CONCOURS APRÈS CLASSES PRÉPARATOIRES

Annales des épreuves orales de mathématiques

2021

une école de la
CCI PARIS ILE-DE-FRANCE

Avant-propos

Ces annales corrigées de mathématiques des épreuves orales du concours ESCP regroupent les exercices posés en 2021 ainsi que leurs corrigés dans les options scientifique et littéraire B/L.

Cet ouvrage devrait permettre aux futurs candidats une meilleure préparation à l'épreuve orale de mathématiques de ESCP et fournir une aide efficace aux enseignants des classes préparatoires économiques et commerciales.

De plus, ces annales constituent également un outil pouvant faciliter la préparation aux épreuves écrites de mathématiques du concours quelle que soit leur option (scientifique, économique, littéraire B/L ou technologique) ; la plupart des thèmes abordés dans les sujets d'oral se retrouvent en effet, peu ou prou, dans les sujets de l'écrit.

Certains exercices publiés dans ces annales sont assez longs : ce sont des sujets d'étude et le jury n'en attend pas nécessairement une résolution complète.

Les énoncés et corrigés des exercices ont été regroupés en quatre rubriques : analyse, algèbre, probabilités et sujets de l'option littéraire B/L.

Chaque candidat doit exposer en une vingtaine de minutes son sujet principal préparé en salle et résoudre directement au tableau, pendant le temps restant, une courte question dont on trouvera, dans cet ouvrage, un échantillon.

On peut également trouver le contenu des annales sur le site internet de ESCP (escp.eu) ; aller dans **Programmes and Training**, puis **Premaster year**, puis **ADMISSIONS** et **LE CONCOURS PREPA ESCP BUSINESS SCHOOL**, puis dans l'étape 2, les **Annales des épreuves orales de Mathématiques**.

Enfin ces annales n'auraient pu voir le jour sans la fidèle collaboration de tous les examinateurs de l'oral de mathématiques de ESCP . Nous les en remercions.

Frank BOURNOIS, Directeur Général ESCP.

Muriel GRANDJEAN, Responsable des Admissions ESCP.

Claude MENENDIAN, Responsable des épreuves orales de mathématiques du concours ESCP.

Chapitre 1

Algèbre

Exercice 1.1

Pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré au plus k. Soit un entier $n \geqslant 1$. Soient τ et δ les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \tau(P) = P(X+1) \quad \text{et} \quad \delta(P) = P(X+1) - P.$$

1. Déterminer le degré de $\delta(P)$, lorsque $P = X^k$, avec $k \geqslant 0$. Pour tout polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer le degré et le coefficient de plus haut degré de $\delta(P)$ en fonction de ceux de P.
2. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, montrer que : $\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$ et $\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ comme combinaison linéaire des $\tau^j(P)$ ($j \in [\![0, k]\!]$).
4. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(j) = 0$.
5. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $\mathbb{R}_n[X] \xrightarrow{u} \mathbb{R}_n[X]$ tel que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.
   (a) Montrer que u et δ^2 commutent.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u.
   (c) Conclure.

Solution de l'exercice 1.1

1. Si P est constant, alors $\delta(P)=0$. Si $k\geqslant 1$ et $P=X^k$, $P(X+1)-P(X)$ est de degré $k-1$. De manière générale, si $P=\sum_{k=0}^{d} a_kX^k$ avec $d=\deg(P)\geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}P(X+1)-P&=a_d\big((X+1)^d-X^d\big)+a_{d-1}\big((X+1)^{d-1}-X^{d-1}\big)+\sum_{k=0}^{d-2}a_k\big(k(X+1)^k-X^k\big)\\&=a_d\sum_{k=0}^{d-1}a_d\binom{d}{k}X^k+a_{d-1}\sum_{k=0}^{d-2}a_d\binom{d-1}{k}X^k+\sum_{k=0}^{d-2}a_k\big(k(X+1)^k-X^k\big)\\&=da_dX^{d-1}+\underbrace{a_d\sum_{k=0}^{d-2}\binom{d}{k}X^k+a_{d-1}\sum_{k=0}^{d-2}\binom{d-1}{k}X^k+\sum_{k=0}^{d-2}a_k\big(k(X+1)^k-X^k\big)}_{\text{de degré inférieur à } d-2 \text{ (nul si } d=1)}.\end{aligned}$$

Donc $\deg(\delta(P))=\deg(P)-1$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))=\deg(P)\times\mathrm{cd}(P)$.

2. Montrons par récurrence sur $j\in[\![1,n]\!]$ la relation : $\mathrm{Ker}(\delta^j)=\mathbb{R}_{j-1}[X]$.
   - C'est vrai pour $j=1$, car d'après la question 1 : $\delta(P)=0\iff P$ constant.
   - Si la relation est vraie pour $j\in[\![1,n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}P\in\mathrm{Ker}(\delta^{j+1})&\iff\delta^j(\delta(P))=0\\&\iff\deg(\delta(P))\leqslant j-1\qquad\text{car }\mathrm{Ker}(\delta^j)=\mathbb{R}_{j-1}[X]\qquad\text{(H.R.)}\\&\iff\deg(P)\leqslant j\qquad\text{car }\deg(\delta(P))=\deg(P)-1\\&\iff P\in\mathbb{R}_j[X].\end{aligned}$$

   Ainsi $\mathrm{Ker}(\delta^{j+1})=\mathbb{R}_j[X]$.

   Comme $\deg(\delta(P))=\deg(P)-1$, par récurrence évidente, on a $\deg(\delta^j(P))=\deg(P)-j$, d'où $\delta^j(P)\in\mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\mathrm{Im}(\delta^j)\subset\mathbb{R}_{n-j}[X]$. On conclut à l'égalité des dimensions en utilisant le théorème du rang. Ainsi, $\mathrm{Im}(\delta^j)=\mathbb{R}_{n-j}[X]$.

3. Comme τ et id commutent, la formule du binôme donne : $\delta^k(P)=(\tau-\mathrm{Id}\,)^k(P)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\tau^j(P)$.

4. Si $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]=\mathrm{Ker}(\delta^n)$, alors $\delta^n(P)=0$. Comme $\tau^j(P)=P(X+j)$, en évaluant en 0 l'égalité de la question précédente, on obtient l'égalité voulue.

5. (a) $u\circ\delta^2=u\circ[u^2\circ u^2]=u^5=[u^2\circ u^2]\circ u=\delta^2\circ u$.

   (b) Soit $P\in\mathbb{R}_1[X]=\mathrm{Ker}\,\delta^2$, alors, d'après la question précédente : $\delta^2(u(P))=u(\delta^2(P))=u(0)=0$. Donc $u(P)\in\mathrm{Ker}(\delta^2)=\mathbb{R}_1[X]$.

   (c) Comme $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u et par δ, on a deux endomorphismes induits u' et δ' tels que $v'^2=\delta'$. En prenant les matrices dans la base $(1,X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$, on a : $U^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

   Or il n'existe pas de telle matrice U car elle ne peut être de rang 0 ou 2, (sinon U^2 aussi) et si elle était de rang 1, comme $\mathrm{Im}\,U^2\subset\mathrm{Im}\,U$, on aurait $\mathrm{Im}\,U=\mathrm{vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, ce qui entraînerait $U^2=0$.

   On obtient donc une absurdité.

Exercice 1.2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est 2-*symétrique* si la matrice A^2 est symétrique.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Caractériser à l'aide des coefficients de A le fait que A est 2-symétrique. Donner un exemple de matrice réelle carrée d'ordre 2 qui est 2-symétrique mais qui n'est pas symétrique.
2. Dans cette question, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$).
   (a) Vérifier que si A est symétrique, alors elle est 2-symétrique.
   (b) On suppose que A est inversible et 2-symétrique. Montrer que A^{-1} est 2-symétrique.
   (c) On suppose maintenant que A est antisymétrique (c'est-à-dire que $-A$ est la transposée de A). Montrer que A est 2-symétrique.
3. Dans cette question, on considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont 2-symétriques.
   (a) On suppose que A et B commutent. Vérifier que le produit AB est une matrice 2-symétrique. Montrer que ce n'est plus vrai en général si l'on ne suppose plus que A et B commutent.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la somme $A+B$ soit une matrice 2-symétrique.
   (c) Donner un exemple où A et B sont 2-symétriques et commutent, mais telles que $A+B$ ne soit pas 2-symétrique.
4. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note X la matrice colonne associée à x. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique ($\langle x, y\rangle = {}^tXY$). On se donne une matrice 2-symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé et on désigne par $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des ses valeurs propres (réelles).
   (a) Justifier le fait que l'endomorphisme f^2 est symétrique.
   (b) On note $\mathrm{Sp}(f^2)$ sous la forme $\mathrm{Sp}(f^2) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) avec $m \in \{1, \cdots, n\}$ et on désigne par E_i le sous-espace propre de f^2 associé à la valeur propre λ_i. Justifier le fait que $\mathbb{R}^n$ est la somme directe orthogonale des sous-espaces $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$.
   (c) Soit $i \in \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$. Montrer que le sous-espace E_i est stable par f. Vérifier que la restriction f_i de f à E_i, considérée comme endomorphisme de E_i, admet $X^2 - \lambda_i$ comme polynôme annulateur.
   (d) On suppose maintenant que tous les λ_i sont strictement positifs et on pose $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$. Montrer que E_i est la somme directe vectorielle du noyau de $f - \alpha_i Id$ et du noyau de $f + \alpha_i Id$. En déduire que f est diagonalisable. Est-il forcément symétrique ?
   (e) On fait désormais comme hypothèses que $\mathrm{Sp}(f^2) \subseteq \mathbb{R}_+$ et que $\mathrm{Sp}(f) \cap \mathrm{Sp}(-f) = \emptyset$. Montrer que dans ce cas f est un endomorphisme symétrique.

Solution de l'exercice 1.2

1. Posons
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
La condition $A^2 = {}^t(A^2)$ est réalisée si et seulement si $a = -d$ ou $c = b$. Comme matrice réelle carrée d'ordre 2 qui est 2-symétrique mais qui n'est pas symétrique, on peut prendre par exemple
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Si A est symétrique, on a clairement ${}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = A^2$; la matrice A est donc 2-symétrique.
   (b) Si A est inversible et 2-symétrique, les règles de calcul avec la transposition entraînent que ${}^t(A^{-1})^2 = \left[{}^t(A^2)\right]^{-1} = (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ et par suite que A^{-1} est 2-symétrique.
   (c) Si A est antisymétrique, on a ${}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = (-A)^2 = A^2$; il s'ensuit que A est 2-symétrique.

3. (a) Supposons que A et B commutent et sont 2-symétriques, alors on a ${}^t(AB)^2 = {}^t(ABAB) = {}^t(A^2B^2) = {}^t(B^2){}^t(A^2) = B^2A^2 = (AB)^2$. Par conséquent, AB est 2-symétrique. On peut prendre les deux matrices A et B données en 1. puisque la matrice
$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
n'est pas 2-symétrique d'après les conditions trouvées dans la première question.
   (b) La somme $A+B$ est 2-symétrique si et seulement si $A^2+B^2+AB+BA = (A+B)^2 = {}^t(A+B)^2 = {}^tA^2 + {}^tB^2 + {}^t(AB+BA) = A^2+B^2+{}^t(AB+BA)$. On voit donc qu'il est nécessaire et suffisant que la matrice $AB+BA$ soit symétrique.
   (c) D'après la question précédente, on voit qu'il suffit de trouver deux matrices A et B qui sont 2-symétriques et commutent, mais telles que le produit AB ne soit pas symétrique. Prenons une matrice A qui est 2-symétrique mais pas symétrique (qui existe d'après 1.) ; alors la matrice $B = A+I$ convient puisque $AB = A^2 + A$ ne peut pas être symétrique.

4. (a) On a $\langle f^2(x), y\rangle = {}^t(A^2X)Y = {}^tX{}^t(A^2)Y = {}^tXA^2Y = \langle x, f^2(y)\rangle$; il s'ensuit que f^2 est symétrique.
   (b) Comme f^2 est symétrique dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, ce dernier est la somme directe orthogonale des sous-espaces $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$.
   (c) Si $x \in E_i$, il vient $f^2(f(x)) = f(f^2(x)) = \lambda_i f(x)$, donc le sous-espace E_i est stable par f. Par construction, il est clair que $X^2 - \lambda_i$ est un polynôme annulateur de f_i.
   (d) Si $x \in E_i$, comme $X^2 - \lambda_i$ est un polynôme annulateur de f_i, une analyse synthèse simple montre que la décomposition $x = 1/(2\alpha_i)\,[(\alpha_i x - f(x)) + (f(x) + \alpha_i x)]$ où $\alpha_i x - f(x)$ (resp. $f(x) + \alpha_i x$) appartient au noyau de $f - \alpha_i Id$ (resp. au noyau de $f + \alpha_i Id$) est unique. Ceci répond à la première partie de la question. On peut donc trouver une base de E_i formée de vecteurs propres de f. Par concaténation, on construit une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f qui est donc diagonalisable. Pour répondre à la dernière question, on voit que le fait que f soit symétrique est équivalent au fait que la décomposition considérée précédemment de E_i en somme directe est forcément orthogonale. Cela paraît faux. Comme contre-exemple on peut prendre
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
qui n'est évidemment pas symétrique mais dont le carré est l'identité.
   (e) On remarque que les hypothèses impliquent que chaque λ_i est strictement positif. L'hypothèse $\mathrm{Sp}(f) \cap \mathrm{Sp}(-f) = \emptyset$ et la question précédente impliquent que chaque E_i est lui-même un sous-espace-propre. En effet, E_i est soit le noyau $f - \alpha_i Id$, soit le noyau de $f + \alpha_i Id$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est alors la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f. L'endomorphisme f est donc nécessairement symétrique.

Exercice 1.3

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 1 muni de son produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)$ et de sa norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, par Id l'endomorphisme identité sur E et par $\circ$ l'opération de composition définie dans $\mathcal{L}(E)$. On note $\mathrm{Ker}(w)$, $\mathrm{Im}(w)$ et $\mathrm{Sp}(w)$ respectivement le noyau, l'image et l'ensemble des valeurs propres réelles d'un endomorphisme $w \in \mathcal{L}(E)$.
Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit λ un réel non nul. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$ si et seulement si $\lambda \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
2. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$ si et seulement si $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
3. Que peut-on conclure sur $\mathrm{Sp}(u \circ v)$ et $\mathrm{Sp}(v \circ u)$?

   Nous supposons désormais pour le reste de l'exercice que u et v sont des endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}(E)$ qui **commutent**.

4. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On note $F = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$. Montrer que F et $F^{\perp}$ sont stables par u et v.
5. Montrer que les endomorphismes u et v sont co-diagonalisables dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres commune à u et à v.
   A cette fin, on pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

Solution de l'exercice 1.3

1. Par symétrie sur u et v, pour prouver l'équivalence, il suffit de montrer l'assertion : $\lambda \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$ implique $\lambda \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$, il existe alors $x \neq 0$ tel que
$$u(v(x)) = \lambda\, x \qquad (1).$$
Tout d'abord, comme $\lambda \neq 0$, il vient $u(v(x)) \neq 0$ et donc $v(x) \neq 0$. Puis, en composant par v dans (1), on obtient alors : $(v \circ u)(v(x)) = \lambda\, v(x)$. Comme $v(x) \neq 0$, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.

2. Par symétrie sur u et v, on peut encore se contenter de montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$ implique $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$. Si $0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$, il existe $x \neq 0$ tel que : $u \circ v(x) = 0$. Il vient alors deux cas.
Cas 1 : Soit $y = v(x) \neq 0$. On a alors $u(y) = 0$ et donc $v(u(y)) = 0$ avec $y \neq 0$. Ainsi, on a $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
Cas 2 : Soit $v(x) = 0$. Il vient alors deux sous-cas.
Soit $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ et donc u est surjectif (d'après le théorème du rang). Comme $x \neq 0$, il existe alors $z_1 \in E \setminus \{\, 0\}$ tel que $x = u(z_1)$ et donc $v(u(z_1)) = 0$. Il s'ensuit que $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
Soit $\mathrm{Ker}\, u \neq \{0\}$ et il existe $z_2 \neq 0$ tel que $u(z_2) = 0$. Il en découle que $v(u(z_2)) = 0$ et on conclut encore que $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.

3. En vertu des questions 1) et 2), il vient immédiatement que $\mathrm{Sp}(u \circ v) = \mathrm{Sp}(v \circ u)$.

4. Supposons que $x \in F$, on a alors $u(x) = \lambda\, x$ et donc $u(u(x)) = \lambda\, u(x)$, ainsi $u(x) \in F$. De plus, comme u et v commutent, il vient : $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda\, v(x)$. Ainsi, on a également $v(x) \in F$ et F est stable par v. Comme u et v sont des endomorphismes symétriques et que F est stable par u et v, on a également la stabilité de $F^\perp$ par u et v.

