

- $0 < f(x) < x$ pour tout $x \in]0,a]$;
- il existe $\alpha > 0, c > 0$ tels que pour tout x dans un voisinage de 0,

$$f(x) = x - c\, x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})$$

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I, u_0 \neq 0 \\ \forall\, n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. a) Soit γ un réel non nul. Montrer que

$$u_{n+1}^{\gamma} = u_n^{\gamma} - c\gamma u_n^{\alpha+\gamma} + o(u_n^{\alpha+\gamma})$$

b) Montrer qu'il existe γ tel que la suite de terme général $u_{n+1}^{\gamma} - u_n^{\gamma}$ converge dans $\mathbb{R}^*$.

3. a) Montrer que si (v_n) est une suite réelle admettant une limite λ, alors la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} v_i$ converge également vers λ.

b) En déduire un équivalent de u_n.

4. *Applications*

a) Soit u la suite définie par $u_0 > 0$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

b) Soit u définie par $u_0 \in \,]0,\pi[$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Trouver un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. La suite (u_n) est strictement décroissante, minorée par 0. Elle converge vers une limite ℓ vérifiant $\ell = f(\ell)$. Comme $f(x) < x$ pour $x \neq 0$, alors $\ell = 0$.

2. a) On utilise un développement limité de $(1+u)^\gamma$ pour u au voisinage de 0.
$u_{n+1}^\gamma = u_n^\gamma(1 - cu_n^\alpha + o(u_n^\alpha))^\gamma = u_n^\gamma(1 - c\gamma u_n^\alpha + o(u_n^\alpha)) = u_n^\gamma - c\gamma u_n^{\alpha+\gamma} + o(u_n^{\alpha+\gamma})$
b) En choisissant $\gamma = -\alpha$, il vient :=

$$u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} = c\alpha + o(1)$$

3. a) On revient à la définition de la limite :

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, n_0, n \geqslant n_0 \implies |v_n - \lambda| < \varepsilon$$

Alors pour n plus grand que n_0 :

$$|w_n - \lambda| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0} |u_n - \lambda| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_n - \lambda| \leqslant \frac{C_{n_0}}{n} + \varepsilon\frac{n-n_0}{n} < \frac{C_{n_0}}{n} + \varepsilon$$

En choisissant n_1 tel que pour $n > n_1$, $\dfrac{C_{n_0}}{n} < \varepsilon$, pour $n > \max(n_0, n_1)$, on a $|w_n - \lambda| < 2\varepsilon$.
b) La question précédente montre que $\dfrac{1}{n}\big(u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}\big) = c\alpha$, donc $u_n \sim \dfrac{1}{(c\alpha)^{1/\alpha}} \times \dfrac{1}{n^{1/\alpha}}$.

4. a) La fonction proposée vérifie les hypothèses de l'exercice avec $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
Ici $c = 1/2$ et $\alpha = 1$. La question précédente montre que $u_n \sim \dfrac{2}{n}$ et la série $\sum u_n$ diverge.
b) Cette fois $f(x) = \sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, donc ici $c = \dfrac{1}{6}$ et $\alpha = 2$, on en déduit :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Exercice 1.16.

On note $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du \text{ et } G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u}\,du$$

1. Montrer que F (respectivement G) admet une limite finie, notée α (respectivement β) en $+\infty$.

2. Montrer que pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ converge et exprimer sa valeur, notée $A(x)$, en fonction de F et G.

3. Montrer que A est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $A''(x) + A(x)$ pour tout $x > 0$.

4. Déterminer les limites de A, A' et A'' en $+\infty$. Peut-on généraliser ?

5. a) Montrer que $\displaystyle\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge et qu'elle est la limite de $A(x)$ lorsque x tend vers 0.

Solution :

1. En intégrant par parties :

$$F(x) = \Big[-\cos u \times \frac{1}{u}\Big]_1^x - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,du = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,du$$

Cette intégration par parties avait pour but d'augmenter la puissance au dénominateur et la règle de Riemann montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,du$ est absolument convergente, donc convergente et par conséquent F a une limite en $+\infty$.

On procède de la même façon pour G.

2. Comme $x > 0$, le seul problème est en $+\infty$ et le changement de variable affine $u = t + x$ est autorisé avec la borne infinie.

Sous réserve de convergence, on a donc : $\displaystyle A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,du$

et en développant $\sin(u - x)$, les résultats de la question 1. donnent la convergence voulue et permettent de scinder l'intégrale :

$$A(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$$

Avec, dans le cas de la converegence : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \ldots = \int_1^{+\infty} \ldots - \int_1^x \ldots$, on a donc :

$$A(x) = (\cos x)(\alpha - F(x)) - (\sin x)(\beta - G(x))$$

3. Les fonctions à intégrer définissant F et G sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ et A aussi et une première dérivation donne :

$$\begin{aligned} A'(x) &= -(\sin x)(\alpha - F(x)) - (\cos x)(\beta - G(x)) - \cos x \times \frac{\sin x}{x} + \sin x \times \frac{\cos x}{x} \\ &= -(\sin x)(\alpha - F(x)) - (\cos x)(\beta - G(x)) \end{aligned}$$

On peut donc recommencer et A est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$A''(x) = -(\cos x)(\alpha - F(x)) + (\sin x)(\beta - G(x)) + \sin x \times \frac{\sin x}{x} + \cos x \times \frac{\cos x}{x}$$

Ainsi :

$$A(x) + A''(x) = \frac{1}{x} \quad (*)$$

4. Avec $\lim\limits_{+\infty} F = \alpha$ et $\lim\limits_{+\infty} G = \beta$ et le fait que les fonctions sin et cos sont bornées, les résultats précédents donnent : $\lim\limits_{+\infty} A = \lim\limits_{+\infty} A' = 0$ et donc également $\lim\limits_{+\infty} A'' = 0$. On pourrait continuer par la technique dite « de l'âne qui trotte » à partir de $(*)$: A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et toutes les dérivées tendent vers 0 en $+\infty$.

5. a) Déjà l'expression donnée a un sens et on écrit :

$$\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du = \sin x \int_x^{1} \frac{\cos u}{u}\, du + \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du$$

et

$$\int_x^{1} \frac{\cos u}{u}\, du = \int_x^{1} \frac{\cos u - 1 + 1}{u}\, du = -\ln x + \int_x^{1} \frac{\cos u - 1}{u}\, du$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x \ln x = 0$ (par équivalent du sinus) et $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{\cos u - 1}{u} = 0$, l'intégrale précédente est faussement impropre en 0 et le passage à la limite est licite et donne :

$$\lim_{x \to 0} \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du = 0$$

b) La convergence demandée est banale car on a déjà réglé le problème pour la borne infinie et l'intégrale est faussement impropre en 0.

Comme $A(x) = \cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du$ et $\lim\limits_{0} \cos = 1$, le résultat demandé est une conséquence du résultat a).

Exercice 1.17.

A toute suite réelle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on associe la suite a^* définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

1. **Un exemple : Suite géométrique.**

Soit $z \in \mathbb{R}$. On suppose que la suite a est définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n = z^n$.

a) Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

b) On suppose que $|z| < 1$.

i) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

ii) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

c) On suppose que $|z| \geqslant 1$.

i) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$?

ii) Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

2. **Comparaison des convergences des deux suites.**

a) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soit a une suite réelle et q un entier naturel **fixé**.
On considère pour $n > q$, la somme $S_q(n,a) = \sum\limits_{k=0}^{q} \dbinom{n}{k}\dfrac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n,a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

c) On suppose que (a_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^* = 0$.

d) On suppose que (a_n) converge vers un réel ℓ lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de (a_n^*) lorsque n tend vers $+\infty$?

e) La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

Solution :

1 a) D'après la formule du binôme : $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n^* = \dfrac{1}{2^n}(z+1)^n$.

b) i) D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique, comme $z \neq 1$: $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.
Comme $|z| < 1$, cette suite admet une limite. Ainsi, $\sum a_n$ converge et

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

ii) D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{z+1}{2}\right| \leqslant \frac{1+|z|}{2} < 1$$

Ainsi, $\sum a_n^*$ est une série géométrique convergente et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^* = \dfrac{2}{1-z} = 2A(z)$.

c) i) Comme $|z| \geqslant 1$, la série $\sum a_n$ est grossièrement divergente.

ii) Si $z = -2$, alors $a_n^* = (-\frac{1}{2})^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

2. a) L'entier k étant fixé, $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$

et d'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$.

b) L'entier q étant fixé, $(S_q(n,a))_n$ est une somme finie de suites de limite nulle. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$.

c) Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, il existe un entier naturel q tel que

$$\forall\, n \geqslant q, |a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

La suite $(S_q(n,a))_n$ étant de limite nulle, il existe n_0 tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, |S_q(n,a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

D'après les questions précédentes, pour tout $n \geqslant \max\{n_0, q\}$:

$$|a_n^*| = \Big|S_q(n,a) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}a_k\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, par définition de la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^* = 0$.

d) D'après la définition et la formule du binôme qui donne $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, on peut écrire : $a_n^* - \ell = \dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - \ell)$.

Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - \ell) = 0$, on se ramène au cas précédent et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^* = \ell$.

e) Si $a = ((-2)^n)_n$, alors, d'après la question 2. c), (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle alors que (a_n) est une suite divergente. Ainsi, il n'y a pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*).

2

ALGÈBRE

Exercice 2.01.

Soient n, p des entiers naturels non nuls et A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On confond vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^p$ et matrices colonnes canoniquement associées.

On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^p$.

1. Montrer que A est de rang 1 si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nulles telles que $A = U{}^tV$.

En déduire que dans ce cas : $\forall\, X \in \mathbb{R}^p, AX = \langle V, X\rangle U$.

2. Si le rang de A vaut 1 et si $n = p$, calculer la trace de A en fonction de U et V puis du calcul de A^2, déduire un polynôme annulateur de A.

3. a) Montrer que A est de rang 2 si et seulement s'il existe $(U_1, U_2) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ et $(V_1, V_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^2$ tels que (U_1, U_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et (V_1, V_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ avec :

$$A = U_1{}^tV_1 + U_2{}^tV_2$$

b) Déterminer alors une base de $\operatorname{Im} A$.

c) Déterminer $\operatorname{Ker} A$.

4. Généraliser les résultats précédents au cas où le rang de A est égal à $r > 0$.

Solution :

1. Si A est de rang 1, alors toutes les colonnes de A sont du type vU, où v est un réel et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendre l'image de A. La matrice colonne U est non nulle, sinon A serait nulle et donc de rang 0 ce qui contredit l'hypothèse.
Ainsi pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, la $i^{\text{ème}}$ colonne de A s'écrit v_iU où v_i est un réel. Soit $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est v_i. Cette matrice est non nulle car A est non nulle.

On a en écrivant en colonnes :

$$A = (v_1U|\cdots|v_pU) = U\,{}^tV.$$

Réciproquement si $A = U{}^tV = (v_1U|\cdots|v_pU)$, toutes les colonnes sont colinéaires à U et comme U et V sont non nulles, on en déduit que le rang de A est 1.
Ainsi puisque ${}^tVX$ est un réel, on a

$$\forall X \in \mathbb{R}^p,\ AX = U\,{}^tVX = ({}^tVX)U = \langle V, X\rangle U$$

2. On suppose que $n = p$, on a :

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(U\,{}^tV) = \mathrm{tr}({}^tVU) = {}^tVU \text{ et } A^2 = U{}^tVU{}^tV = ({}^tVU)U{}^tV = \mathrm{tr}(A)A.$$

Ainsi un polynôme annulateur de A est $X^2 - \mathrm{tr}(A)X$.

3. a) Si le rang de A vaut 2, alors la dimension de $\mathrm{Im}\,A$ est 2.
Soit (U_1, U_2) une base de $\mathrm{Im}\,A$. Ainsi la $i^{\text{ème}}$ colonne de A s'écrit comme combinaison linéaire de U_1 et de U_2 : $v_{1i}U_1 + v_{2i}U_2$. Par conséquent en notant V_1 et V_2 les matrices de coefficients v_{1i} et v_{2i}, on a :

$$A = (v_{11}U_1 + v_{21}U_2|\cdots|v_{1p}U_1 + v_{2p}U_2) = U_1{}^tV_1 + U_2{}^tV_2.$$

La famille (V_1, V_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ car si cette famille est liée, il existe un réel α tel que $V_2 = \alpha V_1$ ou $V_1 = \alpha V_2$. Dans les deux cas, on en déduit que A s'écrit sous la forme $U\,{}^tV$ donc la matrice n'est pas de rang 2 ce qui contredit l'hypothèse.

Réciproquement s'il existe $(U_1, U_2) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ et $(V_1, V_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^2$ tels que (U_1, U_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et (V_1, V_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ avec

$$A = U_1{}^tV_1 + U_2{}^tV_2,$$

alors on a pour tout X de $\mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} AX = 0 &\iff \langle X, V_1\rangle U_1 + \langle X, V_2\rangle U_2 = 0 \iff \langle X, V_1\rangle = 0 \text{ et } \langle X, V_2\rangle = 0 \\ &\iff X \in (\mathrm{Vect}(V_1, V_2))^{\perp}. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\,A = (\mathrm{Vect}(V_1, V_2))^{\perp}$. On en déduit que le rang de A est 2.

Ainsi A est de rang 2 si et seulement si il existe un couple $(U_1, U_2) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ et un couple $(V_1, V_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^2$ tels que (U_1, U_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et (V_1, V_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ avec

$$A = U_1{}^tV_1 + U_2{}^tV_2.$$

b) Une base de $\mathrm{Im}\,A$ est donc (U_1, U_2).

c) D'après ce qui précède $\mathrm{Ker}\,A = (\mathrm{Vect}(V_1, V_2))^{\perp}$.

4. On généralise ce résultat : le rang de A est égal à $r > 0$ si et seulement s'il existe $(U_1, \cdots, U_r) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^r$ et $(V_1, \cdots, V_r) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^r$ tels que $(U_1, \cdots, U_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et $(V_1, \cdots, V_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ avec

$$A = U_1{}^tV_1 + \cdots + U_r{}^tV_r.$$

En effet si le rang de A est r, soit $(U_1, \cdots, U_r)$ une base de $\mathrm{Im}\,A$. Chaque colonne de A est combinaison linéaire de $(U_1, \cdots, U_r)$, on en déduit qu'il existe $(V_1, \cdots, V_r) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^r$ tel que

$$A = U_1{}^tV_1 + \cdots + U_r{}^tV_r.$$

Alors pour toute colonne X, $AX = 0$ s'écrit ${}^tV_1X = 0, \ldots, {}^tV_rX = 0$ et :

$$\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Vect}(V_1, \cdots, V_r))^\perp,$$

or la dimension de $\operatorname{Ker} A$ est $p - r$ donc le rang de la famille $(V_1, \cdots, V_r)$ est r ce qui prouve que cette famille est libre.

Réciproquement, s'il existe $(U_1, \cdots, U_r) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^r$ et $(V_1, \cdots, V_r) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^r$ tels que $(U_1, \cdots, U_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et $(V_1, \cdots, V_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ avec

$$A = U_1{}^tV_1 + \cdots + U_r{}^tV_r,$$

alors on montre que $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Vect}(V_1, \cdots, V_r))^\perp$, et comme $(V_1, \cdots, V_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$, le noyau de A est de dimension $p - r$ donc le rang de A est r.

Exercice 2.02.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f et g deux endomorphismes de E diagonalisables. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que l'ensemble des valeurs propres de f est de cardinal n.

1. Montrer que les sous-espaces propres de f sont des droites stables par g.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_\mathcal{B}(f)$ et $M_\mathcal{B}(g)$ sont diagonales.

Plus généralement on admet que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent admettent toujours au moins une base commune de vecteurs propres.

Dans toute la suite de l'exercice, A et B désignent deux matrices carrées réelles d'ordre n. On note $\Phi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice $AM + MB$.

3. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. On suppose dans cette question que A est diagonalisable et que B est la matrice nulle.

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, $AX_i = \lambda_i X_i$.

a) Pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, on note $M_{i,j}$ la matrice dont la i-ème colonne vaut X_j et les autres colonnes sont nulles. Montrer que la famille $(M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) En déduire que l'application $\Phi_{A,0_n}$ est diagonalisable.

5. On suppose dans cette question que A et B sont diagonalisables. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

Solution :

1 Soit λ une valeur propre de f et $x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda id_E)$.
Alors, comme f et g commutent, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

Ainsi, $g(x) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda id_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_E)$ est stable par g. On peut remarquer que les sous-espaces propres de f sont bien des droites ...

2 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f. Notons, pour tout i, λ_i tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Comme f possède n valeurs propres distinctes, $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda_i id_E) = 1$.
Ainsi, comme $g(e_i) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i e_i)$, il existe μ_i tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$. Finalement, la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

3. On montre aisément que $\Phi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi(\lambda M + N) = \lambda \Phi(M) + \Phi(N)$.

4. Comme A est diagonalisable, il existe $(X_1, \ldots, X_n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $AX_i = \lambda_i X_i$.

a) Soit $(\mu_{i,j})$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_{i,j} M_{i,j} = 0_n$.

Alors, en étudiant chaque colonne de cette matrice : $\forall\, i,\ \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_{i,j} X_j = 0_n$.

Comme (X_j) est une base, les $\mu_{i,j}$ sont tous nuls et $(M_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) D'après les propriétés du produit matriciel, $\Phi_{A,0_n}(M_{i,j}) = \lambda_j M_{i,j}$. Ainsi, $(M_{i,j})$ est une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,0_n}$ et $\Phi_{A,0_n}$ est diagonalisable.

5. D'après la définition, $\Phi_{A,B} = \Phi_{A,0} + \Phi_{0,B}$.

$\rightarrow$ D'après la question précédente, $\Phi_{A,0}$ est diagonalisable.

$\rightarrow$ Comme B est diagonalisable, il en est de même de ${}^tB$ et on peut donc trouver une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour $\Phi_{{}^tB,0}$ et les matrices transposées forment une base de vecteurs propres pour $\Phi_{0,B}$. Donc $\Phi_{0,B}$ est diagonalisable.

$\rightarrow$ Enfin $\Phi_{A,0} \circ \Phi_{0,B}(M) = A(MB) = (AM)B = \Phi_{0,B} \circ \Phi_{A,0}(M)$.

Ainsi, d'après la question 2, $\Phi_{A,0}$ et $\Phi_{0,B}$ sont diagonalisables dans une même base. Une telle base est une base de diagonalisation de $\Phi_{A,B}$.

Exercice 2.03.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, 1]$.

On note M l'ensemble des fonctions de E_2 vérifiant $f(0) = f(1) = 0$, et on considère l'application u de M dans E_0 qui, à toute fonction f de M associe sa dérivée seconde, notée f''.

1. Montrer que u est une application linéaire injective.

2. Soit $g \in E_0$. Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $G(x) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 |x - t| g(t)\, dt$.

a) Justifier que G est un élément de E_2 et déterminer G''.

b) Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $H(x) = G(x) + ax + b$. Déterminer les réels a et b pour lesquels H appartient à M.

c) Que peut-on en déduire pour u ?

d) Vérifier que pour tout élément x de $[0,1]$:

$$u^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|g(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)\,dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,g(t)\,dt$$

On note P_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $e_k(x) = x^k$ et on pose également, pour tout x, $e_0(x) = 1$.
On note M_n le sous-espace vectoriel de P_n constitué des fonctions polynomiales P de P_n telles que $P(0) = P(1) = 0$.
Pour tout entier naturel k et tout réel x, on pose $f_k(x) = x^{k+1}(x-1)$.

3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $C = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de M_{n+2}.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit v l'application linéaire de M_{n+2} dans P_n qui à P associe P''.

a) Déterminer la matrice A de v relativement aux bases C et $B = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

b) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Solution :

1. L'application u est clairement linéaire de M vers E_0.
Soit $f \in \operatorname{Ker} u$. On a $f'' = 0$ et $f(0) = f(1) = 0$. Donc f est affine et nulle en deux points, donc f est la fonction nulle et u est injective.

2. a) $2G(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)g(t)\,dt + \int_x^1 (t-x)g(t)\,dt$, soit en développant :

$$2G(x) = x\int_0^x g(t)\,dt - x\int_x^1 g(t)\,dt - \int_0^x tg(t)\,dt + \int_x^1 tg(t)\,dt$$

On peut déjà dériver une fois :

$$\begin{aligned}2G'(x) &= \int_0^x g(t)\,dt - \int_x^1 g(t)\,dt + xg(x) - x(-g(x)) - xg(x) + (-xg(x))\\ &= \int_0^x g(t)\,dt - \int_x^1 g(t)\,dt\end{aligned}$$

G' est encore dérivable et : $2G''(x) = g(x) - (-g(x))$, soit :

$$G'' = g \text{ et } G \text{ est bien de classe } \mathcal{C}^2.$$

b) On a encore $H'' = g$ et :

$$H(0) = b+G(0) = b+\frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)\,dt,\ H(1) = a+b+G(1) = a+b+\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)g(t)\,dt$$

Donc H appartient à M pour $b = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 tg(t)\,dt$ et $a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (2t-1)g(t)\,dt$.

c) Pour un tel choix de a et b, on a donc $H \in M, u(H) = g$, ce qui prouve que u est bijective ...

d) ... avec $u^{-1}(g) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|g(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)\,dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,g(t)\,dt.$

3. f est dans M_{n+2} si et seulement si f est de la forme $x \mapsto x(x-1)Q(x)$, où Q est polynomiale de degré inférieur ou égal à n, donc $(f_0, \dots, f_n)$ est génératrice de M_{n+2}.

La liberté de la famille est claire par échelonnement.

4. a) $v(f_0)(x) = 2$, $v(f_1)(x) = 6x - 2$ et pour $k \geqslant 2$,
$v(f_k)(x) = (k+2)(k+1)x^k - (k+1)kx^{k-1}$.

Soit en remplissant colonnes après colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & & & & \\ 0 & 6 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k(k+1) & & \\ \vdots & \vdots & & (k+2)(k+1) & & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & & & -(n+1)n \\ & & & & & (n+2)(n+1) \end{pmatrix}$$

b) $v^{-1}(e_k)$ est de la forme $x \mapsto \dfrac{x^{k+2}}{(k+2)(k+1)} + ax + b$ et les conditions aux bords donnent :

$$\begin{aligned} v^{-1}(e_k)(x) &= \frac{x^{k+2}}{(k+2)(k+1)} - \frac{x}{(k+2)(k+1)} \\ &= \frac{x(x-1)}{(k+2)(k+1)}(1 + x + \cdots + x^k) \end{aligned}$$

soit : $v^{-1}(e_k) = \dfrac{1}{(k+2)(k+1)}(f_0 + f_1 + \cdots + f_k)$, ce qui explicite la $(k+1)^{\text{ème}}$ colonne de A^{-1} : tous les éléments qui sont au-dessus ou sur la diagonale valent $\dfrac{1}{(k+2)(k+1)}$ et les autres sont nuls.

Exercice 2.04.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle .,. \rangle$ et la norme associée $\|.\|$.

Conformément à l'usage, on note par la lettre majuscule correspondante la matrice colonne canoniquement associée à un vecteur de $\mathbb{R}^n$ noté par une lettre minuscule.

On considère un endomorphisme symétrique φ de $\mathbb{R}^n$, dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles et $u = (u_1, \dots, u_n)$ un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$.

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \frac{1}{2}\langle \varphi(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$$

On note $A = (a_{i,j})$ la matrice canoniquement associée à φ.

1. Montrer que si toutes les valeurs propres de φ sont strictement positives, on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0 \implies \langle \varphi(h), h \rangle > 0$$

On dit alors que φ est un endomorphisme symétrique défini positif.

2. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et expliciter son gradient et sa matrice hessienne en tout point.

b) Montrer que f admet un unique point critique si et seulement si φ est défini positif.

c) On suppose que φ n'est pas défini positif. A quelle condition sur u et φ la fonction f possède-t-elle des points critiques ?

d) On suppose que f admet au moins un point critique z. Montrer que f admet en z un minimum global valant $-\dfrac{1}{2}\langle u, z\rangle$.

e) La fonction f admet-elle des maximums locaux ?

3. *Exemple.* On suppose ici que $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ et $u = (6, 12, -6)$.

Montrer que φ est défini positif.

Déterminer l'unique point critique de f et le minimum global de f sur $\mathbb{R}^3$.

Solution :

1. Soit A la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme φ. La matrice A est symétrique réelle, donc il existe P orthogonale et D diagonale (dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de φ) telles que $A = PDP^{-1}$.

On a

$\langle \varphi(h), h\rangle = {}^t(AH)H = {}^tHAH = {}^tH{}^tPDPH = {}^t(PH)D(PH) = {}^tYDY = \sum\limits_i \lambda_i y_i^2$

et $h \neq 0$ donne $H \neq 0$ et $Y = PH \neq 0$ donc les λ_i étant strictement positifs il vient bien

$$\langle \varphi(h), h\rangle > 0$$

2. a) Avec $A = (a_{i,j})$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $u = (u_1, \ldots, u_n)$, on a :

$$f(x) = \sum a_{i,j}x_ix_j - \sum u_ix_i$$

Alors :

$\partial_i(f)(x) = \sum\limits_{j=1}^n a_{i,j}x_j - u_i$ et $\partial^2_{i,j}(f)(x) = a_{i,j}$, donc :

$$\nabla(f)(x) = AX - U \text{ et } \nabla^2(f)(x) = A$$

b) Il y a un point critique et un seul si et seulement si l'équation $AX - U = 0$ a une solution et une seule, donc si et seulement si A est inversible. Ceci a lieu si et seulement si 0 n'est pas valeur propre donc si et seulement si les valeurs propres sont toutes strictement positives.

c) $AX - U = 0$ a au moins une solution si et seulement si $U \in \mathrm{Im}(A)$, donc si et seulement si u appartient à $\mathrm{Im}\,\varphi$.

d) Par hypothèse $\varphi(z) = u$ et $f(z) = \dfrac{1}{2}\langle u, z\rangle - \langle u, z\rangle = -\dfrac{1}{2}\langle u, z\rangle$.

Alors, pour tout x :

$$\begin{aligned} f(x)-f(z) = \frac{1}{2}\langle\varphi(x),x\rangle - \langle u,x\rangle + \frac{1}{2}\langle u,z\rangle &= \frac{1}{2}\langle\varphi(x),x\rangle - \langle\varphi(z),x\rangle + \frac{1}{2}\langle\varphi(z),z\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle\varphi(x),x\rangle - \langle u,x\rangle + \frac{1}{2}\langle u,z\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle\varphi(x),x\rangle - \frac{1}{2}\langle\varphi(z),x\rangle - \frac{1}{2}\langle\varphi(x),z\rangle + \frac{1}{2}\langle\varphi(z),z\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle\varphi(x-z),x-z\rangle \geqslant 0 \end{aligned}$$

Il s'agit donc bien d'un minimum global.
(On peut aussi dire que f est une fonction polynomiale du second degré, donc le développement à l'ordre 2 est en fait exact et la hessienne est positive ...)

e) On vient de voir qu'un point critique correspond toujours à un minimum, il n'y a donc pas de maximum local.

3. Les calculs montrent que le spectre de A est $\{6,12\}$.

L'équation $AX=U$ donne $X=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, le minimum (global) valant -14.

Exercice 2.05.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $\langle .,.\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

On dit que deux familles $(u_1,\ldots,u_k)$ et $(v_1,\ldots,v_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont biorthogonales si l'on a :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,k]\!]^2, \langle u_i,v_j\rangle = \begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. a) Montrer que si les familles $(u_1,\ldots,u_k)$ et $(v_1,\ldots,v_k)$ de $\mathbb{R}^n$ sont biorthogonales, alors ces deux familles sont libres. Que peut-on en déduire pour k ?

b) Montrer que si $\mathcal{B}'=(u_1,\ldots,u_n)$ est une base quelconque de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une unique base $\mathcal{C}=(v_1,\ldots,v_n)$ telle que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ soient biorthogonales. La base $\mathcal{C}$ s'appelle la base biorthogonale de la base $\mathcal{B}'$.