5. Montrons par récurrence $P(n)$: "Soit E un espace euclidien de dimension n. Si u et v sont des endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent, alors ils sont co-diagonalisables dans une base orthornormée" est vraie pour $n \geqslant 1$.
Soit E un espace euclidien avec $\dim E = 1$ et u et v des endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent. Comme $\dim E = 1$, il existe (e_1) avec e_1 de norme 1 tel que $E = \mathrm{vect}(e_1)$. Or $u(e_1)$ et $v(e_1) \in E = \mathrm{vect}(e_1)$, il existe alors $(\lambda_u, \lambda_v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u(e_1) = \lambda_u e_1$ et $v(e_1) = \lambda_v\, e_1$ et $P(1)$ est vraie.
Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $P(m)$ pour tout entier naturel m satisfaisant $1 \leqslant m \leqslant n$ et montrons $P(n+1)$. Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et u et v deux endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent. Comme u est un endomorphisme symétrique, il est diagonalisable et en particulier $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Il existe donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On pose alors $F = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$. On a donc $1 \leqslant \dim F \leqslant \dim E = n+1$. Ainsi, soit $1 \leqslant \dim F = m \leqslant n$, soit $\dim F = n+1$.
Cas 1 : $1 \leqslant \dim F = m \leqslant n$.
Comme F et $F^\perp$ sont stables par u et v, on définit d'une part u_F et $v_F \in \mathcal{L}(F)$ et d'autre part $u_{F^\perp}$ et $v_{F^\perp} \in \mathcal{L}(F^\perp)$ de la manière suivante :
$$u_F(x) = u(x),\ v_F(x) = v(x),\ \forall x \in F \ \text{ et } \ u_{F^\perp}(x) = u(x),\ v_{F^\perp}(x) = v(x),\ \forall x \in F^\perp.$$
Comme u et v sont symétriques et commutent, u_F et v_F (respectivement $u_{F^\perp}$ et $v_{F^\perp}$) sont des endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}(F)$ (respectivement de $\mathcal{L}(F^\perp)$) qui commutent. F est un espace euclidien pour le produit scalaire de E et $1 \leqslant \dim F = m \leqslant n$. Ainsi par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ de F formée de vecteurs propres communs à u_F et v_F. De même, $F^\perp$ est aussi un espace euclidien pour le produit scalaire de E et $1 \leqslant \dim F^\perp = n+1-m \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc une base orthonormée de vecteurs propres $(e_{m+1}, \ldots, e_{n+1})$ de $F^\perp$ communs à $u_{F^\perp}$ et $v_{F^\perp}$. Ainsi, par construction, $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ est une base orthonormée de E de vecteurs propres communs à u et v.
Cas 2 : $\dim F = n+1$.
Soit $\dim(F) = n+1 = \dim E$. Comme $F \subset E$, on a alors $F = E$ et donc $u = \lambda\,\mathrm{Id}$. Or v est symétrique, il existe donc une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ de vecteurs propres de v. Comme $u = \lambda\,\mathrm{Id}$, $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de u associée à la valeur propre λ.

Exercice 1.4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $(E, \langle\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit u un endomorphisme symétrique de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice A.
On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 0$ et on se propose de montrer qu'il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice associée à u a tous ses termes diagonaux nuls.

1. On suppose dans cette question que $n = 2$.
   (a) On suppose que A n'est pas inversible. Montrer le résultat demandé.
   (b) On suppose que A est inversible.
      i. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et un réel α pour lesquels la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est $A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.
      ii. On pose $w_1 = v_1 + v_2$ et $w_2 = v_1 - v_2$.
      Calculer $u(w_1)$ et $u(w_2)$ et en déduire le résultat demandé.
2. On revient au cas général où n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.
   (a) i. Montrer qu'il existe deux indices i et j de $[\![1, n]\!]$, $i \neq j$, tels que :
   $$\langle e_i, u(e_i) \rangle \times \langle e_j, u(e_j) \rangle \leqslant 0$$
      ii. Soit φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par :
   $$\forall t \in [0, 1],\ \varphi(t) = \langle u(te_i + (1-t)e_j), te_i + (1-t)e_j \rangle,$$
      Montrer, en utilisant cette fonction, qu'il existe un vecteur x non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
   (b) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :
   $\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & \\ \vdots & C \\ * & \end{array}\right)$, où C est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.
   (c) En déduire, par récurrence, la propriété énoncée au début de l'exercice.

Solution de l'exercice 1.4

1. (a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. Il existe $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et P telles que $A = PDP^{-1}$. Or, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D) \Longrightarrow a + b = 0$. Mais comme A n'est pas inversible, au moins une des valeurs propres est nulle. On a donc en fait $D = 0$ et donc $A = 0$.

   (b) i. La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormale (v_1, v_2) et comme $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D)$, la matrice de u dans une base de vecteurs propres est de la forme $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.

   ii. On trouve $u(w_1) = \alpha w_2$ et $u(w_2) = \alpha w_1$. On vérifie facilement que w_1 et w_2 sont orthogonaux. Il suffit alors de poser $w_1' = \dfrac{1}{\|w_1\|} w_1$ et$w_2' = \dfrac{1}{\|w_2\|} w_2$ pour obtenir une base orthonormale dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) On a $\mathrm{tr}(u) = 0$ donc la somme des termes diagonaux d'une matrice de u dans une base est nulle.

   i. Comme la base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale, on a : $\forall\, e_i,\ u(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle u(e_i), e_j \rangle e_j$.

   Donc les coeff diagonaux de sa matrice sont : $a_{ii} = \langle u(e_i), e_i \rangle \Rightarrow \mathrm{tr}(u) = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), e_i \rangle = 0$.
   Donc, les termes de la somme ne peuvent pas être tous strictement positifs ou tous strictement négatifs. Il existe donc deux indices i et j distincts tels que : $\langle e_i, u(e_i) \rangle \times \langle e_j, u(e_j) \rangle \leqslant 0$.

   ii. Or, $\varphi(0) = \langle u(e_j), e_j \rangle$ et $\varphi(1) = \langle u(e_i), e_i \rangle$, donc $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ sont de signes contraires.
   La fonction φ est continue (polynôme en t). Donc, Il existe t_0 tel que $\varphi(t_0) = 0$.
   En posant $x = t_0 e_i + (1 - t_0) e_j$, on a un vecteur $x \neq 0$ non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.

   (b) On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{\|x\|} x$ et on complète : $(\varepsilon, e_2, \dots e_n)$ pour obtenir une base orthonormale de E.

   La matrice dans cette base est bien : $M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline \vdots & C \end{array}\right)$.

   (c) On procède par récurrence sur n.
   - Pour $n = 1$, on obtient la matrice nulle et donc la propriété est vraie.
   - On suppose la propriété vérifiée au rang $n - 1$ ($n \geqslant 2$) et on considère un espace de dimension n, un endomorphisme symétrique u de E de trace nulle.
   On applique le résultat précédent et il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est la matrice M de la question précédente.On pose $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon)$.
   On a alors $F^\perp = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$. Soit p la projection orthogonale sur $F^\perp$ et $v = p \circ u$.La restriction de v à $F^\perp$ est un endomorphisme, puisque p est la projection sur $F^\perp$. On a :
   $v(e_j) = p(u(e_j)) = p\big[\displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{ij} e_i + a_1 j \varepsilon\big]$. Or, $\varepsilon \in F \Longrightarrow p(\varepsilon) = 0$ et les e_i sont dans $F^\perp$, donc $p(e_i) = e_i$.
   On a donc : $v(e_j) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{i,j} e_i$. On constate que la matrice de v dans la base $(e_2, \dots, e_n)$ est C.
   Mais comme $\mathrm{tr}(M) = 0$, on a aussi $\mathrm{tr}(C) = 0$. Il existe donc une base orthonormale $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $F^\perp$ telle que la matrice de $p \circ v$ dans cette base est à diagonale nulle. Donc, $\langle \varepsilon_j, v(\varepsilon_j) \rangle = 0$.
   D'autre part, on a $\langle \varepsilon, u(\varepsilon) \rangle = 0$ et comme $\varepsilon_j \in F^\perp$, on a $p(\varepsilon_j) = \varepsilon_j$ et $\langle \varepsilon_j, u(\varepsilon_j) \rangle = \langle p(\varepsilon_j), u(\varepsilon_j) \rangle$.
   Mais p est un projecteur orthogonal, c'est donc un endomorphisme symétrique.
   On a donc : $\langle p(\varepsilon_j), u(\varepsilon_j) \rangle = \langle \varepsilon_j, p \circ u(\varepsilon_j) \rangle$. Finalement : $\langle \varepsilon_j, u(\varepsilon_j) \rangle = \langle \varepsilon_j, v(\varepsilon_j) \rangle = 0$
   Conclusion : la matrice de u dans la base $(\varepsilon, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est bien à diagonale nulle, ce qui achève la récurrence.

Exercice 1.5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit a et b deux vecteurs de E tels que la famille (a, b) est libre.

1. Que dire de n ?
2. Soit α et β deux applications de E dans $\mathbb{R}$.
   À quelle condition nécessaire et suffisante sur α et β l'application u définie sur E par :
   $$\forall x \in E,\ u(x) = \alpha(x)a + \beta(x)b$$
   est-elle un endomorphisme de E ?

On suppose que les applications α et β sont linéaires, non identiquement nulles et vérifient $\mathrm{Ker}(\alpha) \neq \mathrm{Ker}(\beta)$.

3. Quelles sont les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ et de $\mathrm{Ker}(\beta)$?
4. *On rappelle* que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a :
   $$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)\,.$$
   Montrer que le rang de u vaut 2.
5. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ \beta(a) & \beta(b) \end{pmatrix}$ est diagonalisable et n'admet pas 0 comme valeur propre.
6. Soit un entier $p \geqslant 2$ et soit v l'application :
   $$v : P \in \mathbb{R}_p[X] \mapsto XP'(0) + X^p P'(1)$$
   Étudier le caractère diagonalisable et donner les valeurs propres de v.

Solution de l'exercice 1.5

1. La dimension d'un espace vectoriel est toujours supérieur au cardinal de toute famille libre, donc $n \geqslant 2$.
2. L'application u qui est à valeurs dans E est linéaire lorsque pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y) &\iff \alpha(\lambda x + y)a + \beta(\lambda x + y)b = \lambda\big(\alpha(x)a + \beta(x)b\big) + \alpha(y)a + \beta(y)b \\ &\iff \alpha(\lambda x + y)a + \beta(\lambda x + y)b = \big(\lambda\alpha(x) + \alpha(y)\big)a + \big(\lambda\beta(x) + \beta(y)\big)b \\ &\iff \alpha(\lambda x + y) = \lambda\alpha(x) + \alpha(y) \text{ et } \beta(\lambda x + y) = \lambda\beta(x) + \beta(y), \quad \text{car } (a, b) \text{ libre.} \end{aligned}$$

   Ainsi u est linéaire si et seulement si α et β sont linéaires.
3. Comme α et β sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, leurs rangs respectifs sont inférieurs à 1.
   Mais comme ni α, ni β n'est nul, leurs rangs respectifs sont supérieurs à 1.
   Finalement, $\mathrm{rg}(\alpha) = \mathrm{rg}(\beta) = 1$ et par le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha)) = \dim(\mathrm{Ker}(\beta)) = n - 1$.
4. Comme (a, b) est libre, on a : $x \in \mathrm{Ker}(u) \iff \alpha(x)a + \beta(x)b = 0 \iff \alpha(x) = \beta(x) = 0$.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)$. Donc, par le théorème du rang puis la formule de Grassmann :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(u) &= \dim E - \dim(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)) \\ &= \dim E - \big(\dim(\mathrm{Ker}(\alpha)) + \dim(\mathrm{Ker}(\beta)) - \dim(\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta))\big) \\ &= 2 - n + \dim(\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta)). \end{aligned}$$

   Or, $\mathrm{Ker}(\alpha) \subset \mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta) \subset E$. Donc, $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta)) \in \{n - 1, n\}$.
   Mais on ne peut avoir $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta)) = n - 1$ car sinon on aurait $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta)$ et donc $\mathrm{Ker}(\beta) \subset \mathrm{Ker}(\alpha)$ puis égalité à cause des dimensions. Ainsi, $\mathrm{rg}(u) = 2$.
5. Comme $\mathrm{rg}(u) = 2$, l'espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension $n - 2$.
   Ainsi, u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles de u vaut 2.
   Or, si $\lambda \neq 0$ les vecteurs propres associés appartiennent à l'image $\mathrm{Im}\, u$ car :

$$u(x) = \lambda x \Longrightarrow x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \mathrm{Im}(u).$$

   De plus, il est clair que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u ; notons $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit.
   Ainsi, u est diagonalisable si et seulement si $\tilde{u}$ est diagonalisable avec des valeurs propres non nulles.
   On termine alors en remarquant que la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (a, b) de $\mathrm{Im}\, u$ vaut $A = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ \beta(a) & \beta(b) \end{pmatrix}$
6. On utilise la question précédente avec $E = \mathbb{R}_p[X]$ (donc $n = p + 1$) et $u(P) = XP'(0) + X^n P'(1)$, *i.e.* $a = X$, $b = X^p$ $\alpha(P) = P'(0)$ et $\beta(P) = P'(1)$ — la famille (a, b) est bien libre.
   Dans ce cas, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & p \end{pmatrix}$ est triangulaire avec 1 et p comme valeurs propres. Donc, A est diagonalisable et n'admet pas 0 comme valeur propre.
   Ainsi, u est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 (espace propre associé de dimension $p - 1 > 0$), 1 (espace propre associé de dimension 1) et p (espace propre associé de dimension 1).

Exercice 1.6

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ une permutation de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire que $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sont des entiers tels que $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = [\![1, n]\!]$.

Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $p(M) = M' = (m'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$m'_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq i_j \\ m_{i,j} & \text{si } i = i_j \end{cases}$$

1. Dans cette question seulement on prend $n = 3$ et $(i_1, i_2, i_3) = (2, 1, 3)$.
   Calculer $p(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$.
2. On admet que p est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que p est un projecteur et déterminer son noyau et son image.

Pour tout $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\varphi(M)$ le scalaire :

$$\varphi(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{i_k,k}$$

3. Montrer que φ est une application linéaire et déterminer la dimension de son noyau.
4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. On définit l'endomorphisme u_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

   $$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ u_A(M) = \varphi(M)A + \varphi(A)M$$

   Montrer que u_A est diagonalisable si et seulement si $\varphi(A) \neq 0$.
5. L'endomorphisme u_A peut-il être un projecteur ?

Dorénavant, $n = 3$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Soit $K = p(J)$ — où p a été défini au début de cet exercice. Soit l'endomorphisme v_K de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$v_K(M) = KM$$

6. Étudier en fonction des valeurs de i_1, i_2 et i_3 (on obtiendra 6 matrices K possibles) le caractère diagonalisable de v_K.

Solution de l'exercice 1.6

1. D'après la définition, on obtient $p(M) = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,3} \end{pmatrix}$.

2. Si on note $M' = p(M)$ et $M'' = p(M') = p \circ p(M)$, on a :
   $m''_{i_j,j} = m'_{i_j,j}$, les autres coefficients $m''_{i,j}$ étant nuls pour $i \neq i_j$;
   on a donc $M'' = M' = p(M')$ soit $p(M) = p \circ p(M)$: p est un projecteur.

   Si on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le seul coefficient non nul est le coefficient (i,j), celui-ci valant 1, on obtient immédiatement que le noyau de p a pour base la famille des $E_{i,j}$ pour (i,j) parcourant $[\![1,n]\!] \setminus \{(i_1,1),(i_2,2),\ldots,(i_n,n)\}$; en particulier $\dim(\mathrm{Ker}(p)) = n^2 - n$.

   On remarque que $p(E_{i_j,j}) = E_{i_j,j}$ et donc la famille des $E_{i_j,j}$ pour j parcourant $[\![1,n]\!]$ forme une base de $\mathrm{Im}(p)$ (par théorème du rang, on sait que $\mathrm{Im}(p)$ est de dimension n).

3. La linéarité découle de $\varphi = \mathrm{tr} \circ p$. De plus φ n'est pas nulle (par exemple $\varphi(E_{i_1,1}) = 1 \neq 0$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$; donc d'après le théorème du rang, son noyau est de dimension $n^2 - 1$.

4. Si $M \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $u_A(M) = \varphi(A)M$ donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $\varphi(A)$ est au moins de dimension $n^2 - 1$.

   Par ailleurs, $u_A(A) = 2\varphi(A)A$, donc $2\varphi(A)$ est valeur propre et le sous-espace propre associé contient $\mathrm{Vect}(A)$.

   - Si $\varphi(A) \neq 0$, alors les élements propres obtenus ci-dessus sont distincts ; comme la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut au moins $(n^2-1)+1$, on en déduit que u_A est diagonalisable.
   - Si $\varphi(A) = 0$, alors $u_A(M) = \varphi(M)A$. Donc $u_A(M) = \lambda M$ n'est possible que si $M \in \mathrm{Vect}(A)$ ou $\varphi(M) = 0$. Or $u_A(A) = 0$, donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$, donc les seuls vecteurs propres sont les éléments de $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Donc, il ne peut exister de base de vecteurs propres *i.e.* φ n'est pas diagonalisable.

5. Si u_A est un projecteur, il est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{0,1\}$
   car $\mathrm{Ker}\,u_A$ et $\mathrm{Im}\,u_A = \mathrm{Ker}(u_A - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires — l'un deux deux sous-espaces peut être $\{0\}$.
   D'après la question précédente, il faut donc que $\varphi(A) \neq 0$, et alors $\mathrm{Sp}\,(u_A) = \{\varphi(A), 2\varphi(A)\}$.
   Mais alors on ne peut avoir $\{\varphi(A), 2\varphi(A)\} \subset \{0,1\}$. Donc u_A n'est jamais un projecteur.

6. On remarque que $v_k^p(M) = K^p M$, donc tout polynôme annulateur de K est annulateur de v_k.
   Par ailleurs les 6 matrices K possibles sont :
   I_3, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - Dans le premier cas, $v_K = \mathrm{Id}$ est évidemment diagonalisable.
   - Dans les trois cas suivants $K^2 = I_3$ donc les valeurs propres possibles de v_k sont 1 et -1. On a toujours v_K diagonalisable (par exemple pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vecteurs propres associés à la valeur propre 1, tandis que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre -1).
   - Par contre, pour les deux dernières matrices, on a $K^3 = I_3$, donc 1 est la seule valeur propre possible de v_k. Donc v_K n'est pas diagonalisable car sinon on aurait $v_k = \mathrm{Id}$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 1.7

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer le rang de f. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$
   (b) Calculer A^2 et son rang.
   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$.
   (d) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.
   (e) En déduire que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Dans cette question, on cherche à déterminer les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g^2 = f$.
   (a) Montrer que si g est une solution, alors $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ sont stables par g.
   (b) En déduire les solutions de l'équation $g^2 = f$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.7 Notons e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Les colonnes (C_1, C_2) de A sont libres et $C_3 = -C_2$. Ainsi f est de rang 2. Comme $f(e_3) = -f(e_2)$, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $\boxed{e_2 + e_3}$ (avec le théorème du rang).