Dans la suite de l'exercice, on confond tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne canoniquement associée.

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n pour laquelle il existe un entier naturel r, des familles $(u_1,\ldots,u_r)$ et $(v_1,\ldots,v_r)$ de $\mathbb{R}^n$ biorthogonales et r réels non nuls $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ tels que

$$A=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i u_i{}^t v_i$$

a) Montrer que u_i est un vecteur propre de A.

b) Montrer que $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Vect}(v_1,\ldots,v_r))^{\perp}$. En déduire le rang de A.

c) Montrer que A est diagonalisable.

d) Réciproquement, montrer que si A est diagonalisable de rang r, alors il existe $(u_1, \ldots, u_r)$ et $(v_1, \ldots, v_r)$ de $\mathbb{R}^n$ biorthogonales et des réels non nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i {}^t v_i$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique de rang r. Montrer qu'il existe une famille $(u_1, \ldots, u_r)$ et des réels non nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i {}^t u_i$$

La réciproque est-elle vraie ?

Solution :

1. a) On considère une relation de dépendance des vecteurs $(u_1, \cdots, u_k)$:

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = 0$$

Pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant k$, on a $\langle \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k, v_j \rangle = \alpha_j$. On en déduit que pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, $\alpha_j = 0$. On procède de même pour la famille $(v_1, \cdots, v_k)$. On en conclut que les deux familles sont libres.
Par conséquent $k \leqslant n$.

b) Soit $\mathcal{B}' = (u_1, \cdots, u_n)$ une base quelconque de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

On suppose qu'il existe une base $\mathcal{C} = (v_1, \cdots, v_n)$ telle que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ soient biorthogonales. On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$.

On note M la matrice de coefficient général $m_{ij} = \langle u_i, v_j \rangle$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$. On vérifie que $A = {}^tPQ$. Puisque $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ sont biorthogonales, on en déduit que A est I_n donc $Q = {}^t(P^{-1})$. Par conséquent s'il existe une base $\mathcal{C} = (v_1, \cdots, v_n)$ telle que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ soient biorthogonales, alors cette base est unique et est déterminée par $Q = {}^t(P^{-1})$.

Soit la base $\mathcal{C}$ telle que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$ est $Q = {}^t(P^{-1})$. Alors on a ${}^tPQ = I_n$, ce qui prouve que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ sont biorthogonales.

Par conséquent il existe une unique base $\mathcal{C} = (v_1, \cdots, v_n)$ telle que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ soient biorthogonales.

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n pour laquelle il existe $(U_1, \cdots, U_r)$ et $(V_1, \cdots, V_r)$ de $\mathbb{R}^n$ biorthogonales et r réels non nuls $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ tels que $A = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i U_i {}^t V_i$.

a) On a pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r$: $AU_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j U_j {}^t V_j U_i = \lambda_i U_i$.

De plus U_i n'est pas nul car $\langle U_i, V_i \rangle = 1$, donc c'est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i.

b) On a $X \in \operatorname{Ker} A \iff \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i U_i {}^t V_i X = 0 \iff \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \langle V_i, X \rangle U_i = 0$.

Comme la famille $(U_1,\cdots,U_r)$ est libre,

$$X\in \operatorname{Ker} A \Longleftrightarrow \forall i\in [\![1,r]\!], \langle V_i,X\rangle U_i=0 \Longleftrightarrow X\in (\operatorname{Vect}(V_1,\cdots,V_r))^{\perp}.$$

Par conséquent $\operatorname{Ker} A=(\operatorname{Vect}(V_1,\cdots,V_r))^{\perp}$. On en déduit que le rang de A est r.

c) La matrice A est diagonalisable puisque la « réunion » d'une base de $\operatorname{Ker} A$ avec la famille $(U_1,\cdots,U_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

d) Réciproquement soit A une matrice diagonalisable de rang r, alors A possède des valeurs propres non nulles $(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ associées aux vecteurs propres $(U_1,\cdots,U_r)$ qui forment une famille libre. On complète cette famille libre pour avoir une base $(U_1,\cdots,U_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on considère la base biorthogonale notée $(V_1,\cdots,V_n)$.

Alors les familles $(U_1,\cdots,U_r)$ et $(V_1,\cdots,V_r)$ sont biorthogonales et vérifient :

$$A=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i U_i{}^tV_i.$$

En effet, Soit $X\in\mathbb{R}^n$, on a $X=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iU_i$.

Or pour tout entier $i\in[\![1,n]\!]$, $\langle X,V_i\rangle=\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\langle U_j,V_i\rangle=x_i$. Donc pour tout $X\in\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_iU_i{}^tV_iX=\sum_{i=1}^{r}x_i\lambda_iU_i=AX$$

3. Si A est symétrique de rang r, alors A est diagonalisable et il existe une base orthonormale $(U_1,\cdots,U_n)$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres

$$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r>\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$$

La base biorthogonale de $(U_1,\cdots,U_n)$ est elle-même donc on a :

$$A=\sum_{i=1}^{r}\lambda_iU_i{}^tU_i$$

La réciproque est donc vraie.

Exercice 2.06.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Soit p un projecteur de E tel que $p\neq 0$ et $p\neq id_E$. Pour tout f appartenant à $\mathcal{L}(E)$, on pose :

$$\varphi(f)=\frac{1}{2}(f\circ p+p\circ f)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. Calculer $(\varphi\circ\varphi)(f)$ et $(\varphi\circ\varphi\circ\varphi)(f)$; en déduire les valeurs propres possibles de φ.

3. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{K}(F)=\{f\in\mathcal{L}(E)\ /\ F\subset \operatorname{Ker} f\} \text{ et } \mathcal{I}(F)=\{f\in\mathcal{L}(E)\ /\ \operatorname{Im} f\subset F\}$$

4. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

a) Calculer $f \circ g$ lorsque $f \in \mathcal{K}(\operatorname{Im} g)$ ou lorsque $g \in \mathcal{I}(\operatorname{Ker} f)$.

b) Calculer $p \circ f$ lorsque $f \in \mathcal{I}(\operatorname{Im} p)$.

c) Montrer que $f \circ p = f$ lorsque $f \in \mathcal{K}(\operatorname{Ker} p)$.

5. a) Pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants, montrer que leurs éléments non nuls sont des vecteurs propres de φ et préciser les valeurs propres correspondantes :

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(\operatorname{Im} p) \cap \mathcal{I}(\operatorname{Ker} p),\ \mathcal{B} = \mathcal{K}(\operatorname{Im} p) \cap \mathcal{I}(\operatorname{Im} p) \text{ et } \mathcal{C} = \mathcal{K}(\operatorname{Ker} p) \cap \mathcal{I}(\operatorname{Im} p)$$

b) Montrer que les sous-espaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont en somme directe.

c) Quelles sont les valeurs propres de φ ?

Solution :

Notons que le fait de supposer qu'il existe un projecteur de E différent de 0 et de id_E entraîne que la dimension de E est au moins égale à 2.

1. Résulte clairement des propriétés des opérations.

2. On trouve $(\varphi \circ \varphi)(f) = \frac{1}{2}\varphi(f) + \frac{3}{4} p \circ f \circ p$.
Puis : $(\varphi \circ \varphi \circ \varphi)(f) = \frac{1}{2}(\varphi \circ \varphi)(f) + \frac{1}{2}\varphi(p \circ f \circ p) = \frac{1}{4}\varphi(f) + \frac{1}{2} p \circ f \circ p$.
Donc $\varphi^3(f) - \varphi^2(f) = \frac{1}{2}\varphi^2(f) - \frac{1}{2}\varphi(f)$ et $X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X = X(X-1)(X-\frac{1}{2})$ est un polynôme annulateur de φ. Donc $\operatorname{Sp}(\varphi) \subset \{0, 1, \frac{1}{2}\}$.

3. • $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{K}(F)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $f, g \in \mathcal{K}(F)$ et tout $x \in F$, on a : $x \in F \subset \ker f \Rightarrow f(x) = 0$ et $x \in F \subset \ker g \Rightarrow g(x) = 0$, d'où $(f + \lambda g)(x) = 0$ donc $x \in \ker(f + \lambda g)$ et $f + \lambda g \in \mathcal{K}(F)$.
On a prouvé : $\forall x \in F,\ x \in \ker(f + \lambda g)$, donc $F \subset \ker(f + \lambda g)$, soit $f + \lambda g \in \mathcal{K}(F)$.
• $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{I}(F)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $f, g \in \mathcal{I}(F)$ et tout $x \in E$, on a : $f(x) \subset \operatorname{Im} f \subset F$ et $g(x) \subset \operatorname{Im} f \subset F$, d'où $(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) \in F$. Ceci prouve donc $\operatorname{Im}(f + \lambda g) \subset F$, *i.e.* $f + \lambda g \in \mathcal{I}(F)$.

4. a) On a : $f \in \mathcal{K}(\operatorname{Im} g) \Leftrightarrow \operatorname{Im} g \subset \ker f \Leftrightarrow g \in \mathcal{I}(\ker f)$. Et alors, on a : $f \circ g = 0$.
b) La relation $f \in \mathcal{I}(\operatorname{Im} p)$ signifie $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p$; alors, comme p est un projecteur, on a :

$$\forall x \in E, (p \circ f)(x) = p(f(x)) = f(x) \text{ car } f(x) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{id}).$$

Donc $p \circ f = f$.

c) Comme $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$, il suffit de prouver que $f(p(x)) = f(x)$ pour tout $x \in \ker p$ et pour tout $x \in \operatorname{Im} p$.
• La relation $f \in \mathcal{K}(\ker p)$ signifie $\ker p \subset \ker f$; donc, pour tout $x \in \ker p$, on a $f(x) = 0$ et $f(p(x)) = f(0) = 0$ donc $f(p(x)) = f(x)$.
• Et pour tout $x \in \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = x$, donc $f(p(x)) = f(x)$.

5. a) D'après les questions précédentes :

• si $f \in \mathcal{A}$, alors $f \circ p = 0$ ($f \in \mathcal{K}(\operatorname{Im} p)$) et $p \circ f = 0$ ($f \in \mathcal{I}(\ker p)$) , donc $\varphi(f) = 0$, et si f est non nul, f est un vecteur propre de φ pour la valeur propre $\lambda = 0$.
• si $f \in \mathcal{B}$, $f \circ p = 0$ ($f \in \mathcal{K}(\operatorname{Im} p)$) et $p \circ f = f$ ($f \in \mathcal{I}(\operatorname{Im} p)$), donc $\varphi(f) = \dfrac{1}{2} f$. Donc si f est non nul f est un vecteur propre de φ pour la valeur propre $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
• si $f \in \mathcal{C}$, $f \circ p = f$ ($f \in \mathcal{K}(\ker p)$) et $p \circ f = f$ ($f \in \mathcal{I}(\operatorname{Im} p)$), donc $\varphi(f) = f$ et si f est non nul f est un vecteur propre de φ pour la valeur propre $\lambda = 1$.

b) Les sous-espaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont en somme directe car ils sont inclus dans des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes.

c) Les valeurs propres possibles sont $0, 1, \dfrac{1}{2}$; ce sont effectivement des valeurs propres si et seulement s'il existe des vecteurs propres (donc *non nuls*) associés. La question 4.d. donne des idées pour en trouver.

• pour que $f \circ p = 0$ et $p \circ f = 0$, il suffit de prendre $f = \mathrm{id}_E - p \neq 0$ (car $p \neq \mathrm{id}_E$). Donc $0 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$.

• pour que $f \circ p = 0$ et $p \circ f = f$, il faut que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p \subset \ker f$. Comme $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont supplémentaires et tous deux non nuls (sinon on aurait $p = \mathrm{id}_E$ ou $p = 0$), en choisissant $e_1 \in \operatorname{Im} p$ et $e_2 \in \ker p$, on peut compléter en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. L'endomorphisme f défini par $f(e_1) = e_2$ et $f(e_k) = 0$ si $k \geqslant 2$ est non nul et vérifie les conditions voulues. Donc $\dfrac{1}{2} \in \mathrm{Sp}(\varphi)$.

• pour que $f \circ p = f$ et $p \circ f = f$, il suffit de prendre $f = p \neq 0$. Donc $1 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. Ainsi $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0, 1, \dfrac{1}{2}\}$.

Exercice 2.07.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = id_E$ et $u \neq id_E$. On pose :

$$E_1 = \operatorname{Ker}(u - id_E) \text{ et } E_2 = \operatorname{Ker}(u^2 + u + id_E)$$

1. a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

b) Déterminer un polynôme P tel que $(u^2 + u + id_E) - (u - id_E) \circ P(u)$ soit proportionnel à id_E. En déduire que $E = E_1 \oplus E_2$.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$.

a) On suppose que l'on a $\dim E_1 = \dim E_2 = 1$. Soit alors $e_1 \in E_1 \setminus \{0\}$ et $e_2 \in E_2 \setminus \{0\}$.

i) Quelle est la forme de la matrice $A = M_{(e_1, e_2)}(u)$?

ii) Montrer que le terme situé en deuxième ligne et deuxième colonne de $A^2 + A + I_2$ ne peut être nul.

iii) Montrer que l'hypothèse faite est absurde.

b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution :

1. a) Soit $x \in E_1 \cap E_2$, on a $u(x) = x$ et $u^2(x) + u(x) + x = 0$, soit $3x = 0$ et $x = 0$.

b) On peut chercher P de degré 1 et unitaire pour assurer la disparition des termes en u^2 et le choix de $P = X + 2$ fait disparaître les termes en u :

$$u^2 + u + id - (u - id) \circ (u + 2id) = 3id$$

Soit $x \in E$, on a donc $3x = (u^2 + u + id)(x) - (u - id) \circ (u + 2id)(x)$

$\to$ avec $x_1 = (u^2 + u + id)(x)$, il vient $(u - id)(x_1) = (u^3 - id)(x_1) = 0$.

$\to$ avec $x_2 = (u - id) \circ (u + 2id)(x)$, il vient

$$(u^2 + u + id)(x_2) = (u^3 - id)((u + 2id)(x_2)) = 0$$

Ainsi $x = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2$, avec $\frac{1}{3}x_1 \in E_1$ et $\frac{1}{3}x_2 \in E_2$.

Ce qui prouve que $E = E_1 + E_2$ et finalement $E = E_1 \oplus E_2$.

2. a) i) Comme $u(e_1) = e_1$, la matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$.

ii) Ainsi $A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \beta^2 + \beta + 1 \end{pmatrix}$ et comme β est réel le dernier coefficient ne peut être nul.

iii) Mais $e_2 \in E_2$, on doit donc avoir $(A^2 + A + I_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la contradiction est claire.

b) On ne peut avoir $\dim E_1 = 2$ (car $u \neq id_E$), on ne peut avoir $\dim E_1 = 1$, donc $\dim E_1 = 0$ et $\dim E_2 = 2$.

Soit e_1 un vecteur non nul de E_2. La seule valeur propre possible de u est 1 (car $u^3 = id_E$) et on vient de l'exclure. Donc $e_2 = f(e_1)$ n'est pas colinéaire à e_1 et (e_1, e_2) est une base de E.

Comme $e_1 \in E_2$, on a $(u^2 + u + id)(e_1) = 0$, soit :

$u(e_2) = u^2(e_1) = -e_1 - u(e_1) = -e_1 - e_2$ et donc :

$$M_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.08.

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ et E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit f un endomorphisme non nul de E nilpotent, ce qui signifie qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que $p \leqslant n$.

2. On suppose dans cette question uniquement que $p = n$. Résoudre l'équation $u^2 = f$, d'inconnue u endomorphisme de E.

3. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Soit g un endomorphisme de E.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q annulateur de g dont les racines sont exclusivement les valeurs propres de g.

b) Montrer que dans l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de g, il existe un polynôme annulateur de degré minimal. Quel lien existe-t-il entre Q et ce polynôme ?

c) On suppose dans cette question que g ne possède que 0 comme valeur propre. Montrer que g est nilpotent.

Solution :

1. On sait qu'il existe $x \neq 0$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. La famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est de cardinal p et est libre puique si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k f^k(x) = 0$, en composant par f^{p-1}, cela montre que $a_0 = 0$, puis en composant par f^{p-2}, etc.

Donc $p \leqslant n$.

2. Dans cette question $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Soit u tel que $u^2 = f$. Alors $u^{2n} = 0$ et $u^{2n-2} \neq 0$. Donc u est nilpotent, mais par la question précédente son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n. Donc $2n - 1 \leqslant n \Rightarrow n \leqslant 1$ ce qui n'est pas le cas et l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Les valeurs propres de f font partie des racines de tout polynôme annulateur, ici X^p. Donc $\mathrm{Spec}(f) \subseteq \{0\}$. Mais f est nilpotente donc non inversible et $\mathrm{Spec}(f) = \{0\}$.

L'endomorphisme f ne peut être diagonalisable, ne possédant qu'une unique valeur propre, sinon, il serait nul.

4. a) Tout endomorphisme g de E admet un polynôme annulateur, puisque la famille $(Id, g, g^2, \dots, g^{n^2})$ étant de cardinal $n^2 + 1$ est liée. Notons P un polynôme annulateur.
Le théorème de d'Alembert Gauss permet de décomposer P sous la forme

$$P(X) = C \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

où les (α_i) sont réels ou complexes et les m_i des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. On a ainsi $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} (g - \alpha_i Id)^{m_i} = 0$ et les facteurs en jeu commutent eux à deux.

Supposons qu'il existe i_0 tel que α_{i_0} ne soit pas valeur propre de g. L'endomorphisme $g - \alpha_{i_0} Id$ est donc inversible, tout comme $(g - \alpha_{i_0} Id)^{m_{i_0}}$. En ramenant ce facteur en début de factorisation et en multipliant par son inverse, on récupère un autre polynôme annulateur de degré inférieur dans lequel on a enlevé une racine qui n'est pas valeur propre de g. En procédant ainsi pour chacune des racines de P, on récupère un polynôme annulateur dont les racines sont exactement les valeurs propres de g. Notons le Q et q son degré.

b) Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(g) = 0\}$ et $\mathcal{D} = \{\deg(P), P \in \mathcal{A}\}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ est un sous ensemble de $\mathbb{N}^*$ minoré par 1 donc admet un élément minimal p_0 et il existe $P \in \mathcal{A}$ de degré p_0.

En utilisant un raisonnement identique au raisonnement précédent, les racines de P sont exactement les valeurs propres de g. Donc P divise Q.

c) Si g est un endomorphisme dont la seule valeur propre est 0, le polynôme Q est de la forme X^m et $g^m = 0$. Donc g est nilpotent. L'indice de nilpotence de g est donné par le degré du polynôme P trouvé dans la question précédente.

Exercice 2.09.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice d'ordre n, à coefficients réels, définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ soit : } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que u est diagonalisable.

2. Dans cette question, n est pair et on écrit $n = 2p$.

a) Montrer qu'il existe des plans vectoriels $F_1, \dots, F_p$ stables par u tels que l'on ait $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} F_k = \mathbb{R}^n$.

b) En déduire les valeurs propres de u ainsi qu'une base orthonormée de vecteurs propres de u.

3. Dans cette question, n est impair, et on écrit $n = 2p+1$. Déterminer les éléments propres de u.

4. On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A n'est pas diagonalisable.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. A quelles conditions A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

Solution :

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. La matrice A est symétrique réelle : elle est diagonalisable et l'endomorphisme u associé est diagonalisable.

2. a) Les plans demandés sont les plans $F_1, \ldots, F_p$, où $F_k = \text{Vect}(e_k, e_{2p-k+1})$, puisque $u(e_k) = e_{2p-k+1}$ et $u(e_{2p-k+1}) = e_k$.

La famille $(e_1, \ldots, e_{2p})$ étant une base, ces p plans sont bien en somme directe de somme $\mathbb{R}^{2p}$. De plus cette somme directe est orthogonale.

b) Soit u_k l'endomorphisme induit par la restriction de u à F_k. La matrice associée à u_k est $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit de la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $e_k + e_{2p-k+1}$ et une base orthonormée $\mathcal{B}_k$ de F_k formée de vecteurs propres de u_k est formée des vecteurs :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + e_{2p-k+1}) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - e_{2p-k+1})$$

Finalement u admet 1 et -1 pour valeurs propres et $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2p}$ formée de vecteurs propres de u.

3. On procède exactement de la même façon, en mettant tout de même à part le vecteur e_{p+1}, qui est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

4. On a $u(e_1) = e_n$ et $u(e_n) = 0$, donc $u^2(e_1) = u^2(e_n) = 0$.

Le rang de A est évidemment $n-1$ (par échelonnement des $n-1$ premières colonnes) tandis que le rang de u^2 est strictement inférieur à $n-1$.

Si A était diagonalisable, on aurait dans une base $\mathcal{B}$ adéquate $M_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(0, *, \ldots, *)$, les coefficients $*$ étant non nuls. On aurait alors $M_{\mathcal{B}}(u^2) = \text{diag}(0, *^2, \ldots, *^2)$, ce qui donnerait $\text{rg}(u^2) = n-1$.

D'où la contradiction.

5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à u.

$\rightarrow$ Si tous les coefficients a_i sont non nuls, alors la restriction de u à chacun des deux plans $\text{Vect}(e_1, e_4)$ et $\text{Vect}(e_2, e_3)$ est diagonalisable, car admettant deux valeurs propres opposées et donc A est $\mathbb{C}$-diagonalisable.

$\rightarrow$ Si par exemple $a_1 = 0$ et $a_4 \neq 0$, alors $e_4 \notin \text{Ker}\, u$ tandis que $e_4 \in \text{Ker}(u^2)$ et comme nous avons déjà fait remarquer que u diagonalisable impose $\text{Ker}\, u^2 = \text{Ker}\, u$, on en conclut que u n'est pas diagonalisable.

$\rightarrow$ Si $a_1 = a_4 = 0$, alors l'endomorphisme de $\text{Vect}(e_1, e_4)$ induit par u est l'endomorphisme nul et il n'y a pas de problème dans ce plan.

$\rightarrow$ Le raisonnement est le même pour les coefficients a_2 et a_3.

Bref A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ si et seulement si les coefficients anti-diagonaux équidistants des extrêmes sont simultanément nuls ou simultanément non nuls.

Exercice 2.10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n+1$.

On définit l'application f qui à tout $P \in E$ associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f(P)(x) = x^{2n+1} P\big(\frac{1}{x}\big)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. a) Déterminer $f \circ f$.

b) En déduire que f est diagonalisable (on pourra utiliser l'application $p = \frac{1}{2}(f + Id_E)$.)

3. Soit φ l'application définie sur $E \times E$ par :

pour $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$, $\varphi(P,Q) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k b_k$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

4. a) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de (E, φ).

b) En déduire que $\text{Ker}(f - Id_E)$ et $\text{Ker}(f + Id_E)$ sont supplémentaires orthogonaux.

c) Déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de f.

5. Les résultats précédents restent-ils valables si $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f(P)(x) = x^{2n} P\big(\frac{1}{x}\big) \text{ ?}$$

Solution :

1. On pose $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$. Alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f(P)(x) = x^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{a_k}{x^k} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^{2n+1-k} = \sum_{j=0}^{2n+1} a_{2n+1-j} x^j$$

Donc par identification (un polynôme est parfaitement défini par la fonction polynôme associée sur un ensemble infini) :

$$f(P) = \sum_{j=0}^{2n+1} a_{2n+1-j} X^j$$

2. a) On remarque que les coefficients de $f(P)$ sur la base canonique sont ceux de P pris dans l'ordre inverse. La matrice M de f dans cette base est donc antidiagonale de coefficients antidiagonaux valant 1. On a donc $M^2 = I_{2n+2}$ et $f^2 = Id$.

b) On pose $p = \dfrac{1}{2}(f + Id)$. L'endomorphisme f étant une symétrie, p est un projecteur (on le vérifie avec $p^2 = p$).
Tout projecteur est diagonalisable, ses valeurs propres étant 0 (associée à $\operatorname{Ker} p$) et 1 (associée à $\operatorname{Im} p$). Comme $f = 2p - I$, l'endomorphisme f est diagonalisable. Ses valeurs propres sont -1, le sous-espace propre associé étant $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(f + Id)$ et 1, le sous-espace propre associé étant $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(f - Id)$.

3. On vérifie que φ est bien définie et est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

4. a) On a : $\varphi(f(P), Q) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k} b_k = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k b_{2n+1-k} = \varphi(P, f(Q))$.

b) L'endomorphisme f étant symétrique, il est diagonalisable et les sous-espaces propres sont supplémentaires orthogonaux.
Comme $f \circ f = Id_E$, il y a deux sous-espaces propres $\operatorname{Ker}(f - Id_E)$ et $\operatorname{Ker}(f + Id_E)$ comme trouvés dans la question 2. De plus :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f - Id_E) &= \{P \in E \ / \ f(P) = P\} \\ &= \{(a_0, \dots, a_{2n+1}) \ / \ a_{2n+1-k} = a_k, \forall\, k \in [\![0, 2n+1]\!]\} \end{aligned}$$

Il suffit de faire varier k entre 0 et n et $\operatorname{Ker}(f - Id_E)$ est un sous-espace de dimension $n + 1$.
De même :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f + Id_E) &= \{P \in E \ / \ f(P) = -P\} \\ &= \{(a_0, \dots, a_{2n+1}) \ / \ a_{2n+1-k} = -a_k, \forall\, k \in [\![0, 2n+1]\!]\} \end{aligned}$$

Pour la même raison c'est un sous-espace de dimension $n + 1$.

5. Dans ce cas, si $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k X^k$, alors $f(P) = \sum\limits_{j=0}^{2n} a_{2n-j} X^j \in E$. L'application f est donc un endomorphisme de E tel que $f \circ f = Id_E$ et est donc diagonalisable.

L'application φ est un produit scalaire sur E et f est toujours symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Seules les dimensions des sous-espaces propres sont différentes.

En effet :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f - Id_E) &= \{P \in E \ / \ f(P) = P\} \\ &= \{(a_0, \dots, a_{2n}) \ / \ a_{2n-k} = a_k, \forall\, k \in [\![0, 2n]\!]\}. \end{aligned}$$

Comme $\dim E = 2n + 1$, l'élément a_n est quelconque et $\dim \operatorname{Ker}(f - Id_E) = n + 1$.
De même :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f + Id_E) &= \{P \in E \ / \ f(P) = -P\} \\ &= \{(a_0, \dots, a_{2n}) \ / \ a_{2n-k} = -a_k, \forall k \in [\![0, 2n]\!]\} \end{aligned}$$

C'est un sous-espace de dimension n, puisque l'on a $a_n = 0$.

Exercice 2.11.

Dans cet exercice, $E = \mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, D représente l'endomorphisme de dérivation $D : P \mapsto P'$.

1. Montrer que $\varphi : P \mapsto P\big(\frac{X}{2}\big)$ est un automorphisme de E. Les endomorphismes φ et D commutent-ils ?

2. Soit Φ l'application définie sur E par :

$$\text{pour tout } P \in E \text{ , } \Phi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}\big(\frac{X}{2}\big)$$

a) Montrer que Φ est bien définie et appartient à $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que $\varphi^{-1} \circ \Phi = (I - D)^{-1}$ et que $\Phi \circ \varphi^{-1} = (I - 2D)^{-1}$, où I représente l'endomorphisme identité de E.

c) En déduire que Φ est un automorphisme de E.

3. a) Déterminer les valeurs propres possibles de Φ.

b) Soit $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times E$ un couple propre de Φ, c'est-à-dire vérifiant $\Phi(P) = \lambda P$, avec $P \neq 0$. Montrer que cette équation est équivalente à l'équation

$$\mu P(X) = P(2X) - 2P'(2X)$$

où μ s'exprime en fonction de λ.

c) Soit P un polynôme propre unitaire (*i.e.* de coefficient dominant égal à 1) de Φ de degré n. Déterminer l'expression de ses coefficients en fonction de n.
Que peut-on en conclure ?

Solution :

1. L'application φ est linéaire et $\varphi^{-1} : P \mapsto P(2X)$.
Les applications φ et D ne commutent pas puisque :

$$\varphi(D(P)) = P'(\frac{X}{2}) \text{ et } D(\varphi(P)) = \frac{1}{2}P'\big(\frac{X}{2}\big).$$

2. a) Si P est un élément de E, alors si $p = \deg(P)$, il vient $P^{(p+1)}(X) = 0$. La somme proposée est donc finie.

L'application Φ est linéaire et définit un endomorphisme de E.

b) On remarque que, comme $D^{n+1} = 0$, on a $(I-D)(I+D+\cdots+D^n) = I-D^{n+1} = I$, donc $(I - D)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} D^k$.

Ainsi :

$$(\varphi^{-1} \circ \Phi)(P) = \varphi^{-1}\big(\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(\frac{X}{2})\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(X) = (I - D)^{-1}(P)$$

et

$$(\Phi\circ\varphi^{-1})(P)=\Phi(P(2X))=\sum_{k=0}^{+\infty}2^nP^{(k)}(X)=(I-2D)^{-1}(P)$$

c) On a $\Phi=\varphi\circ(I-D)^{-1}=((I-D)\circ\varphi)$ et $\Phi^{-1}=(I-D)\circ\varphi^{-1}$.

3. a) L'application Φ étant bijective, $\lambda=0$ ne peut être valeur propre. En regardant le coefficient dominant de l'équation $\Phi(P)=\lambda P$, si $\deg(P)=p$, il vient

$$\frac{1}{2^p}X^p=\lambda X^p \text{ et } \lambda=\frac{1}{2^p}$$

Les valeurs propres possibles de Φ sont donc $1,1/2,1/4,\dots,1/2^n$.

b) On a $(I-D)\circ\varphi^{-1}\circ\Phi=I$. Appliqué au polynôme propre P, il vient

$$\lambda(I-D)P(2X)=P(X) \text{ ce qui équivaut à } \lambda P(2X)-2\lambda P'(2X)=P(X)$$

Ainsi $\mu=\dfrac{1}{\lambda}$.

c) On pose $P(X)=X^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kX^k$, polynôme propre associé à la valeur propre éventuelle $\dfrac{1}{2^n}$.

L'équation précédente donne :

$$\begin{aligned}2^n(X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k)&=2^nX^n+\sum_{k=0}^{n-1}2^ka_kX^k-2nX^{n-1}-2\sum_{k=1}^{n-1}2ka_k2^{k-1}X^{k-1}\\&=2^nX^n+2^{n-1}a_{n-1}X^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}2^ka_kX^k-2nX^{n-1}-2\sum_{k=1}^{n-1}ka_k2^kX^{k-1}\\&=2^nX^n+2^{n-1}a_{n-1}X^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}2^ka_kX^k-2nX^{n-1}-\sum_{k=0}^{n-2}2^{k+2}(k+1)a_{k+1}X^k\end{aligned}$$

Ainsi : $\begin{cases}a_{n-1}=-\dfrac{n}{2^{n-2}}\\ a_k=-\dfrac{2^{k+2}(k+1)}{2^n-2^k}a_{k+1}\end{cases}$. Soit $a_k=(-1)^{n-k}\dfrac{2^{n-k}n!}{k!}\times\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{n-k}(2^j-1)}$.

Ainsi $1/2^n$ est effectivement valeur propre et on peut remplacer n par n'importe quel indice k, ce qui prouve que Φ est diagonalisable (et on a même une base de vecteurs propres échelonnée en degrés).

Exercice 2.12.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Dans tout cet exercice, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne une matrice carrée d'ordre n. On notera I_n la matrice identité d'ordre n.

1. Montrer que, si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker}A=\operatorname{Ker}A^2$.

2. On suppose que A^2 est diagonalisable.

a) Soit λ une valeur propre non nulle de A^2 et α tel que $\alpha^2=\lambda$.

Montrer que $\operatorname{Ker}(A^2-\lambda I_n)=\operatorname{Ker}(A-\alpha I_n)\oplus\operatorname{Ker}(A+\alpha I_n)$.

En déduire qu'il existe une base de $\operatorname{Ker}(A^2-\lambda I_n)$ formée de vecteurs propres de A.

b) Montrer que si $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$, alors A est diagonalisable.

Dans toute la suite, on suppose A à coefficients réels et on pose $B = {}^tAA$.

3. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles positives.

4. Montrer que $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} A$.

Dans toute la suite, A désigne une matrice antisymétrique réelle d'ordre n.

5. Montrer que les valeurs propres, dans $\mathbb{C}$, de A sont des imaginaires purs.

6. Montrer que A^2 est diagonalisable.

7. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution :

1. Si A est diagonalisable, alors A est de la forme $A = PDP^{-1}$ et $A^2 = PD^2P^{-1}$. De plus, comme D^2 est constituée des carrés des valeurs propres de A, les coefficients diagonaux nuls de D^2 sont les mêmes que ceux de D, donc $E_0(A) = E_0(A^2)$ soit $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$.

2. a) Soit $X \in \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)$. Alors, $AX = \alpha X$ et $A^2X = \alpha^2 X = \lambda X$ et $X \in \operatorname{Ker}(A^2 - \lambda I_n)$.
Ainsi, en raisonnant de manière analogue avec $-\alpha$:

$$\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n) + \operatorname{Ker}(A + \alpha I_n) \subset \operatorname{Ker}(A^2 - \lambda I_n),$$

la somme étant directe car α et $-\alpha$ sont distincts et un vecteur ne peut être propre pour α et $-\alpha$.
Réciproquement, soit $X \in \operatorname{Ker}(A^2 - \lambda I_n)$, i.e. $A^2X = \lambda X$.
Cherchons $(Y, Z) \in \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n) \times \operatorname{Ker}(A + \alpha I_n)$ tel que $X = Y + Z$.
Cela donne nécessairement : $X = Y + Z$, $AX = \alpha Y - \alpha Z$, et $Y = \frac{1}{2\alpha}(AX + \alpha X)$, $Z = \frac{1}{2\alpha}(-AX + \alpha X)$.
On vérifie par le calcul que ces vecteurs sont bien dans les sous-espaces souhaités et l'égalité demandée est assurée.

Pour conclure cette question, il suffit de procéder par concaténation d'une base de chacun des termes de cette somme directe (et donc ne rien faire si l'un de ces sous-espaces est réduit à $\{0\}$).

b) Comme $A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toutes les valeurs propres de A^2 non nulles possèdent deux racines carrées. Ainsi, comme A^2 est diagonalisable et en utilisant les mêmes notations que précédemment,

$$E = \operatorname{Ker}(A^2) \oplus \operatorname{Ker}(A^2 - \lambda_1 I_n) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(A^2 - \lambda_p I_n)$$
$$= \operatorname{Ker}(A) \oplus \operatorname{Ker}(A - \alpha_1 I_n) \oplus \operatorname{Ker}(A + \alpha_1 I_n) \cdots \oplus \operatorname{Ker}(A^2 - \alpha_p I_n) \oplus \operatorname{Ker}(A^2 + \alpha_p I_n).$$

Ainsi, A est bien diagonalisable.

3. Soit λ une valeur propre (complexe) de B. Alors, il existe $X \neq 0$ tel que : $BX = \lambda X$, d'où :

$$\lambda^t\overline{X}X = {}^t\overline{X}{}^tAAX = {}^t(\overline{AX})AX$$

et en revenant aux coefficients, ${}^t\overline{X}X \in \mathbb{R}_+^*$, ${}^t(\overline{AX})AX \in \mathbb{R}_+$, donc λ est réel et même réel positif ou nul.

4. $AX = 0 \implies {}^tAAX = 0$ et

${}^tAAX = 0 \implies {}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2 = 0 \implies AX = 0$

D'où la conclusion.

5. Soit λ une valeur propre de A et X un de ses vecteurs propres. Alors,
$\lambda^t\overline{X}X = {}^t\overline{X}AX = -{}^t\overline{X}{}^t\overline{A}X = -{}^t(\overline{AX})X = -\overline{\lambda}{}^t\overline{X}X$ et comme ${}^t\overline{X}X > 0$ il reste $\lambda = -\overline{\lambda}$ et $\lambda \in i\mathbb{R}$.

6. Comme A est antisymétrique réelle, A^2 est symétrique réelle donc diagonalisable.

7. D'après les questions précédentes,

$X \in \mathrm{Ker}(A^2) \iff X \in \mathrm{Ker}(-A^2) \iff X \in \mathrm{Ker}({}^tAA) \iff X \in \mathrm{Ker}\, A$.

On applique alors le résultat de la première question.

Exercice 2.13.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes 2 à 2 distincts. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on définit le polynôme L_i par : $L_i(X) = \prod\limits_{j\neq i, j=0}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

Les polynômes $L_0, \ldots, L_n$ sont appelés polynômes de Lagrange associés aux points $a_0, \ldots, a_n$.

1. a) Montrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

b) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$.

c) Ecrire la matrice de passage de $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ à $(1, X, \ldots, X^n)$.

d) On pose $P(X) = \prod\limits_{k=0}^{n}(X - a_k)$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Vérifier que $L_k = \dfrac{1}{P'(a_k)} \times \dfrac{P(X)}{X - a_k}$.

(Lorsque Q divise P, l'écriture $\dfrac{P}{Q}$ désigne simplement le polynôme quotient obtenu par division du polynôme P par le polynôme Q.)

On considère un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ non constant de degré n. On note $z_0, \ldots, z_{n-1}$ les racines complexes du polynôme $X^n + 1$.

Pour tout $t \in \mathbb{C}$, on pose $Q_t(X) = \dfrac{P(tX) - P(t)}{X - 1}$

On note $L_0, \ldots, L_{n-1}$ les polynômes de Lagrange associés aux points $z_0, \ldots, z_{n-1}$.

2. a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $Q_t(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

b) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $Q_t(1) = tP'(t)$.

3. a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L_k(X) = \dfrac{X^n + 1}{nz_k^{n-1}(X - z_k)}$.

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $tP'(t) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{2z_k P(tz_k)}{(z_k-1)^2} - \dfrac{P(t)}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{2z_k}{(z_k-1)^2}$
.

c) En appliquant ce dernier résultat à un polynôme P de degré n bien choisi, vérifier que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2z_k}{(z_k-1)^2} = -\frac{n^2}{2}$$

Solution :

1. a) Pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ et $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ ($\delta_{i,j}$ représente le symbole de Kronecker). Soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$.

Après évaluation en a_j pour $j \in [\![0,n]\!]$, on obtient : $0 = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = \lambda_j$.

La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est donc libre dans $\mathbb{C}_n[X]$. Comme elle comporte $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n+1$, c'est une base de cet espace.

b) Soient $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ les coordonnées de P dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$. En évaluant en a_j pour $j \in [\![0,n]\!]$, $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$, on trouve $P(a_j) = \lambda_j$.

c) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. D'après la question précédente, les coordonnées de X^k dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$ sont $(a_0^k, \ldots, a_n^k)$. La matrice de passage de $(L_0, \ldots, L_n)$ à $(1, X, \ldots, X^n)$ est donc égale à

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a_0^1 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

d) On remarque que $P'(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)$, ainsi, pour $i \in [\![0,n]\!]$, on a $P'(a_i) = \prod\limits_{j\neq i, j=1}^{n} (a_i - a_j)$, d'où $L_j(X) = \dfrac{P(X)}{P'(a_i)(X-a_i)}$

2. a) Le polynôme $R_t(X) = P(tX) - P(t)$ est de degré égal à $\deg(P) = n$ et vérifie $R_t(1) = 0$, ainsi $X-1$ divise $R_t(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $Q_t(X)$ appartient à $\mathbb{C}[X]$, avec $\deg(Q_t) = \deg(R_t) - 1 = n-1$.

b) On a $(X-1)Q_t(X) = P(tX) - P(t)$. En dérivant formellement, on obtient donc :

$$(X-1)Q_t'(X) + Q_t(X) = tP'(tX)$$

et en évaluant cette égalité en 1, on obtient $Q_t(1) = tP'(t)$.

3. a) Par définition des z_k, on a $T(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(X-z_k) = X^n+1$, et $T'(X) = nX^{n-1}$.

En appliquant la relation trouvée à la question 1. d), on obtient donc, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$L_k(X) = \frac{X^n+1}{nz_k^{n-1}(X-z_k)}$$

b) Soit $t \in \mathbb{C}$. Comme $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $Q_t(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on déduit de la question 1.*b*. que :

$$Q_t(X) = \sum_{k=0}^{n-1} Q_t(z_k)L_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(tz_k)-P(t)}{z_k-1} \times \frac{X^n+1}{nz_k^{n-1}(X-z_k)}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} tP'(t) = Q_t(1) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\frac{P(tz_k)-P(t)}{(z_k-1)nz_k^{n-1}(1-z_k)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2z_kP(tz_k)}{(z_k-1)^2} - \frac{P(t)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2z_k}{(z_k-1)^2}. \end{aligned}$$

car $z_k^n = -1$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, par définition des z_k.

c) Appliquons l'égalité précédente à $P = X^n$; on obtient :

$$nt^n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2z_kt^nz_k^n}{(z_k-1)^2} - \frac{t^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2z_k}{(z_k-1)^2}$$

En simplifiant par $t^n \neq 0$, on obtient en remarquant que $z_k^n = -1$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$n = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2z_k}{(z_k-1)^2} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2z_k}{(z_k-1)^2}$$

ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2z_k}{(z_k-1)^2} = -\frac{n^2}{2}$.

Exercice 2.14.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$.
Soit $E = \mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ayant pour matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $u = \sum_{j=1}^{n} e_j$ et $v = \sum_{j=1}^{n-1} e_j$.

On se propose de déterminer les valeurs propres de f de deux façons différentes.

1. Écrire un programme en *Scilab* affichant la matrice A lorsque l'utilisateur entre une valeur de n.

2. Montrer qu'il existe une matrice $D = \mathrm{diag}(0, 0, \ldots, 0, \alpha, \beta) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale (avec α et β deux réels non nuls), et une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

3. Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$. En déduire les valeurs propres de f.

4. a) Montrer que (u, v) est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

b) Soit λ une valeur propre non nulle de f et w un vecteur propre associé. Montrer que $w \in \mathrm{Im}\, f$.

c) Soit g la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$. Déterminer la matrice de g dans la base (u, v) et les valeurs propres de g.

d) En déduire les valeurs propres de f.

Solution :

1. Une proposition :

```
1. n=input('n=')
2. A=ones(n,n)
3. A(n,n)=0
```

2. La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Ainsi, il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Comme la matrice A est de rang 2 (les $n-1$ premières colonnes sont égales), alors d'après le théorème du rang, $\dim \ker f = n - 2$.

Ainsi D est de la forme $D = \mathrm{diag}(0, 0, \cdots, 0, \alpha, \beta)$ avec α et β deux réels non nuls.

3. On a $\mathrm{tr}(A) = n - 1$.

Comme $A^2 = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n & n-1 \\ n & n & \cdots & n & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ n & n & \cdots & n & n-1 \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \end{pmatrix}$, alors :

$$\mathrm{tr}(A^2) = n(n-1) + n - 1 = n^2 - 1$$

Deux matrices semblables ayant même trace, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D)$ et $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(D^2)$. Les valeurs propres de f vérifient donc le système

$$(S) \quad \begin{cases} (n-2)\times 0 + \alpha + \beta = n - 1 \\ (n-2)\times 0^2 + \alpha^2 + \beta^2 = (n-1)n + n - 1 = n^2 - 1 \end{cases}$$

Les valeurs propres de f autres que 0 sont donc

$$\alpha = \frac{n - 1 - \sqrt{(n-1)(n+3)}}{2} \text{ et } \beta = \frac{n - 1 + \sqrt{(n-1)(n+3)}}{2}$$

4. a) La famille (u, v) est génératrice de $\operatorname{Im} f$. Les vecteurs u et v étant non colinéaires, elles est aussi libre, donc c'est une base de ce sous-espace.

b) On a $w \in E_\lambda(f)$ donc $f(w) = \lambda w$; or, $w \neq 0$, donc par linéarité, $w = f\left(\frac{1}{\lambda}w\right)$, ainsi, $w \in \operatorname{Im} f$.

c) Par linéarité, $f(v) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} f(e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} u = (n-1)u$.
Toujours par linéarité, $f(u) = f(v + e_n) = f(v) + f(e_n) = (n-1)u + v$.
La matrice de g dans la base (u, v) est donc $B = \begin{pmatrix} n-1 & n-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi λ est valeur propre de g si et seulement si $B - \lambda I_2$ est non inversible, donc si et seulement si $(n-1-\lambda)(-\lambda) - (n-1) = 0$ ou encore $\lambda^2 - (n-1)\lambda - (n-1) = 0$.

Les valeurs propres de g sont donc

$$\alpha = \frac{n-1-\sqrt{(n-1)(n+3)}}{2} \text{ et } \beta = \frac{n-1+\sqrt{(n-1)(n+3)}}{2}$$

d) Notons w_1 et w_2 deux vecteurs propres de g associés aux valeurs propres α et β. Ces vecteurs sont non nuls et appartiennent à $\operatorname{Im} f$, ils sont donc aussi vecteurs propres de f associés aux valeurs propres α et β. En outre, d'après le théorème du rang, $\dim \ker f = n - 2$, donc 0 est valeur propre de f et $\dim E_0 = n - 2$.

Les valeurs propres de f sont donc $0, \alpha$ et β.

Exercice 2.15.

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A et ${}^tA$ la matrice transposée de A.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si elle est symétrique et si $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ et on note S_n^{++} l'ensemble de ces matrices.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M(t)$ par : $M(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2 & 1 \\ 1 & 1+t^2 \end{pmatrix}$.

a) Pour quelles valeurs de t a-t-on $M(t) \in S_2^{++}$? On notera O l'ensemble de ces valeurs.

b) Déterminer une matrice orthogonale $P(t)$ et une matrice diagonale $D(t)$ telles que l'on a :

$$M(t) = P(t)D(t)^tP(t)$$

2. On considère une matrice $A \in S_n^{++}$. On note Φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\Phi_A(X) = AX + XA$$

a) Justifier que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Ker}(\Phi_A) = \{0\}$ (on pourra montrer que si x est un vecteur colonne propre de A, alors on a nécessairement $Xx = 0$).
En déduire l'existence de l'inverse de Φ_A que l'on notera Ψ_A.

b) On suppose dans un premier temps que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale appartenant à S_n^{++}. Soit $Y = (y_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer la matrice X unique solution de l'équation $\Phi_D(X) = Y$. En déduire que

$$\Psi_D(Y) = \big(\frac{y_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j}\big)_{1\leq i,j\leq n}$$

c) On suppose maintenant que $A \in S_n^{++}$. Montrer que l'on peut écrire $A = PD\,{}^tP$, avec P orthogonale et D diagonale. Montrer que $\Psi_A(Y) = P\Psi_D({}^tPYP)\,{}^tP$.

3. On revient aux matrices $M(t)$ de la première question.

Pour $t \in O$, résoudre l'équation $M(t)X + XM(t) = I$.

Solution :

1. a) Comme $M(t)$ est symétrique, il suffit de déterminer $\sigma(M(t))$. On peut procéder de façon classique ou bien remarquer que $M(t) = M(0) + t^2I$. La matrice $M(0)$ est bien connue et ses valeurs propres sont 0 et 2. On en déduit immédiatement que $\sigma(M(t)) = \{t^2, 2+t^2\}$. Il en résulte que $M(t) \in S_2^{++}$ si et seulement si $t \in \mathbb{R}^*$.

b) Il est clair que $(1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $2 + t^2$. Un vecteur propre associé à t^2 lui est orthogonal, par suite $(-1, 1)$ convient.
On peut donc prendre :

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D(t) = \begin{pmatrix} 2+t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

2. a) Les règles de calcul sur les matrices assurent que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit X tel que $\Phi_A(X) = 0$. Supposons que $Ax = \lambda x$, alors il vient

$$0 = AXx + \lambda Xx = (A + \lambda I)x.$$

Comme $A \in S_n^{++}$, on a $\sigma(A) \in \mathbb{R}_+^*$, et par suite $\lambda > 0$ et $A+\lambda I$ est inversible, par conséquent $x = 0$.
L'endomorphisme Φ_A est donc injectif et par suite bijectif puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

b) On peut le faire par calcul matriciel, ou bien écrire :

$$\begin{aligned} y_{i,j} &= \langle [DX + XD]\, e_j, e_i\rangle = \langle Xe_j, De_i\rangle + \lambda_j \langle Xe_j, e_i\rangle = (\lambda_j + \lambda_i)\langle Xe_j, e_i\rangle \\ &= (\lambda_j + \lambda_i)x_{i,j}. \end{aligned}$$

c) En remplaçant la matrice A par $PD{}^tP$ dans l'équation et en multipliant à gauche par ${}^tP$ et à droite par P on voit que l'équation $AX+XA = Y$ est équivalente à $D\,[{}^tPXP] + [{}^tPXP]\,D = {}^tPYP$.

D'où $\Psi_D({}^tPYP) = {}^tPXP = {}^tP\Psi_A(Y)P$, d'où l'on déduit la formule souhaitée puisque P est une matrice orthogonale.

3. Pour $t \in O$, il résulte des questions précédentes que l'équation a une unique solution qui est :

$$X = P(t)\Psi_{\sqrt{D(t)}}({}^tP(t)(I)P(t)){}^tP(t) = P\Psi_{\sqrt{D(t)}}({}^tP(I)P){}^tP = P\Psi_{\sqrt{D(t)}}(I){}^tP.$$

Par suite, on obtient :

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2(2+t^2)}&0\\0&\dfrac{1}{2t^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2t^2(2+t^2)}\begin{pmatrix}1+t^2&-1\\-1&1+t^2\end{pmatrix}$$

Exercice 2.16.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer qu'on définit sur E un produit scalaire en posant :

$$\forall\,(P,Q)\in E^2, \langle P,Q\rangle=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

On note $\|.\|$ la norme associée.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{Q}=\big(Q_0,Q_1,\dots,Q_n\big)$ orthonormée de E, pour ce produit scalaire, telle que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\deg Q_k=k$.

3. a) Que dire de l'ensemble $F=\big\{P\in E, P(0)=0\big\}$?

   b) En déterminer une base à l'aide des éléments de $\mathcal{Q}$.

4. Justifier que : $U=Q_0+\sum\limits_{j=1}^{n}Q_j(0)\,Q_j$ appartient à $F^{\perp}$.

5. Montrer que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a : $\langle Q_k,Q_k'\rangle=0$.

6. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. En calculant de deux façons

$$I_k=\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\big[-\big(Q_k(t)\big)^2\,\mathrm{e}^{-t}\big]\,dt$$

déterminer la valeur de $\big[Q_k(0)\big]^2$.

7. Calculer $\delta=\min\big\{||Q_0-P||, P\in F^{\perp}\big\}$ et $d=\min\big\{||Q_0-P||, P\in F\big\}$.

Solution :

1. Comme pour tous polynômes P et Q, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\times P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}=0$ et comme les fonctions à intégrer sont continues sur $\mathbb{R}_+$, la convergence des intégrales rencontrées résulte de la règle de Riemann. On vérifie alors sans peine que l'on a une forme bilinéaire symétrique définie positive.

2. L'existence de $\mathcal{Q}$ s'obtient en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1,X,\dots,X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. a) On a $F=\mathrm{Vect}(X,\dots,X^n)$ qui est donc un hyperplan, (on peut aussi dire que $F=\mathrm{Ker}(\varphi)$, où φ est la forme linéaire $P\mapsto P(0)$).

b) La famille $\big(Q_i-Q_i(0)\big)_{1\le i\le n}$ est libre de cardinal n et formée de vecteurs de F, donc c'est une base de F.

4. Puisque la famille $(Q_j)_{1\le j\le n}$ est orthonormée,

$$\langle U, Q_i - Q_i(0)\rangle = \langle Q_0, Q_i - Q_i(0)Q_0\rangle + \sum_{j=1}^{n}\big[Q_j(0)\,\langle Q_j, Q_i - Q_i(0)Q_0\rangle\big]$$
$$= -Q_i(0)\,\langle Q_0, Q_0\rangle + Q_i(0)\langle Q_i, Q_i\rangle = 0$$

Donc $U \in F^{\perp}$.

5. On a : $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \deg(Q'_k) = k-1$, donc

$$Q'_k \in \mathrm{Vect}\big(1, X, \ldots, X^{k-1}\big) = \mathrm{Vect}\big(Q_0, \ldots, Q_{k-1}\big) \text{ orthogonal à } Q_k.$$

6. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, en osant l'abus d'écriture habituel :

$$I_k = \int_0^{+\infty} \big[-\big(Q_k(t)\big)^2 \mathrm{e}^{-t}\big]' dt = \big[-\big(Q_k(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t}\big]_0^{+\infty} = \big[Q_k(0)\big]^2$$

$$I_k = \int_0^{+\infty} \big[-2Q_k(t)\,Q'_k(t)\mathrm{e}^{-t} + \big(Q_k(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t}\big] dt = -2\langle Q_k, Q'_k\rangle + ||Q_k||^2 = 0 + 1$$

d'après la question 3. Donc :

$$\big[Q_k(0)\big]^2 = 1$$

7. Le minimum est obtenu pour le projeté orthogonal P_1 de $Q_0 = 1$ sur $F^{\perp}$.

On a : $||U||^2 = 1 + \sum\limits_{j=1}^{n}\big[Q_j(0)\big]^2 = n+1$, d'où $P_1 = \dfrac{\langle Q_0, U\rangle}{||U||^2}\, U = \dfrac{1}{n+1}\, U$.

Puis

$$\delta = ||Q_0 - P_1|| = ||Q_0 - \frac{1}{n+1}\, U|| = \frac{1}{n+1}||nQ_0 - \sum_{j=1}^{n} Q_j(0)Q_j||$$
$$= \frac{1}{n+1}\sqrt{n^2 + \sum_{j=1}^{n} 1^2} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Enfin, d'après le théorème de Pythagore : $1 = ||Q_0||^2 = \delta^2 + d^2$ et donc

$$d = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Exercice 2.17.

Soit n un entier naturel avec $n \geqslant 3$. On note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on assimile à $\mathbb{R}^n$. Soit A, B deux éléments de E non colinéaires. On pose :

$$M = A\,{}^tB + B\,{}^tA$$

1. Déterminer le rang de M ainsi que son noyau.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et $E_1 = \mathrm{Vect}(A, B)$.

2. a) Montrer que la restriction de f à E_1 induit un endomorphisme de E_1 noté φ.
   b) Donner la matrice de φ dans la base (A, B).

3. a) Déterminer les valeurs propres de φ.
   b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

4. a) En déduire les valeurs propres de f.
   b) Montrer que f est diagonalisable.