   (b) Par calcul matriciel $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathrm{rg}(f^2) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = 2$.

   (c) Notons (C'_1, C'_2, C'_3) les colonnes de A^2. Comme $C'_1 = C'_2 = -C'_3$, une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$ est par exemple, $(e_1 - e_2, e_1 + e_3)$.

   (d) On calcule facilement $\mathrm{Ker}(f^2) \cap \mathrm{Ker}(f - 2Id) = \{0\}$.
   On calcule $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, dont le rang vaut 2 (les deux premières colonnes sont liées) et $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2Id) = 1$.
   En utilisant les dimensions des sous-espaces, il vient $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.

   (e) D'après la matrice, une base de $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ est $e_1 + e_2$.
   Dans la base $(-4(e_2 + e_3), e_1 + e_3, e_1 + e_2)$, la matrice de f est la matrice B demandée (remarque : $-4(e_2 + e_3) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $e_1 + e_3 \notin \mathrm{Ker}(f)$).

2. (a) Comme $f = g^2$, on a $f \circ g = g^3 = g \circ f$. Ainsi f et g commutent, donc $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ sont stables par g.

   (b) *Analyse :* soit g une solution ; notons M la matrice de g dans la base de la question 1.e.
   Par stabilité (question 2.a) M est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.
   Alors, comme $g^2 = f$, on a $e^2 = 2$ et $BM = MB$, donc M est (après calculs) de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

   Synthèse : après calculs aucune matrice M de ce type ne vérifie $M^2 = B$.
   Par suite, l'équation $g^2 = f$ n'admet pas de solution.

Exercice 1.8

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $2n$.

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, chacun de dimension n tels que $E = E_1 \oplus E_2$. On note p_1 la projection orthogonale de E sur E_1 et p_2 la projection orthogonale de E sur E_2.

On pose enfin $u = p_1 + p_2$.

1. Caractériser u lorsque E_1 et E_2 sont orthogonaux.
2. (a) Soit $(e_1, \ldots, e_{2n})$ une base quelconque de E. Montrer que la matrice $N \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ de terme général $m_{i,j} = \langle e_i, e_j\rangle$ est une matrice symétrique réelle définie positive, c'est-à-dire telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ avec $X \neq 0$, on a ${}^tXNX > 0$.

   (b) On suppose que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E_1 et que $(e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$ est une base orthonormée de E_2. Montrer que la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_{2n})$ est de la forme
   $$M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ {}^tA & I_n \end{pmatrix}$$
   où I_n est la matrice identité d'ordre n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (c) Montrer que M est une matrice symétrique définie positive.
3. On note $\alpha(M) = \prod_{i=1}^{2n} \lambda_i$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ sont les valeurs propres de M.

   (a) Montrer que $\alpha(M) > 0$.

   (b) Montrer que $\left(\prod_{i=1}^{2n} \lambda_i\right)^{1/2n} \leqslant \dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i$.

   (c) En déduire que $\alpha(M) \leqslant 1$.

   (d) Dans quel cas a-t-on $\alpha(M) = 1$?

Solution de l'exercice 1.8

1. Dans le cas où $E = E_1 \oplus^\perp E_2$, on a $p_2 = Id - p_1$ et $u = Id$.

2. (a) La matrice M est symétrique réelle par symétrie du produit scalaire. De plus, si $x = \sum_{i=1}^{2n} x_i e_i$ et si X est la matrice colonne canoniquement associée à x, alors :

$$ {}^t XMX = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n} x_i x_j \langle e_i, e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{2n} x_i e_i\rangle = ||x||^2 $$

ce qui montre le caractère défini positif.

   (b) Par définition d'une matrice associée à un endomorphisme dans une base et le fait que chaque morceau de base soit orthonormé :

   - si $1 \leqslant i \leqslant n$, $u(e_i) = e_i + \sum_{j=n+1}^{2n} \langle e_i, e_j\rangle e_j$.
   - si $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$, $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle e_j + e_i$.

   Ceci donne la matrice $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ {}^tA & I_n \end{pmatrix}$.

   (c) La matrice M est symétrique définie positive par la question a).

3. (a) Les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont toutes strictement positives.

   (b) Il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique qu'on démontre en utilisant la concavité de la fonction logarithme.

   (c) On remarque que la trace de M vaut $2n$ et on sait que $\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = \mathrm{tr}(M)$. On conclut grâce à la question précédente.

   (d) Supposons que $\alpha(M) = 1$. On a donc égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique. Ceci entraîne que tous les λ_i sont égaux et leur somme valant $2n$, ils valent tous 1.
   La matrice M, diagonalisable, est semblable à la matrice identité I_{2n} donc égale à I_{2n}. Cela entraîne que $E_1 \perp E_2$.

Exercice 1.9

Soit n un entier fixé supérieur ou égal à 2.
Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée **centro-symétrique** si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$$

On note $S = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n+1-j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Une matrice centro-symétrique est-elle également symétrique ?
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice centro-symétrique. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a : $a_{n+1-i,j} = a_{i,n+1-j}$.
3. (a) Montrer qu'une matrice A est centro-symétrique si et seulement si $AS = SA$.
   (b) En déduire que si A et B sont centro-symétriques, alors AB également et que si A est inversible, alors A^{-1} est centro-symétrique.
4. Soit λ une valeur propre de A centro-symétrique et X un vecteur propre associé.
   Un vecteur $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelé **symétrique** si pour tout $i \in [\![1,n]\!], z_i = z_{n+1-i}$.
   Un vecteur $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelé **antisymétrique** si pour tout $i \in [\![1,n]\!], z_i = -z_{n+1-i}$.
   (a) Montrer que $Y = X + SX$ appartient au sous-espace propre $E_\lambda(A)$.
   (b) En déduire que le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ admet au moins un vecteur propre symétrique ou un vecteur propre antisymétrique.

Solution de l'exercice 1.9

1. La réponse est négative. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Si $a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$, alors en remplaçant i par $n+1-i$ et en laissant le second indice inchangé, on obtient $a_{n+1-i,j} = a_{i,n+1-j}$. On a bien entendu la réciproque.
3. (a) On effectue le calcul de AS et de SA. La matrice SA donne une permutation circulaire sur les lignes de A : si $A = (L_1, L_2, \dots, L_n)$, alors $SA = (L_n, L_{n-1}, \dots, L_1)$.
   La matrice AS donne une permutation circulaire sur les colonnes de A : si $A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$, alors $SA = (C_n, C_{n-1}, \dots, C_1)$. Donc $AS = SA$ si et seulement si $a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$.
   (b) On a $AS = SA$ et $BS = SB$. Donc $A(BS) = A(SB) = (AS)B = SAB$ et $AS = SA \Rightarrow A^{-1}AS = A^{-1}SA \Rightarrow SA^{-1} = A^{-1}S$.
4. (a) On écrit $AY = AX + ASX = \lambda X + S(AX) = \lambda(X + SX) = \lambda Y$.
   (b) On écrit $X = \dfrac{X+SX}{2} + \dfrac{X-SX}{2} = Y + Z$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors $X + SX = \begin{pmatrix} x_1 + x_n \\ \vdots \\ x_n + x_1 \end{pmatrix}$ est symétrique et $X - SX = \begin{pmatrix} x_1 - x_n \\ \vdots \\ x_n - x_1 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Exercice 1.10

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $A = (A_1|A_2|\dots|A_n)$, où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k représente la k-ième colonne de A.

Soit Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi(A) = S = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

1. Montrer que Φ est une application linéaire. Déterminer la dimension de $\operatorname{Im}\Phi$ et celle de $\operatorname{Ker}\Phi$.
2. Soit u définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ u(A) = u((A_1|A_2|\dots|A_n)) = (S - A_1|S - A_2|\dots|S - A_n)$$

   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
   (c) Déterminer un polynôme annulateur de u de degré 2.
   (d) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Soit $J = \big(J_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall\,(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $J_{i,j} = 1$. On pose $U = J - I_n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $v : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application définie par :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v(A) = AU$$

   (a) Comparer u et v.
   (b) Retrouver les résultats de la question 2.b).

Solution de l'exercice 1.10

1. On vérifie aisément la linéarité de l'application Φ.

   L'application Φ est surjective car si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors (par exemple) un antécédent de X est $\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)$. Ainsi, $\dim(\operatorname{Im}\Phi) = n$ et $\dim(\operatorname{Ker}\Phi) = n^2 - n$.

2. (a) On vérifie aisément la linéarité de l'application u. En fait, il y a un lien entre Φ et u, puisque $u(A) = (\Phi(A)|\Phi(A)|\dots|\Phi(A)) - A$. Les valeurs propres de u seront celles de Φ décalées de -1 avec les même vecteurs propres.

   (b) Le réel 0 est valeur propre de Φ de sous-espace propre $\operatorname{Ker}\Phi$. Donc -1 est valeur propre de u de même sous-espace propre de dimension $n^2 - n$ qui est la dimension de $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/S = 0\}$.
   Si $u(A) = \lambda A$, alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!], S = (\lambda + 1)A_k$, avec $S \neq 0$. En sommant ces équations, il vient $nS = (\lambda + 1)S \Rightarrow \lambda = n - 1$. Le sous-espace propre associé est le sous-espace des matrices $(A_1|A_2|\dots A_n)$ telles $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \dfrac{S}{\lambda + 1}$. Il est de dimension n engendré par les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   (c) Le polynôme candidat ne peut être que $(x + 1)(x - n + 1) = x^2 + (2 - n)x + 1 - n$.
   On vérifie que $u^2 + (2 - n)u - (n - 1)Id = 0$. En effet :

   $$u^2 : (A_1|A_2|\dots|A_n) \to (S - A_1|S - A_2|\dots|S - A_n) \to ((n-2)S + A_1|(n-2)S + A_2|\dots|(n-2)S + A_n)$$

   La vérification est ensuite immédiate.

   (d) L'endomorphisme u est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n^2.

3. (a) La vérification $u = v$ est immédiate.

   (b) On sait que $J^2 = nJ$ et $(J - I_n)^2 = (n - 2)J + I_n$. Ainsi, $J^2 + (2 - n)(J - I_n) + (1 - n)I_n = 0$.
   Les valeurs propres de J sont 0 et n. Les valeurs propres de U sont -1 et $n - 1$.

EXERCICE 1.11

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A la matrice définie par : $A = {}^tMM$.

1. On suppose dans cette question que M est inversible.
   (a) Montrer que A est diagonalisable. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles strictement positives.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et des réels positifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ tels que
$$A = P \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \mu_n^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$
   puis que $A = S^2$ avec S une matrice symétrique et inversible que l'on précisera.
   (c) Montrer que $T = MS^{-1}$ est une matrice orthogonale.

   On admet que le résultat démontré dans la question 1 reste valable si M n'est pas inversible, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = TS$.

2. (a) Montrer que $\operatorname{tr}(A) \geqslant 0$. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$ si et seulement si M est la matrice nulle.
   (b) En étudiant l'application $h : x \mapsto \operatorname{tr}\left({}^t(M + xI_n)(M + xI_n)\right)$ définie sur $\mathbb{R}$, montrer que :
$$(\operatorname{tr}(M))^2 \leqslant n \operatorname{tr}(A)$$
   (c) Étudier les cas d'égalité dans l'inégalité montrée en 2.b).

Solution de l'exercice 1.11

1. (a) La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ de A. Alors ${}^tMMX = \lambda X$ donc ${}^tX{}^tMMX = \lambda{}^tXX$.
D'où $\|MX\|^2 = \lambda\|X\|^2$. Donc $\lambda = \dfrac{\|MX\|^2}{\|X\|^2}$ car X est non nul ; donc λ est strictement positif, puisque M est inversible.

   (b) Comme A est symétrique réelle, il existe une base orthogonale de vecteurs propres : donc il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
Les coefficients de D sont les valeurs propres de A et sont strictement positifs ; on peut donc les noter $\mu_1^2, \mu_2^2 ..., \mu_n^2$, avec les μ_i strictement positifs.
Posons $D' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ et $S = PD'P^{-1}$.
Alors, S est symétrique car $P^{-1} = {}^tP$ et $A = S^2$.
Comme les termes diagonaux de D' sont strictement positifs, D' est inversible tout comme S (produit de matrices inversibles)

   (c) Posons $T = MS^{-1}$ et montrons que T est orthogonale. Puisque $A = S^2$ et S symétrique ainsi que S^{-1}, on a :
$$ {}^tTT = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = (S^{-1}){}^tMMS^{-1} = S^{-1}AS^{-1} = (S)^{-1}S^2S^{-1} = I_n $$
Donc, T est orthogonale et $M = TS$.

2. (a) On a $A = {}^tMM$, donc $\operatorname{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}^2 \geqslant 0$ et cette trace est nulle si et seulement si $M = 0$.
Par suite, si la trace est nulle, tous les coefficients de M le sont, donc la matrice M est nulle.

   (b) Par linéarité de la trace, on obtient pour tout x réel : $h(x) = \operatorname{tr}(A) + x\operatorname{tr}(M) + x\operatorname{tr}({}^tM) + x^2\operatorname{tr}(I_n)$.
Donc, pour tout x réel, $h(x) = nx^2 + 2\operatorname{tr}(M)x + \operatorname{tr}(A)$ car une matrice a la même trace que sa transposée . Comme n est non nul, h est un polynôme du second degré.
Pour les mêmes raisons que dans la question 2.a), pour tout x réel, $A(x) = {}^t(M + xI_n)(M + xI_n)$ est une matrice symétrique réelle avec des valeurs propres positives, donc sa trace est positive.
Le polynôme h ne peut donc pas changer de signe et a un discriminant négatif ou nul d'où l'inégalité.

   (c) On aura l'égalité si et seulement si le discriminant précédent est nul, c'est-à-dire si h s'annule une et une seule fois, c'est-à-dire quand il existe un réel x tel que d'après la question 2.a), $\operatorname{tr}\left({}^t(M + xI_n)(M + xI_n)\right) = 0$, ce qui implique que $M + xI_n$ soit nulle.
Ainsi, l'égalité est obtenue lorsque M est une matrice scalaire.

Exercice 1.12

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et B l'application définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad B(P,Q) = \int_0^1 t\, P(t)\, Q'(t) dt$$

Vérifier que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?

2. On pose :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = \frac{1}{2}\Big[B(P,Q) + B(Q,P)\Big]$$

$$\forall P \in E, \quad \psi(P) = \varphi(P,P)$$

(a) Déterminer un polynôme $P \in E$ non nul tel que $\psi(P) = 0$.

(b) Expliciter la matrice $S \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficients $s_{i,j} = \varphi\big(X^{i-1}, X^{j-1}\big)$, pour $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$.

(c) On note q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ associée à la matrice S. Vérifier que l'on a :

$$\forall\, (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad q(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \psi\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k\Big).$$

3. Dans le cas $n = 1$, expliciter S et déterminer ses valeurs propres.
La forme quadratique q est-elle positive ?

4. (a) Dans le cas $n = 2$, expliciter la matrice S.

(b) On admet que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$q(a,b,c) = \psi\big(a + bX + cX^2\big) = \frac{1}{3}\left[b + \frac{3}{4}\,a + \frac{9}{8}\,c\right]^2 - \frac{3}{16}\left[a - \frac{5}{18}\,c\right]^2 - \frac{1}{135}\,c^2$$

Justifier que les formes linéaires $f_1 : (b,a,c) \mapsto b + \dfrac{3}{4}\,a + \dfrac{9}{8}\,c$, $f_2 : (b,a,c) \mapsto a - \dfrac{5}{18}\,c$ et $f_3 : (b,a,c) \mapsto c$ forment une base de $F = \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 1.12

1. • La forme B est bilinéaire car le produit l'est et la dérivation est linéaire.
   • $B(1,X)=\displaystyle\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}\neq B(X,1)=\int_0^1 0dt=0\,.$
2. (a) On a : $\psi(1)=\displaystyle\int_0^1 0dt=0\,.$

   (b) Pour tous $(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2$,

$$s_{i,j}=\frac{1}{2}\left(\int_0^1(j-1)\,t^{i+j-2}dt+\int_0^1(i-1)\,t^{i+j-2}dt\right)=\frac{i+j-2}{2\,(i+j-1)}$$

   (c) Le calcul est facile car l'application φ est bilinéaire, symétrique de matrice S.
3. En résolvant $S\,X=\lambda\,X$, il vient :

$$S_2=\begin{pmatrix}0 & 1/4\\ 1/4 & 1/3\end{pmatrix},\quad \mathrm{Sp}\,(S_2)=\left\{\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{13}}{12}\right\}$$

   Ainsi, une valeur propre est strictement négative, donc q n'est pas positive (ni définie-positive).
4. (a)) On a :

$$S_3=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

   (b) La matrice des (f_i) dans la base des formes coordonnées b,a,c (dans cet ordre), est :

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{3}{4} & 1 & 0\\ \frac{9}{8} & -\frac{5}{18} & 1\end{pmatrix}$$

   Cette matrice est triangulaire inversible, donc (f_i) est une base de F.

EXERCICE 1.13

Soit un entier $n \geqslant 2$. On dit qu'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $X \geqslant 0$ (resp. $X > 0$) si pour tout $i \in [\![1, n]\!], x_i \geqslant 0$ (resp. $x_i > 0$). Si $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, on dit que $X \geqslant Y$ si $X - Y \geqslant 0$.
Pour tout $X =\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $||X||_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

On dit que $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,j} \geqslant 0$ (resp. $a_{i,j} > 0$).

Enfin, on confond $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

Dans tout l'exercice, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A > 0$.
On pose : $\Omega = \{\alpha \geqslant 0 \,/\, \exists\, X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \geqslant 0, ||X||_\infty = 1$ et $AX \geqslant \alpha X\}$.

1. Montrer que l'ensemble Ω n'est pas vide et que si $\alpha \in \Omega$, alors $[0, \alpha] \subset \Omega$.
2. Montrer que l'ensemble Ω est borné.

   On note $\mu = \sup\limits_{\alpha \in \Omega}(\alpha)$ et on *admet* que μ appartient à Ω.
3. Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant \mu$.

   (Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on pourra considérer le vecteur noté $|X|$ tel que $|X| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$).
4. On se propose de montrer que μ est une valeur propre de A.
   (a) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes : $X \geqslant 0$, $||X||_\infty = 1$ et $AX \geqslant \mu X$.
   On pose : $Z = AX - \mu X$. Montrer que si $Z \neq 0$, alors $AZ > 0$.
   (b) En déduire que l'inégalité $AZ > 0$ est impossible puis que μ est valeur propre de A.

Solution de l'exercice 1.13

1. Comme $0 \in \Omega$, l'ensemble Ω n'est pas vide.
   Soit $\alpha > 0$ appartenant à Ω. Soit $0 \leqslant \beta < \alpha$. Il existe $X \geqslant 0$ de norme 1, tel que $AX \geqslant \alpha X \geqslant \beta X$. Donc $\beta \in \Omega$. Ainsi Ω est-il un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble Ω est borné. En effet. Soit $X \geqslant 0$, $||X||_\infty = x_i = 1$ et $AX \geqslant \alpha X$.
   En utilisant la i-ième équation, il vient :
$$\alpha = \alpha x_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \text{ (constant)}$$
3. Soit λ une valeur propre de A. Il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. On peut supposer $||X||_\infty = 1$.
   Alors comme $A > 0$, par inégalité triangulaire, on a :
$$A|X| = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j|\right)_i \geqslant \left(\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right|\right)_i = (|\lambda x_i|)_i = |\lambda|\,|X|.$$
   Ceci montre que $|\lambda| \in \Omega$.
4. (a) Comme $A > 0$, comme $AX \geqslant \mu X$, si $Z \neq 0$, on a $AZ > 0$. Car si $AZ = 0$, comme $A > 0$, il vient $Z = 0$.

   (b) Posons $Y = AX$. Si $AZ > 0$, alors $AY > \mu Y$. En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{i,j})$, ceci est équivalent à :
$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n > \mu y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}y_1 + \cdots + a_{n,n}y_n > \mu y_n \end{cases}$$
   On a $X \geqslant 0$, $A > 0$. Donc $Y > 0$. Alors, si
$$\mu' = \inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\frac{a_{i,1}y_1 + \cdots + a_{i,n}y_n}{y_i}\right)$$
   alors $\mu' > \mu$ et $AY \geqslant \mu' Y$. Donc $\mu' \in \Omega$ en contradiction avec la définition de μ.
   Ainsi, $Z = 0$ et $AX = \mu X$.

Exercice 1.14

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que A est une matrice orthogonale si et seulement si on a :

   $$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

   (b) En posant $a = \cos\theta, b = \sin\theta, c = \cos\varphi, d = \sin\varphi$, montrer que toute matrice orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de la forme :

   $$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

   On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On rappelle que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme suivante

   $$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$$

   où $A_s = \dfrac{A + {}^tA}{2}$ est appelée la partie symétrique de A et $A_a = \dfrac{A - {}^tA}{2}$ la partie antisymétrique de A .

2. (a) Donner les parties symétrique et antisymétrique de R_θ et S_θ.

   (b) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de A_s sont dans l'intervalle $[-1, 1]$.

3. Donner un exemple de matrice symétrique S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont incluses dans $[-1, 1]$ et pour laquelle il n'existe pas de matrice $A \in O_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A_s = S$.

4. Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On suppose que les valeurs propres de S sont incluses dans $[-1, 1]$ et que pour toute valeur propre λ de la matrice S, le sous-espace propre de S associé à λ est de dimension paire.

   Montrer qu'il existe $A \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A_s = S$.

Solution de l'exercice 1.14

1. (a) Par définition, une matrice est orthogonale si ses colonnes forment une base orthonormée. Pour la matrice A donnée, ce sont exactement les conditions proposées.
   Autre idée : par le calcul ${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$.

   (b) Comme $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$, on peut utiliser l'aide proposée. La troisième équation devient alors :
   $$\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = \cos(\varphi-\theta) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \varphi = \theta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
   Dans le premier cas, on obtient S_θ et dans le second R_θ.

2. (a) On obtient $R_{\theta,s} = \cos\theta I_2$ et $R_{\theta,a} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$. De même, $S_{\theta,s} = S_\theta$ et $S_{\theta,a} = 0$.

   (b) Si A est une matrice orthogonale, alors $A_s = \dfrac{A+A^{-1}}{2}$. Soit λ une valeurs propre de A_s et X un vecteur propre associé. On a alors :
   $$AX + A^{-1}X = 2\lambda X \Leftrightarrow (A^2 - 2\lambda A + I)X = 0$$
   Ainsi la matrice $A^2 - 2\lambda A + I$ n'est pas inversible. Or, par l'absurde, si $|\lambda| > 1$, alors $1-\lambda^2 < 0$ et $A^2 - 2\lambda A + I = (A-\alpha I)(A-\beta I)$ avec $\alpha = \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$ et $\beta = \lambda - \sqrt{\lambda^2-1}$. Ainsi α ou β est valeur propre complexe de A.
   Or, par ailleurs, si μ est une valeur propre de A orthogonale, avec μ réel ou complexe, on a :
   $$AY = \mu Y \Rightarrow ||Y||^2 = ||AY||^2 = |\mu|^2||Y||^2 \Rightarrow |\mu| = 1$$
   Comme $|\alpha| = |\beta| = \lambda^2 + (\lambda^2-1) > 1$ ceci est absurde.
   Autre idée : par Cauchy-Schwarz on a : $|{}^tXAX| \leqslant ||X||||AX|| = ||X||^2$,
   et comme A^{-1} est orthogonale aussi, on a : $|{}^tXA^{-1}X| \leqslant ||X||^2$.
   Ainsi : $|\lambda| \times ||X||^2 = |{}^tXA_sX| \leqslant \frac{1}{2}(|{}^tXAX| + |{}^tXA^{-1}X|) \leqslant ||X||^2$.

3. On prend une matrice diagonale, par exemple $S = \mathrm{diag}(1/2, 1/3)$. Au vu de la première question, on connaît toutes les matrices orthogonales A de $O_2(\mathbb{R})$ et aucune ne donne $A_s = S$.

4. La matrice S est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La dimension de chaque sous-espace propre est paire. Ainsi n est pair ($n = 2p$) et la matrice S est semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1 \ldots, \lambda_p, \lambda_p)$ avec $\lambda_i \in [-1,1]$. Notons P la matrice de passage associée.
   Pour chaque λ_i, on choisit un angle θ_i tel que $\cos(\theta_i) = \lambda_i$. La matrice orthogonale R_{θ_i} vérifie $R_{\theta_i,s} = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i)$.
   En regroupant ces matrices orthogonales en une seule matrice $R_{\theta_1,\ldots,\theta_p}$ (diagonale par blocs), on a $A = PR_{\theta_1,\ldots,\theta_p}{}^tP$ qui vérifie la relation voulue.

EXERCICE 1.15

Soit un entier $n \geqslant 2$ et une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $L^2 = I_n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice L dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient les trois propriétés suivantes :

   i) $\mathbb{R}^n = F \oplus G$;

   ii) pour tout $x \in F$, $f(x) = x$;

   iii) pour tout $x \in G$, $f(x) = -x$.

2. Montrer que $\operatorname{tr}(L) = \dim F - \dim G$, où tr désigne la trace.

   On note S_n l'ensemble des matrices $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $L^2 = I_n$.

3. (a) Soit $L \in S_n$ et soit M une matrice semblable à L. Montrer que $M \in S_n$.

   (b) Montrer que deux matrices L et M appartenant à S_n sont semblables si et seulement si on a : $\operatorname{tr}(L) = \operatorname{tr}(M)$.

4. Pour tout $M \in S_n$, on pose : $[M] = \{L \in S_n \,/\, L \text{ est semblable à } M\}$.

   (a) Déterminer $[I_n]$.

   (b) Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $([M_1], [M_2], \ldots, [M_p])$ est une famille de sous-ensembles de S_n deux à deux disjoints et tels que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} [M_k] = S_n$.

   (c) Donner la valeur de p.

Solution de l'exercice 1.15

1. Soit $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $L^2 = I_n$. Montrons que L est diagonalisable, c'est-à-dire le point i).
   On pose $F = \mathrm{Ker}(L - I_n)$ et $G = \mathrm{Ker}(L + I_n)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On peut écrire
$$x = \frac{x + L(x)}{2} + \frac{x - L(x)}{2} = y + z$$
   et comme $(L-I_n)(L+I_n) = (L+I_n)(L-I_n) = L^2-I_n = 0$, on a $y \in F$ et $z \in G$ et ainsi $R^n \subseteq F+G \subseteq R^n$. De plus, si $x \in F \cap G$, alors $L(x) = x = -x$ entraîne que $x = 0$. Donc $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

   Les points ii) et ii) sont évidents au vu de la définition de F et G.
2. La matrice L est diagonalisable et ses valeurs propres sont -1, de sous-espace propre associé G et 1 de sous-espace propre associé F. Deux matrices semblables ont même trace. Ainsi $\mathrm{tr}(L) = \dim F - \dim G$.
3. (a) Si L et M sont semblables, alors elles ont même trace. De plus $M^2 = PL^2P^{-1} = I_n$.
   (b) Réciproquement, si $\mathrm{tr}(L) = \mathrm{tr}(M)$, comme $L^2 = M^2 = I_n$, on a alors :
$$\begin{cases} \dim F_L - \dim G_L = \dim F_M - \dim G_M \\ \dim F_L + \dim G_L = \dim F_M + \dim G_M = n \end{cases}$$
   Cela entraîne que $\dim F_L = \dim F_M$ et $\dim G_L = \dim G_M$. On peut donc construire un isomorphisme u entre F_L et F_M et un isomorphisme v entre G_L et G_M. Et comme $\mathbb{R}^n = F_L \oplus G_L = F_M \oplus G_M$, ces deux isomorphismes donnent naissance à une matrice P inversible telle que $M = P^{-1}LP$.
4. (a) Au vu de la définition, $[I_n] = \{I_n\}$.

   (b) On vient de voir que $L \sim M$ si et seulement L et M ont même trace et cette trace vaut $\dim F - \dim G$. Les valeurs possibles de $\mathrm{tr}(L)$, quand $L \in [M]$, sont donc $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Toute matrice de S_n est semblable à une seule matrice diagonale formée de k fois le nombre 1 et $n - k$ fois le nombre -1, ceci pour $k \in [\![0, n]\!]$. Donc, $p = n + 1$.

EXERCICE 1.16

Soit n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$. Soit une matrice **rectangulaire** non nulle $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ à n lignes et p colonnes.

1. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, un entier $r \in [\![1, p]\!]$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_r > 0$ et ${}^tQ{}^tAAQ = D$,

   où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent $d_{i,i} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i \leqslant r \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

   Pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$, on note X_i la i-ème colonne de Q.

2. (a) Montrer que le rang de ${}^tAA$ est égal à r.

   (b) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, AX_i est un vecteur propre de la matrice $A{}^tA$ associé à la valeur propre λ_i. En déduire que les matrices $A{}^tA$ et ${}^tAA$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

   (c) Soit $(U_1, \dots, U_s)$ une base du sous-espace propre de ${}^tAA$ associé à une valeur propre λ non nulle. Montrer que la famille $(AU_1, \dots, AU_s)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une famille libre.

   (d) En déduire que les sous-espaces propres de $A{}^tA$ et ${}^tAA$ associés à la même valeur propre non nulle sont de même dimension et que le rang de $A{}^tA$ est égal à r.

3. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $Y_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} AX_i$.

   (a) Montrer que la famille $(Y_1, \dots, Y_r)$ est une famille orthonormée de vecteurs propres de $A{}^tA$.

   (b) En déduire qu'il existe des vecteurs $Y_{r+1}, \dots, Y_n$ pour lesquels la famille $(Y_1, \dots, Y_r, Y_{r+1}, \dots, Y_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A{}^tA$.

4. Dans cette question, on suppose que $p = n$. On note $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ème colonne de P est la matrice-colonne Y_i.

   Soit $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent $\delta_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i} & \text{si } i = j \leqslant p \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

   Montrer que $A = P\Delta{}^tQ$.

Solution de l'exercice 1.16

1. La matrice ${}^tAA$ est carrée d'ordre p et symétrique réelle ; on peut donc appliquer le théorème spectral en ordonnant les valeurs propres dans l'ordre décroissant. De plus, ses valeurs propres sont positives ou nulles, car si ${}^tAAX = \lambda X$ et $X \neq 0$, alors $\lambda \|X\|^2 = {}^tX({}^tAAX) = \|AX\|^2 \geqslant 0$, d'où $\lambda \geqslant 0$. Enfin au moins une de ces valeurs propres est non nulle, car sinon ; on aurait ${}^tAA = 0$, et donc $A =$, ce qui est absurde. En notant r le nombre de valeurs propres non nulles, on obtient le résultat demandé.
2. (a) Comme ${}^tAA$ et D sont semblables, elles ont même rang, à savoir r.

   (b) Comme les colonnes de Q sont des vecteurs propres de ${}^tAA$, on a :

   $$(A{}^tA)AX_i = A({}^tAAX_i) = A\lambda_i X_i = \lambda_i AX_i.$$

   De plus, $AX_i \neq 0$ car sinon on aurait $\lambda_i \|X_i\|^2 = \|AX_i\|^2 = 0$ ce qui est absurde car X_i et λ_i ne sont pas nuls.
   Ceci montre que $\mathrm{Sp}\,({}^tAA) \setminus \{0\} \subset \mathrm{Sp}\,(A{}^tA) \setminus \{0\}$; l'inclusion inverse s'obtient en échangeant les rôles de A et ${}^tA$.
   D'où $\mathrm{Sp}\,({}^tAA) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}\,(A{}^tA) \setminus \{0\}$.

   (c) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 AU_1 + \cdots + \alpha_s AU_s = 0$.
   Alors : $\alpha_1 {}^tAAU_1 + \cdots + \alpha_s {}^tAAU_s = 0$, soit $\lambda(\alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_s U_s) = 0$,
   soit $\alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_s U_s = 0$ car $\lambda \neq 0$, soit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$, car $U_1, \ldots, U_s$ libre.

   (d) Les deux questions précédents montrent que $(AU_1, \ldots, AU_s)$ est une famille libre de $E_\lambda(A{}^tA)$ (sous-espace propre de $A{}^tA$ associé à λ), donc :

   $$\dim E_\lambda(A{}^tA) \geqslant s = \dim E_\lambda({}^tAA).$$

   L'inégalité inverse s'obtient en échangeant les rôles de A et ${}^tA$, d'où l'égalité.
   Le rang d'une matrice diagonalisable est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres associés à ses valeurs propres non nulles, donc $A{}^tA$ et ${}^tAA$ ont le même rang, égal à r (d'après 2.a).
3. (a) D'après 2.b), $Y_1, \ldots, Y_r$ est une famille de vecteurs propres de $A{}^tA$. En outre :

   $$\forall i,j \in [\![1,r]\!],\ {}^tY_iY_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{}^tX_i{}^tAAX_j = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{}^tX_iX_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   car Q étant orthogonale, ses colonnes forment une famille orthonormée.

   (b) Comme $X_1, \ldots, X_r$ sont les r premières colonnes de Q, elles forment une base orthonormée de la somme des sous-espace propres de ${}^tAA$ associés aux valeurs propres non nulles et donc, d'après les questions précédentes, $Y_1, \ldots, Y_r$ est une base de la somme des sous-espace propres de $A{}^tA$ associés aux valeurs propres non nulles. Si $n = r$, alors la famille convient, sinon on la complète par $Y_{r+1}, \ldots, Y_n$ une base orthonormée de l'espace $E_0(A{}^tA)$ qui est orthogonal à la somme des sous-espace propres de $A{}^tA$ associés aux valeurs propres non nulles.
4. Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, la définition de Y_i donne $AX_i = \sqrt{\lambda_i}Y_i$.
   Et pour $i \geqslant r+1$, on a $AY_i = 0$ (car $\|AX_i\|^2 = {}^tX_i({}^tAAX_i) = 0$).
   Ainsi, la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à A dans la base $X_1, \ldots, X_p$ au départ et dans la base $Y_1, \ldots, Y_p$ $(p = n)$ à l'arrivée, est Δ. Donc, la formule de changement de base donne $\Delta = P^{-1}AQ$, soit $A = P\Delta Q^{-1} = P\Delta{}^tQ$.

Exercice 1.17

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et u un vecteur unitaire de E. On note $<,>$ son produit scalaire.

On considère la fonction $f_{a,b}$ où a et b sont deux réels avec $a \neq 0$, définie par :

$$\forall x \in E, \quad f_{a,b}(x) = a < x, u > u + b\,x.$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est un endomorphisme symétrique de E.
2. Préciser le spectre de $f_{a,b}$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a et de b, l'endomorphisme $f_{a,b}$ est-il un projecteur ?
4. Lorsque $f_{a,b}$ est bijectif, déterminer la réciproque de $f_{a,b}$.
5. On considère l'application F définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{L}(E)$ par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad F((a,b)) = f_{a,b}.$$

   (a) Montrer que F est une application linéaire.
   (b) Déterminer $\operatorname{Ker} F$.
   (c) Quel est le rang de F ?