Solution :

1. Notons $\langle X, Y\rangle$ le réel ${}^tXY$. On a alors, pour $X \in E$

$$MX = A^tBX + B^tAX = \langle B, X\rangle A + \langle A, X\rangle B \in \mathrm{Vect}(A, B)$$

Ainsi $X \in \operatorname{Ker} M$ si et seulement si $\langle B, X\rangle A + \langle A, X\rangle B = 0$, soit si et seulement si $\langle B, X\rangle = \langle A, X\rangle = 0$, puisque A, B sont non colinéaires. Ceci correspond à un système de deux équations non proportionnelles à n inconnues. Ainsi $\operatorname{Ker} M$ est de dimension $n - 2$ et $\operatorname{Im} M = \mathrm{Vect}(A, B)$ est de rang 2.

2. a) On a $f(A) = \langle A, B\rangle A + ||A||^2 B$ et $f(B) = ||B||^2 A + \langle A, B\rangle B$. Ceci montre que E_1 est stable par f.

b) La matrice demandée est donc

$$M_1 = \begin{pmatrix} \langle A, B\rangle & ||B||^2 \\ ||A||^2 & \langle A, B\rangle \end{pmatrix}$$

3. a) $\det(M_1 - \lambda I_2) = (\langle A, B\rangle - \lambda)^2 - \|A\|^2\|B\|^2$.

Les valeurs propres de la matrice M_1 sont $\langle A, B\rangle \pm ||A||\ ||B||$.

b) La matrice M_1 est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant deux valeurs propres. Elle est donc diagonalisable.

4. a) Les valeurs propres de f sont les deux valeurs trouvées dans la question précédente $\langle A, B\rangle \pm ||A||\ ||B||$, ainsi que 0 de sous-espace propre associé $\operatorname{Ker} f$.

b) L'endomorphisme f est diagonalisable. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $\operatorname{Ker} f$ qui est de dimension $n - 2$. Il reste deux valeurs propres distinctes (car $A \neq 0, B \neq 0$) ; chaque valeur propre admet un sous-espace propre de dimension 1.

Exercice 2.18.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la famille d'éléments de E définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall\, k \in [\![1, n]\!], P_k(X) = \frac{1}{k!}X(X - k)^{k-1}$$

1. Justifier que $\mathcal{F}$ est une base de E.

2. Vérifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k'(X + 1) = P_{k-1}(X)$, où P_k' désigne le polyôme dérivé de P_k.

3. Soit f l'application qui à tout élément P de E associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(X) - P'(X + 1)$$

a) Prouver que f est un endomorphisme de E, et donner sa matrice A dans la base $\mathcal{F}$. Justifier que f est un automorphisme de E.

b) L'automorphisme f est-il diagonalisable ? Quels sont ses sous-espaces propres ?

c) Déterminer la matrice inverse de A.

4. On pose $f^0 = id_E$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = f \circ f^{m-1}$. Démontrer que pour tout polynôme P de E, et tout $m \in \mathbb{N}$:

$$f^m(P)(X) \; = \; \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i)$$

où $P^{(i)}$ désigne la dérivée $i^{\text{ème}}$ de P.

Solution :

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$. La famille est échelonnée en degrés et est une base de E.

2. Si $k = 1$, $P_1'(X+1) = 1 = P_0(X)$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, le calcul donne :

$$\begin{aligned} P_k'(X+1) &= \frac{1}{k!}(X+1-k)^{k-1} + \frac{k-1}{k!}(X+1)(X+1-k)^{k-2} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} X(X+1-k)^{k-2} = P_{k-1}(X) \end{aligned}$$

3. a) La linéarité résulte des propriétés des opérations et la considération des degrés montre que f est un endomorphisme. Par le résultat de la question 2. on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est triangulaire sans zéro sur sa diagonale principale donc A est inversible. Ainsi f est un automorphisme de E.

b) Le réel 1 est la seule valeur propre de A, donc si A était diagonalisable, A serait semblable à la matrice I_n ce qui entraînerait que $A = I_n$, ce qui n'est pas. Ni A ni f ne sont diagonalisables.
Un polynôme propre de f vérifie $f(P) = P$ soit $P(X) - P'(X) = P(X)$ d'où $P'(X) = 0$ et donc le seul sous-espace propre de f est la droite vectorielle des polynômes constants.

c) Pour déterminer la matrice inverse de A, soit on écrit le système $Y = AX$ à inverser, soit on écrit $A = I - N$ où les puissances de N sont évidentes et par l'identité géométrique, on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On pose pour tout entier naturel m,

«$\mathcal{H}(m) : \forall P \in E, f^m(P)(X) = \sum\limits_{i=0}^{m}(-1)^i\dbinom{m}{i}P^{(i)}(X+i).$»

• $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

• Supposons $\mathcal{H}(m)$ vérifiée pour un certain rang m. On a par linéarité de f :

$$\begin{aligned}
f^{m+1}(P)(X) = f\circ f^m(P)(X) &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\tbinom{m}{i}f\Big(P^{(i)}(X+i)\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\tbinom{m}{i}\Big(P^{(i)}(X+i)-P^{(i+1)}(X+i+1)\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\tbinom{m}{i}P^{(i)}(X+i)-\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\tbinom{m}{i}P^{(i+1)}(X+i+1)\\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\tbinom{m}{i}P^{(i)}(X+i)-\sum_{j=1}^{m+1}(-1)^{j-1}\tbinom{m}{j-1}P^{(j)}(X+j)\\
&= (-1)^0\tbinom{m}{0}P^{(0)}(X+0)+\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\Big(\tbinom{m}{i}+\tbinom{m}{i-1}\Big)P^{(i)}(X+i)\\
&\qquad +(-1)^{m+1}\tbinom{m}{m}P^{(m+1)}(X+m+1)
\end{aligned}$$

Soit$f^{m+1}(P)(X) = \sum\limits_{i=0}^{m+1}(-1)^i\tbinom{m+1}{i}P^{(i)}(X+i)$. Ce qui établit $\mathcal{H}(m+1)$.

On conclut par le principe de récurrence

Exercice 2.19.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note S_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n, n'ayant que des valeurs propres strictement positives.

1. Soit A une matrice symétrique réelle.

Montrer que $A \in S_n^{++}$ si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^tXAX > 0$.

2. Soit $A \in S_n^{++}$. Montrer qu $A^{-1} \in S_n^{++}$ et que A et A^{-1} admettent une base commune de vecteurs propres.

3. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) \geqslant ||X||^4$.

4. On note $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et on appelle κ_A le réel positif défini par : $\kappa_A^2 = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$.

a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, si $Y = {}^tPX = \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, alors

$$({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) = \kappa_A\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_n}y_i^2\right)\times\kappa_A\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_1}{\lambda_i}y_i^2\right)$$

b) En déduire que $\sqrt{({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X)} \leqslant \dfrac{\kappa_A}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\big(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_n}+\dfrac{\lambda_1}{\lambda_i}\big)y_i^2$.

c) Étudier $f : t \mapsto \dfrac{t}{\lambda_n}+\dfrac{\lambda_1}{t}$ sur l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_n]$.

d) Montrer que $({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) \leqslant \big(\frac{\kappa_A+\kappa_A^{-1}}{2}\big)^2||X||^4$.

Solution :

1. Soit A symétrique réelle telle que ${}^tXAX > 0$ pour $X \neq 0$. Soit (λ, X) un couple propre de A. Alors : ${}^tXAX = \lambda||X||^2 > 0$ entraîne $\lambda > 0$ puisque X est non nul.

Réciproquement si A ne possède que des valeurs propres strictement positives, la matrice A étant diagonalisable dans une base orthonormée, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PD{}^tP$ et en posant $Y = {}^tPX$. Puisque P est inversible, on a $X \neq 0 \implies Y \neq 0$ et :

$${}^tXAX = {}^tXPD{}^tPX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0$$

2. La matrice A est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre de A et si $A = PD{}^tP$ alors $A^{-1} = PD^{-1}{}^tP$.

3. En utilisant les deux questions précédentes et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) = ({}^tYDY)({}^tYD^{-1}Y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \times \sum_{i=1}^n \tfrac{1}{\lambda_i} y_i^2$$

Donc :

$$({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) \geqslant \Big(\sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} y_i \times \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} y_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^2 = ||Y||^4 = ||X||^4.$$

Car le fait que P soit orthogonale montre que $\|Y\| = \|X\|$.

4. a) On sait par la question précédente que :

$$({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} y_i^2 = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_n} y_i^2 \times \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i} y_i^2$$

Il n'y a plus qu'à placer deux fois κ_A.

b) Si $a, b > 0$, on a : $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$. Ainsi en posant

$$a = \kappa_A \times \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_n} y_i^2 \text{ et } b = \kappa_A \times \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i} y_i^2$$

il vient

$$\big(({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X)\big)^{1/2} \leqslant \frac{\kappa_A}{2} \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_n} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\Big) y_i^2$$

c) Une étude rapide la fonction f montre que cette fonction est positive et admet un minimum en $\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}$.

De plus $f(\lambda_1) = f(\lambda_n) = 1 + \kappa_{A^{-1}}^2$. Ainsi $f(t) \leqslant 1 + \kappa_{A^{-1}}^2$.

d) Finalement

$$\big(({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X)\big)^{1/2} \leqslant \frac{\kappa_A}{2} \times (1 + \kappa_{A^{-1}}^2)||Y||^2 = \Big(\frac{\kappa_A + \kappa_A^{-1}}{2}\Big)||X||^2$$

Exercice 2.20.

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, p un entier naturel non nul, $\big(x_i\big)_{1\leq i\leq p}$ une famille d'éléments de I distincts deux à deux et $\big(a_i\big)_{1\leq i\leq p}$ et $\big(b_i\big)_{1\leq i\leq p}$ deux familles quelconques de réels.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $P(a) = P'(a) = 0$ si et seulement si $(X-a)^2$ divise P.

2. Montrer que l'application Φ de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2p}$ définie par :

$$\Phi(P) = \big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_p), P'(x_1), P'(x_2), \ldots, P'(x_p)\big)$$

est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p}$.

3. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que, pour tout entier $i \in [\![1,p]\!]$, on a $P_H(x_i) = a_i$ et $P'_H(x_i) = b_i$.

Pour tout entier $i \in [\![1,p]\!]$, on considère le polynôme $Q_i = \displaystyle\prod_{1\leq j\leq p, j\neq i} \Big(\frac{X-x_j}{x_i-x_j}\Big)^2$.

4. a) Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Calculer $Q_i(x_k)$ pour tout entier $k \in [\![1,p]\!]$ et démontrer qu'on a $Q'_i(x_k) = 0$ si $k \neq i$ et $Q'_i(x_i) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq j\leq p\\ j\neq i}} \frac{2}{x_i-x_j}$.

b) Démontrer que le polynôme P défini par la formule :

$$P = \sum_{i=1}^{p} \big[(1 - Q'_i(x_i)(X-x_i))a_i + (X-x_i)b_i\big]Q_i$$

est le polynôme P_H défini à la question 3.

Solution :

1. On suppose $P(a) = P'(a) = 0$. La formule de Taylor pour les polynômes donne (les sommes en jeu étant finies)

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Ainsi $P(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = (X-a)^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2}$ et $(X-a)^2$ divise P.

Réciproquement si $P(X) = (X-a)^2 Q(X)$, on a

$$P'(X) = (X-a)(2Q(X) + (X-a)Q'(X))$$

et $P(a) = P'(a) = 0$.

2. L'application Φ est linéaire par linéarité de la dérivation.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a $P(x_i) = P'(x_i) = 0$. On a donc $P(X) = (X-x_1)^2 Q(X)$ et $P(x_2) = P'(x_2) = 0$ donne $Q(x_2) = Q'(x_2) = 0$ et Q est de la forme $Q(X) = (X-x_2)^2 R(X)$; on continue ainsi et le produit $\prod_{i=1}^{p}(X-x_i)^2$ divise P, ce diviseur a un degré plus grand que celui de P et $P=0$. Ainsi Φ est injective donc bijective par égalité des dimensions de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ et $\mathbb{R}^{2p}$.

3. Le $2p$-uplet $(a_1,\cdots,a_p,b_1,\cdots,b_p)\in\mathbb{R}^{2p}$ admet un unique antécédent par Φ noté P_H.

4. a) Si $p\neq 1$, les x_k pour $k\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}$ sont des racines de multiplicité 2 de Q_i donc $Q_i(x_k)=Q_i'(x_k)=0$. et $Q_i(x_i)=\prod_{1\leq j\leq p, j\neq i}\big(\dfrac{x_i-x_j}{x_i-x_j}\big)^2=1$

En utilisant la dérivée de Q_i, on a : $Q_i'=Q_i\sum_{1\leq j\leq p, j\neq i}\dfrac{2(X-x_j)}{(x_i-x_j)^2}$, et

$$Q_i'(x_i)=\sum_{1\leq j\leq p, j\neq i}\frac{2}{x_i-x_j}$$

On vérifie que cette formule est valable également pour $p=1$.

b) Pour $i\in[\![1,p]\!]$, on a :

$\deg(Q_i)=2p-2$ (même si $p=1$), et

$\deg\big[\,(1-Q_i'(x_i)(X-x_i))\,a_i+(X-x_i)b_i\big]\leqslant 1$.

Par produit :

$$\begin{aligned}&\deg\Big(\big[\big(1-Q_i'(x_i)(X-x_i)\big)a_i+(X-x_i)b_i\big]Q_i\Big)\\&\qquad=\deg\big[\big(1-Q_i'(x_i)(X-x_i)\big)a_i+(X-x_i)b_i\big]+\deg(Q_i)\leqslant 2p-1\end{aligned}$$

Par somme, $\deg P\leqslant 2p-1$ ainsi $P\in\mathbb{R}_{2p-1}[X]$.

Soit $j\in[\![1,p]\!]$. Il suffit d'établir que $P(x_j)=a_j$ et $P'(x_j)=b_j$. À l'aide de la question précédente :

$$\begin{aligned}P(x_j)&=\sum_{i=1}^{p}\big[\big(1-Q_i'(x_i)(x_j-x_i)\big)a_i+(x_j-x_i)b_i\big]Q_i(x_j)\\&=\big(1-Q_j'(x_j)(x_j-x_j)\big)a_j+(x_j-x_j)b_j=a_i\end{aligned}$$

De plus $P'=\sum_{i=1}^{p}\Big(\big[-Q_i'(x_i)a_i+b_i\big]Q_i+\big[\big(1-Q_i'(x_i)(X-x_i)\big)a_i+(X-x_i)b_i\big]Q_i'\Big)$

donc

$$P'(x_j)=\sum_{i=1}^{p}\Big(\big[-Q_i'(x_i)a_i+b_i\big]Q_i(x_j)+\big[\big(1-Q_i'(x_i)(x_j-x_i)\big)a_i+(x_j-x_i)b_i\big]Q_i'(x_j)\Big)$$

À l'aide de la question précédente :

$$\begin{aligned}P'(x_j)&=\Big(\big[-Q_i'(x_i)a_i+b_i\big]+\big[\big(1-Q_i'(x_i)(x_i-x_i)\big)a_i+(x_i-x_i)b_i\big]Q_i'(x_i)\Big)\\&=-Q_i'(x_i)a_i+b_i+a_iQ_i'(x_i)=b_j\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait.

Exercice 2.21.

Pour $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose $\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\\vdots\\\overline{x_n}\end{pmatrix}$ et

$$\|X\| = \sqrt{{}^t\overline{X}X} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}\times x_k}$$

(on rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a : ${}^tXSX \leqslant \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$.

2. a) Déterminer les éléments propres de la matrice $S = (s_{k,\ell})_{1\leq k,\ell\leq n}$ suivante :

$$s_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \neq \ell \\ 0 & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

b) En déduire que si $x_1, \ldots, x_n$ sont réels, on a : $\sum\limits_{1\leq k<\ell\leq n} x_k x_\ell \leq \dfrac{n-1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} x_k^2$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = \alpha + i\beta$, avec α et β réels, une valeur propre complexe de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

a) Montrer que ${}^tX(A - {}^tA)\overline{X} = -2i\beta\, {}^t\overline{X}X$.

b) Etablir l'inégalité : $|\beta| \leqslant \dfrac{n-1}{2} \max\limits_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}|$.

Solution :

1. La matrice S est symétrique réelle donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et plus précisément : Il existe une matrice P orthogonale (${}^tP$ étant obtenue en cherchant les vecteurs colonnes propres pour S), une matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale telles que $S = {}^tPDP$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En posant $Y = PX$ il vient :

$${}^tXSX = {}^t(PX)D(PX) = {}^tYDY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant (\max_{1\leq k\leq n} \lambda_k)||Y||^2$$

La matrice P étant orthogonale, on a : $||Y||^2 = {}^tX{}^tPPX = {}^tXX = ||X||^2$, ce qui termine la question.

2. a) On remarque que $S + I = J$, la matrice J ne comportant que des 1. La matrice J est symétrique réelle, donc diagonalisable. Elle est de rang 1 ; ainsi 0 est valeur propre de sous-espace propre associé $\text{Ker}\, J$ de dimension $(n-1)$.

La valeur propre manquante, λ, est la trace ($\lambda = n$) de sous-espace propre associé $\text{Vect}\, U$, avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $SX = \mu X$ si et seulement si $JX = (S+I)X = (\mu+1)X$. Les valeurs propres de S sont donc $\lambda = -1$ de sous-espace propre associé $\text{Ker}\, J$ (d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$), et $\lambda = n-1$ de sous-espace propre associé $\text{Vect}(U)$

b) On utilise la première question :

$$^tXSX \leqslant (n-1)||X||^2, \text{ donc } \sum_{1\leq k<\ell\leq n} x_k x_\ell \leqslant \frac{n-1}{2}\sum_{k=1}^n x_k^2$$

puisqu'on ne somme que sur la moitié haute de la matrice S.

3. a) Utilisons la matrice $M = A - {}^tA$ qui est antisymétrique, donc à diagonale nulle et dont les éléments sont de la forme $a_{k,\ell} - a_{\ell,k}$.

On a alors, puisque $AX = \lambda X$ entraîne $A\overline{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$:

$$\begin{aligned} {}^tX(A - {}^tA)\overline{X} &= {}^tXA\overline{X} - {}^t(AX)\overline{X} = \overline{\lambda}{}^tX\overline{X} - \lambda{}^tX\overline{X} = -2i\,\mathrm{Im}(\lambda){}^tX\overline{X} \\ &= -2i\beta\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \end{aligned}$$

Pour conclure il n'y a plus qu'à remarquer que ${}^t\overline{X}X = {}^tX\overline{X}(= \sum_{k=1}^n |x_k|^2)$

b) Mais on a également :

$${}^tX(A - {}^tA)\overline{X} = \sum_{1\leq k,\ell\leq n} x_k(a_{k,\ell} - a_{\ell,k})\overline{x_\ell}$$

et donc :

$$|{}^tX(A - {}^tA)\overline{X}| \leqslant \max_{1\leq k,\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \sum_{1\leq k,\ell\leq n} |x_k\overline{x_\ell}|$$

Si $k = \ell$, $|a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| = 0$ et on peut permuter les rôles de k et ℓ, donc :

$$\begin{aligned} |{}^tX(A - {}^tA)\overline{X}| &\leqslant \max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \sum_{1\leq k,\ell\leq n} |x_k||\overline{x_\ell}| \\ &\leqslant \max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \sum_{1\leq k,\ell\leq n, k\neq\ell} |x_k||x_\ell| \end{aligned}$$

Soit :

$$|{}^tX(A - {}^tA)\overline{X}| \leqslant 2\max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \sum_{1\leq k<\ell\leq n} |x_k||x_\ell|$$

Et par le résultat de la question 2. b) :

$$|{}^tX(A - {}^tA)\overline{X}| \leq 2\max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \times \frac{n-1}{2}\sum_{k=1}^n |x_k|^2$$

Ainsi : $|-2i\beta\sum_{k=1}^n |x_k|^2| \leqslant \max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \times (n-1)\sum_{k=1}^n |x_k|^2$

Comme X est une colonne propre, il ne s'agit pas de la colonne nulle et en simplifiant par le nombre réel strictement positif $\sum_{k=1}^n |x_k|^2$:

$$|\beta| \leqslant \frac{n-1}{2}\max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}|$$

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.01.

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On dispose de n urnes. On y place aléatoirement des jetons, un par un, indépendamment les uns des autres.

Pour $j \geqslant 1$, on note X_j le nombre aléatoire d'urnes non vides après avoir placé les j premiers jetons.

1. a) Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X_j ? Déterminer les lois de X_1 et X_2.

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \geqslant 1$, déterminer les probabilités conditionnelles

$$P_{(X_j=i)}(X_{j+1} = k)$$

c) En déduire la loi de X_{j+1} en fonction de la loi de X_j.

2. On considère la suite $(Q_j)_{j\geq 1}$ de fonctions polynômes définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, j \in \mathbb{N}^*, Q_1(x) = x^{n-1} \text{ et } Q_{j+1}(x) = Q_j(x) + \frac{1-x}{n} Q_j'(x)$$

a) Montrer que pour tout $j \geqslant 1$:

$$Q_j(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (x-1)^i (1 - \frac{i}{n})^{j-1} \binom{n-1}{i}$$

b) Pour tout entier $j \geqslant 1$, soit la fonction G_j définie par :

$$G_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=1}^{n} P(X_j = k) x^{n-k}$$

Pour un réel x fixé, vérifier que les suites $(G_j(x))_{j\geq 1}$ et $(Q_j(x))_{j\geq 1}$ sont égales et en déduire l'expression des $P(X_j = n)$.

c) En déduire que pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (1 - \frac{i}{n})^{j-1} \binom{n-1}{j} = 0$.

Solution :

1. a) Le nombre d'urnes non vides X_j vérifie : $1 \leqslant X_j \leqslant \min(j, n)$.

On a : $P(X_1 = 1) = 1$; $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{n}$ (on a une chance sur n pour que le deuxième jeton arrive dans la même urne que le premier), donc par passage au complémentaire $P(X_2 = 2) = \dfrac{n-1}{n}$.

b) Soit $j \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant j+1$:
$P_{(X_j=k)}(X_{j+1} = k) = \dfrac{k}{n}$, $P_{(X_j=k-1)}(X_{j+1} = k) = \dfrac{n-k+1}{n}$,
sinon $P_{(X_j=i)}(X_{j+1} = k) = 0$.
Car en plaçant un jeton, le nombre d'urnes non vides ne peut que rester inchangé ou bien augmenter d'une unité (le résultat vaut même pour $k = 1$ et bien sûr pour $k = n$).

c) L'ensemble des $(X_j = i)$, pour $0 \leqslant i \leqslant \min(j, n)$ est un système complet d'événements, donc :

$$\begin{aligned} P(X_{j+1} = k) &= \sum_{i=0}^{\min(j,n)} P_{(X_j=i)}(X_{j+1} = k)P(X_j = i) \\ &= \frac{k}{n}P(X_j = k) + \frac{n-k+1}{n}P(X_j = k-1). \end{aligned}$$

2. a) pour $j = 1$, on a : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(x-1)^i(1-\tfrac{i}{n})^{1-1}\binom{n-1}{i} = (1+(x-1))^{n-1} = x^{n-1}$.

Soit $j \geqslant 1$, on suppose que $Q_j(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(x-1)^i(1-\tfrac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i}$.

Alors $Q_j'(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i(x-1)^{i-1}(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i}$ et

$$\begin{aligned} Q_{j+1}(x) &= Q_j(x) + \frac{1-x}{n}Q_j'(x) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(x-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i} + i(x-1)^{i-1}(1-\tfrac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(x-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i}\left(1-\frac{i}{n}\right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(x-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j}\binom{n-1}{i} = \sum_{i=0}^{n-1}(x-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j}\binom{n-1}{i}. \end{aligned}$$

On conclut par le principe de récurrence.

b) $G_1(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k)x^{n-k} = P(X_1 = 1)x^{n-1} = x^{n-1} = Q_1(x)$.

$$\begin{aligned} G_j(x) + \frac{1-x}{n}G_j'(x) &= \sum_{k=1}^{n} P(X_j = k)[1-\frac{n-k}{n}]x^{n-k} \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n}P(X_j = k)x^{n-(k+1)} \\ &= \frac{P(X_j = 1)}{n}x^{n-1} \end{aligned}$$

$$+\sum_{k=2}^{n}[P(X_j=k)\frac{k}{n}+P(X_j=k-1)\frac{n-k+1}{n}]x^{n-k}$$

Donc $G_j(x)+\dfrac{1-x}{n}G_j'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(X_{j+1}=k)x^{n-k}$.

Les suites $(G_j(x))_{j\geq 1}$ et $(Q_j(x))_{j\geq 1}$ vérifient la même relation de récurrence d'ordre 1 et ont les mêmes premiers termes, donc par ... récurrence, sont égales :

$G_j(x)=Q_j(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(x-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i}$.

c) En particulier, pour $x=0$:

$G_j(0)=P(X_j=n)$ et $Q_j(0)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i}$, d'où :

$$P(X_j=n)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i}$$

Or, pour $1\leqslant j<n$, l'événement $(X_j=n)$ est impossible et donc $P(X_j=n)=0$, d'où :

$$1\leqslant j<n \implies \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i}=0$$

Exercice 3.02.

On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité dont on déterminera une densité notée f.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet des moments d'ordre n pour tout entier naturel n.

On pose : $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$.

Calculer l'espérance $E(X)$ de X ainsi que sa variance $V(X)$ en fonction de I.

3. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, mutuellement indépendantes et de densité f.

Soit $(\overline{X}_n)_{n\geq 1}$ la suite de variables aléatoires définie par :

$$\forall\, n\geqslant 1, \overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

a) Montrer que la suite $(\overline{X}_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0, puis déterminer une suite de réels $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que la suite $(a_n\overline{X}_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

b) On pose $S_n^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$.

Construire à partir de S_n^2 un estimateur sans biais de I. Montrer que cet estimateur est convergent.

4. Proposer en `Scilab` une simulation de la loi associée à f.

Solution :

1. La fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. La limite de F en $-\infty$ est 0 et celle en $+\infty$ est 1. De plus F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = F'(x) = \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$$

F est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction f.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Pour tout entier naturel n, on étudie la nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \times \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\,dt$

$\rightarrow$ En $-\infty$, la fonction $t^n \times \dfrac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$ est équivalente à $t^n\mathrm{e}^t$ qui est négligeable devant $1/t^2$, on conclut à la convergence en $-\infty$.

$\rightarrow$ En $+\infty$, la fonction $t^n \times \dfrac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$ est équivalente à $t^n\mathrm{e}^{-t}$ qui est négligeable devant $1/t^2$, on en conclut à la convergence en $+\infty$.

Par conséquent X admet un moment d'ordre n pour tout entier n.

En remarquant que f est une fonction paire, on en déduit que $E(X) = 0$.

D'autre part : $V(X) = E(X^2) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} t^2 (F-1)'(t)\,dt.$

On réalise l'intégration par parties ainsi préparée, d'où :

$$V(X) = 2\int_0^{+\infty} 2t(1 - F(t))\,dt = 4I$$

3. a) Puisque $E(\overline{X_n}) = 0$ et $V(\overline{X_n}) = \dfrac{4I}{n}$, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, on en déduit que $(\overline{X_n})_n$ converge en probabilité vers 0.

En utilisant le théorème limite central, on a $\left(\sqrt{n}\dfrac{\overline{X_n}}{2\sqrt{I}}\right)_n$ qui converge en loi vers la loi normale centrée réduite. Donc la suite cherchée est $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{I}}$.

b) On a $E(S_n^2) = 4I$, donc un estimateur sans biais de I est $\dfrac{S_n^2}{4}$. Comme les variables X_i sont indépendantes, les variables X_i^2 le sont aussi donc : $V(\dfrac{S_n^2}{4}) = \dfrac{V(X^2)}{16n}$.

Cette expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{S_n^2}{4}$ est un estimateur convergent de I.