Solution de l'exercice 1.17 On remarquera que si $a = 0$, alors $f_{0,b} = bId$.

1. $f_{a,b}$ est une application de E dans E, linéaire en utilisant la linéarité du produit scalaire, c'est donc un endomorphisme de E. Soit x et y deux vecteurs de E, on a :

$$< f_{a,b}(x), y >=< a < x, u > u + b\,x, y >= a < x, u >< y, u > +b < x, y >,$$

Cette expression étant symétrique par rapport à x et y, on en déduit que $f_{a,b}$ est un endomorphisme symétrique de E.

2. On remarque que $f_{a,b}(u) = (a + b)u$, donc $a + b$ est une valeur propre et le sous-espace propre est $\text{Vect}(u)$. Par ailleurs, pour $x \in \text{Vect}(u)^{\perp}$, $f_{a,b}(x) = bx$, et le sous-espace propre associé contient $\text{Vect}(u)^{\perp}$. Par conséquent comme $a \neq 0$, alors $f_{a,b}$ a deux valeurs propres b et $a + b$.

3. Comme $f_{a,b}$ est diagonalisable, $f_{a,b}$ est un projecteur si et seulement si son spectre est inclus dans $\{0, 1\}$, soit $(a, b) \in \{(1, 0), (-1, 1), (0, 1), (0, 0)\}$.

4. L'endomorphisme $f_{a,b}$ est bijectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre, soit lorsque $b \neq 0$ et $a + b \neq 0$. Dans ce cas, pour tout vecteur x de E, si on a :

$$y = a < x, u > u + b\,x,$$

alors :

$$< y, u >= a < x, u > +b < x, u >= (a + b) < x, u > .$$

On en déduit donc que :

$$x = \frac{1}{b}y - \frac{a}{b(a + b)} < y, u > u.$$

Ainsi la réciproque de $f_{a,b}$ est $f_{-a/(b(a+b)),1/b}$

5. (a) F est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{L}(E)$. On prouve la linéarité directement.
   (b) Si $(a, b) \in \text{Ker}\, F$, alors $f_{a,b} = 0$, donc les valeurs propres sont nulles, d'où $b = 0$ et $a + b = 0$. Par suite, $a = b = 0$. Ainsi, $\text{Ker}\, F$ est réduit à 0.
   (c) On applique le théorème du rang, d'où le rang de F est $2 - 0 = 2$.

EXERCICE 1.18

Soit N un entier tel que $N \geqslant 2$.

1. Soient $a_1, \cdots, a_N \in \mathbb{R}$ tels que $(a_1, \cdots, a_N) \neq (0, \cdots, 0)$. On note $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ la matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2, \; m_{i,j} = a_i a_j$$

   (a) Déterminer une matrice colonne A telle que $M = A^t A$.

   (b) Exprimer la trace de M en fonction de A et déterminer un polynôme annulateur de M de degré 2.

   (c) Déterminer le spectre de M. Montrer que nécessairement $\mathrm{tr}(M) > 0$.

2. Soit $(E, \langle \; , \; \rangle)$ un espace euclidien de dimension N. Soit un entier $n \in [\![1, N]\!]$ et $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une famille de n vecteurs non tous nuls de E. On note $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$ et $G = (g_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \; g_{i,j} = \langle u_i, u_j \rangle$$

   (a) Montrer que si $\mathcal{F}$ est une famille liée alors G n'est pas inversible.

   On suppose dans la suite du problème que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

   (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de F. On note $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la colonne d'indice j est constituée des coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que

$$G = {}^t P P$$

   puis que le rang de G est égal à celui de la famille $\mathcal{F}$.

   (c) Montrer que toute valeur propre λ de G vérifie :

$$0 < \lambda \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2$$

   (d) Soit $x \in E$ et $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Montrer que

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

   où $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont n réels donnés par :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 1.18

1. (a) On choisit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$ et $M = A^tA$. La matrice M n'est pas nulle puisque $A \neq 0$ et elle est de rang 1.

   (b) On a $\mathrm{tr}(M) = {}^tAA$ et $M^2 = \mathrm{tr}(M)M$. Ainsi $X(X - \mathrm{tr}(M))$ est un polynôme annulateur de M.

   (c) Le spectre de M est inclus dans $\{0, \mathrm{tr}(M)\}$. La matrice M est symétrique réelle, donc diagonalisable. Le sous-espace propre associé à 0 est de dimension $n-1$ et celui associé à $\mathrm{tr}(M)$ de dimension 1. Donc, son spectre est égal à $\{0, \mathrm{tr}(M)\}$. Enfin, on sait que $\mathrm{tr}(A^tA) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0$ car $A \neq 0$.

2. (a) Supposons $\mathcal{F}$ liée, par exemple que $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i$. Alors $C_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_i$ où $C_1, \dots, C_n$ désignent les colonnes de la matrice G. En effet, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\langle u_n, u_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i, u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \langle u_i, u_j\rangle$$

   (b) La base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, on sait que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i = \sum_{k=1}^{n} \langle u_i, e_k\rangle e_k$.

   Ainsi, $P = (\langle u_i, e_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Or,

$$\langle u_i, u_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle u_i, e_k\rangle e_k, \sum_{p=1}^{n} \langle u_j, e_p\rangle e_p\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle u_i, e_k\rangle \langle u_j, e_k\rangle$$

   qui est le terme général du produit ${}^tPP$.
   La matrice P est inversible comme toute matrice de passage entre deux bases, donc ${}^tP$ également tout comme G. Ainsi $\mathrm{rg}(G) = n$.

   (c) Matriciellement, $GX = \lambda X$ est équivalent à ${}^tPPX = \lambda X$ ce qui entraîne que ${}^tX{}^tPPX = \lambda{}^tXX$ ou $||PX||^2 = \lambda ||X||^2$. Donc $\lambda > 0$, puisque G est inversible. La matrice G est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et à valeurs propres positives.

   Ainsi, $0 < \lambda \leqslant \mathrm{tr}(G) = \sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2$.

   (d) Dans la base $\mathcal{F}$ de F, on a $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ et par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, p(x)\rangle \\ \vdots \\ \langle u_1, p(x)\rangle \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

   Mais $x - p(x)$ est orthogonal à F. Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!], \langle u_i, p(x)\rangle = \langle u_i, x\rangle$. Ainsi, G étant inversible, on a :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \langle u_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x\rangle \end{pmatrix}$$

Exercice 1.19

Soit un entier $n \geqslant 3$. On considère la matrice à n lignes et n colonnes suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ canoniquement associé à M. On munit l'espace vectoriel E du produit scalaire canonique qui fait de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée. On pose en outre :

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ ; \ v_1 = v_n = \sum_{k=2}^{n-1} v_k = 0 \right\}$$

1. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer la dimension puis une base du noyau de u.
3. Déterminer les valeurs propres de M, ainsi qu'une base de vecteurs propres pour chacun des sous-espaces propres de M autres que celui associé à la valeur propre 0.
4. Déterminer une base de V et une base de $V^\perp$.
5. Montrer que V et $V^\perp$ sont stables par u.
6. Montrer que pour $n \geqslant 4$, il y a une infinité de droites vectorielles de E stables par u, ainsi qu'une infinité de plans vectoriels de E stables par u.

Solution de l'exercice 1.19

1. Comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
2. Les $n-1$ premières colonnes $C_1, \dots, C_{n-1}$ de M étant identiques et la dernière C_n formant avec C_1 une famille libre, le rang de M est 2 ; donc par le théorème du rang, la dimension du noyau vaut $n-2$.

   De plus, comme $n \geqslant 3$, les vecteurs $e_2 - e_1, \dots, e_{n-1} - e_1$ appartiennent au noyau de u, forment un système libre de cardinal $n-2 = \dim(\mathrm{Ker}(u))$, et donc une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
3. D'après la question précédente, 0 est valeur propre. Pour tout $\lambda \neq 0$, on a :

$$u\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{ccc} w_n & = & \lambda w_1 \\ w_n & = & \lambda w_2 \\ & \vdots & \\ w_n & = & \lambda w_{n-1} \\ w_1 + \ldots + w_n & = & \lambda w_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = \cdots = w_{n-1} = \dfrac{w_n}{\lambda} \\ \dfrac{(n-1)w_n}{\lambda} = (\lambda - 1)w_n. \end{cases}$$

   Il n'y a de solution $(w_1, \dots, w_n)$ non nulle que si $n-1 = \lambda(\lambda-1)$, soit $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$, soit $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ ou $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{4n-3}}{2}$ (on remarque que $4n-3 > 0$ car $n \geqslant 3$).
   Et alors, $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}(u_2)$, avec $u_1 = (1, \dots, 1, \lambda_1)$ et $u_2 = (1, \dots, 1, \lambda_2)$.
4. On a :

$$\begin{aligned} v = (v_1, \dots v_n) \in V &\iff v = \left(0, -\sum_{k=3}^{n-1} v_k, v_3, \dots, v_{n-1}, 0\right) \\ &\iff v = v_3(e_3 - e_2) + v_4(e_4 - e_2) + \dots v_{n-1}(e_{n-1} - e_2). \end{aligned}$$

   Donc $(e_3 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_2)$ engendre V et c'est une famille libre car elle est échelonnée.
   Ainsi, V est de dimension $n-3$, donc $V^{\perp}$ est de dimension 3. Donc $V^{\perp}$ a pour base $(e_1, e_n, e_1 + \ldots + e_n)$ car ces vecteurs sont clairement orthogonaux à chaque vecteur de la base de V trouvée et c'est une famille libre.
5. On a stabilité de $V^{\perp}$ par u car :

$$u(e_1) = e_n \in V^{\perp},\ u(e_n) = e_1 + \ldots + e_n \in V^{\perp},\ u(e_1 + \ldots + e_n) = (n-1)e_n + e_1 + \ldots + e_n \in V^{\perp}.$$

   On a $V \subset \mathrm{Ker}(u)$ car chacun des vecteurs de la base trouvée appartient à $\mathrm{Ker}(u)$. Donc V est stable par u.
6. Les droites vectorielles stables par u sont toutes celles qui sont engendrées par un vecteur propre. Pour $n \geqslant 4$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \geqslant 2$ donc il y en a une infinité, par exemple celles de la forme $D_\alpha = \mathrm{Vect}(e'_2 + \alpha e'_3)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, où e'_2 et e'_3 forment une famille libre de $\mathrm{Ker}(u)$, qui sont toutes différentes.

   Si f est un vecteur propre de u associé à une valeur propre non nulle (il y en a d'après la question 3) pour chacune des droites stables précédentes D_α, alors $\mathrm{Vect}(f) \oplus D_\alpha$ est un plan stable (différente pour chaque α). Donc, il y a bien une infinité de plans vectoriels de E stables par u.

EXERCICE 1.20

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P non nul de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

   On note $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des polynômes annulateurs de A.
2. (a) On note $\mathcal{D} = \{\deg(P), P \in \mathcal{P}_A, P \neq 0\}$. Montrer que $\mathcal{D}$ admet un plus petit élément.
   (b) En déduire qu'il existe un unique polynôme non nul, unitaire, Π_A de $\mathbb{C}[X]$ tel que
   $$\mathcal{P}_A = \{\Pi_A Q(X), Q \in \mathbb{C}[X]\}$$
   Π_A est appelé polynôme minimal de A.
3. Montrer que deux matrices semblables non nulles ont le même polynôme minimal.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si $\Pi_A(\lambda) = 0$.
5. On suppose dans cette question que A est semblable à $2A$.
   (a) Montrer que A admet au moins une valeur propre complexe λ.
   (b) Montrer que toute valeur propre de A est nulle.
   (c) En déduire que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier q tel que $A^q = 0$.
6. On suppose dans cette question que $n = 2$. On suppose de plus, que A n'est pas la matrice nulle et est nilpotente. On note p son indice de nilpotence, c'est-à-dire l'entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
   (a) Montrer que $p = 2$.
   (b) Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) En déduire que A et $2A$ sont semblables.

Solution de l'exercice 1.20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A \neq 0$.

1. La famille $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$ est de cardinal n^2+1 et est donc liée : il existe $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n^2} \in \mathbb{C}^{n^2+1}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i A^i = 0$.

   Donc $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i X^i$ est un polynôme non nul annulateur de A.

2. (a) L'ensemble $\mathcal{D}$ est inclus dans $\mathbb{N}$ (même $\mathbb{N}^*$). Il est minoré et admet un minimum $p \geqslant 1$.

   (b) Soit $\Pi \in \mathcal{D}$ de degré p. Quitte à diviser par son coefficient dominant, on peut supposer Π unitaire. et $\pi(A) = 0$.

   Supposons qu'il existe un autre polynôme minimal m annulateur de A. Son degré est forcément égal à p. En faisant la division eucidienne de Π par m, il vient $\Pi(X) = \lambda m(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < p$ ou $R = 0$. Donc $R(A) = 0$ en contradiction avec la minimalité de p si $R \neq 0$. Ainsi deux polynômes minimaux sont associés. Il en existe donc un unique unitaire.

   Enfin, si $P \in \mathcal{P}_A$, en effectuant la division euclidienne de Π par P, il vient $P = \Pi \times Q$.

3. Soient A et B deux matrices semblables, $A \neq 0$. Il existe Q inversible telle que $B = Q^{-1}AQ$.

   Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X], a_d \neq 0$ et $P(A) = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k = 0$ si et seulement si $Q^{-1}(\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k)Q = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k Q^{-1}A^k Q = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k B^k = 0$.

   Donc $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_B$ et donc $\Pi_A = \Pi_B$.

4. Soit λ valeur propre de A. Alors $\Pi_A(\lambda) = 0$, car Π_A est annulateur de A.

   Réciproquement, supposons λ racine de Π_A. Alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ non nul tel que $\Pi_A(X) = (X-\lambda)Q(X)$ avec $\deg Q = \deg \Pi_A - 1$. Si λ n'est pas valeur propre de A, la matrice $A - \lambda I$ est inversible. En multipliant l'égalité par $(A-\lambda I)^{-1}$, on obtient $Q(A) = 0$, en contradiction avec la minimalité du degré de Π_A.

5. (a) D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, Π_A admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$, donc A une valeur propre complexe λ.

   (b) Raisonnons par l'absurde : soit $\lambda \in Sp(A)$ t.q. $\lambda \neq 0$. Il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$. Alors $2Ax = 2\lambda x$.

   Donc 2λ est valeur propre de $2A$. Et comme $2A$ et A sont semblables, elles ont le même polynôme minimal et donc les mêmes valeurs propres, par la question précédente. Donc 2λ est valeur propre de A.

   Par récurrence, on montre que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $2^n\lambda$ est valeur propre de A qui aurait alors une infinité de valeurs propres. En contradiction avec le fait que les valeurs propres de A sont les racines d'un polynôme non nul Π_A. Donc $\lambda = 0$.

   (c) Π_A est donc un polynôme de degré $p \geqslant 1$. Le polynôme Π_A admet p racines dans $\mathbb{C}$ toutes égales à 0 et donc $\Pi_A = X^p$, puisque Π_A est unitaire. Et donc $A^p = 0$.

6. (a) Si $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, il existe $x \neq 0$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. Donc ici $p = 2$.

   (b) On a $u \neq 0$ et $u^2 = 0$. Donc il existe $x \in \mathbb{C}^2$ tel que $u(x) \neq 0$.Dans la base $\mathcal{B} = (u(x), x)$: $C = M_{u,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Dans la base $\mathcal{B}' = (u(x), 2x)$: $C' = M_{u,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $C' = 2C$. Donc $2C$ et C sont semblables,et comme A et C sont semblables, alors $2A$ et A sont semblables.

Chapitre 2

Analyse

Exercice 2.1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^2(nt)dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{2\pi} \sin^2(nt)dt.$$

Soit f une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F_n : \ (a, b) \longmapsto \int_0^{2\pi} \Big(f(t) - a\, \cos(nt) - b\, \sin(nt)\Big)^2 dt\ .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n = J_n = \pi$.
2. Montrer qu'il existe un réel C indépendant de n, de a et de b, et des réels u_n et v_n indépendants de a et de b que l'on explicitera à l'aide d'intégrales, tels que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$F_n(a, b) = \pi a^2 + \pi b^2 - 2au_n - 2bv_n + \mathrm{C}.$$

3. On suppose dans cette question que n est un entier supérieur ou égal à 1 fixé.
   (a) Montrer que F_n n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer deux réels a_n, b_n tels que F_n présente un minimum local en (a_n, b_n).
   (c) Montrer que ce minimum de F_n en (a_n, b_n) est un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que lorsque f est de classe C^1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
5. On définit les fonctions φ_n et ψ_n par : $\forall t \in [0, 2\pi]$, $\varphi_n(t) = \cos(nt)$ et $\psi_n(t) = \sin(nt)$.
   Soit E_n l'espace vectoriel engendré par les fonctions f, φ_n et ψ_n. On munit E_n du produit scalaire défini par :

$$\forall\, (g, h) \in E_n^2,\ \langle g, h\rangle = \int_0^{2\pi} g(t)h(t)dt$$

   Interpréter F_n dans ce cadre et retrouver le résultat de la question 3b.

Solution de l'exercice 2.1

1. Plusieurs méthodes sont possibles ; par exemple :
   - Formules trigonométriques : $\cos^2(nt) = \dfrac{1+\cos(2nt)}{2}$ et $\sin^2(nt) = \dfrac{1-\cos(2nt)}{2}$, dont l'intégrale vaut π.
   - Une intégration par parties donne $I_n = J_n$ et $I_n + J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos^2(nt) + \sin^2(nt))dt = 2\pi$.

   Ainsi, $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = J_n = \pi.}$
2. On a :
$$\begin{aligned}&(f(t) - a\cos(nt) - b\sin(nt))^2\\ =&f^2(t) + a^2\cos^2(nt) + b^2\sin^2(nt) - 2af(t)\cos(nt) - 2bf(t)\sin(nt) + 2ab\sin(nt)\cos(nt)\end{aligned}$$
   Par linéarité de l'intégration, en posant $u_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$, $v_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$ et $\mathrm{C} = \displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)dt$, et puisque $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(nt)\cos(nt)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2nt)\ dt = 0$, on a bien :
$$F_n(a,b) = a^2 I_n + b^2 J_n - 2au_n - 2bv_n + \mathrm{C}$$
3. (a) $F_n(a,0) = \pi a^2 - 2au_n + \mathrm{C} \to +\infty$ quand $a \to +\infty$, donc la fonction F_n n'est pas majorée.

   (b) La fonction F_n est de classe C^2 et : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1(F_n)(a,b) = 2a\pi - 2u_n$ et $\partial_2(F_n)(a,b) = 2b\pi - 2v_n$.
   Donc, F_n présente un unique point critique $\boxed{\text{en } \left(\frac{u_n}{\pi}, \frac{v_n}{\pi}\right).}$
   Et : $\partial^2_{1,1}(F_n)(a,b) = \partial^2_{2,2}(F_n)(a,b) = 2\pi$, $\partial^2_{1,2}(F_n)(a,b) = 0$. La Hessienne vaut donc $2\pi I$, où I est la matrice identité d'ordre 2 : elle n'a que des valeurs propres strictement positives, donc on a bien un minimum local.

   (c) Comme $u_n = \pi a_n$ et $v_n = \pi b_n$, on a :
$$\begin{aligned}F_n(a,b) - F_n(a_n,b_n) &= (\pi a^2 + \pi b^2 - 2au_n - 2bv_n + \mathrm{C}) - (\pi a_n^2 + \pi b_n^2 - 2a_nu_n - 2b_nv_n + \mathrm{C})\\ &= \pi(a^2 + b^2 - 2aa_n - 2bb_n - a_n^2 - b_n^2 + 2a_n^2 + 2b_n^2)\\ &= \pi\big((a-a_n)^2 + (b-b_n)^2\big) \geqslant 0.\end{aligned}$$
   Ainsi $F_n(a,b) \geqslant F_n(a_n,b_n)$ pour tout (a,b).
4. L'hypothèse selon laquelle f est C^1 nous invite à faire une intégration par parties, puis par inégalité triangulaire, on obtient :
$$|u_n| = \left|\left[-f(t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos(nt)f'(t)dt\right| \leqslant \frac{|f(0) - f(2\pi)|}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|f'(t)|dt.$$
   Ainsi, par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
5. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $F_n(a,b) = ||f - (a\varphi_n + b\psi_n)||^2$
   Or, quand (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$, $a\varphi_n + b\psi_n$ décrit $\mathrm{Vect}(\varphi_n,\psi_n)$. Ainsi, on sait que F_n admet un minimum atteint quand $a\varphi_n + b\psi_n$ est égal à la projection orthogonale de f sur $\mathrm{Vect}(\varphi_n,\psi_n)$.

Exercice 2.2

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une suite strictement croissante de n réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n)$. On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 x_k^2 - \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2\right]^2 \quad \textbf{et} \quad g(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

   On pose $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 1\}$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Donner les gradients de f et de g au point x.

   (b) Justifier l'existence d'un maximum global de f sur $\mathcal{S}$.

   (c) Vérifier que la contrainte $g(x) = 1$ n'est pas critique.

   (d) Soit $y \in \mathcal{S}$ tel que $f(y) = \max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\}$. Écrire la condition nécessaire du premier ordre que l'on doit avoir au point y. Montrer que si la i-ème composante y_i de y $(i \in \{1, \cdots, n\})$ est non nulle, alors λ_i est racine d'une équation du second degré de la forme $X^2 - 2bX - c = 0$ où b et c sont indépendants de i. En déduire que y a exactement deux composantes non nulles. Que peut-on dire de plus sur celles-ci ? Montrer que :

$$\max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\} = \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}.$$

2. Dans cette question, on suppose seulement que les réels $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ vérifient $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et on définit encore f et g par les mêmes formules que dans la question 1.

   (a) Montrer que :

$$\max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\} \leqslant \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}.$$

   (Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, \cdots, n\}$, on pourra poser $\lambda_i(p) = \lambda_i + (i-1)/p$ et utiliser la question 1).

   (b) Prouver que l'on a encore :

$$\max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\} = \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}.$$

3. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note X la matrice colonne associée à x. On considère une matrice A carrée d'ordre n qui est symétrique et réelle.

   (a) Justifier le fait que la matrice A est diagonalisable et écrire A à l'aide d'une matrice diagonale D et d'une matrice orthogonale P.

   (b) On note $\lambda_{max}(A)$ (resp. $\lambda_{min}(A)$) la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de A. Montrer que :

$$\max\left\{{}^tXA^2X - \left({}^tXAX\right)^2 : x \in \mathcal{S}\right\} = \frac{(\lambda_{max}(A) - \lambda_{min}(A))^2}{4}.$$

   (c) En choisissant convenablement un vecteur x de $\mathcal{S}$, prouver que :

$$|\lambda_{max}(A) - \lambda_{min}(A)| \geqslant \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{Tr(A^2) - \frac{1}{n} Tr(A)^2}.$$

Solution de l'exercice 2.2

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a $\nabla(g)(x) = 2x$ et les composantes du gradient de f sont données par :

$$\partial_i(f) = 2\lambda_i^2 x_i - 4\lambda_i x_i \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2\right] = 2\lambda_i x_i \left[\lambda_i - 2\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2\right)\right].$$

   (b) La fonction f est continue sur le fermé borné $\mathcal{S}$, elle admet donc un maximum global sur $\mathcal{S}$.

   (c) Pour tout $x \in \mathcal{S}$, on a $\nabla(g)(x) = 2x \neq 0$, la contrainte $g(x) = 1$ est donc non critique.

   (d) Soit $y \in \mathcal{S}$ tel que $f(y) = \max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\}$. Le cours nous dit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f)(y) = \alpha\nabla(g)(y)$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a donc :

$$\lambda_i y_i \left[\lambda_i - 2\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2\right)\right] = \alpha y_i. \tag{2.1}$$

   Posons $b = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$ (b est fixé car tout est donné), on voit que si $y_i \neq 0$ alors λ_i est racine de l'équation du second degré de la forme $X^2 - 2bX - \alpha = 0$. Le trinôme $X^2 - 2bX - \alpha$ admet au plus deux racines distinctes et les réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont distincts, le point y a donc au plus deux composantes non nulles. Comme $y \in \mathcal{S}$, il a au moins une composante $y_i \neq 0$. S' il n'en n'a qu'une, alors $y = \pm e_i$ et $f(y) = 0 < f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \cdots, 0) = \dfrac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4}$, ce qui est contradictoire. Le point y a donc exactement deux composantes non nulles y_i et y_j $(i < j)$. Par factorisation (ou par les formules classiques), on doit avoir $\lambda_i + \lambda_j = 2(\lambda_i y_i^2 + \lambda_j y_j^2)$. Or, on sait que $y_i^2 + y_j^2 = 1$; on a donc $y_i = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $y_j = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas, $f(y) = \dfrac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{4}$, il s'ensuit que l'on a nécessairement $i = 1$ et $j = n$ (maximum en y) et la conclusion en découle.

2. (a) On remarque que $\lambda_1(p) < \lambda_2(p) < \cdots < \lambda_n(p)$. Avec la question précédente, on sait que pour tout $x \in \mathcal{S}$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(p)^2 x_k^2 - \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(p) x_k^2\right]^2 \leqslant \frac{(\lambda_n(p) - \lambda_1(p))^2}{4}.$$

   Il suffit donc de faire tendre p vers l'infini et de prendre un point x où le maximum sur $\mathcal{S}$ est atteint.

   (b) Comme $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \cdots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}$, on déduit de la question précédente que l'on a encore :

$$\max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\} = \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}.$$

3. (a) La matrice A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable et on peut l'écrire sous la forme $A = {}^tPDP$ où P est une matrice orthogonale et D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A répétées avec leur ordre de multiplicité.

   (b) On peut supposer que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 = \lambda_{min}(A) \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n = \lambda_{max}(A)$. Comme la matrice P est orthogonale, on a $P(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. La formule demandée résulte alors de la question 2.(b) et du fait que :

$$\max\left\{{}^tXA^2X - \left({}^tXAX\right)^2 : x \in \mathcal{S}\right\} = \max\left\{{}^t(PX)D^2(PX) - \left({}^t(PX)D(PX)\right)^2 : x \in \mathcal{S}\right\}$$
$$= \max\left\{{}^tYD^2Y - \left({}^tYDY\right)^2 : y \in \mathcal{S}\right\} = \max\{f(y) : y \in \mathcal{S}\} = \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}.$$

   (c) D'après le cours, on a $Tr(A^2) = Tr(D^2)$ et $Tr(A) = Tr(D)$. Il suffit alors de prendre le vecteur $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ pour obtenir l'inégalité souhaitée.

Exercice 2.3

On rappelle que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres réels non entiers. On rappelle également les formules trigonométriques suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

1. Pour tout $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$, montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$.

   On pose alors $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$.

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $U_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{x+n-N}$.

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, montrer que la suite $(U_N(x))_N$ converge vers $U(x) = S(x) + \dfrac{1}{x}$.

   (b) Montrer que la fonction U ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est impaire et périodique de période 1.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose : $V(x) = \pi \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a : $V\left(\dfrac{x}{2}\right) + V\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2V(x)$.

   (b) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} - V(x)$ se prolonge par continuité par la valeur 0 en $x = 0$.

4. Pour tout $(x, x_0) \in ([0,1[)^2$, montrer que : $|S(x) - S(x_0)| \leqslant |x - x_0| \left(\dfrac{1}{(1-x)(1-x_0)} + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)$.

5. Pour tout $x \neq 0$, on note $I(x) = \dfrac{1}{x}$. Montrer que la fonction $S + I - V$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période 1. On notera f ce prolongement.

6. On admet qu'alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2f(x) \qquad (E)$.

   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ et $x_1 \in [0,1]$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = f(x_0)$ et $f\left(\dfrac{x_1}{2^n}\right) = f(x_1)$.

   (c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \text{on a : } \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right).$$

Solution de l'exercice 2.3

1. Il y a convergence absolue car : $\left|\dfrac{1}{x+n}+\dfrac{1}{x-n}\right| = \left|\dfrac{2x}{x^2-n^2}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|2x|}{n^2}$.
2. (a) Par découpage puis décalages d'indices (respectivement $k=N-n$ et $k=n-N$) :
$$U_N(x)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{x+n-N}+\frac{1}{x}+\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{1}{x+n-N}=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{x-k}+\frac{1}{x+k}\right)\to\frac{1}{x}+S(x).$$
(b) L'imparité de $x\mapsto\dfrac{1}{x+n}+\dfrac{1}{x-n}$ donne celle de S, donc de U. Et $U(x+1)=U(x)$ car :
$$U_N(x+1)=\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{1+x+n-N}\underset{k=n+1}{=}\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{x+k-N}=U_N(x)+\frac{1}{x+N+1}-\frac{1}{x-N}\to U(x).$$
3. (a) On a $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$ et $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$, puis on utilise les formules de duplication :
$$V\left(\frac{x}{2}\right)+V\left(\frac{x+1}{2}\right)=\pi\left(\frac{\cos(\pi\frac{x}{2})}{\sin(\pi\frac{x}{2})}-\frac{\sin(\pi\frac{x}{2})}{\cos(\pi\frac{x}{2})}\right)=2\pi\left(\frac{\cos^2(\pi\frac{x}{2})-\sin^2(\pi\frac{x}{2})}{2\cos(\pi\frac{x}{2})\sin(\pi\frac{x}{2})}\right)=2V(x).$$
(b) À l'aide des développements limités de sinus et cosinus en 0 (où l'on remplace x par πx) on a :
$$\frac{1}{x}-V(x)=\frac{\sin(\pi x)-(\pi x)\cos(\pi x)}{x\sin(\pi x)}\underset{x\to0}{=}\frac{((\pi x)+o(x^2))-(\pi x)(1+o(x))}{x\sin(\pi x)}=\frac{o(x^2)}{x\sin(\pi x)}\sim\frac{o(x^2)}{\pi x^2}\to0.$$
4.
$$\begin{aligned}&|S(x)-S(x_0)|\\
=&\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x_0+n}\right)+\left(\frac{1}{x-n}-\frac{1}{x_0-n}\right)\right|=|x-x_0|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+n)(x_0+n)}+\frac{1}{(n-x)(n-x_0)}\right)\\
=&|x-x_0|\times\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)(x_0+n)}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)(n-x_0)}+\frac{1}{(1-x)(1-x_0)}\right)\\
\leqslant&|x-x_0|\left(\frac{1}{(1-x)(1-x_0)}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)\qquad\text{car}(x+n)(x_0+n)\geqslant n^2\text{ et }(n-x)(n-x_0)\geqslant(n-1)^2.\end{aligned}$$
5. Pour $x_0\in[0,1[$ fixé, la question 4 donne $\lim\limits_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$ *i.e.* S est continue sur $[0,1[$.
Comme $I-V$ est continue sur $]0,1[$ et converge vers 0 en 0^+, par somme on en déduit que $S+I-V$ est continue sur $]0,1[$ et converge vers 0 en 0^+.
Or, sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a $S+I-V=U+V$, avec U et V 1-périodiques.
Donc $S+I-V$ est continue sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ et converge vers 0 en n^+, pour tout $n\in\mathbb{Z}$.
De plus $U+V$ est impaire car U et V le sont, donc $S+I-V$ converge vers 0 en n^- pour tout $n\in\mathbb{Z}$.
Donc $S+I-V$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ en prenant $f(x)=0$, si $x\in\mathbb{Z}$.
6. (a) Comme f est continue sur $[0,1]$ elle a un maximum (resp. minimum) ; on étend sur $\mathbb{R}$ par périodicité.
(b) La relation $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=f(x_0)$ se montre par récurrence sur $n\geqslant0$; le cas $n=0$ est évident.
Si c'est vrai pour n, prendre $x=\dfrac{x_0}{2^n}$ dans (E) donne :
$$f(x_0)\underset{6a}{\geqslant}f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)\overset{(E)}{=}2f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\right)\underset{HR}{=}2f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\right)\underset{6a}{\geqslant}2f(x_0)-f(x_0)=f(x_0).$$
Et de même avec x_1 en changeant le sens des inégalités.
(c) Comme f continue en 0, en faisant tendre n vers $+\infty$, on a $\max f=\min f=f(0)=0$, donc $f=0$.
Ceci donne le résultat voulu.

Exercice 2.4

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^k \ln x \,\mathrm{d}x$ et la calculer.
   On la notera J_k.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x) \ln x \,\mathrm{d}x$.
   On la notera I_n.
3. Montrer la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)^2}$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ (on pourra utiliser un télescopage).
4. (a) Trouver une suite (u_n) d'éléments de $]0,1[$ qui tend vers 1 et telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0$.
   (b) Soit (u_n) une suite qui vérifie les conditions de la question précédente. Montrer que :
   $$|I_n| \leqslant (u_n)^n \int_0^{u_n} \ln(1-x) \ln x \,\mathrm{d}x + \int_{u_n}^1 \ln(1-x) \ln x \,\mathrm{d}x.$$
   (c) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.
5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1[,\ \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left| I_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{J_k}{k} \right| \leqslant I_n$.
6. Calculer I_0.

Solution de l'exercice 2.4

1. La fonction $x \mapsto x^k \ln x$ est continue sur $]0,1]$. Par intégration par parties avec $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v'(x) = x^k$, $v(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ (u, v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$), on a :

$$\int_X^1 x^k \ln x \; \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x \right]_X^1 - \int_X^1 \frac{x^k}{k+1} \; \mathrm{d}x = -\frac{X^{k+1}}{k+1} \ln X - \frac{1 - X^{k+1}}{(k+1)^2} \underset{X \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{(k+1)^2},$$

par croissances comparées. Donc $\boxed{J_k = -\dfrac{1}{(k+1)^2}.}$

2. La fonction $x \mapsto x^n \ln x \ln(1-x)$ est continue sur $]0,1[$; l'intégrale I_n est faussement impropre car :
   - en 0, on a : $x^n \ln x \ln(1-x) \underset{x \to 0}{\sim} -x^{n+1} \ln x \to 0$.
   - en 1, on a : $x^n \ln x \ln(1-x) \underset{x \to 1}{\sim} (x-1) \ln(1-x) \to 0$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{k(k+1)^2} = \dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)^2} = \dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

   Donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + 1 = 1 - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \boxed{-\frac{\pi^2}{6} + 2.}$

4. (a) On peut prendre, par exemple, $u_n = \exp\left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

   (b) On a $|I_n| = I_n$, puis on utilise la relation de Chasles, puis la croissance de l'intégration car :

   $$x^n \ln x \ln(1-x) \leqslant u_n^n \ln x \ln(1-x) \text{ sur } [0, u_n] \qquad \text{et} \qquad x^n \ln x \ln(1-x) \leqslant \ln x \ln(1-x) \text{ sur } [u_n, 1].$$

   (c) Comme l'intégrale I_0 converge (cf. question 2), on a :

   $$\lim_{n \to +\infty} \int_{u_n}^1 \ln x \ln(1-x) \; \mathrm{d}x = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \int_0^{u_n} \ln x \ln(1-x) \; \mathrm{d}x = I_0.$$

   Donc, d'après la question précédente, par théorème d'encadrement, on a : $\lim(I_n) = 0$.

5. (a) On intègre sur $[0, x]$ ($x \in [0,1[$) la relation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$.

   (b) Pour tout $x \in [0,1[$ et tout $t \in [0,x]$, on a : $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1-t} \leqslant \dfrac{x^n}{1-t}$.