4. Soit U une variable suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.

Puisque F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ alors $F^{-1}(U)$ suit la loi de X. Or :

$$\forall x \in]0,1[, F^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

On propose donc :

```
x=rand()
y=log(x/(1-x))
```

Exercice 3.03.

Soit un plan muni d'un repère orthonormé. On considère une particule se déplaçant au hasard dans ce plan de la manière suivante : à l'instant 0, la particule se trouve à l'origine O ; ensuite, à chaque instant (représenté par un entier naturel), la particule se déplace d'un pas de longueur 1 de façon équiprobable dans une direction parmi Nord, Sud, Est et Ouest.

Toutes les variables aléatoires modélisant cette situation seront définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On admet la formule de Stirling :

$$n! \underset{(n\to\infty)}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

et le résultat suivant : si une variable aléatoire T discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admet une espérance, alors $E(T) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(T \geqslant k)$.

On note $Z_n = (X_n, Y_n)$ le vecteur aléatoire représentant la position de la particule (abscisse, ordonnée) à l'instant n.

1. Écrire un algorithme en `Scilab` permettant de simuler une réalisation de Z_1.

2. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de $P(Z_{2p+1} = (0,0))$.

3. a) Montrer que pour tout entier p, $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{p}{p-k} = \binom{2p}{p}$.

   b) Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,

   $P(Z_{2p} = (0,0)) = \frac{1}{4^{2p}}\binom{2p}{p} \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{p}{p-k} = \frac{1}{4^{2p}}\binom{2p}{p}^2$

   c) Montrer que la série de terme général $P(Z_{2p} = (0,0))$ diverge.

4. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note N_p la variable aléatoire valant 1 si $Z_p = (0,0)$ et 0 sinon.

   a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi de N_p ?

   b) Déterminer $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{p} E(N_i)$.

   c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit R_k l'événement « au cours du temps la particule est repassée au moins k fois par l'origine » Comparer pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, les événements R_k et $(\sum\limits_{i=0}^{p} N_i \geqslant k)$.

d) Montrer par l'absurde que la série de terme général $P(R_k)$ est divergente.

e) On admet que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(R_k) = P(R_1)^k$. Déterminer alors la valeur de $P(R_k)$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Conclure.

Solution :

1.
```
u=zeros(1,2)
if rand()<1/2 //choix entre N-S ou E-O
   then if rand()<1/2 //choix du déplacement
    then u(2)=-1
else u(2)=1
 end
  else if rand()<1/2
  then u(1)=-1
 else u(1)=1
   end
  end
  disp(u)
```

2. Pour revenir en $(0,0)$, il faut autant de déplacements vers le Nord que vers le Sud et autant de déplacements vers l'Est et l'Ouest. Ceci n'est possible que si le nombre de déplacements est pair. Ainsi, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $P(Z_{2p+1} = (0,0)) = 0$.

3. a) Pour choisir p éléments parmi $2p$, on peut choisir pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, k éléments parmi un sous-ensemble à p éléments, puis choisir les $p-k$ autres éléments parmi les p éléments restants. En additionnant tous les cas, il vient : $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{p}{p-k} = \binom{2p}{p}$.

b) La question précédente et la formule admise donnent : $P(Z_{2p} = (0,0)) = \dfrac{1}{4^{2p}}\dbinom{2p}{p}^2$. Or d'après la formule de Stirling, $\dbinom{2p}{p} = \dfrac{(2p)!}{(p!)^2} \sim \dfrac{\sqrt{4\pi p}(2p)^{2p}\mathrm{e}^{-2p}}{2\pi p p^{2p}\mathrm{e}^{-2p}}$, donc :

$$\frac{1}{4^{2p}}\binom{2p}{p}^2 \sim \frac{1}{\pi p}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{\pi p}$ diverge, donc par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme général $P(Z_{2p} = (0,0))$ diverge.

4. a) Pour $p \in \mathbb{N}$, $N_p \hookrightarrow \mathcal{B}(P(Z_p = (0,0))$.

b) On a donc : $\forall\, i \in [\![0,p]\!], E(N_i) = P(Z_i = (0,0))$, et $\sum\limits_{i=0}^{p} E(N_i) = \sum\limits_{i=0}^{p} P(Z_i = (0,0))$.

Or la série de terme général $P(Z_i = (0,0))$ diverge et est à termes positifs, donc $\lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{p} E(N_i) = +\infty$.

c) Si $[(\sum\limits_{i=0}^{p} N_i) \geqslant k]$ est réalisé, alors en p déplacements, il y a eu au moins k retours en $(0,0)$, donc sur l'ensemble des déplacements, il y aura au moins k retours en $(0,0)$, donc $[N \geqslant k]$ est réalisé. Ainsi, $[(\sum\limits_{i=0}^{p} N_i) \geqslant k] \subset [N \geqslant k]$.

d) Par croissance de l'application probabilité, pour p fixé,

$$P([(\sum_{i=0}^{p} N_i) \geqslant k] \leqslant P([N \geqslant k])$$

Ainsi, si la série de terme général $P([N \geqslant k])$ était convergente, alors par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs , pour p fixé, la série de terme général $P([(\sum\limits_{i=0}^{p} N_i) \geqslant k]$ convergerait et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{+\infty} P([N \geqslant k]) \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} P([\sum_{i=0}^{p} N_i \geqslant k]$$

donc d'après le résultat admis, $\forall p \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P([N \geqslant k]) \geqslant E(N_0 + \cdots + N_p)$.

Ceci est absurde car $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{p} E(N_i) = +\infty$. La série de terme général $P([N \geqslant k])$ est donc divergente.

e) D'après le résultat admis, la série de terme général $P(N \geqslant k)$ est une série géométrique divergente de raison $P(N \geqslant 1)$, donc comme $P(N \geqslant 1) \in [0,1]$, on en déduit que $P(N \geqslant 1) = 1$ et aussi $\forall\, k \in P(N \geqslant k) = 1$.
On est quasiment certain que la particule repassera par le point $(0,0)$ une infinité de fois.

Exercice 3.04.

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$.

a) Justifier que F est une fonction de répartition.

b) Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F. Déterminer une densité f de X.

On suppose désormais que X est une variable aléatoire réelle de densité f, définie sur un espace probabiisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et que toutes les variables aléatoires citées sont définies sur ce même espace.

2. a) Soit $Z = \mathrm{e}^{-X}$. Justifier que Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et déterminer sa loi.

b) Soient x et y deux réels strictement positifs. Établir une relation entre la probabilité conditionnelle $P_{(X\leq -\ln x)}\big(X \leqslant -\ln(x+y)\big)$ et $P\big(X \leqslant -\ln y\big)$.

3. Soit $\big(Y_i\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.

Soit d'autre part L une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 1 indépendante des variables aléatoires de la suite $\big(Y_i\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

On définit S par :

Si $L(\omega) = 0$, alors $S(\omega) = 0$.
Si $L(\omega) = k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors $S(\omega) = \max(Y_1(\omega), \dots, Y_k(\omega))$.

a) Soit k un entier naturel non nul.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_k = \max\big(Y_1, \dots, Y_k\big)$.

b) Démontrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, on a :

$$P\big(a \leqslant S \leqslant b\big) = P\big(a \leqslant X \leqslant b\big)$$

c) Calculer $P\big(S = 0\big)$.

Solution :

1. a) La fonction $F : x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, donc F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.

b) Une densité de X est $f = F'$ avec : pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\exp(-\mathrm{e}^{-x})$.

2. a) Soit z réel.
Si $z \leqslant 0$ alors $(Z \leqslant z) = \emptyset \in \mathcal{A}$, si $z > 0$, on a $(Z \leqslant z) = (X \geqslant -\ln z) \in \mathcal{A}$, car X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La fonction de répartition F_Z de Z est définie par : $F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-z} & \text{si } z \geqslant 0 \end{cases}$.

On en déduit que $Z = \mathrm{e}^{-X}$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) On observe que pour tout $t > 0$,

$$P(X \leqslant -\ln t) = P(-X \geqslant \ln t) = P(\mathrm{e}^{-X} \geqslant t) = P(Z \geqslant t) = \mathrm{e}^{-t}$$

En conséquence pour tous x et y, réels strictement positifs, on a :

$$P_{[X \leq -\ln x]}(X \leqslant -\ln(x+y)) = P_{[Z \geq x]}(Z \geqslant x+y) = P(Z \geqslant y)$$

car Z suit une loi exponentielle, donc « sans mémoire », on en déduit

$$P_{[X \leq -\ln x]}(X \leqslant -\ln(x+y)) = P(Z \geqslant y) = \mathrm{e}^{-y}$$

Par ailleurs, $P(X \leqslant -\ln y) = P(Z \geqslant y) = \mathrm{e}^{-y}$, donc

$$P_{[X \leq -\ln x]}(X \leqslant -\ln(x+y)) = P(X \leqslant -\ln y)$$

3. a) Pour tout entier naturel k non nul, notons φ_k la fonction de répartition de S_k. Les variables aléatoires de la suite $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ étant mutuellement indépendantes de loi commune $\mathcal{E}(1)$, on a :

- $\forall\, u < 0$, $P(S_k < 0) = 0 = \varphi_k(u)$
- $\forall\, u \geqslant 0$, $\varphi_k(u) = P(S_k \leqslant u) = P(\bigcap\limits_{i=1}^{k} (Y_i \leqslant u)) = \prod\limits_{i=1}^{k} P(Y_i \leqslant u) = \prod\limits_{i=1}^{k} (1 - \mathrm{e}^{-u})$
$= (1 - \mathrm{e}^{-u})^k$.

La fonction φ_k ainsi définie détermine la loi de S_k.

b) Le système complet d'événements $((L = k))_{k\in\mathbb{N}}$ permet d'écrire :

$$P\big(a \leqslant S \leqslant b\big) = P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (a \leqslant S \leqslant b) \cap (L = k))$$

$$= P((a \leqslant S \leqslant b) \cap (L = 0)) + P(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (a \leqslant S \leqslant b) \cap (L = k))$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P((a \leqslant S \leqslant b) \cap (L = k))$$

car pour $(L = 0)$, par convention $S = 0$, donc $(a \leqslant S \leqslant b) \cap (L = 0) = \emptyset$.
D'autre part, pour tout entier naturel k non nul, les variables S_k et L sont indépendantes donc

$$P((a \leqslant S \leqslant b) \cap (L = k)) = P((a \leqslant \sup(Y_1, ..., Y_k) \leqslant b) \cap (L = k))$$
$$= P(a \leqslant S_k \leqslant b).P(L = k)$$

mais $P(a \leqslant S_k \leqslant b) = \varphi_k(b) - \varphi_k(a) = (1 - \mathrm{e}^{-b})^k - (1 - \mathrm{e}^{-a})^k$. On en déduit :

$$P(a \leqslant S \leqslant b) = \sum_{k=1}^{+\infty} ((1 - \mathrm{e}^{-b})^k - (1 - \mathrm{e}^{-a})^k) P(L = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} ((1 - \mathrm{e}^{-b})^k \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} ((1 - \mathrm{e}^{-a})^k \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

On peut ajouter alors les termes qui correspondraient à la valeur $k = 0$ (ils se détruisent) et on reconnaît des sommes de séries exponentielles, soit :

$$P(a \leqslant S \leqslant b) = \mathrm{e}^{-1} \exp(1 - \mathrm{e}^{-b}) - \mathrm{e}^{-1} \exp(1 - e^{-a}) = \exp(-\mathrm{e}^{-b}) - \exp(-\mathrm{e}^{-a})$$
$$= F(b) - F(a).$$

Donc, pour a, b tels que $0 < a < b$, $P(a \leqslant S \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b)$.

c) On a :

$$P(S = 0) = P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (S = 0) \cap (L = k))$$
$$= P((S = 0) \cap (L = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} P((S = 0) \cap (L = k))$$

Or si $(L = 0)$ est réalisé, alors $(S = 0)$, l'est aussi donc

$$P((S = 0) \cap (L = 0)) = P((L = 0)) = \mathrm{e}^{-1},$$

alors que , pour tout k non nul, $(S = 0) \cap (L = k)) \subset (S_k = 0)$ et $P(S_k = 0) = 0$, d'où :

$$P(S = 0) = \mathrm{e}^{-1}$$

Exercice 3.05.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La roue d'une loterie est représentée par un disque de rayon 1, dont le centre O est pris pour origine d'un repère orthonormé. Cette roue est lancée dans le sens trigonométrique, l'angle (exprimé en radians) dont elle tourne avant de s'arrêter est une variable aléatoire, notée U. On suppose que U suit la loi exponentielle de paramètre a.
La roue porte une marque M, qui, au départ, est située au point de coordonnées $(1, 0)$ et qui, après l'arrêt de la roue, se trouve au point de coordonnées aléatoires $X = \cos U$, $Y = \sin U$.

1. Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au} \cos u \, du$, $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au} \sin u \, du$.

a) Montrer que les intégrales I et J sont convergentes.

b) A l'aide d'intégrations par parties, que l'on justifiera, établir deux relations liant I et J. En déduire les valeurs de I et J.

c) Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y.

2. Un joueur gagne à cette loterie si, à l'arrêt de la roue, l'ordonnée de M vérifie la relation : $Y \geqslant \dfrac{1}{2}$.

a) Calculer la probabilité, notée $p(a)$, que le joueur gagne.

b) Déterminer $\lim\limits_{a\to 0} p(a)$.

Solution :

1. a) Montrons que les intégrales I et J sont absolument convergentes. On effet, on peut écrire : $|\cos u.\mathrm{e}^{-au}| \leqslant \mathrm{e}^{-au}, |\sin u.\mathrm{e}^{-au}| \leqslant \mathrm{e}^{-au}$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au}\,du$ existe.

D'où les conclusions.

b) En utilisant $A > 0$ et des intégrations par parties sur $[0, A]$, intervalle où les fonctions sinus, cosinus et exponentielle sont de classe C^∞, il vient :

$$I(A) = \int_0^A \cos u.\mathrm{e}^{-au}\,du = \sin A.\mathrm{e}^{-aA} + a(1 - \cos A.\mathrm{e}^{-aA}) - a^2 I(A)$$

$$J(A) = \int_0^A \sin u.\mathrm{e}^{-au}\,du = -a\sin A.\mathrm{e}^{-aA} + 1 - \cos A.\mathrm{e}^{-aA} - a^2 J(A)$$

En prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, les fonctions sin et cos étant bornées sur $\mathbb{R}$, il vient :

$$I = a - a^2 I, \qquad J = 1 - a^2 J$$

Donc

$$I = \frac{a}{1+a^2}, \qquad J = \frac{1}{1+a^2}$$

c) Par le théorème du transfert :

$$E(X) = E(\cos U) = \int_a^{+\infty} \cos u.a\mathrm{e}^{-au}\,du = aI = \frac{a^2}{1+a^2}$$

$$E(Y) = E(\sin U) = \int_a^{+\infty} \sin u.a\mathrm{e}^{-au}\,du = aJ = \frac{a}{1+a^2}$$

2. a) Le joueur gagne si et seulement si $\sin U \geqslant 1/2$ soit si et seulement si $U \in [\pi/6, 5\pi/6] \pmod{2\pi}$. Donc :

$$p(a) = \sum_{k=0}^{\infty} P\Big(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant U \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi/6+2k\pi}^{5\pi/6+2k\pi} a.\mathrm{e}^{-at}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \big(\mathrm{e}^{(-\pi/6-2k\pi)a} - \mathrm{e}^{(-5\pi/6-2k\pi)a}\big) = \frac{\mathrm{e}^{-a\pi/6} - \mathrm{e}^{-a5\pi/6}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}$$

$$= e^{-a\pi/6}\,\frac{1-e^{-2a\pi/3}}{1-e^{-2\pi a}}$$

b) Lorsque $a \to 0$, comme $e^{-ax} = 1 - ax + o(x)$ au voisinage de 0, il vient :

$$\lim_{a\to 0} p(a) = \frac{1}{3}$$

Exercice 3.06.

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p_k \geqslant 0$.
On suppose que X admet une espérance $E(X)$.
Soit $(X_k)_k$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et de même loi que X. On note $(S_k)_{k\geq 0}$ la suite des sommes partielles définies par $S_0 = 0$, et pour $n \geqslant 1, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
On étudie dans cet exercice la variable aléatoire $N(a,b)$ représentant le nombre d'éléments de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui appartiennent à l'intervalle $[a,b]$, Cette variable $N(a,b)$ est donc définie par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, N(a,b)(\omega) = \mathrm{card}\{k \in \mathbb{N} \ /\ S_k(\omega) \in [a,b]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_k\in[a,b]\}}(\omega)$$

1. Justifier pour tous $\ell \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\{N(0,\ell) = n+1\} &= \{S_n \leq \ell < S_{n+1}\},\\ \{S_n \leq \ell\} &= \{N(0,\ell) \geqslant n+1\},\\ \{S_n \geqslant \ell\} &\subset \{N(0,\ell) \leq n+1\}.\end{aligned}$$

2. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance. Montrer que l'on a :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y \geqslant k)$$

3. a) Montrer pour $n \in \mathbb{N}$ et $\ell \geqslant 0$, les inégalités : $P(S_n \leqslant \ell) \leqslant E(\exp(\ell - S_n))$, puis : $P(S_n \leqslant \ell) \leqslant e^{\ell}[E(\exp(-X))]^n$ (on commencera par justifier l'existence de ces espérances).

b) En déduire que $P(S_n \leqslant \ell)$ tend vers 0 quand $n \to \infty$ et que :

$$E(N(0,\ell)) \leqslant \frac{e^{\ell}}{1 - E(\exp(-X))}$$

Solution :

1. $\star$ L'égalité $(N(0,\ell) = n+1) = (S_n \leqslant \ell < S_{n+1})$ est une tautologie.

$\star$ Pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $k \mapsto S_k(\omega)$ est strictement croissante de premier terme nul. Dire que l'on réalise $S_n(\omega) \leqslant \ell$, c'est dire que tous les nombres $S_0(\omega)$,

$S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)$ sont majorés par ℓ, donc que la durée du passage entre 0 et ℓ est au moins égale à $n+1$:

$$(S_n \leqslant \ell) = (N(0,\ell) \geqslant n+1)$$

$\star$ X ne prenant que des valeurs strictement positives, $(S_n \geq \ell) \subset (S_{n+1} > \ell)$ et donc on est sorti du domaine $[0,\ell]$ au plus tard au rang n (on commence au rang 0) et donc

$$(S_n \geqslant \ell) \subset (N(0,\ell) \leqslant n+1)$$

2. *Méthode 1* : en passant par la notion de famille sommable. La variable Y ayant une espérance, on a :

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} iP(Y=i) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(Y=i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} P(Y=i)$$

Cette famille étant une famille dénombrable à termes positifs ou nuls la sommation peut se faire par paquets quelconques et donc :

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty} P(Y=i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(Y \geqslant j)$$

Méthode 2 : à la main. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, comme $(Y \geqslant k) = (Y=k) \cup (Y \geqslant k+1)$ et cette réunion étant disjointe :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} kP(Y=k) &= \sum_{k=0}^{N} k(P(Y \geqslant k) - P(Y \geqslant k+1)) \\
&= \sum_{k=0}^{N} kP(Y \geqslant k) - \sum_{k=0}^{N} kP(Y \geqslant k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{N} kP(Y \geqslant k) - \sum_{k=1}^{N-1} (k-1)P(Y \geqslant k) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} P(Y \geqslant k) + NP(Y \geqslant N)
\end{aligned}$$

Mais : $NP(Y \geqslant N) = \sum_{k=N}^{\infty} NP(Y=k) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} kP(Y=k) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (reste d'une série supposée convergente). On peut donc passer à la limite lorsque N tend vers l'infini et on obtient bien le même résultat.

3. a) $\star$ $(S_n \leqslant \ell) = (\ell - S_n \geqslant 0) = (\mathrm{e}^{\ell - S_n} \geqslant 1)$, donc $P(S_n \leqslant \ell) = P(\mathrm{e}^{\ell - S_n} \geqslant 1)$.

Comme $\mathrm{e}^{\ell - S_n}$ est une variable aléatoire bornée, elle admet une espérance, et comme elle est à valeurs positives, l'inégalité de Markov donne : $P(\mathrm{e}^{\ell - S_n} \geqslant 1) \leqslant \frac{1}{1} E(\mathrm{e}^{\ell - S_n})$, donc :

$$P(S_n \leqslant \ell) \leqslant E(\mathrm{e}^{\ell - S_n})$$

$\star$ D'autre part $E(\mathrm{e}^{\ell - S_n}) = \mathrm{e}^{\ell} E(\mathrm{e}^{-X_1 - X_2 - \cdots - X_n}) = \mathrm{e}^{\ell} E(\mathrm{e}^{-X_1}\mathrm{e}^{-X_2} \ldots \mathrm{e}^{-X_n})$

L'indépendance des différentes variables aléatoires X_k donne l'indépendance des différentes variables aléatoires e^{-X_k}, donc l'espérance du produit est le produit des espérances, et comme en plus elles ont même loi :

$$E(\mathrm{e}^{\ell - S_n}) = \mathrm{e}^{\ell} E(\mathrm{e}^{-X_1}) \times \ldots \times E(\mathrm{e}^{-X_n}) = \mathrm{e}^{\ell}[E(\mathrm{e}^{-X})]^n$$

$$P(S_n \leqslant \ell) \leqslant \mathrm{e}^{\ell}[E(\mathrm{e}^{-X})]^n$$

La formule obtenue reste valable pour $n = 0$.

b) X est à valeurs strictement positives, donc e^{-X} est à valeurs dans l'ouvert $]0, 1[$ et par transfert : $E(\mathrm{e}^{-X}) = \sum\limits_n \mathrm{e}^{-x_n} p_n < \sum\limits_n p_n = 1$ (une somme finie ou infinie d'inégalités dont l'une au moins est stricte est une inégalité stricte).

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} [E(\mathrm{e}^{-X})]^n = 0$ et :

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \leqslant \ell) = 0$$

Ensuite, $P(N(0, \ell) \geqslant n) = P(S_{n-1} \leqslant \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par continuité décroissante :

$$P(N(0, \ell) = \infty) = 0$$

Enfin,

$$E(N(0, \ell)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N(0, \ell) \geqslant n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\ell}[E(\mathrm{e}^{-X})]^{n-1} = \frac{\mathrm{e}^{\ell}}{1 - E(\mathrm{e}^{-X})}$$

Exercice 3.07.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant chacune la loi géométrique $\mathcal{G}(\theta)$ de paramètre θ. On suppose $\theta \in]0, 1[$ inconnu et on désire l'estimer.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $M_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{X_i}$ et $T_n = \dfrac{n}{S_n}$.

1. Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X_1.

2. Soit $\varphi : x \mapsto \ln(1 - x)$ définie sur $[0, 1[$.

a) En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[, \ln(1 - x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\int_0^x \frac{1}{1-t}\Big(\frac{x-t}{1-t}\Big)^n dt$$

b) En déduire que pour $x \in]0, 1[$, $\ln(1 - x) = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k}$.

3. Calculer $E(M_n)$ et montrer que $E(M_n) > \theta$.

4. Montrer que la loi de S_n est donnée par :

$$\text{pour tout entier } k \geqslant n : P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} \theta^n (1 - \theta)^{k-n}$$

5 a). Montrer que $E(T_n) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{n}{k} \dbinom{k-1}{n-1} \theta^n (1 - \theta)^{k-n}$.

b) Montrer que $E(T_n) > \theta$.

6. a) Montrer que pour tout $n-$uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\Big) \geqslant n^2$$

b) Comparer $E(M_n)$ et $E(T_n)$.

Solution :

1. On a $E(X_1) = \dfrac{1}{\theta}$ et $V(X_1) = \dfrac{1-\theta}{\theta^2}$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$; la fonction φ est de classe C^{n+1} sur $[0, 1[$ et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \forall\, t \in [0, 1[, \varphi^k(t) = -\frac{(k-1)!}{(1-t)^k}$$

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x, on obtient :

$$\ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times \frac{n!}{(1-t)^{n+1}} dt = -\int_0^x \frac{1}{1-t} \Big(\frac{x-t}{1-t}\Big)^n dt$$

b) L'étude de la fonction $t \mapsto \dfrac{x-t}{1-t}$ montre qu'elle admet un maximum en 0 égal à x. On a donc :

$$\forall\, t \in [0, x], \frac{1}{1-t} \Big(\frac{x-t}{1-t}\Big)^n \leqslant \frac{x^n}{1-x}$$

Par croissance de l'intégration avec $0 \leqslant x$, il vient :

$$\Big|\ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\Big| \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{1-x} dt = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Par encadrement, la série de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

3. Sous réserve de convergence et en utilisant le théorème de transfert :

$$E\Big(\frac{1}{X_1}\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \theta (1-\theta)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\theta}{1-\theta} \times \frac{(1-\theta)^k}{k}$$

Comme $1 - \theta \in]0, 1[$, alors d'après la question précédente $E\Big(\dfrac{1}{X_1}\Big)$ existe et vaut : $\dfrac{-\theta \ln \theta}{1-\theta}$. Par linéarité, on obtient :

$$E(M_n) = \frac{-\theta \ln \theta}{1-\theta}$$

4. Classique (temps d'attente du $k^{\text{ème}}$ succès) : il suffit de placer $k-1$ succès parmi les $n-1$ premiers essais et de passer aux probabilités de chaque événement élémentaire. ...

5 a). T_n est une variable aléatoire réelle presque sûrement à valeurs dans $]0, 1]$, donc elle est presque sûrement bornée et admet une espérance. D'après le théorème de transfert,

$$E(T_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k} P(S_n = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k} \binom{k-1}{n-1} \theta^n (1-\theta)^{k-n}$$

b) On remarque que pour tout entier k tel que $2 \leqslant n < k$, $\dfrac{n-1}{k-1} < \frac{n}{k}$, donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-2}{n-2} \theta^n (1-\theta)^{k-n} < E(T_n)$, et en effectuant le changement d'indice $j = k-1$, il vient :

$$\theta \sum_{j=n-1}^{+\infty} \binom{j-1}{n-2} \theta^{n-1}(1-\theta)^{j-(n-1)} < E(T_n)$$

Donc $\theta \sum\limits_{j=n-1}^{+\infty} P([S_{n-1}=j]) < E(T_n)$, d'où $E(T_n) > \theta$.

6. a) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, pour tout $n-$uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\Big) \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}}\Big)^2 = n^2$$

b) On a $M_n \geqslant T_n$, puis par croissance de l'espérance, $E(M_n) \geqslant E(T_n)$.

Exercice 3.08.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le diamètre d'un tronc d'arbre à la fin de l'année numéro n et l'on suppose que sa croissance suit le modèle décrit ci-dessous :

▷ le diamètre initial D_0 est tel que $D_0 > 0$;
▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_{n+1} = D_n + X_{n+1} D_n$, où X_{n+1} est une variable aléatoire représentant les divers facteurs extérieurs (maladies, climat, ...) ;
▷ on suppose que les variables aléatoires X_k sont à densité, indépendantes et de même loi à valeurs dans $[0,1]$ et de densité f.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \big(\frac{D_n}{D_0}\big)^{1/n}$ et $m = E(\ln(1+X_1))$, où E désigne l'espérance.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer D_n en fonction de D_0 et de $X_1, \dots, X_n$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $E(Q_n)$ en fonction de $E((1+X_1)^{1/n})$.

b) Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tout $y \in [0,1]$, $|\mathrm{e}^y - 1 - y| \leqslant Cy^2$.

c) En déduire que $E(Q_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(m)$.

3. a) Montrer l'existence d'une constante $L > 0$ telle que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y| \leqslant L|x-y|$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Prouver l'existence d'une constante $M > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(|Q_n - \mathrm{e}^m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{M}{n}$$

c) Que peut-on en déduire pour la suite $(Q_n)_{n\geq 1}$?

Solution :

Notons que X_1 prend ses valeurs dans $[0,1]$, donc $\ln(1+X_1)$ prend ses valeurs dans $[0, \ln 2]$ et étant bornée elle admet des moments de tous ordres.

1. $D_n = D_0 \prod_{k=1}^{n}(1+X_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $E(Q_n) = E\big(\prod_{k=1}^{n}(1+X_k)^{1/n}\big)$, et donc, par indépendance des $(1+X_k)^{1/n}$ et équidistribution des X_k, $E(Q_n) = (E((1+X_1)^{1/n}))^n$.

b) Soit $y \in [0,1]$. Par exemple par la formule de Taylor avec reste intégral en 0 :

$$\mathrm{e}^y - 1 - y = \int_0^y (y-t)\mathrm{e}^t\,dt$$

Pour tout $t \in [0,y]$, on a $0 \leqslant (y-t)\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}(y-t)$ et donc, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégration :

$$|\mathrm{e}^y - 1 - y| \leqslant \int_0^y \mathrm{e}(y-t)\,dt = \frac{\mathrm{e}}{2}\,y^2$$

la valeur absolue étant d'ailleurs inutile.

c) Soit n un entier naturel non nul. Par la question précédente,

$$\Big|(1+X_1)^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+X_1)\Big| \leqslant \frac{C\ln^2(1+X_1)}{n^2}$$

et donc, par croissance de l'espérance et inégalité triangulaire pour l'espérance :

$$\Big|E\left((1+X_1)^{1/n}\right) - 1 - \frac{1}{n}E(\ln(1+X_1))\Big| \leqslant \frac{\lambda}{n^2}$$

où $\lambda = C.E(\ln^2(1+X_1))$. On en déduit que, à partir d'un certain rang,

$$\Big(1+\frac{1}{n}E(\ln(1+X_1)) - \frac{\lambda}{n^2}\Big)^n \leqslant E\left((1+X_1)^{1/n}\right)^n \leqslant \Big(1+\frac{1}{n}E(\ln(1+X_1)) + \frac{\lambda}{n^2}\Big)^n$$

Par passage au logarithme et utilisation de l'équivalent classique $\ln(1+u) \underset{(0)}{\sim} u$, on obtient :

$\lim\limits_{n\to\infty} E\left((1+X_1)^{1/n}\right)^n = \mathrm{e}^m$, soit $\lim\limits_{n\to\infty} E(Q_n) = \mathrm{e}^m$.

3. a) La constante $L = \mathrm{e}$ convient par l'inégalité des accroissements finis.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. On note $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+X_k)$.

On a $Q_n = \mathrm{e}^{S_n}$ donc $(|Q_n - \mathrm{e}^m| \geqslant \varepsilon) \subset \Big(|S_n - m| \geqslant \frac{\varepsilon}{L}\Big)$. Comme $E(S_n) = m$, on déduit de l'inégalité de Tchebychev que

$$P(|Q_n - e^m| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(|S_n - m| \geqslant \frac{\varepsilon}{L}\right) \leqslant \frac{V(S_n)L^2}{\varepsilon^2} = \frac{V(\ln(1+X_1))L^2}{n\varepsilon^2}$$

par indépendance et équidistribution des variables X_k.

c) On en déduit que la suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^m.

Exercice 3.09.

Soit α un réel strictement positif et $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose de plus que pour tout i, Y_i suit la loi exponentielle de paramètre $i{\times}\alpha$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ et on note g_n la densité de Z_n nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. a) Déterminer la fonction g_2.

b) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on a : $g_n(x) = n\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x})^{n-1}$.

c) Calculer l'espérance de Z_n et en donner un équivalent simple lorsque n tend vers l'infini.

d) Calculer la variance de Z_n et montrer qu'elle admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \dfrac{1}{n} Z_n$.

a) Déterminer la fonction de répartition H_n de U_n.

b) Montrer que la suite $(U_n)_n$ converge en loi et déterminer la loi limite.

c) Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $E(U_n)$ et $V(U_n)$.

Solution :

1. a) Les variables Y_1 et Y_2 sont indépendantes. On a $g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Par convolution, on a :

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_{Y_1}(t) g_{Y_2}(x-t)\, dt = \int_0^x 2\alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{e}^{-2\alpha(x-t)} dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc pour $x > 0$,

$$g_2(x) = 2\alpha^2 \mathrm{e}^{-2\alpha x} \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t}\, dt = 2\alpha \mathrm{e}^{-2\alpha x}(\mathrm{e}^{\alpha x} - 1) = 2\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}).$$

b) Le cas $n = 1$ est trivial et le cas $n = 2$ vient d'être vu.

On suppose donc le résultat acquis pour un certain rang n et on passe au rang suivant, en supposant évidemment $x > 0$. Comme $Z_{n+1} = Z_n + Y_{n+1}$ et que Y_{n+1} est indépendante de Z_n (lemme des coalitions), il vient :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \int_0^x g_n(t) g_{Y_{n+1}}(x-t)\, dt \\ &= \int_0^x n\alpha \mathrm{e}^{-\alpha t}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})^{n-1} \times (n+1)\alpha \mathrm{e}^{-(n+1)\alpha(x-y)}\, dt \\ &= (n+1)\alpha^2 \mathrm{e}^{-(n+1)\alpha x} \int_0^x n \mathrm{e}^{\alpha t}(\mathrm{e}^{\alpha t} - 1)^{n-1}\, dt \\ &= (n+1)\alpha \mathrm{e}^{-(n+1)\alpha x} \big[(\mathrm{e}^{\alpha t} - 1)^n\big]_0^x = (n+1)\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x})^n \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

c) Par linéarité : $E(Z_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} E(Y_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

Par comparaison série intégrale, on en déduit classiquement :

$$E(Z_n) \sim \frac{1}{\alpha} \ln n$$

d) Par indépendance : $V(Z_n) = \dfrac{1}{\alpha^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et par convergence connue de la série de Riemann d'indice 2, ceci a bien une limite quand n tend vers l'infini.

2. a) Pour $x > 0$, on a : $P(Z_n \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x g_n(t)\, dt = \big[(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})^n\big]_0^x = (1 - \mathrm{e}^{-\alpha x})^n$.
D'où $H_n(x) = P(Z_n \leqslant nx) = (1 - \mathrm{e}^{-n\alpha x})^n$.
Toujours pour $x > 0$, $\ln(H_n(x)) = n \ln(1 - \mathrm{e}^{-n\alpha x}) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -n\mathrm{e}^{-n\alpha x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $H_n(x)$ tend vers 1.
Ainsi : $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et sur $\mathbb{R}^*$ (domaine de continuité de la fonction limite) la limite de H_n est la fonction de répartition d'une variable constante égale à 0. On a ainsi montré que la suite $(Z_n/n)_n$ converge en loi vers 0.

c) $E(U_n) \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{\ln n}{n\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $V(U_n) = \dfrac{1}{n^2\alpha^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3.10.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la variable $Y_n = \dfrac{1 + X_n}{2}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p_n (avec $p_n \in]0, 1[$). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire S_n par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Quelle est la loi de X_n ?

2. Peut-on appliquer la loi faible des grands nombres à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$?

3. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n.

4. Montrer que $0 \leqslant p_k(1 - p_k) \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout $k \geqslant 1$. En déduire que la variance $V(S_n)$ est majorée par n.

5. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $P\big(\big|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{E(S_n)}{n}\big| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \dfrac{4}{n^2\varepsilon^2} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(1 - p_k) \leqslant \dfrac{1}{n\varepsilon^2}$.
Que peut-on en conclure ?

6. Dans cette question, on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1 - \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

Soit L un entier fixé. On introduit l'événement A_L qui est égal à l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la suite $(S_n(\omega))$ contient une infinité de termes qui se trouvent dans le segment $[-L, L]$.

a) Etudier la suite $\big(\dfrac{E(S_n)}{n}\big)_{n\geq 1}$. En déduire l'existence d'un entier $N > 2L$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a : $\big|\dfrac{E(S_n)}{n} - 1\big| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

b) Montrer que pour $n \geqslant N$ on a $\Big[|\frac{S_n}{n} - 1| \geqslant \frac{1}{2}\Big] \subseteq \Big[|\frac{S_n}{n} - \frac{E(S_n)}{n}| \geqslant \frac{1}{4}\Big]$.
En déduire que $P\big(|\frac{S_n}{n} - 1| \geqslant \frac{1}{2}\big) \leqslant \frac{16}{n^2}$.

c) Soit $n \geqslant N$, prouver que

$\Big[|S_n| \leqslant L\Big] \subseteq \Big[|\frac{S_n}{n} - 1| \geqslant \frac{1}{2}\Big]$ et que $A_L \subseteq \bigcup\limits_{k \geq n} \Big[|S_k| \leqslant L\Big]$.

d) Etablir que pour tout $n \geqslant N$, on a $P(A_L) \leqslant 16 \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

(On pourra utiliser sans démonstration le fait que $P(E_1 \cup \cdots \cup E_m) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} P(E_k)$ pour tout m-uplet d'événements $(E_1, \ldots, E_m)$.) En déduire la valeur de $P(A_L)$.

Solution :

1. On a $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ avec $P(X_n = -1) = 1 - p_n$ et $P(X_n = 1) = p_n$.

2. On ne peut pas appliquer la loi faible des grands nombres car les p_n ne sont pas supposés égaux.

3. On a $E(S_n) = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} p_k - n$, et par indépendance :

$$V(S_n) = 4 \sum_{k=1}^{n} V(Y_n) = 4 \sum_{k=1}^{n} p_k(1 - p_k)$$

4. Par exemple, le maximum sur $[0, 1]$ de la fonction $t \mapsto t(1-t)$ est $\frac{1}{4}$ et on utilise 3.

5. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la question précédente, il vient :

$$P\big(|\frac{S_n}{n} - \frac{E(S_n)}{n}| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{4}{n^2\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} p_k(1 - p_k) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

La suite de variables $\big(\frac{S_n}{n} - \frac{E(S_n)}{n}\big)_{n \geq 1}$ converge donc en probabilité vers 0.

6. a) On a : $\frac{E(S_n)}{n} = \frac{2}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \big(1 - \frac{1}{2^{k+2}}\big) - 1 = 1 - \frac{1}{2n}(1 - \frac{1}{2^n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

L'existence de l'entier N s'obtient en « jouant » $1/4$ sur la limite et on peut toujours le choisir tel que $N > 2L$.

b) Si $\big[|\frac{S_n}{n} - 1| \geqslant \frac{1}{2}\big]$ et si $n \geqslant N$, avec l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\frac{1}{2} \leqslant |\frac{S_n}{n} - 1| \leqslant |\frac{S_n}{n} - \frac{E(S_n)}{n}| + \frac{1}{4}$$

L'inclusion demandée en découle directement. Par suite, en utilisant aussi la première inégalité de 5. il vient :

$$P\big(|\frac{S_n}{n} - 1| \geqslant \frac{1}{2}\big) \leqslant P\big(|\frac{S_n}{n} - \frac{E(S_n)}{n}| \geqslant \frac{1}{4}\big) \leqslant \frac{64}{n^2} \sum_{k=1}^{n} p_k(1 - p_k) \leqslant \frac{64}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+2}}$$
$$\leqslant \frac{16}{n^2}.$$

c) Si $n \geqslant N > \dfrac{L}{2}$, l'inclusion $\big[|S_n| \leqslant L\big] \subseteq \big[|\dfrac{S_n}{n} - 1| \geqslant \dfrac{1}{2}\big]$ s'obtient facilement en utilisant l'inégalité triangulaire ou par calculs directs sur les inégalités.
Maintenant, si $\omega \in A_L$, il existe une infinité de $S_k(\omega)$ qui se trouvent dans le segment $[-L, L]$, donc au moins un pour lequel $k \geqslant n$, il est alors clair que ω appartient au membre de droite de l'inclusion souhaitée.

d) En utilisant l'inégalité mentionnée, les limites monotones et les deux questions précédentes, il vient :

$$P(A_L) \leqslant P\big(\bigcup_{k\geq n}(|S_k| \leqslant L)\big) = \lim_{m\to+\infty} P\big(\bigcup_{n\leq k\leq m}(|S_k| \leqslant L)\big) \leqslant \lim_{m\to+\infty} 16\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2}$$

Donc :

$$P(A_L) \leqslant 16\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Comme le reste d'une série convergente tend vers 0, on a nécessairement $P(A_L) = 0$. Ainsi presque sûrement, on sort de l'intervalle $[-L, L]$ à un moment donné pour ne jamais y revenir.

Exercice 3.11.

Dans tout l'exercice, d désigne un entier naturel tel que $d \geqslant 2$.

1. Soit x un réel strictement positif. Déterminer $\displaystyle\lim_{d\to+\infty}\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} k$, où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction « partie entière ».

2. a) Montrer que la fonction f définie sur $]-1, 1[\ \setminus\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}$ admet un prolongement par continuité en 0.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{d\to+\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor}\ln\big(1-\frac{k}{d}\big)$.

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toute la loi uniforme discrète sur $[\![1, d]\!]$.
Soit N_d la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$N_d(\omega) = \inf\{i \geq 2 \ / \ U_i(\omega) \in \{U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_{i-1}(\omega)\}\}$$

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant n \leqslant d$, on a :

$$P(N_d > n) = \big(1-\frac{1}{d}\big)\big(1-\frac{2}{d}\big)\cdots\big(1-\frac{n-1}{d}\big)$$

b) Déterminer la limite en loi de $\big(\dfrac{N_d}{\sqrt{d}}\big)$ lorsque d tend vers l'infini.

4. a) Montrer que $E(N_d) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} P(N_d > k)$.

b) En déduire que $E(N_d) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\big(1+\frac{t}{d}\big)^d \mathrm{e}^{-t}dt$.

Solution :

1. On sait que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Donc
$$\sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} k = \frac{(\lfloor x\sqrt{d}\rfloor)(\lfloor x\sqrt{d}\rfloor+1)}{2} \sim \frac{(\lfloor x\sqrt{d}\rfloor)^2}{2} \sim \frac{dx^2}{2}$$
En effet, $\lfloor x\sqrt{d}\rfloor \leqslant x\sqrt{d} < \lfloor x\sqrt{d}\rfloor + 1$, ce qui entraîne $\lfloor x\sqrt{d}\rfloor \sim x\sqrt{d}$. Finalement :
$$\lim_{d\to+\infty} \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} k = \frac{x^2}{2}$$

2. a) Le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 montre qu'il faut poser $f(0) = -1/2$.

b) Comme $1 \leqslant k \leqslant x\sqrt{d}$, on a $\dfrac{1}{d} < \dfrac{k}{d} \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{d}}$, proche de 0 lorsque d tend vers ∞.
En utilisant la question a), pour $\varepsilon > 0$, pour d assez grand et k tel que $1 \leqslant k \leqslant x\sqrt{d}$, on a :
$$\left| \ln\left(1-\frac{k}{d}\right) + \frac{k}{d} + \frac{k^2}{2d^2} \right| \leqslant \varepsilon \frac{k^2}{2d^2}$$
Donc
$$\left| \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} \ln\left(1-\frac{k}{d}\right) + \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} \frac{k}{d} + \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} \frac{k^2}{2d^2} \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} \frac{k^2}{2d^2}$$
En utilisant la méthode de la première question, avec $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \dfrac{n^3}{3}$, il vient :
$$\sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} \frac{k^2}{2d^2} \sim \frac{x^3}{6\sqrt{d}}$$
soit :
$$\left| \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} \ln\left(1-\frac{k}{d}\right) + \frac{x^2}{2} \right| \leqslant \frac{C}{d^{1/2}} \text{ et } \lim_{d\to+\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} \ln\left(1-\frac{k}{d}\right) = -\frac{x^2}{2}$$

3. a) On a $(N_d(\omega) = i)$ lorsque les nombres $U_1(\omega), \dots, U_{i-1}(\omega)$ sont distincts et que $U_i(\omega)$ est égal à l'un des $U_j(\omega)$ précédents.
Ainsi $U_1(\omega)$ est un entier quelconque de $[\![1,d]\!]$, $U_2(\omega)$ est un entier différent, $U_3(\omega)$ est un entier différent des deux premiers, etc. Donc, en utilisant la formule des probabilités composées
$$P(N_d > n) = \left(1-\frac{1}{d}\right)\left(1-\frac{2}{d}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{d}\right) = \frac{(d-1)(d-2)\dots(d-n+1)}{d^{n-1}}$$
On peut alors faire apparaître des factorielles, ce qui servira pour la dernière égalité de ce corrigé …
$$n \in [\![2,d]\!] \implies P(N_d > n) = \frac{d!}{d^n(d-n)!}$$

b) Soit $x > 0$. On choisit l'entier d assez grand de façon à avoir $x\sqrt{d} \leqslant d$. Les questions précédentes donnent :

$$\ln P(N_d > x\sqrt{d}) = \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor -1} \ln\big(1-\frac{k}{d}\big) \underset{d\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{x^2}{2}$$

et par croissance de l'exponentielle $\lim\limits_{d\to+\infty} P\big(\dfrac{N_d}{\sqrt{d}} > x\big) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

La suite $\big(\dfrac{N_d}{\sqrt{d}}\big)_d$ tend en loi vers une variable aléatoire de densité $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\times x\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

4. a) On a $N_d(\Omega) = [\![2, d+1]\!]$ et

$$E(N_d) = \sum_{k=2}^{d+1} k(P(X > k-1) - P(X > k)) = \sum_{k=1}^{d} (k-1)(P(X > k) - \sum_{k=2}^{d+1} kP(X > k)$$
$$= \sum_{k=0}^{d} P(X > k).$$

b) L'intégrale proposée converge par croissance comparée entre une exponentielle et un polynôme. On a alors :

$$\int_0^{+\infty} \big(1+\frac{t}{d}\big)^d \mathrm{e}^{-t}dt = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \frac{1}{d^k} \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}dt = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \frac{k!}{d^k} = \sum_{k=0}^{d} P(N_d > k)$$

Exercice 3.12.

On note $x^- = \max(-x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De même si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on définit la variable aléatoire X^- par : $\forall\, \omega \in \Omega, X^-(\omega) = \max(-X(\omega), 0)$.
On pourra utiliser, sans démonstration, les résultats suivants :

$\star$ si $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers Z, alors, pour toute fonction continue et bornée f, on a $E(f(Z_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E(f(Z))$.

$\star$ si X et Y sont des variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2, on a

$$E(XY) \leqslant \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

1. Soit X une variable aléatoire admettant une variance.

a) Montrer que $\forall\, a > 0, |X - \min(X, a)| \leqslant \mathbf{1}_{(X\geq a)}\times X$.

b) Montrer que : $\forall\, a > 0, E(|X - \min(X, a)|) \leqslant \sqrt{E(X^2)P(X \geqslant a)}$.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et } Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de S_n ?

b) En appliquant le théorème limite central, montrer que $(Y_n^-)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable Y^-, où Y suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. Calculer $E(Y_n^2)$ et en déduire que $P(Y_n^- \geqslant a) \leqslant \dfrac{1}{a^2}$.

d) Montrer que pour tout $a > 0$, $P(Y^- \geqslant a) \leqslant \dfrac{1}{a^2}$.

e) Déduire de la question 1. et du résultat admis en préambule, que $E(Y_n^-) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E(Y^-)$.

3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_n^-) = \left(\frac{n}{2}\right)^n \times \dfrac{\sqrt{n}}{n!}$.

4. En déduire la formule de Stirling : $n! \underset{(\infty)}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Solution :

1. a) Si $X(\omega) > a$, alors $|X(\omega) - \min(X(\omega), a)| = |X(\omega) - a| = X(\omega) - a \leqslant X(\omega)$ tandis que si $X(\omega) \leqslant a$, alors $|X(\omega) - \min(X(\omega), a)| = |X(\omega) - X(\omega)| = 0 \leqslant 0$.

On a donc bien toujours $|X(\omega) - \min(X(\omega), a)| \leqslant \mathbf{1}_{(X\geq a)}(\omega) \times X(\omega)$.

b) Ainsi, par croissance de l'espérance : $E(|X - \min(X, a)|) \leqslant E(\mathbf{1}_{(X\geq a)}X)$. Puis, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz admise ici :

$$E(|X - \min(X, a)|) \leqslant \sqrt{P(X \geqslant a)E(X^2)}$$

($\mathbf{1}_{(X\geq a)}$ est une variable de Bernoulli, donc est égale à son carré et son espérance est son paramètre)

2. a) Comme les X_k sont indépendantes et de même loi $\mathcal{P}(1)$, la variable S_n suit la loi de Poisson de paramètre n.

b) Ainsi, $E(S_n) = n$ et $V(S_n) = n$. Par le théorème limite central, la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable Y suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$P(Y_n^- \leqslant x) = P(Y_n \geqslant -x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P(Y \geqslant -x) = P(Y^- \leqslant x)$$

Pour $x \in \mathbb{R}_-$, on a :

$$P(Y_n^- \leqslant x) = 0 = P(Y^- \leqslant x)$$

On en déduit que $(Y_n^-)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y^-.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $E(Y_n^2) = \dfrac{V(S_n)}{n} = 1$. Soit $a > 0$.

Comme $|Y_n| \geqslant Y_n^-$, on a $(Y_n^- \geqslant a) \subset (|Y_n| \geqslant a) = (Y_n^2 \geqslant a^2)$ et l'on déduit de l'inégalité de Markov que

$$P(Y_n^- \geqslant a) \leqslant P(Y_n^2 \geqslant a^2) \leqslant \frac{E(Y_n^2)}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

d) Il suffit de passer à la limite dans l'inégalité précédente en utilisant la convergence en loi de $(Y_n^-)_{n\geq 1}$ vers Y^-.

e) Soit $\varepsilon > 0$. On note $f : x \mapsto \min(x, 1/\varepsilon)$. Par les questions 1., 2.c. et 2.d., on a

$$E(|Y_n^- - f(Y_n^-)|) \leqslant \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \text{ et } E(|Y^- - f(Y^-)|) \leqslant \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

car $(Y_n^-)^2 \leqslant Y_n^2$ et donc $E\big((Y_n^-)^2\big) \leqslant E(Y_n^2)$ et, de même, $E((Y^-)^2) \leqslant E(Y^2) = 1$.

On déduit donc de l'inégalité triangulaire que :

$$\begin{aligned}|E(Y_n^-)-E(Y^-)| &\leqslant E(|Y_n^- - f(Y_n^-)|)+E(|f(Y_n^-)-f(Y^-)|)+E(|f(Y^-)-Y^-|)\\ &\leqslant 2\varepsilon + E(|f(Y_n^-)-f(Y^-)|)\end{aligned}$$

Comme f est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a $E(f(Y_n^-)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E(f(Y^-))$ et il existe donc un rang à partir duquel $|E(Y_n^-)-E(Y^-)| \leqslant 3\varepsilon$. Ainsi :

$$E(Y_n^-) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E(Y^-)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme S_n suit la loi de Poisson de paramètre n, on a par télescopage :

$$\begin{aligned}E(Y_n^-) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{\sqrt{n}} P(S_n=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{n^{k+1}}{k!} - \frac{kn^k}{k!}\Big)\\ &= \Big(\frac{n}{\mathrm{e}}\Big)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}.\end{aligned}$$

4. Comme $E(Y^-) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, on déduit des questions précédentes que :

$$n! \underset{(n\to\infty)}{\sim} \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{\mathrm{e}}\Big)^n$$

Exercice 3.13.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit p un réel de $]0,1[$, $q=1-p$ et λ, μ deux réels strictement positifs. On pose :

$$f_{p,\lambda,\mu}(x) = \begin{cases} p\mu\,\mathrm{e}^{\mu x} & \text{si } x<0 \\ q\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0\end{cases}$$

1. Montrer que $f_{p,\lambda,\mu}$ est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité $f_{p,\lambda,\mu}$.

2. Dans cette question, on suppose que $p=1/2$ et $\lambda=\mu=1$. On note $f=f_{1/2,1,1}$ et F la fonction de répartition de la variable aléatoire X ainsi associée. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)(1+t.\mathrm{e}^{-n|t|})dt$$

a) Montrer que H_n est une fonction de répartition.

b) On note Y_n une variable aléatoire de fonction de répartition H_n. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout réel x :

$$|H_n(x)-F(x)| \leqslant \frac{C}{n}F(x)$$

c) En déduire que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et préciser la limite en loi de la suite $(Y_n)_n$.

3. On revient au cas général.

Déterminer (s'il existe) le plus petit réel s_0 tel que pour tout $t>s\geqslant s_0$, on a :

$$P_{(X>s)}(X>t) = P(X>t-s)$$

Solution :

1. La fonction $f_{p,\lambda,\mu}$ est positive et continue sauf en 0. De plus, la convergence des intégrales est claire, ce qui permet de mettre directement les bornes infinies :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{p,\lambda,\mu}(x)dx = p\int_{-\infty}^{0} \mu e^{\mu x}dx + q\int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = p + q = 1$$

2. On a ici $f(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|t|}$.

a) La fonction $\varphi : t \to \mathrm{e}^{-|t|}(1 + t.\mathrm{e}^{-n|t|})$ est continue sur $\mathbb{R}$ et au voisinage de $-\infty$, on a $\varphi(t) \sim \mathrm{e}^{-|t|}$ dont l'intégrale converge. De plus

• $\lim\limits_{x\to-\infty} H_n(x) = 0$ comme reste d'intégrale convergente ;

• la fonction H_n est positive de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante car φ est continue et $\varphi(t) \geqslant 0$ (étude rapide de $t \mapsto 1 + t\,\mathrm{e}^{nt}$ sur $\mathbb{R}_-$) ;

• on a $\lim\limits_{x\to+\infty} H_n(x) = 1$. En effet :

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}(1 + t.\mathrm{e}^{-n|t|})dt = 1 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t.\mathrm{e}^{-(n+1)|t|}dt = 1 + 0 = 1$$

car la fonction $t \to te^{-(n+1)|t|}$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

On conclut.

b) On écrit :

$$\begin{aligned}|H_n(x) - F(x)| &= \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-|t|}(1 + t.\mathrm{e}^{-n|t|})dt - \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-|t|}dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-|t|} \times |t|\mathrm{e}^{-n|t|}dt\end{aligned}$$

On étudie la fonction $g : t \to |t|\mathrm{e}^{-n|t|}$ sur $\mathbb{R}$, donc $t \mapsto t\mathrm{e}^{-nt}$ sur $\mathbb{R}_+$.

L'étude des variations de g montre que g atteint son maximum en $\pm\frac{1}{n}$, maximum qui vaut $\frac{1}{ne}$. Ainsi

$$|H_n(x) - F(x)| \leqslant \frac{1}{2ne}F(x)$$

c) La suite $(Y_n)_n$ converge en loi vers la loi de X.

3. On remarque que pour $t > s$, $P_{(X>s)}(X > t) = \dfrac{P(X > t)}{P(X > s)}$.

• Pour $s \geqslant 0$ et $t > s$, le calcul donne $P(X > t) = \displaystyle\int_{t}^{+\infty} q\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}dx = q.\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Ainsi $P(X > s) = q.\mathrm{e}^{-\lambda s}$, $\quad P(X > t - s) = q.\mathrm{e}^{-\lambda t}e^{\lambda s}$ et
$P(X > t) = P(X > t - s)P(X > s)$.