   Donc : $\displaystyle\left| \ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \right| = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \; \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{1-t} \; \mathrm{d}t = -x^n \ln(1-x)$.

   En multipliant par $-\ln x$ et en intégrant sur $]0,1]$, par croissance de l'intégration (où tout converge par théorème de comparaison), on a : $\displaystyle\int_0^1 \left| \ln(1-x) \ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k \ln x}{k} \right| \; \mathrm{d}x \leqslant I_n$.

   Donc, par inégalité triangulaire pour les intégrales, on a :

   $$\left| I_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{J_k}{k} \right| = \left| \int_0^1 \ln(1-x) \ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k \ln x}{k} \; \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^1 \left| \ln(1-x) \ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k \ln x}{k} \right| \; \mathrm{d}x \leqslant I_n.$$

6. D'après les questions précédentes, par théorème d'encadrement, on a :

$$I_0 = -\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{J_k}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2.5

1. Soit a et b deux réels distincts fixés et $m \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^m$ par :

$$f(x_1, \cdots, x_m) = (a-b)^2 + \sum_{i=1}^{m}(x_i - a)^2 + \sum_{i=1}^{m}(x_i - b)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m}(x_i - x_j)^2.$$

Justifier le fait que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^m$. Déterminer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^m$.

2. Pour tout point $y \in \mathbb{R}^m$, le réel $\|y\|$ désignera la norme euclidienne canonique de y.
   (a) Notons u (resp. v) le point de $\mathbb{R}^m$ dont toutes les coordonnées sont égales à a (resp. à b). Pour tout point x de $\mathbb{R}^m$, montrer que

$$f(x) \geqslant \|x-u\|^2 + \|x-v\|^2 \geqslant (\|x\| - \|u\|)^2 + (\|x\| - \|v\|)^2.$$

   (b) En déduire qu'il existe un réel strictement positif R tel que $f(x) > f(0)$ pour tout point x de $\mathbb{R}^m$ tel que $\|x\| > R$.
   (c) Prouver que :

$$\inf_{\|x\| \leqslant R} f(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^m} f(x).$$

   On commencera par justifier l'existence de ces deux bornes inférieures.
   (d) En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^m$ qui est atteint.
   (e) Montrer qu'il existe un unique point de $\mathbb{R}^m$ où ce minimum global est atteint et calculer ce minimum.

3. Soit $n \geqslant 3$. On considère n réels $y_1, \cdots, y_n$.
   (a) Justifier l'existence de deux entiers k_0 et k_1 tels que :

$$|y_{k_0} - y_{k_1}| = \sup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |y_i - y_j|.$$

   (b) En utilisant la question 2, prouver l'inégalité suivante :

$$\max_{1 \leqslant k < l \leqslant n} |y_k - y_l|^2 \leqslant \frac{2}{n} \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (y_k - y_l)^2.$$

   (c) Étudier les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Solution de l'exercice 2.5

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^m$ car polynomiale. Soit $k \in \{1, \cdots, m\}$; en isolant x_k dans la somme double, il vient :

$$\begin{aligned}
\partial_k(f) &= 2(x_k - a) + 2(x_k - b) + 2\sum_{i=1}^{k-1}(x_k - x_i) - 2\sum_{j=k+1}^{m}(x_j - x_k)\\
&= 2\left[[2x_k - (a+b)] + \sum_{i=1}^{m}(x_k - x_i)\right]\\
&= 2\left[(m+2)x_k - (a+b) - \sum_{i=1}^{m} x_i\right].
\end{aligned}$$

Ce qui fournit les composantes du gradient de f.

2. (a) La première inégalité découle du fait que f est la somme de $\|x-u\|^2 + \|x-v\|^2$ et de termes positifs. La deuxième se ramène après un développement à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (on peut aussi utiliser l'inégalité triangulaire inverse).

   (b) On pose $g(||x||) = (\|x\| - \|u\|)^2 + (\|x\| - \|v\|)^2$. Comme $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} g(||x||) = +\infty$, on voit qu'il existe bien un réel strictement positif R tel que $f(x) > f(0)$ pour tout point x de $\mathbb{R}^m$ vérifiant $\|x\| > R$.

   (c) Comme f est minorée par 0, les deux bornes inférieures existent. Avec la question précédente, si $\|x\| > R$ on a $f(x) > f(0) \geqslant \inf\limits_{\|x\|\leqslant R} f(x)$, par suite $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^m} f(x) \geqslant \inf\limits_{\|x\|\leqslant R} f(x)$, d'où l'égalité.

   (d) La fonction f est continue sur la boule unité qui est fermée et bornée ; d'après le cours elle admet un minimum global sur cette boule. Celui-ci est aussi un minimum global sur $\mathbb{R}^m$ d'après la question précédente.

   (e) Soit x un point de $\mathbb{R}^m$ où ce minimum global est atteint. Le cours nous dit que le gradient de f doit s'annuler en ce point. Pour tout $k \in \{1, \cdots, m\}$, on a donc $x_k = 1/(m+2)[(a+b) + \sum\limits_{i=1}^{m} x_i] = t$ (indépendant de k). En remplaçant x_i par t dans la deuxième égalité, on obtient $t = (a+b)/2$. Il s'ensuit que f atteint son minimum global en un unique point $x = ((a+b)/2, \cdots, (a+b)/2)$ et que ce dernier vaut

$$f\left((a+b)/2, \cdots, (a+b)/2\right) = (a-b)^2 + \sum_{k=1}^{m}(\frac{a+b}{2} - a)^2 + \sum_{k=1}^{m}(\frac{a+b}{2} - b)^2 = \left(\frac{m}{2} + 1\right)(a-b)^2.$$

3. Soit $n \geqslant 3$. On considère n réels $y_1, \cdots, y_n$.

   (a) On prend la borne supérieure pour un ensemble fini, c'est donc un maximum qui est atteint pour les composantes correspondant à deux entiers k_0 et k_1 de $\{1, \cdots, n\}$.

   (b) On pose $a = y_{k_0}$, $b = y_{k_1}$, $m = n-2$ et $x = (x_1, \cdots, x_m)$ est construit avec les composantes de y_i restantes ($i \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{k_0, k_1\}$) rangées dans le même ordre (si on veut). Si $a = b$, il n'y a rien à démontrer car on a 0 des deux cotés de l'inégalité. Sinon, on observe alors que $\sum\limits_{1\leqslant k<l\leqslant n} (y_k - y_l)^2 = f(x)$ et il suffit alors d'utiliser la question 2.(e).

   (c) Comme on l'a remarqué dans la question précédente, on a un premier cas d'égalité lorsque toutes les composantes sont égales. Avec 2.(e), le deuxième correspond obligatoirement au cas où il existe un point y ayant deux composantes distinctes y_{k_0} et y_{k_1} avec $|y_{k_0} - y_{k_1}| = \max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} |y_i - y_j|$ et où toutes les autres composantes sont égales à $(y_{k_0} + y_{k_1})/2$.

Exercice 2.6

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On note I le segment $[a, b]$. On considère une fonction f continue sur I et à valeurs dans $[0, 1]$ et une fonction g croissante et continue sur I.

1. Pour $x \in I$, on pose :

$$\varphi(x) = \int_x^b f(t)dt \text{ et } \psi(x) = \int_{b-\varphi(x)}^b g(t)dt - \int_x^b f(t)g(t)dt.$$

   (a) Vérifier que φ et ψ sont bien définies.

   (b) Justifier la dérivabilité de φ et donner sa dérivée.

   (c) Montrer que ψ est dérivable et déterminer sa dérivée.

   (d) Étudier les variations de ψ.

   (e) En déduire que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant \int_{b-\varphi(a)}^b g(t)dt.$$

2. On considère une fonction h qui est croissante et continue sur $[0, 1]$ et qui prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 (h(t))^n dt.$$

   (a) Vérifier que u_n est bien définie et montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$.

   (c) À l'aide de la question 1, prouver que :

$$\ell = \int_{1-\ell}^1 h(t)dt.$$

   (d) Montrer que la fonction h est constante sur $[1 - \ell, 1]$. Qu'en déduit-on si on suppose que h est strictement croissante sur $[0, 1]$?

3. On considère une fonction h qui est strictement croissante et continue sur $[0, 1]$ et qui prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Justifier l'existence de l'espérance $E(h(X)^n)$ pour $n \geqslant 1$. Que peut-on dire de la suite de terme général $E(h(X)^n)$?

Solution de l'exercice 2.6

1. (a) Comme $x \in I$ et f est continue, il est clair que φ est bien définie. Compte tenu du fait que les intégrandes sont des fonctions continues sur I, pour la fonction ψ il suffit de vérifier que $b-\varphi(x) \in I$. La fonction f continue sur I et à valeurs dans $[0,1]$; par croissance de l'intégrale on en déduit que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant b-x \leqslant b-a$. Par suite, on a bien $a \leqslant b-\varphi(x) \leqslant b$.

   (b) Soit F une primitive de f sur I. On a alors $\varphi(x) = F(b) - F(x)$, ce qui montre que φ est dérivable et que $\varphi'(x) = -F'(x) = -f(x)$.

   (c) Soit G (resp. L) une primitive de la fonction continue g (resp. fg). On a $\psi(x) = G(b) - G(b - \varphi(x)) - L(b) + L(x)$. Par somme et composition, on voit que ψ est dérivable et que $\psi'(x) = -(-\varphi'(x))G'(b-\varphi(x)) + L'(x) = -f(x)g(b-\varphi(x)) + f(x)g(x) = f(x)\,[g(x) - g(b-\varphi(x))]$.

   (d) On a vu en 1. que $\varphi(x) \leqslant b-x$; on a donc $x \leqslant b-\varphi(x)$. Or, la fonction f est positive et g est croissante ; il en résulte que $\psi'(x) \leqslant 0$. La fonction ψ et donc décroissante.

   (e) La décroissance de ψ sur I entraîne que $\psi(b) = 0 \leqslant \psi(a)$, ce qui donne exactement l'inégalité demandée.

2. (a) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car la fonction h^n est continue (par composition). Comme h est à valeur dans $[0,1]$, on a $0 \leqslant h(t)^{n+1} \leqslant h(t)^n \leqslant 1$ pour tout $t \in I = [0,1]$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

   (b) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive , elle converge donc vers une limite $\ell \in [0,1]$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in I = [0,1]$ on pose $f(t) = h(t)^n$ et $g(t) = h(t)$. Les hypothèse de la question 1 sont vérifiées, on a donc :

   $$u_{n+1} \leqslant \int_{1-u_n}^{1} h(t)dt.$$

   Par ailleurs, comme $h(t) \leqslant 1$, on a : $\int_{1-u_n}^{1} h(t)dt \leqslant \int_{1-u_n}^{1} dt = u_n$.
   Alors un passage à la limite dans ces deux inégalité larges quand n tend vers $+\infty$ fournit l'égalité demandée.

   (d) On a donc :

   $$\int_{1-\ell}^{1} (1-h(t))dt = l - \int_{1-\ell}^{1} h(t)dt = 0.$$

   L'intégrande étant une fonction continue et positive, elle doit donc être nulle sur $[1-\ell, 1]$. Par suite, la fonction h est constante et égale à 1 sur $[1-l, 1]$. Le fait que h est strictement croissante sur $[0,1]$ force ℓ à être nul, et par conséquent la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ décroît vers 0 dans ce cas.

3. Comme $0 \leqslant h(t)^n \leqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$, l'existence de l'espérance $E(h(X)^n)$ est donnée par cette domination. Le théorème de transfert implique l'égalité :

   $$E(h(X)^n) = \int_0^1 h(t)^n dt.$$

   Comme h est strictement croissante, continue sur $[0,1]$ et prend ses valeurs dans $[0,1]$, la question précédente nous dit que la suite de terme général $E(h(X)^n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2.7

Soit a et b deux réels positifs. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence (R) suivante :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ et pour tout entier } n \geqslant 0 : u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \qquad (R).$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $v_n \leqslant u_n$, $\ u_{n+1} \leqslant u_n$ et $v_n \leqslant v_{n+1}$.

   (b) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite qui est de plus positive. Cette limite sera **notée $M(a,b)$ dans le reste de l'exercice.** La fonction M est donc définie sur

   $$I = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0\}$$

   et à tout couple de conditions initiales $(u_0 = a, v_0 = b) \in I$, elle associe la limite $M(a,b)$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la relation de récurrence (R).
3. (a) Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour tout réel $a \geqslant 0$.

   (b) Montrer que pour $(a,b) \in I$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :

   $$M(ta, tb) = t\, M(a,b).$$

   (c) Prouver que pour $(a,b) \in I$, on a :

   $$M\Big(\frac{a+b}{2}, \sqrt{a\,b}\Big) = M(a,b).$$

   (d) Démontrer que pour $(a,b) \in I$, on a :

   $$M(a,b) = M(b,a).$$
4. Écrire une fonction Scilab qui prend en entrée deux réels positifs a et b et un réel strictement positif `eps` et qui renvoie une valeur approchée `M` de $M(a,b)$ à `eps` près, autrement dit `M` doit satisfaire $|M(a,b) - \mathtt{M}| \leqslant \mathtt{eps}$.
5. Soit $(a,b) \in I$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par la relation de récurrence (R). Pour tout entier n positif, on pose $c_n = u_n - v_n$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a :

   $$0 \leqslant c_{n+1} \leqslant \frac{c_n^2}{8\sqrt{a\,b}}$$

Solution de l'exercice 2.7

1. Pour que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient bien définies par la relation de récurrence (R), il faut et il suffit que le produit u_nv_n soit positif pour tout entier $n \geqslant 0$. Montrons par récurrence que : "$P(n)$: $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$" pour tout entier $n \geqslant 0$, ce qui impliquera que $u_nv_n \geqslant 0$. $P(0)$ est vraie car $u_0 = a \geqslant 0$ et $v_0 = b \geqslant 0$. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geqslant 0$, on a alors $u_{n+1} = (u_n + v_n)/2 \geqslant 0$ et $u_nv_n \geqslant 0$, ainsi $v_{n+1} = \sqrt{u_nv_n} \geqslant 0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
2. (a) Soit $n \geqslant 0$. Comme u_n et v_n sont positifs, il s'ensuit, $0 \leqslant (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 = u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n}$ et il vient $\sqrt{u_nv_n} \leqslant (u_n + v_n)/2$. On en déduit que $v_{n+1} \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, on a $v_n \leqslant u_n$ pour $n \geqslant 1$. Soit $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (u_n + v_n)/2 \leqslant (u_n + u_n)/2 = u_n$ (car $v_n \leqslant u_n$). Enfin, par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$, $v_{n+1} = \sqrt{u_nv_n} = \sqrt{u_n}\sqrt{v_n} \geqslant \sqrt{v_n}\sqrt{v_n} = v_n$ (car $v_n \leqslant u_n$).

   (b) D'après les questions 1) et 2)(a), on a pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. On en déduit d'une part que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle est minorée par 0 donc elle converge vers un réel $l \geqslant 0$. D'autre part, la suite (v_n) est croissante, positive et majorée par u_1 à partir du rang 1 donc elle converge vers un réel $\tilde{l} \geqslant 0$. Enfin, par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = (u_n + v_n)/2$, il découle que $l = (l + \tilde{l})/2$ et donc que $l = \tilde{l} = M(a, b) \geqslant 0$.
3. (a) Soit $a \geqslant 0$. Si $b = a$, on montre par une récurrence immédiate que $u_n = v_n = a$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi par passage à la limite, on a $M(a, a) = a$. Maintenant si $b = 0$, on a par récurrence immédiate $v_n = 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Ainsi par passage à la limite, on obtient $M(a, 0) = 0$.

   (b) Soit $(a, b) \in I$. On appelle $(\tilde{u}_n)$ et $(\tilde{v}_n)$ les suites associées aux conditions initiales $\tilde{u}_0 = t\,a \geqslant 0$ et $\tilde{v}_0 = t\,b \geqslant 0$ (car $t \geqslant 0$) par (R). On peut alors les comparer à (u_n) et (v_n) qui ont pour conditions initiales $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Montrons par récurrence que "$P(n)$: $\tilde{u}_n = t\,u_n$ et $\tilde{v}_n = t\,v_n$" pour $n \geqslant 0$. $P(0)$ est vraie par définition des condtions initiales. Supposons $P(n)$ pour un entier $n \geqslant 0$. On a alors $\tilde{u}_{n+1} = (\tilde{u}_n + \tilde{v}_n)/2 = t(u_n + v_n)/2$ (d'après $P(n)$) et ainsi $\tilde{u}_{n+1} = tu_{n+1}$. On a aussi en utilisant $P(n)$, (R) et le fait que $t \geqslant 0$: $\tilde{v}_{n+1} = \sqrt{\tilde{u}_n\,\tilde{v}_n} = \sqrt{t^2u_n\,v_n} = t\sqrt{u_n\,v_n} = tv_{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie. En passant à la limite sur les relations $\tilde{u}_n = t\,u_n$ et $\tilde{v}_n = t\,v_n$, il vient $M(ta, tb) = t\,M(a, b)$.

   (c) Soit $(a, b) \in I$. On appelle $(\tilde{u}_n)$ et $(\tilde{v}_n)$ les suites associées aux conditions initiales $\tilde{u}_0 = (a + b)/2 = u_1 \geqslant 0$ et $\tilde{v}_0 = \sqrt{a\,b} = v_1 \geqslant 0$. Par récurrence immédiate, on a $\tilde{u}_n = u_{n+1}$ et $\tilde{v}_n = v_{n+1}$ et donc par passage à la limite, il vient : $M((a + b)/2, \sqrt{a\,b}) = M(a, b)$.