• Pour $s < 0$ et $t > s$, le calcul donne

$$P(X > s) = \int_{s}^{0} p\mu\,\mathrm{e}^{\mu x}dx + \int_{0}^{+\infty} q\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}dx = q - p.\mathrm{e}^{\mu s}$$

$$P(X > t) = \begin{cases} q.\mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ q - p.\mathrm{e}^{\mu t} & \text{si } t < 0 \end{cases}, \quad P(X > t - s) = q.\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\lambda s}$$

On vérifie enfin que l'on n'a pas $P(X > t) = P(X > t - s)P(X > s)$.
Le réel s_0 demandé est donc $s_0 = 0$.

Exercice 3.14.

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que pour chaque n, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Pour $n \geqslant 2$, on désigne par $\mathcal{P}_n(2)$ l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$.

Si $I = \{i,j\} \in \mathcal{P}_n(2)$, on pose $Y_I = X_i X_j$.

Pour $n \geqslant 2$, on définit les variables aléatoires S_n et V_n par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et } V_n = \sum_{I\in\mathcal{P}_n(2)} Y_I$$

1. a) Quelle est la loi suivie par S_n ? Donner son espérance et sa variance.

b) Que peut-on dire de la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 2}$?

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $S_n V_n$.

d) Justifier l'égalité $S_n^2 = S_n + 2V_n$.

e) En déduire l'espérance de la variable aléatoire S_n^3.

2. a) Soit $I \in \mathcal{P}_n(2)$. Quelle est la loi de Y_I ?

b) Soient $(I,J) \in \mathcal{P}_n(2)^2$. Déterminer selon les cas les valeurs que peut prendre la covariance des variables aléatoires Y_I et Y_J.

c) Déterminer l'espérance et la variance de V_n.

d) On pose $W_n = \dfrac{V_n}{n^2}$. Montrer que W_n est un estimateur asymptotiquement sans biais d'une quantité que l'on précisera.

e) Calculer le risque quadratique de W_n. Qu'en déduit-on ?

Solution :

1. a) S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.
On a donc $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1-p)$.

b) La loi faible des grands nombres nous dit que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 2}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à p.

c) On a $E(S_n V_n) = \sum\limits_{I\in\mathcal{P}_n(2)} \big[\sum\limits_{k\notin I} E(X_k Y_I) + 2E(Y_I)\big] = \dfrac{n(n-1)p^2}{2}[(n-2)p+2]$.

d) Il suffit de développer le carré $(X_1 + \cdots + X_n)^2$ en remarquant que $X_k^2 = X_k$.

e) Avec l'égalité précédente et c), on voit que

$$E(S_n^3) = E(S_n^2) + 2E(S_n V_n) = E(S_n) + 2E(V_n) + 2E(S_n V_n)$$

$$= np + n(n-1)p^2\,[(n-2)p + 3]$$

(On pouvait aussi faire intervenir $V(S_n^2)$ après la première étape).

2. a) Soit $I = \{i, j\} \in \mathcal{P}_n(2)$. La variable Y_I prend les valeurs 0 et 1 et $P(Y_I = 1) = p^2$ puisque X_i et X_j sont indépendantes. Il s'agit donc d'une variable de Bernoulli de paramètre p^2.

b) Soient $(I, J) \in \mathcal{P}_n(2)^2$.

→ Si $I \cap J = \emptyset$, le lemme des coalitions nous dit que Y_I et Y_J sont indépendantes, et par suite $\mathrm{Cov}(Y_I, Y_J) = 0$.

→ Si $I \cap J = \{k\}$, alors on a $I = \{k, i\}$ et $I = \{k, j\}$ où i, j et k sont deux à deux distincts. En tenant compte de l'indépendance des X_l il vient :

$$\mathrm{Cov}(Y_I, Y_J) = E(X_k X_i X_j) - E(X_k X_i)E(X_k X_j) = p^3 - p^4$$

Lorsque $I = J$, on a $\mathrm{Cov}(Y_I, Y_J) = V(Y_I) = p^2(1 - p^2)$.

c) On a déjà vu que $E(V_n) = \dfrac{n(n-1)p^2}{2}$. La bilinéarité de la covariance nous donne :

$$V(V_n) = \mathrm{Cov}(V_n, V_n) = \sum_{I \in \mathcal{P}_n(2)} V(Y_I) + \sum_{(I,J) \in \mathcal{P}_n(2)^2, I \neq J} \mathrm{Cov}(Y_I, Y_J)$$

En tenant compte de la question précédente, on obtient alors

$$\begin{aligned}
V(V_n) &= \frac{n(n-1)}{2} p^2(1 - p^2) + \sum_{(I,J) \in \mathcal{P}_n(2)^2, \mathrm{card}(I \cap J) = 1} \mathrm{Cov}(Y_I, Y_J) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} p^2(1 - p^2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2}(p^3 - p^4) \\
&= \frac{n(n-1)p^2(1-p)\,[1 + (n-1)p]}{2}
\end{aligned}$$

d) On a $E(W_n) = \dfrac{n(n-1)p^2}{2n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{p^2}{2}$. Par suite, W_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\dfrac{p^2}{2}$.

e) Il vient, en notant b le biais, qui vaut donc $-\dfrac{p^2}{2n}$:

$$r(W_n) = b(W_n)^2 + V(W_n) = b(W_n)^2 + \frac{1}{n^4} V(V_n)$$

$$r(W_n) = \frac{1}{n^2} \times \frac{p^4}{4} + \frac{1}{n^4} \times \frac{n(n-1)p^2(1-p)\,[1 + (n-1)p]}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il en résulte que W_n est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent de $\dfrac{p^2}{2}$.

Exercice 3.15.

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(X_n)_n, (Y_n)_n$ deux suites de variables aléatoires et X, Y deux variables aléatoires.

On suppose que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X et que $(Y_n)_n$ converge en probabilité vers Y.

1. Vérifier que $X_nY_n - XY = (X_n - X)Y + (Y_n - Y)X + (X_n - X)(Y_n - Y)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose :

$A = (|X_nY_n - XY| > \varepsilon)$,

$A_1 = (|X_n - X||Y| > \varepsilon/3), A_2 = (|Y_n - Y||X| > \varepsilon/3)$,

$A_3 = (|X_n - X||Y_n - Y| > \varepsilon/3)$.

2. Montrer que $P(A) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$.

3. Soit $t > 0$.

a) Montrer que $P(A_1) \leqslant P\big(|X_n - X| > \dfrac{\varepsilon}{3t}\big) + P(|Y| > t)$.

b) Soit $\delta > 0$. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $t > A$, $P(|Y| > t) < \delta/2$.

c) Montrer qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $P\big(|X_n - X| > \dfrac{\varepsilon}{3t}\big) < \dfrac{\delta}{2}$.

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_1) = 0$.

On montrerait de même et on admet ici que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_2) = 0$.

4. Montrer que $P(A_3) \leqslant P\big(|X_n - X| > \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}\big) + P\big(|Y_n - Y| > \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}\big)$.

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_3) = 0$.

5. Montrer que la suite (X_nY_n) converge en probabilité vers XY.

Solution :

1. Il suffit de développer l'expression proposée.

2. On passe aux complémentaires :

$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3} = [|X_n - X||Y| \leq \varepsilon/3]\cap[|Y_n - Y||X| \leqslant \varepsilon/3]\cap[|X_n - X||Y_n - Y| \leq \varepsilon/3]$

En passant alors aux valeurs absolues dans le résultat de la question 1. l'inégalité triangulaire donne :

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \subseteq \overline{A}$$

Donc $A \subseteq [A_1 \cup A_2 \cup A_3]$ et $P(A) \leqslant P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$.

3. a) La famille $(B, \overline{B})$ avec $B = [|Y| \leqslant t]$ et $\overline{B} = [|Y] > t]$ forme un système complet d'événements. Donc

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1 \cap B) + P(A_1 \cap \overline{B}) \\ &\leqslant P([|X_n - X| > \varepsilon/(3|Y|)] \cap [|Y| \leqslant t]) + P(|Y| > t) \\ &\leqslant P([|X_n - X| > \varepsilon/(3t)]) + P(|Y| > t) \end{aligned}$$

b) On notant F la fonction de répartition de $|Y|$, on a $P(|Y| > t) = 1 - F(t) \to 0$ quand t tend vers $+\infty$. Ainsi

$$\forall\, \delta > 0, \exists A \text{ tel que } t \geqslant A \implies P(|Y| > t) < \delta$$

c) Comme la suite (X_n) converge en probabilité vers X, il existe N tel que si $n \geqslant N$:

$$P([|X_n - X| > \varepsilon/(3t)]) < \delta$$

d) Par les questions précédentes, il existe N tel que si $n \geqslant N$, $P(A_1) \leqslant 2\delta$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_1) = 0$$

4. Si $|X_n - X| \leqslant \sqrt{\varepsilon/3}$ et $|Y_n - Y| \leqslant \sqrt{\varepsilon/3}$, alors $|X_n - X||Y_n - Y| \leqslant \varepsilon/3$. Donc

$$P(A_3) \leqslant P(|X_n - X| > \sqrt{\varepsilon/3}) + P(|Y_n - Y| > \sqrt{\varepsilon/3})$$

Comme (X_n) converge en probabilité vers X et (Y_n) converge en probabilité vers Y, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_3) = 0$.

5. En regroupant les questions précédentes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A) = 0$ et $(X_nY_n)_n$ converge en probabilité vers XY.

Exercice 3.16.

Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi uniforme sur $\{-1\ ,+1\}$.

Pour tout entier naturel n non nul on pose : $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $u_n\ = E(|S_n|)$, où $E(|S_n|)$ désigne l'espérance de la valeur absolue de S_n.

On admettra le résultat suivant : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ (formule de Stirling).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(S_{2n-1} = 0)$ et $P(S_{2n} = 0)$.

2. Déterminer un équivalent de $P(S_{2n} = 0)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. a) Pour $k \in \mathbb{Z}$, simplifier l'expression $|k - 1| + |k + 1|$.

   b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} =\ u_n + P(S_n = 0)$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Prouver que $t_n \underset{(+\infty)}{\sim} 2\sqrt{n}$.

5. Soit deux suites $\big(\alpha_n\big)_{n\geq1}$ et $\big(\beta_n\big)_{n\geq1}$ de réels strictement positifs telles que $\alpha_n \underset{(+\infty)}{\sim} \beta_n$.

Montrer que si la série de terme général β_n diverge, alors : $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \underset{(+\infty)}{\sim} \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k$.

6. Montrer que $E(|S_n|) \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$.

Solution :

1. Réaliser $(S_m = 0)$ c'est obtenir en cours de route autant de fois la valeur 1 que la valeur -1, donc : $P(S_{2n-1} = 0) = 0$ et en choisissant les n endroits parmi $2n$ où on obtient la valeur 1 :

$$P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}\big(\frac{1}{2}\big)^{2n} = \frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}}$$

2. La formule de Stirling donne alors après simplifications : $P(S_{2n} = 0) \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

3. a) $|x-1| + |x+1| = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geqslant 1 \\ -2x & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) Par indépendance mutuelle des variables X_i et le lemme des coalitions, on déduit que pour tout entier n non nul, S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
D'autre part, S_n prend des valeurs entières relatives dans $[\![-n, n]\!]$, la variable $|S_{n+1}|$ est bornée et admet une espérance qui s'exprime grâce à la formule du transfert par :

$$\begin{aligned}
E\big(|S_{n+1}|\big) = E\big(|S_n + X_{n+1}|\big) &= \sum_{-n\leq k\leq n}\ \sum_{i\in\{-1,1\}} |k+i| P(S_n = k).P(X_{n+1} = i)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{-n\leq k\leq n}\big(|k-1| + |k+1|\big)P(S_n = k)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{-n\leq k\leq -1}(-2k)P(S_n = k) + P(S_n = 0) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq k\leq n}(2k)P(S_n = k)\\
&= P(S_n = 0) + \sum_{-n\leq k\leq n}|k|P(S_n = k) = P(S_n = 0) + E(|S_n|)
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout entier n non nul :

$$u_{n+1} = u_n + P(S_n = 0)$$

4. Pour tout entier n, $n \geqslant 2$ et tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$: $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Puis par addition : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}$. D'où

$$t_n - 1 \leqslant 2\sqrt{n} - 2 \leqslant t_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant t_n,$$

donc $2\sqrt{n}-2 \leqslant t_n \leqslant 2\sqrt{n}-1$. On déduit par encadrement et limite que $t_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

5. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0, \alpha_n(1-\varepsilon) \leq \beta_n \leq \alpha_n(1+\varepsilon)$, alors pour $n \geqslant n_0$

$$\sum_{k=1}^{n_0-1}\alpha_k + (1-\varepsilon)\sum_{k=n_0}^{n}\alpha_k \leq \sum_{k=1}^{n}\beta_k \leq \sum_{k=1}^{n_0-1}\alpha_k + (1+\varepsilon)\sum_{k=n_0}^{n}\alpha_k$$

Soit en rectifiant les débuts des sommations :

$$K_1 + (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \leq \sum_{k=1}^{n}\beta_k \leqslant K + (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$$

où K_1 et K ne dépendent pas de n. Il suffit alors de diviser par $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k > 0$ et pour n assez grand le quotient est compris entre $1 - 2\varepsilon$ et $1 + 2\varepsilon$. Comme ε est quelconque on a le résultat voulu.

6. Avec $u_1 = 0$, il vient : $u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n} P(S_k = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(S_{2k} = 0)$ et $u_{2n+2} = u_{2n+1}$.
Or $P(S_{2n} = 0) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ donc la série de terme général $P(S_{2k} = 0)$ est divergente, à termes strictement positifs. On déduit des questions 4. et 5. que :

$$\sum_{k=1}^{n} P(S_{2k} = 0) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \text{ soit}$$

$$u_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

De même $u_{2(n+1)} = u_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}}$, ce qui conduit à $u_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$.
Ce que l'on peut regrouper en :

$$E(|S_n|) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Exercice 3.17.

Soit X_1, X_2 et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que X_1 suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 > 0$, X_2 suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 > 0$ et Z suit la loi de Bernoulli de paramètre p avec $p \in]0, 1[$.
On pose :

$$X = ZX_1 + (1 - Z)X_2$$

1. Montrer que X est une variable aléatoire.

2. Exprimer la fonction de répartition de X notée F_X à l'aide des fonctions de répartition de X_1 et de X_2 soit F_{X_1} et F_{X_2} et du paramètre p.

3. En déduire que X est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité de X en fonction de λ_1, λ_2 et p.

4. Exprimer l'espérance et la variance de X en fonction de λ_1, λ_2 et p.

5. On suppose dans cette question que $\lambda_1 = 1$ et que $\lambda_2 = 1/2$. On désire estimer le paramètre p supposé inconnu.

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Proposer un estimateur sans biais et convergent de p.

Solution :

1. X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. De plus soit x un réel, on a

$$[X \leqslant x] = ([Z=1] \cap [X_1 \leqslant x]) \cup (([Z=0] \cap [X_2 \leqslant x])$$

Or X_1, X_2 et Z sont des variables aléatoires donc $[Z=1]$, $[Z=0]$, $[X_1 \leqslant x]$ et $[X_2 \leqslant]$ sont des événements ainsi par union et intersection, $[X \leqslant]$ est un événement. Ceci prouve que X est une variable aléatoire.

2. On a :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \ F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(([Z=1] \cap [X_1 \leqslant x]) \cup (([Z=0] \cap [X_2 \leqslant x]))$,
il s'agit d'une union d'événements disjoints et par indépendance des variables aléatoires, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ F_X(x) = pF_{X_1}(x) + (1-p)F_{X_2}(x)$$

3. Comme X_1 et X_2 sont des variables à densité, F_{X_1} et F_{X_2} sont continues sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points. La combinaison linéaire de ces deux fonctions conserve ces propriétés donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points. Par conséquent X est une variable à densité.

Par dérivation une densité de X est f_X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = (p\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 x})\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$$

4. On reconnaît les intégrales qui apparaissent dans les calculs à effectuer et :

$$E(X) = pE(X_1) + (1-p)E(X_2) = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2}$$

puis :

$$\begin{aligned} V(X) &= pE(X_1^2) + (1-p)E(X_2^2) - (\frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2})^2 \\ &= p\frac{2}{\lambda_1^2} + (1-p)\frac{2}{\lambda_2^2} - (\frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2})^2 \\ &= \frac{p(2-p)}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)(1+p)}{\lambda_2^2} - \frac{2p(1-p)}{\lambda_1\lambda_2} \end{aligned}$$

5. On suppose dans cette question que $\lambda_1 = 1$ et que $\lambda_2 = 1/2$. On a donc $E(X) = 2-p$. On en déduit que $2 - \overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de p. De plus $V(X) = -p^2 - 2p + 4$. On en déduit que la variance de $2 - \overline{X_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Donc $2 - \overline{X_n}$ est un estimateur sans biais et convergent de p.

Exercice 3.18.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Un mobile se déplace par sauts d'une unité sur les points d'un axe $(O, \overrightarrow{i})$ dont les abscisses sont des entiers naturels. Un saut vers la droite (pour lequel l'abscisse augmente d'une unité) se fait avec la probabilité $p \in]0,1[\setminus \{1/2\}$, tandis qu'un saut vers la gauche se fait avec la probabilité $q = 1-p$. Les différents sauts effectués sont indépendants les uns des autres.

Soit a un entier supérieur ou égal à 3 fixé et n un entier tel que $0 \leqslant n \leqslant a$. Le mobile démarre du point d'abscisse n et son voyage se termine lorsqu'il se trouve en l'origine ou au point A d'abscisse a (si au départ il est en un de ces deux points, le voyage s'achève donc immédiatement).

On note D_n la durée de ce voyage (c'est-à-dire le nombre de sauts effectués jusqu'à l'arrêt) et on admet que D_n possède une espérance que l'on note $E(D_n)$.

On note S l'événement «le premier saut est un saut vers la droite».

1. Ecrire un script `Scilab` permettant de simuler la variable D_n, pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

2. Montrer que lorsque $0 < n < a$, l'ensemble $D_n(\Omega)$ n'est pas borné.

3. a) Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P_S(D_n = k) = P(D_{n+1} = k-1)$.

b) En déduire que pour $n \in \rrbracket 0, a-1 \rrbracket$, $E(D_n/S) = E(D_{n+1}) + 1$.

c) Exprimer de même $E(D_n/\overline{S})$, où $\overline{S}$ est l'événement contraire de S.

4. a) Que valent $E(D_0)$ et $E(D_a)$?

b) Pour $n \in \llbracket 0, a \rrbracket$, on pose $u_n = E(D_n)$. Montrer qu'il existe des coefficients réels α, β, γ, que l'on précisera, tels que la liste $(u_n)_{n\in\llbracket 0,a\rrbracket}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \llbracket 1, a-1 \rrbracket, u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_{n-1} + \gamma \quad (*)$$

c) Montrer qu'il existe une suite de la forme $n \mapsto \delta n$ vérifiant la relation $(*)$.

d) En déduire la valeur de $u_n = E(D_n)$ en fonction de a, n, p et q.

Solution :

1.
```
n = input('la valeur de n est :')
x = n ; D = 0
while x>0 & x<a
  if rand()<p then x = x+1 else x = x-1
  end
D=D+1
end
disp(D)
```

2. Il y a au moins un déplacement et comme $a \geqslant 3$, il se peut que le voyage ne s'achève pas au premier déplacement. On peut alors revenir au point de départ et recommencer indéfiniment. Ne pas chercher à donner exactement $D_n(\Omega)$, car il faut déjà s'approcher du but et en plus il peut y avoir une obligation de parité ...

3. a) Sachant que S est réalisé, le mobile va en $n+1$ et pour réaliser $(D_n = k)$ il lui reste $k-1$ sauts à faire depuis ce point. Ainsi $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P_S(D_n = k) = P(D_{n+1} = k-1)$, le résultat restant vrai même pour $k = 1$.

b) Alors, la convergence des sommes écrites étant admise par l'énoncé et le fait de commencer au rang 0 ou au rang 1 ne changeant rien :
$E(D_n/S) = \sum k \times P_S(D_n = k) = \sum k \times P(D_{n+1} = k-1) = \sum kP(D_{n+1}+1 = k)$, soit :

$$E(D_n/S) = E(D_{n+1}+1) = E(D_{n+1}) + 1$$

c) Mutatis mutandis :

$$E(D_n/\overline{S}) = E(D_{n-1}+1) = E(D_{n-1}) + 1$$

4. a) $E(D_0) = E(D_n) = 0$ (on ne se met pas en marche !)

b) Par la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned} E(D_n) &= P(S)E(D_n/S) + P(\overline{S})E(D_n/\overline{S}) = pE(D_n/S) + qE(D_n/\overline{S}) \\ &= p(E(D_{n+1})+1) + q(E(D_{n-1})+1) \end{aligned}$$

Soit pour tout n de $[\![1, a-1]\!]$:

$$E(D_n) = pE(D_{n+1}) + qE(D_{n-1}) + 1$$

On note $u_n = E(D_n)$ et on met les termes aux places demandées ...

c) Avec $v_n = \delta n$, cette séquence vérifie $(*)$ si :

$$\forall\, n, \delta n = \delta(p(n+1) + q(n-1)) + 1 = \delta n + \delta(p-q) + 1$$

et ceci est vrai pour tout n si on choisit $\delta = \dfrac{1}{q-p}$.

d) On a : $\begin{cases} u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1} + 1 \\ v_n = pv_{n+1} + qv_{n-1} + 1 \end{cases}$ (pour le bon choix de δ), donc par différence la séquence (w_n) définie par $w_n = u_n - v_n = u_n - \dfrac{n}{q-p}$ vérifie la récurrence linéaire sur deux rangs :

$$w_n = pw_{n+1} + qw_{n-1}$$

L'équation caractéristique est $px^2 - x + q = 0$ de racine évidente 1 et donc l'autre vaut $\dfrac{q}{p}$ et w_n est de la forme $w : n \mapsto \lambda_1 + \lambda_2\big(\frac{q}{p}\big)^n$, puis :

$$u_n = w_n + v_n = \lambda_1 + \lambda_2\Big(\frac{q}{p}\Big)^n + \frac{n}{q-p}$$

avec $u_0 = 0$ et $u_a = 0$, il vient $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2\big(\frac{q}{p}\big)^a + \dfrac{a}{q-p} = 0$, soit tous calculs faits :

$$u_n = E(D_n) = \frac{n}{q-p} + \Big(1 - \Big(\frac{q}{p}\Big)^n\Big) \times \frac{a}{(q-p)(1-(\frac{q}{p})^a)}$$

Exercice 3.19.

Préliminaire :

Calculer pour a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$ l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_a^b \min(x,t)\,dt$ selon les valeurs du réel x.

Dans la suite de l'exercice, on se donne une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on pose :

$$\forall\,\omega \in \Omega, Y(\omega) = \int_a^b \min(X(\omega), t)\,dt$$

1. Exprimer Y en fonction de X, $\mathbf{1}_{\{X<a\}}$, $\mathbf{1}_{\{a\leq X\leq b\}}$, et $\mathbf{1}_{\{X>b\}}$ d'une part et en fonction de $\mathbf{1}_{\{X\leq a\}}$, $\mathbf{1}_{\{a<X<b\}}$, et $\mathbf{1}_{\{X\geq b\}}$ d'autre part.

2. En déduire que Y est aussi une variable aléatoire.

3. On suppose ici que X est positive, discrète et admet une espérance.
On note $Z = X.\mathbf{1}_{\{X\leq a\}}$, $U = X^2.\mathbf{1}_{\{a<X<b\}}$ et $V = X.\mathbf{1}_{\{a<X<b\}}$.

Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et l'exprimer en fonction de a, b, X, $E(Z)$, $E(U)$, $E(V)$.

4. On suppose ici que $a = 0$, $b = 1$, et que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0, 1[$. Préciser Y et son espérance.

5. On suppose ici que $a = 0$, $b = 1$, et que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Préciser la loi de Y et montrer que Y possède une espérance que l'on calculera en fonction de X.

6. On suppose ici que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$. Exprimer Y en fonction de X et préciser son espérance, en fonction de a et b.

Solution :

Préliminaire :

$$I(x) = \int_a^b \min(x, t)\,dt = \begin{cases} (b-a)x & \text{si } x \leqslant a \\ \dfrac{x^2-a^2}{2} + (b-x)x & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ \dfrac{b^2-a^2}{2} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

1. Par définition des variables indicatrices qui valent 1 quand elles jouent un rôle et 0 sinon :

$$Y = (b-a)X\times\mathbf{1}_{(X\leq a)} + \Big(\frac{X^2-a^2}{2} + (b-X)X\Big)\times\mathbf{1}_{(a<X<b)} + \frac{b^2-a^2}{2}\times\mathbf{1}_{(X\geq b)}$$

ou, comme les formules du préliminaire se recollent aux bords :

$$Y = (b-a)X\times\mathbf{1}_{(X<a)} + \Big(\frac{X^2-a^2}{2} + (b-X)X\Big)\times\mathbf{1}_{(a\leq X\leq b)} + \frac{b^2-a^2}{2}\times\mathbf{1}_{(X>b)}$$

2. La somme et le produit de deux variables aléatoires sont des variables aléatoires, les constantes et les fonctions indicatrices d'événements comme $(X \leqslant a)$, $(a < X < b)$ et $(X \geqslant b)$ sont aussi des variables aléatoires.
Bref, comme somme de trois variables aléatoires, Y en est aussi une.

3. La variable $Z = X\times\mathbf{1}_{(X\leq a)}$ est discrète, comprise entre 0 et a, elle admet donc une espérance.

$U = X^2\times\mathbf{1}_{(a<X<b)}$ est discrète, bornée entre 0 et b^2 et donc admet aussi une espérance.

$V = X\times\mathbf{1}_{(a<X<b)}$ est discrète, comprise entre 0 et b, admet aussi une espérance.

Enfin, $\dfrac{b^2-a^2}{2}\times\mathbf{1}_{(X\geq b)}$ est discrète, positive et inférieure ou égale à $\dfrac{b^2}{2}$, donc admet aussi une espérance.

Par combinaison linéaire, Y admet bien une espérance qui vaut :

$$E(Y)=(b-a)E(Z)+bE(V)-\frac{1}{2}E(U)-\frac{a^2}{2}P(a<X<b)+\frac{b^2-a^2}{2}P(X\geqslant b)$$

$$E(Y)=(b-a)E(Z)+bE(V)-\frac{1}{2}E(U)+\frac{b^2}{2}P(X\geqslant b)-\frac{a^2}{2}P(X>a)$$

4. En appliquant les résultats précédents, on obtient :

$$Y=X\times\mathbf{1}_{(X\leq 0)}+\big(\frac{X^2}{2}+(1-X)X\big)\times\mathbf{1}_{(0<X<1)}+\frac{1}{2}\times\mathbf{1}_{(X\geq 1)}=\frac{1}{2}$$

et son espérance vaut banalement $\dfrac{1}{2}$.

5. $Y=X\times\mathbf{1}_{(X=0)}+\dfrac{1}{2}(\mathbf{1}-\mathbf{1}_{(X=0)})=\dfrac{1}{2}\big(\mathbf{1}-\mathbf{1}_{(X=0)}\big)$ et son espérance est

$$E(Y)=\frac{1}{2}(1-P(X=0))$$

Note : on retrouve le résultat de la question précédente.

6. $Y=\big(\dfrac{X^2-a^2}{2}+(b-X)X\big)\times\mathbf{1}_{(a\leq X\leq b)}=\big(\dfrac{X^2-a^2}{2}+(b-X)X\big)=bX-\dfrac{X^2+a^2}{2}$

Son espérance est

$$E(Y)=bE(X)-\frac{E(X^2)+a^2}{2}=b\frac{a+b}{2}-\frac{V(X)+(E(X))^2+a^2}{2}$$

Soit, après calculs :

$$E(Y)=\frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

Exercice 3.20.

Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes $C_1,C_2,\dots,C_n$ que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs $J_1,J_2,\dots,J_n$ selon le protocole suivant :
→ la première carte C_1 est donnée à J_1 ;
→ la deuxième carte C_2 est distribuée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;
→ la troisième carte C_3 est distribuée de façon équiprobable entre J_1,J_2 et J_3 ;
→ et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs $J_1,J_2,\dots,J_n$.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},P)$.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $P(X_n=0)$ et $P(X_n=n-1)$.

2. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on note B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et qui vaut 0 sinon.

Déterminer la loi de B_i. Exprimer la variable aléatoire X_n en fonction des variables aléatoires B_i et en déduire l'espérance de X_n.

3. En faisant le moins de calculs possibles, donner la loi de X_4.

4. a) Montrer que pour i et j dans $[\![1,n]\!]$ tels que $i<j$, on a :

$$P((B_i=1)\cap(B_j=1))=\frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

En déduire la covariance des variables aléatoires B_i et B_j.

b) Montrer que $V(X_n)=\frac{n+1}{12}$.

Solution :

1. $X_n[\Omega]=[\![0,n-1]\!]$, car on peut donner une carte à chacun ou toutes les cartes à J_1, ou toute situation intermédiaire.

$P(X_n=0)=P(X_n=n-1)=\frac{1}{n!}$ (à chaque fois une seule façon de faire).

2. Pour $i\geqslant 2$, réaliser $(B_i=1)$ c'est donner les cartes $C_i,C_{i+1},\dots,C_n$ à d'autres (pour les $i-1$ premières cartes il n'est pas dans la course !), en suivant le nombre de joueurs en lice à chaque fois et par indépendance :

$$P(B_i=1)=\frac{i-1}{i}\times\frac{i}{i+1}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{i-1}{n}$$

valable aussi pour $i=1$.

B_i étant une variable de Bernoulli, on a $E(B_i)=\frac{i-1}{n}$ et comme $X_n=\sum\limits_{i=1}^{n}B_i$, il vient $E(X_n)=\frac{n-1}{2}$ (vérification élémentaire pour $n=1$ et $n=2$!)

3. X_4 prend les valeurs 0 et 3 avec à chaque fois la probabilité $\frac{1}{24}$.

Donc $P(X_4=1)+P(X_4=2)=\frac{22}{24}$ et comme

$P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)=\frac{3}{2}$, on en tire en résolvant ce système affine de deux équations : $P(X=1)=P(X=2)=\frac{11}{24}$.

4. a) Réaliser $(B_i=1)\cap(B_j=1)$, c'est donner les cartes $C_i,C_{i+1}\dots,C_{j-1}$ à quelqu'un d'autre que J_i (J_j n'est pas dans la course) et donner les cartes $C_j,\dots,C_n$ ni à J_i ni à J_j. En procédant comme en 2., on a donc :

$$P((B_i=1)\cap(B_j=1))=\Big(\prod_{k=1}^{j-1}\frac{k-1}{k}\Big)\Big(\prod_{k=j}^{n}\frac{k-2}{k}\Big)=\frac{i-1}{j-1}\times\frac{(j-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

Ainsi $P((B_i=1)\cap(B_j=1))=\frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$.

$\mathrm{Cov}(B_i,B_j)=E(B_iB_j)-E(B_i)E(B_j)$ et comme il n'y a ici que des variables aléatoires de Bernoulli :

$$\mathrm{Cov}(B_i,B_j)=\frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}-\frac{(i-1)(j-1)}{n^2}=-\frac{(i-1)(n-j+1)}{n^2(n-1)}$$

b) On a

$$V(B_i)=\frac{i-1}{n}(1-\frac{i-1}{n})=\frac{(i-1)(n-i+1)}{n^2}$$

donc en développant :

$$V(X_n)=\sum_i \frac{(i-1)(n-i+1)}{n^2}-2\sum_{i<j}\frac{(i-1)(n-j+1)}{n^2(n-1)}$$

La première somme est $\dfrac{1}{n^2}(n\sum\limits_{k=0}^{n-1}k-\sum\limits_{k=0}^{n-1}k^2)$ et vaut $\dfrac{n-1}{2}-\dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n}=$ $\dfrac{n^2-1}{6n}$

La deuxième est : $\sum\limits_{j=2}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j-1}\dfrac{(i-1)(n-j+1)}{n^2(n-1)}$ donc est $\sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{(j-2)(j-1)(n-j+1)}{2n^2(n-1)}$.

On peut ajouter le terme correspondant à $j=1$ et connaissant la somme des premiers entiers, des premiers carrés et des premiers cubes, cette deuxième somme vaut $\dfrac{n^2-n-2}{12n}$

Finalement $V(X_n)=\dfrac{n+1}{12}$.

Exercice 3.21.

Soit $\sigma>0$. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui suit la loi normale centrée, d'écart-type σ.

1. Montrer que la variable aléatoire $U=\dfrac{X^2}{2\sigma^2}$ suit une loi γ dont on précisera le paramètre.

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ de même loi que X.

2. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $S_n=\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que la variable aléatoire $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ est un estimateur sans biais de σ^2.

3. a) Montrer l'existence et calculer l'espérance $E(\sqrt{Y_n})$ de $\sqrt{Y_n}$ en fonction de n et σ.

b) En déduire que $T_n=\dfrac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)}\sqrt{\dfrac{nY_n}{2}}$ est un estimateur sans biais de σ.

c) Montrer l'existence et calculer la variance $V(T_n)$ de T_n en fonction de n, σ.

d) Montrer que $(T_n)_n$ est un estimateur convergent de σ.

(*on admettra que, pour tout* $x>0$, *on a :* $\Gamma(x+n)\underset{(n\to\infty)}{\sim}n^x(n-1)!$)

Solution :

1. On a $P(U\leqslant t)=0$ si $t<0$, et, pour tout $t\geqslant 0$, on a :
$P(U\leqslant\leqslant t)=P(X^2\leqslant 2\sigma^2t)=F_X(\sigma\sqrt{2t})-F_X(-\sigma\sqrt{2t})$, où F_X désigne la fonction de répartition de X. La fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf en un nombre fini de points. Il en est donc de même pour $t\mapsto P(U\leqslant t)$ sur $\mathbb{R}^*$ ainsi qu'en 0

$(F_X(\sigma\sqrt{2t}) - F_X(-\sigma\sqrt{2t}) \to F_X(0) - F_X(0) = 0)$. Donc U est à densité et une densité f_U de U s'obtient en dérivant, soit $f_U(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f_U(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2t}} f_X(\sigma\sqrt{2t}) + \frac{\sigma}{\sqrt{2t}} f_X(-\sigma\sqrt{2t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{\Gamma(1/2)} t^{\frac{1}{2}-1} \mathrm{e}^{-t}$$

On reconnaît que $U \hookrightarrow \gamma(1/2)$.

2. a) D'après les résultats de stabilité du cours, comme les variables aléatoires $\dfrac{X_i^2}{2\sigma^2}$ sont indépendantes et de même loi $\gamma(1/2)$, on sait qu'alors leur somme S_n suit la loi $\gamma(n/2)$.

b) On en déduit que $E(S_n) = n/2$ et comme $Y_n = \dfrac{2\sigma^2}{n} S_n$, on a donc : $E(Y_n) = \sigma^2$, soit :

$$Y_n \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2.$$

3. a) Comme $\sqrt{Y_n} = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{n}}\sqrt{S_n}$, on a $E(\sqrt{Y_n}) = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{n}} E\left(\sqrt{S_n}\right)$. Or le théorème de transfert donne :

$$E(\sqrt{S_n}) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}}\, x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-x} dx = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \Gamma((n+1)/2),$$

où le calcul montre la convergence (absolue). Donc :

$$E(\sqrt{Y_n}) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \sigma \sqrt{\frac{2}{n}}$$

b) Ainsi $T_n = \dfrac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)} \sqrt{\dfrac{nY_n}{2}}$ est un estimateur sans biais de σ.

c) Soit $a_n = \dfrac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)}$, on a : $V(T_n) = \dfrac{n}{2} a_n^2 V(\sqrt{Y_n}) = \dfrac{n}{2} a_n^2 \big[E(Y_n) - [E(\sqrt{Y_n})]^2\big]$.

Or $E(Y_n) = \sigma^2$ et $[E(\sqrt{Y_n})]^2 = \dfrac{2\sigma^2}{n} \times \dfrac{1}{a_n^2}$, d'où : $V(T_n) = \sigma^2\big(\dfrac{na_n^2}{2} - 1\big)$.

d) L'indication donne : $\Gamma\big(n + \frac{1}{2}\big) \sim \sqrt{n} \times (n-1)!$ et on sait que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $\Gamma(k) = (k-1)!$.
Il y a donc deux cas :

- Si n est pair, $n = 2p$, alors

$$a_{2p} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+1/2)} \sim \frac{1}{\sqrt{p}} \text{ soit } a_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$$

- Si n est impair $n = 2p+1$,

$$a_{2p+1} = \frac{\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(p+1)} = \frac{\Gamma(p+1/2)}{p\Gamma(p)} \sim \frac{\sqrt{p}}{p} \sim \frac{1}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Dans tous les cas on a : $a_n \sim \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{na_n^2}{2} = 1$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V(T_n) = 0$ et donc, T_n est un estimateur convergent de σ.

Exercice 3.22.

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers X, $(c_n)_n$ une suite de réels qui converge vers un réel c et $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que :
$$(|c_n X_n - cX| \geqslant \varepsilon) \subset (|c_n| \times |X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) \cup (|c_n - c||X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2})$$

2. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(|X_n - X| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{|c| + \varepsilon}\big) = 0$.

3. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(|c_n - c||X| \geqslant \varepsilon\big) = 0$.

4. En déduire que $(c_n X_n)_n$ converge en probabilité vers cX.

5. **Application.** Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, possédant un moment d'ordre 4 et d'espérance μ. Montrer que la suite de variables aléatoires $\Big(\dfrac{1}{\binom{n}{2}} \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} X_i X_j\Big)_n$ converge en probabilité vers μ^2.

Solution :

1. On remarque que si $(|c_n|(X_n - X) < \varepsilon/2)$ et $(|c_n - c|X < \varepsilon/2)$ sont réalisés, alors d'après l'inégalité triangulaire, on réalise $(|c_n(X_n - X) + (c_n - c)X| < \varepsilon)$.

On passe ensuite au complémentaire.

2. Il s'agit de la définition de la convergence en probabilité.

3. Comme (c_n) converge vers c, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (|c_n - c||X| \geqslant \varepsilon) = \emptyset$. Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|c_n - c||X| \geqslant \varepsilon) = 0$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (c_n) converge vers c, il existe un rang n_0 à partir duquel $|c_n - c| < \varepsilon$, et donc $|c_n| < |c| + \varepsilon$. Ainsi, d'après la question 1,
$$\begin{aligned} P(|c_n X_n - cX| \geqslant \varepsilon) &\leqslant P(|c_n||X_n - X| \geqslant \varepsilon/2) + P(|c_n - c||X| \geqslant \varepsilon/2) \\ &\geqslant P((|c| + \varepsilon)|X| \geqslant \varepsilon/2) + P(|c_n - c||X| \geqslant \varepsilon/2) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, cette quantité converge bien vers 0.

5. On remarque que
$$\underbrace{\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leq i<j\leq n} X_i X_j}_{Y_n} = \underbrace{\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}_{Z_n} - \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}_{W_n}$$

D'une part, comme la suite $(X_i^2)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi possédant un moment d'ordre 2, d'après la loi faible des grands nombres, $\dfrac{1}{n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\Big)_n$ converge vers $E(X_1^2)$. Ainsi, d'après la question précédente,

$\left(\dfrac{1}{n(n-1)}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\right)_n$ converge en probabilité vers 0.

D'autre part, comme toujours d'après la loi faible des grands nombres $\big(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\big)_n$ converge en probabilité vers μ, et comme la fonction $x \mapsto x^2$ est continue, $\big(\big(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\big)^2\big)_n$ converge en probabilité vers μ^2. Enfin, comme $\dfrac{n}{n-1}$ converge vers 1, le premier terme converge en probabilités vers μ^2.

Ainsi, en reprenant le raisonnement de la question 1,

$$P(|Y_n - \mu^2| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|Z_n - \mu^2| \geqslant \varepsilon/2) + P(|W_n| \geqslant \varepsilon/2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 3.23.

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge et que sa valeur est $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que pour tout n entier naturel, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(t)}{t^2} dt$ existe et que $u_1 = \frac{\pi}{2}$.

2. a) Montrer que pour tout s réel, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\, dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}|s|$$

b) En déduire la valeur de u_2.

Dans la suite, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

3. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

4. a) Calculer pour tout réel t, $E(\sin(X_1 t))$, puis $E(\cos(X_1 t))$.

b) Montrer par récurrence sur n, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t, on a : $E(\cos(S_n t)) = (\cos t)^n$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n$.

Solution :

1. Le cas $n = 0$ étant banal, nous supposerons $n \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos^n(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Au voisinage de 0, un développement limité donne $\dfrac{1-\cos^n(t)}{t^2} \sim \dfrac{nt^2}{2t^2} = \dfrac{n}{2}$. L'intégrale est donc faussement impropre en 0.

• Au voisinage de $+\infty$, on a $0 \leqslant \dfrac{1-\cos^n(t)}{t^2} \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ dont l'intégrale est convergente sur $[1,+\infty[$.

Une intégration par parties donne, en se plaçant d'abord sur un segment de $\mathbb{R}_+^*$, puis en passant aux limites :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_{\to 0}^{\to+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = u_1$.

2. a) Si $s=0$, on a $\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1-\cos(st)}{t^2} = 0$ donc $|s| = 0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(0\times t)}{t^2}\, dt$.

Si $s>0$, le changement de variable $t = su$ est de classe C^1 strictement croissant de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a donc

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{s^2u^2}\, s\, du = \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{u^2}\, du$$

Par parité du cosinus, on a donc $\forall\, s \in \mathbb{R}$, $|s| = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{u^2}\, du$.

b) Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2u)}{u^2}\, du = \pi$ et comme $1-\cos(2u) = 2(1-\cos^2 u)$, cela s'écrit :

$$\pi = 2u_2$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k) = 0$ et $V(X_k) = 1$. Par linéarité de l'espérance et indépendance pour la variance, il vient donc $E(S_n) = 0$ et $V(S_n) = n$. (Notons que S_n prend toutes les valeurs entières de $-n$ à n qui ont même parité que n)

4. a) Par le théorème de transfert :

$$E(\sin(X_1t)) = \tfrac{1}{2}\left(\sin(-t) + \sin(t)\right) = 0$$

et

$$E(\cos(X_1t)) = \tfrac{1}{2}\left(\cos(-t) + \cos(t)\right) = \cos(t)$$

b) Pour $n=2$, comme $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, il vient, par indépendance et linéarité :

$$\begin{aligned} E(\cos(X_1+X_2)t) &= E(\cos(X_1t)\cos(X_2t)) - E(\sin(X_1t)\sin(X_2t)) \\ &= E(\cos(X_1t))E(\cos(X_2t)) - 0 = \cos^2(t) \end{aligned}$$

La récurrence suit avec le même schéma de démonstration :

$$E(\cos((X_1+\cdots+X_n)t)) = (\cos t)^n$$

5. On a grâce à 2. a) :

$$E(|S_n|) = \sum_{s\in S_n(\Omega)} |s| P(S_n = s) = \frac{2}{\pi}\sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n = s)\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{u^2}\, du$$

et la somme étant finie :

$$E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n = s)\frac{1-\cos(su)}{u^2}\,du$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{u^2}\big[1 - \sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n = s)\cos(su)\big]\,du$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2}\big[1 - E(\cos(S_n u))\big]\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2}\big[1 - (\cos(u))^n\big]\,du = \frac{2}{\pi}\,u_n$$

Exercice 3.24.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, chacune d'espérance nulle et de variance notée $V(X_i)$ $(i \in [\![1, n]\!])$. On pose pour tout $n \geqslant 1$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

L'objet de cet exercice est de démontrer l'inégalité suivante :

$$\text{pour tout réel } t > 0\ ,\quad P(\max_{1\leq i\leq n} |S_i| \geqslant t) \leqslant \frac{1}{t^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) \qquad (\star)$$

1. a) Calculer pour $k \in [\![1, n]\!]$, $E(S_n - S_k)$.

b) Calculer $V(S_n)$ en fonction des $V(X_i)$

2. Soit $A = \big(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geqslant t\big)$ et :

$$\text{pour tout } k \in [\![2, n]\!],\ A_k = \Big(\bigcap_{j=1}^{k-1} (|S_j| < t)\Big) \cap (|S_k| \geqslant t) \text{ et } A_1 = (|S_1| \geqslant t)$$

Montrer que les événements $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ forment une partition de A.

3. a) Montrer que $E(S_k^2 \times \mathbf{1}_{A_k}) \geqslant t^2 P(A_k)$.

b) Montrer que $E(S_n^2) \geqslant \sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 \times \mathbf{1}_{A_k})$.

c) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$E(S_n^2 \times \mathbf{1}_{A_k}) \geqslant E(S_k^2 \times \mathbf{1}_{A_k}) + 2E(S_n - S_k)E(S_k \times \mathbf{1}_{A_k})$

(utiliser : $S_n^2 = (S_k + (S_n - S_k))^2$).

d) En déduire que $E(S_n^2) \geqslant t^2 P(A)$. Conclure.

4. On suppose dans cette question que chaque X_i suit la loi uniforme sur $[-\sqrt{i}, +\sqrt{i}]$. Que donne la majoration $(\star)$?

Solution :

1. a) Comme $S_n - S_k = \sum_{j=k+1}^{n} X_j$, il vient $E(S_n - S_k) = 0$, car pour tout j, $E(X_j) = 0$.

b) Par indépendance, $V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.

2. $\star$ Les événements A_k et A_j sont disjoints pour $k \neq j$. En effet on peut supposer que $k < j$ et si $\omega \in A_k \cap A_j$, on a $|S_k(\omega)| > t$ et $|S_j(\omega)| \leqslant t$.

$\star$ On a $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, car :

- soit $\omega \in A$. Il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|S_k(\omega)| \geqslant t$. Soit k_0 le premier indice k pour lequel $|S_k(\omega)| \geqslant t$. Par définition de k_0, on a $\omega \in A_{k_0}$, donc $\omega \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$.
- soit $\omega \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Il existe j tel que $\omega \in A_j$. Donc $|S_j(\omega)| \geqslant t$ ce qui entraîne que $\displaystyle\max_{1 \leq k \leq n} |S_k(\omega)| \geqslant t$.

3. a) On a $S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin A_k \\ S_k^2(\omega) \geqslant t^2 & \text{si } \omega \in A_k \end{cases}$.

Par croissance de l'espérance $E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) \geqslant E(t^2 \mathbf{1}_{A_k}) = t^2 P(A_k)$.

b) Comme les événements $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ forment une partition de A, on a $\mathbf{1}_A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$, car si U et V sont des événements incompatibles , $\mathbf{1}_{U \cup V} = \mathbf{1}_U + \mathbf{1}_V$. Comme $S_n^2 \geqslant S_n^2 \mathbf{1}_A$, il vient :

$$E(S_n^2) \geqslant E(S_n^2 \mathbf{1}_A) = \sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k})$$

c) Comme $S_n^2 = (S_k + (S_n - S_k))^2 = S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2$, il vient : $S_n^2 \mathbf{1}_{A_k} = S_k^2 \mathbf{1}_{A_k} + 2S_k(S_n - S_k)\mathbf{1}_{A_k} + (S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k}$ et par croissance et positivité de l'espérance :

$$E(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}) \geqslant E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) + 2E((S_n - S_k)S_k \mathbf{1}_{A_k})$$

Les variables aléatoires $S_n - S_k = \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} X_j$ et $S_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} X_j$ étant indépendantes, par le lemme des coalitions, il vient :

$$\begin{aligned} E(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}) &\geqslant E(S_k^2 1_{A_k}) + 2E((S_n - S_k)S_k \mathbf{1}_{A_k}) \\ &\geqslant E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) + 2E(S_n - S_k)E(S_k \mathbf{1}_{A_k}) = E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) \end{aligned}$$

d) En utilisant les questions précédentes :

$$E(S_n^2) \geqslant \sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}) \geqslant \sum_{k=1}^{n} E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) \geqslant t^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = t^2 P(A)$$

Et comme $E(X_i) = 0$, il vient $P(A) \leqslant \dfrac{1}{t^2} E(S_n)^2 = \dfrac{1}{t^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.

4. Dans ce cas particulier, $E(X_i) = 0$ et $V(X_i) = \dfrac{i}{3}$. Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \dfrac{n(n+1)}{6}$ et :

$$P(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geqslant t) \leqslant \frac{n(n+1)}{6t^2}$$

Exercice 3.25.

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Une urne contient initialement n boules numérotées de 1 à n. On vide l'urne en extrayant toutes les boules une par une au hasard et sans remise. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au i-ème tirage porte le numéro i et qui vaut 0 dans le cas contraire.

1. a) Quelle est la loi de X_i ?

b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire N qui donne le nombre de fois où, lors du tirage, le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue sont égaux.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on dira que le résultat du k-ième tirage est un « sommet » lorsque la boule obtenue à ce tirage porte un numéro strictement supérieur à tous les numéros obtenus jusqu'alors (en particulier, lorsque $k = 1$, la première boule est toujours un sommet).

2. Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles il n'y a qu'un seul sommet ?
Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles il y a n sommets ?

3. Montrer la relation suivante : pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{q} \binom{p+k}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$.

4 a) Soient $k \in [\![2, n]\!]$ et $j \in [\![k, n]\!]$ fixés. Combien existe-t-il de façons de vider l'urne, pour lesquelles, à la fois la k-ième boule obtenue porte le numéro j et le k-ième tirage constitue un sommet ?

b) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles le k-ième tirage est un sommet ? En déduire la probabilité que le k-ième tirage soit un sommet.

5. Soit R le nombre aléatoire de sommets obtenus lorsque l'on vide l'urne. Déterminer, sous forme d'une somme, l'espérance de R.

Solution :

1. a) On modélise l'expérience aléatoire par l'univers Ω qui est l'ensemble des permutations des n boules (tirages de toutes les boules sans remise) muni de la probabilité uniforme ; alors $\text{card}(\Omega) = |\Omega| = n!$. L'événement A_i « la boule obtenue au i-ème tirage porte le numéro i » est formé des permutations qui tirent cette boule i au i-ème tirage et les $n-1$ autres boules aux $n-1$ autres rangs. Ainsi : $P(A_i) = \dfrac{|A_i|}{|\Omega|} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

On reconnaît que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$.

b) Comme $N = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $E(X_i) = \dfrac{1}{n}$, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(N) = n \times \frac{1}{n} = 1$$

2. Le premier tirage étant considéré comme un sommet, s'il n'y a eu qu'un seul sommet, c'est que la boule numéro n est sortie au premier tirage. Ensuite, peu importe ce qui se passe. Il y a donc $(n-1)!$ façons de vider l'urne pour lesquelles il n'y a qu'un sommet.

S'il y a n sommets, cela signifie qu'à chaque tirage, on a obtenu un numéro supérieur à celui obtenu au tirage précédent ; la seule possibilité est d'avoir tiré les boules par ordre croissant, donc un seul tirage convient.

3. La relation à démontrer est claire pour $q = 0$ et passer d'un rang q au rang $q+1$ résulte de la formule de Pascal.

4. a) Si le k-ième tirage est un sommet et porte le numéro j, cela signifie qu'au cours des $(k-1)$ tirages précédents, on n'a obtenu que des numéros inférieurs ou égaux à $j-1$.
- si $j < k$, c'est impossible ;
- si $j \geqslant k$ il y a $\binom{j-1}{k-1}(k-1)!$ façons (arrangements) de tirer les boules sorties lors des $k-1$ premiers tirages parmi les numéros compris entre 1 et $j-1$; puis une seule façon de placer la boule j en place k ; et la fin du tirage est une permutation quelconque des $n-k$ boules restantes. D'après le lemme des bergers, le nombre recherché est :

$$\binom{j-1}{k-1}\times(k-1)!\times 1\times(n-k)!$$

b) Il reste à sommer sur les valeurs de j accessibles et le nombre cherché est :

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{j-1}{k-1}\times(k-1)!\times(n-k)! = (n-k)!(k-1)!\binom{n}{k},$$

(d'après le résultat de la question 3.) La probabilité recherchée est donc :

$$\frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}\binom{n}{k} = \frac{1}{k}$$

Remarque. On peut retrouver ce résultat directement avec le raisonnement suivant : dire que le k-ième tirage est un sommet, c'est dire que le plus grand des k premiers résultats est le dernier, c'est donc dire qu'en ordonnant k nombres deux à deux distincts le plus grand est le dernier. La probabilité est donc de $\frac{1}{k}$.

5. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit Y_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat du k-ième tirage est un sommet et 0 sinon. D'après la question précédente, la variable aléatoire Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{k}$.

Comme $R = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(R) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

5

QUESTIONS COURTES

On considère une fonction f deux fois dérivable sur $[0,1]$ et telle que

$$\forall\, x \in [0,1], f''(x) \leqslant 0$$

Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \leqslant f\big(\frac{1}{2}\big)$.

On pourra commencer par le cas où $f'\big(\frac{1}{2}\big) = 0$.

Soit n un entier au moins égal à 1 et $E = [\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n. On choisit au hasard deux parties A et B de E, toutes les parties, y compris la partie vide, ayant la même probabilité d'être choisies.

Calculer la probabilité de l'événement $(A \cap B = \emptyset)$.

On considère quatre variables aléatoires réelles X, Y, Z, T définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, et la matrice aléatoire A définie par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & T(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la probabilité que la matrice A soit inversible.
2. Déterminer la probabilité que la matrice A soit diagonalisable.

---

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant :

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X], \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$$

2. Montrer qu'on ne peut pas trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \langle P, Q\rangle = P(0)$.

(*On pourra utiliser les polynômes* $P_n = \sqrt{n}(1-X)^{2n}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.)

Soit X une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans un segment $[a,b]$.

1. Montrer que X admet une variance et que $V(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

2. Peut-on avoir égalité dans l'inégalité précédente ? Pour quelles variables aléatoires ?

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$, $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit p et q deux projecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux. On suppose que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal.

1. Montrer que $p \circ q = q \circ p$.

2. Montrer que les valeurs propres possibles de $p + q$ sont $\{0, 1, 2\}$. Donner un exemple où ces trois nombres sont effectivement valeurs propres de $p + q$

On considère les deux suites réelles u et v définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 strictement positifs et les relations de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{v_n} \text{ et } v_{n+1} = v_n + \frac{1}{u_n}$$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}(u_{n+1} - u_n)$.

2. Montrer que les suites u et v divergent vers $+\infty$.

Soit A une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

1. Montrer qu'il existe une matrice symétrique réelle N telle que $A = N^2$.

2. Soit B une matrice symétrique réelle. Montrer que la matrice AB est diagonalisable.

L'équation $A^2 = A - I_2$, d'inconnue $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ admet-elle des solutions non diagonalisables ?

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et u un endomorphisme de E. On suppose que $u^3 = u^2$, $u \neq Id, u^2 \neq 0$, $u^2 \neq u$.

1. Déterminer les valeurs propres de u.

2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée de variance $\sigma^2 > 0$, et k un réel strictement supérieur à 1.

Pour quelle valeur du réel positif a, la probabilité $P(a \leqslant X \leqslant ka)$ est-elle maximale ?

---

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$ est une fonction de répartition.

2. Déterminer la loi du supremum M_n de n variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes de même loi de fonction de répartition F.

3. Étudier la convergence en loi de la suite $\big(M_n - \ln n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.