   (d) D'aprés la question 3)(c), on a $M(b, a) = M\big(\frac{b+a}{2}, \sqrt{b\,a}\big) = M(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) = M(a, b)$.
4. D'après 2) (a), (u_n) et (v_n) sont respectivement décroissante et croissante à partir du rang 1 et $v_n \leqslant u_n$ pour $n \geqslant 1$. Il vient donc $v_n \leqslant M(a, b) \leqslant u_n$ pour $n \geqslant 1$. On conclut que $|M(a, b) - v_n| \leqslant u_n - v_n$. Cette dernière inégalité est utilisée comme critère d'arrêt dans la procédure.

```
function M=moyennearithmgeo(a,b,eps)
    u=(a+b)/2;
    v=sqrt(a*b);\smallskip
    while(u-v> eps)
        aux1=u;
        aux2=v;
        u=(aux1+aux2)/2;
        v=sqrt(aux1 *aux2);
    end
    M=v;
endfunction
```

5. D'après la question 2)(a), on a $v_{n+1} \leqslant u_{n+1}$ pour tout n positif. Donc, on a $0 \leqslant c_{n+1}$. De plus, on a d'après la question 2)(a), $u_{n+1} + v_{n+1} \geqslant 2v_{n+1} \geqslant 2v_1 = 2\sqrt{ab} > 0$ (car (v_n) est décroissante à partir du rang 1 et $a, b > 0$). Ainsi, on obtient :

$$c_{n+1} = \Big(\frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_nv_n}\Big)\frac{\big(\frac{u_n+v_n}{2} + \sqrt{u_nv_n}\big)}{u_{n+1} + v_{n+1}} \leqslant \frac{\big(\frac{u_n+v_n}{2}\big)^2 - u_nv_n}{2\sqrt{a\,b}} \leqslant \frac{\frac{1}{4}(u_n^2 + v_n^2) - \frac{1}{2}u_nv_n}{2\sqrt{ab}} \leqslant \frac{c_n^2}{8\sqrt{a\,b}}.$$

Exercice 2.8

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On pose, pour tout x réel :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{(x-t)} g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout x réel, soit φ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \varphi_x(\lambda) = \int_x^{+\infty} \big(g(t) - \lambda\,\mathrm{e}^{(x-t)}\big)^2\,\mathrm{d}t\,.$$

En considérant le signe de la fonction φ_x sur $\mathbb{R}$, établir l'inégalité :

$$\Big(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{(x-t)} g(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2 \leqslant \Big(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{2(x-t)}\,\mathrm{d}t\Big) \times \Big(\int_x^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,.$$

   (b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout x réel, $f'(x) = f(x) - g(x)$.
4. (a) En utilisant la question précédente, montrer que pour tout a réel et tout $x \geqslant a$, on a :

$$\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \Big(\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \Big(\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} + \frac{f^2(x)}{2}$$

   (b) En déduire l'inégalité :

$$\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t + f^2(x)$$

   (c) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution de l'exercice 2.8

1. Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{x-t}$ et g sont de carré intégrable sur $[x, +\infty[$ ($\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt$ converge), donc leur produit est intégrable d'après l'inégalité $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
2. (a) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (la fonction φ_x est positive pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et est un trinôme en λ, donc, le discriminant est négatif ou nul) on a :

$$|f(x)| \leqslant \left(\int_x^{+\infty} e^{2(x-t)}dt\right)^{1/2} \left(\int_x^{+\infty} g^2(t)dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_x^{+\infty} g^2(t)dt\right)^{1/2}$$

   Comme g est de carré intégrable, alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} g^2(t)dt \to 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (b) On remarque que, pour tout x réel, on a : $f(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)dt$. De plus, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)dt - \int_0^{x} \mathrm{e}^{-t} g(t)dt$. Ainsi, la fonction f est dérivable et, en utilisant la dérivée d'un produit, on obtient :
   $f'(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)dt - \mathrm{e}^x \left(\mathrm{e}^{-x} g(x)\right) = f(x) - g(x)$.
3. (a) Les fonctions f et f' étant continues, en multipliant la relation précédente par f et en intégrant sur le segment $[a, x]$, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_a^x f^2(t)dt - \int_a^x f(t)g(t)dt = \int_a^x f(t)f'(t)dt = \left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_a^x = \frac{f^2(x)}{2} - \frac{f^2(a)}{2} \leqslant \frac{f^2(x)}{2} \\
\Rightarrow \int_a^x f^2(t)dt \leqslant \int_a^x f(t)g(t)dt + \frac{f^2(x)}{2} \\
\Rightarrow \int_a^x f^2(t)dt \leqslant \left(\int_a^x f^2(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_a^x g^2(t)dt\right)^{1/2} + \frac{f^2(x)}{2}
\end{aligned}$$

   (b) Rappelons que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$. Ainsi, en utilisant l'inégalité précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^x f^2(t)dt - \frac{f^2(x)}{2} &\leqslant \left(\int_a^x f^2(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_a^x g^2(t)dt\right)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left[\int_a^x f^2(t)dt + \int_a^x g^2(t)dt\right] \\
\frac{1}{2}\int_a^x f^2(t)dt &\leqslant \frac{1}{2}\int_a^x g^2(t)dt + \frac{f^2(x)}{2}
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\displaystyle\int_a^x f^2(t)dt \leqslant \int_a^x g^2(t)dt + f^2(x)$.

   (c) En fixant a dans l'inégalité précédente, pour tout $x \geqslant 0$, on a : $\displaystyle\int_a^x f^2(t)dt \leqslant \int_a^x g^2(t)dt + f^2(x)$.

   Comme g est de carré intégrable et $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$, alors $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f^2(t)dt$ est bornée donc convergente et, en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$ dans l'inégalité, on obtient : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^2(t)dt \leqslant \int_a^{+\infty} g^2(t)dt$.

   Il reste à faire tendre a vers $-\infty$ pour obtenir le résultat demandé.

Exercice 2.9

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On dit que le produit $\prod_n u_n$ converge si la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$ admet une limite non nulle ℓ, et l'on note alors :

$$\ell = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \cdots$$

1. Dans cette question, on suppose que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :
   (a) le produit $\prod_n (1+u_n)$ converge ;
   (b) la série $\sum_n \ln(1+u_n)$ converge ;
   (c) la série $\sum_n u_n$ converge.
2. Dans cette question, la suite $(u_n)_n$ est à valeurs strictement supérieures à -1 et est telle que la série $\sum_n u_n^2$ converge.
   (a) Montrer qu'il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\forall n \geqslant N,\ |\ln(1+u_n) - u_n| < Cu_n^2$.
   (b) En déduire que le produit $\prod_n (1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_n u_n$ converge.
3. Dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ avec $x \in]0,\pi[$ et $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = v_n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \dfrac{\sin x}{2^n}$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.
   (b) En déduire l'égalité :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \cdots$$

Solution de l'exercice 2.9

1. Par stricte positivité de u_n et par continuité de la fonction logarithme :

   a) $\iff$ c) : $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)=\lambda\neq 0$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln(1+u_k)=\ln\lambda$.

   c) $\Rightarrow$ b) : comme $u_n>0$, $\ln(1+u_n)\leqslant u_n$.

   b) $\Rightarrow$ c) : Si $\sum\ln(1+u_n)$ converge, alors $\ln(1+u_n)\to 0$, donc $u_n\to 0$. Donc $\ln(1+u_n)\sim u_n$.

2. (a) Comme $\sum u_n^2$ converge, la suite (u_n) tend vers 0.

   Par ailleurs le développement limité de $\ln(x+1)$ à l'ordre 2 donne : $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, donc le quotient est borné (par $C>0$) au voisinage de 0.
   Autre idée : majorer le reste intégrale de la formule de Taylor pour $\ln(1+x)$.

   (b) Donc, par théorème de comparaison la série $\sum\ln(1+u_n)-u_n$ converge absolument, donc converge. Comme la différence des deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n\ln(1+u_n)$ converge, elles sont de même nature, et cette dernière est de même nature que le produit $\prod_n(1+u_n)$ ($u_n>0$ ne sert pas là dans Q1).

3. (a) Comme $\sin x=2\sin(x/2)\cos(x/2)$, il vient, en posant $v_n=\prod_{k=1}^{n}u_k$:

$$\begin{aligned}
w_n=v_n\times\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)&=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\times\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\\
&=\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\times\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\\
&=\frac{1}{2}w_{n-1}
\end{aligned}$$

   La suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, de premier terme $w_1=\cos(x/2)\sin(x/2)=\dfrac{1}{2}\sin x$ et

$$w_n=\frac{1}{2^{n-1}}w_1=\frac{\sin x}{2^n}\quad\text{donc}\quad v_n=\frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\sin x}{x}$$

   (b) On doit montrer que : $\dfrac{2}{\pi}=x_1\times x_2\times x_3\times\cdots$,
   où la suite (x_k) est définie par $x_{k+1}=\alpha_{k+1}/2$ avec la suite (α_k) définie par récurrence par $\alpha_1=\sqrt{2}$ et $\alpha_{k+1}=\sqrt{2+\alpha_k}$.
   Or par récurrence sur $k\geqslant 1$ on obtient que $x_k=\cos(\pi/2^k)$. En effet l'initialisation est évidente et si c'est vrai à l'ordre k, alors, comme $\cos(2x)=2\cos^2x-1$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1}^2=2+\alpha_k=2(1+\cos(\pi/2^k))=4\cos^2(\pi/2^{k+1})&\implies\alpha_{k+1}=2\cos(\pi/2^{k+1})\\
&\iff x_{k+1}=\cos(\pi/2^{k+1}).
\end{aligned}$$

   Le résultat voulu s'obtient alors avec la question précédente en prenant $x=\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2.10

Dans tout l'exercice, α est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$ est convergente. On pose alors :

$$\forall\, x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\big(-xt^\alpha\big)dt$ est convergente. On pose alors :

$$\forall\, x > 0,\ I(\alpha, x) = \int_0^{+\infty} \exp\big(-xt^\alpha\big)dt$$

   (b) À l'aide du changement de variable $u = xt^\alpha$ dont on justifiera la validité, montrer que

$$I(\alpha, x) = C\,x^{-\frac{1}{\alpha}}$$

   où C est une constante strictement positive que l'on déterminera en fonction de α.

2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, la série de terme général $\exp\big(-xn^\alpha\big)$ est convergente. On pose alors :

$$\forall\, x > 0,\ S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\big(-xn^\alpha\big)$$

   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} S_\alpha(x)$.

3. (a) Établir pour tout $x > 0$, l'encadrement : $S_\alpha(x) - 1 \leqslant I(\alpha, x) \leqslant S_\alpha(x)$.

   (b) Montrer qu'au voisinage de 0, on a : $S_\alpha(x) \sim I(\alpha, x)$.

Solution de l'exercice 2.10

1. (a) Soit $\alpha > 0$ et $x > 0$. La fonction $t \to \mathrm{e}^{-xt^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   Au voisinage de $+\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{-xt^\alpha} = 0$.

   (b) Le changement de variable $u = xt^\alpha$ de classe C^1, str. croissant, bijectif de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, donne :

$$I(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} u^{1/\alpha - 1}\mathrm{e}^{-u} du = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Longrightarrow C = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

2. (a) Comme précédemment, comme $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\mathrm{e}^{-xn^\alpha} = 0$.

   (b) Comme S_α est croissante, la limite existe est finie au vaut $+\infty$. Par l'absurde, si elle est finie, comme $\mathrm{e}^{-xn^\alpha} > 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-xn^\alpha} \Rightarrow \lim_{x\to 0} S_\alpha(x) \geqslant N + 1$$

   Comme c'est vrai pour tout N, on en déduit $\lim\limits_{x\to 0} S_\alpha(x) = +\infty$, ce qui est absurde. Donc $\lim\limits_{x\to 0} S_\alpha(x) = +\infty$.

3. (a) On utilise une comparaison série/intégrale avec $f_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-xt^\alpha}$.
   La fonction f est décroissante de $\mathbb{R}^+$ sur $]0, 1]$.

   (b) Il vient (classique) :

$$\forall\, x > 0,\ S_\alpha(x) - 1 \leqslant I(\alpha, x) \leqslant S_\alpha(x) \Longrightarrow S_\alpha(x) \sim \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^\alpha}\, dt = I(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Exercice 2.11

Dans cet exercice, α est un réel de $]0,1]$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$$

1. Montrer que $S_n(\alpha) = \dfrac{1}{n^{2\alpha-1}} \times \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k/n)^\alpha (1-k/n)^\alpha}$.
2. Dans cette question $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que $\dfrac{1}{k(n-k)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n-k}\right)$.
   (b) En déduire un équivalent de $S_n(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   On suppose désormais que $\alpha \in]0,1[$.
3. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\alpha}$ est convergente.
   (b) Étudier les variations de $f : x \to \dfrac{1}{x^\alpha(1-x)^\alpha}$ sur $]0,1[$.
4. En l'encadrant à l'aide d'intégrales, montrer que $S_n(\alpha)$ est équivalent à $\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}} \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 2.11

1. Question évidente.
2. (a) La décomposition est donnée : il suffit de la vérifier.

   (b) On a alors :

$$S_n(1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k}\right) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \sim \frac{2\ln n}{n}$$

3. (a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\alpha}$ est convergente, par critère de Riemann en 0 et en 1.

   (b) La dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{\alpha(2x-1)}{(x(1-x))^{\alpha+1}}$ qui est du signe de $2x-1$. Elle est décroissante sur $]0, 1/2]$, puis croissante sur $[1/2, 1[$ et admet un minimum en $1/2$ qui vaut 4^α.
4. On effectue une comparaison série/intégrale sur chacun de ces intervalles. Pour plus de clarté, on suppose que n est pair (on n'aura pas à écrire des parties entières...) et on pose $n = 2p$.
   - Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, $k/n \leqslant t \leqslant (k+1)/n \Rightarrow f((k+1)/n) \leqslant f(t) \leqslant f(k/n)$ et

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f((k+1)/n)dt \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(k/n)dt$$

   soit,

$$\frac{1}{n}f((k+1)/n) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}f(k/n)$$

   On somme, et par la relation de Chasles, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p-1} f((k+1)/n) \leqslant \int_{1/n}^{1/2} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p-1} f(k/n)$$

   - Pour $k \in [\![p, 2p]\!]$, le même type de raisonnement donne :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=p}^{n-1} f(k/n) \leqslant \int_{1/2}^{1-1/n} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=p}^{n-1} f((k+1)/n)$$

   On somme ces inégalités, puis en réindexant, on obtient $S_n(\alpha)$ équivalent à $\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\alpha}$.

Exercice 2.12

Soit $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x}$.

1. (a) Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes telle que pour tout $n \geqslant 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
   (on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n).
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, P_n est un polynôme unitaire de degré n dont les coefficients sont des entiers naturels.
2. Montrer que pour tout $x \in I$, on a : $2f'(x) = f^2(x) + 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.
   (a) Montrer que $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et que pour $n \geqslant 1$, on a :
   $$2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$$
   (b) À l'aide d'une formule de Taylor, montrer que pour $x \in [0, \pi/2[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ converge.
   (c) On note $g(x)$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$; on admet que g est dérivable sur $[0, \pi/2[$ et que pour tout $x \in [0, \pi/2[$, on a $2g'(x) = g^2(x) + 1$.
   Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2[$, on a $f(x) = g(x)$.

Solution de l'exercice 2.12

1. (a) On obtient, pour $x \in I$: $f'(x) = \dfrac{1+\sin x}{(\cos x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{(\cos x)^3}$.
La fonction f est clairement de classe C^∞ sur I. La propriété à démontrer (existence d'un polynôme P_n) est vraie au rang 0 avec $P_0 = X + 1$ et, si elle est vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$, alors,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(1-\sin^2 x)P_n'(\sin x) + (n+1)\sin(x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$

où P_{n+1} est le polynôme $P_{n+1} = (n+1)XP_n + (1-X^2)P_n'$. On a alors $P_0 = P_1 = X+1$, $P_2 = X^2 + 2X + 1$.
Notons que l'unicité du polynôme P_n est immédiate par l'argument classique : un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

(b) La propriété à démontrer est vraie pour $n = 1$ (initialisation) et, si elle est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné, on peut écrire $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n = 1$ et $a_k \in \mathbb{N}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Par la relation de récurrence obtenue précédemment, on calcule alors :

$$P_{n+1} = X^{n+1} + 2a_{n-1}X^n + \sum_{k=1}^{n-1}\Big((n-k+2)a_{k-1} + (k+1)a_{k+1}\Big)X^k + a_1$$

Le polynôme P_{n+1} ainsi écrit est bien unitaire de degré $n+1$, à coefficients entiers naturels, ce qui achève la récurrence.

2. On a $1 + f(x)^2 = \dfrac{\cos^2 x + 1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{2 + 2\sin x}{\cos^2 x} = 2f'(x)$.

3. (a) On constate que $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, donc $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la formule de Leibniz,

$$2f^{(n+1)} = (2f')^{(n)} = (f^2+1)^{(n)} = (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}f^{(n-k)}$$

En évaluant en 0, cela donne $2\alpha_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_k\alpha_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) Comme $\alpha_n = f^{(n)}(0)$, par la formule de Taylor avec reste intégral, pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi/2[$, on a : $f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}x^n = \int_0^x \frac{(x-t)^N f^{(N+1)}(t)}{N!}\mathrm{d}t$.
Or, $f^{(N+1)}(t) = \dfrac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}}$ est positif car $\sin t \geqslant 0$ pour $t \in [0, \pi/2[$ et d'après la remarque, l'intégrande étant positive sur $[0, x]$ avec $x \geqslant 0$, le reste intégral est positif, d'où l'inégalité :
$\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, \pi/2[\qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}x^n \leqslant f(x)$.
Pour $x \in [0, \pi/2[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\alpha_n}{n!}x^n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées ; elle est donc convergente.

(c) Pour $x \in I$, posons $\varphi(x) = \arctan\big(f(x)\big)$ et $\psi(x) = \arctan\big(g(x)\big)$. Les fonctions φ et ψ sont de classe C^1 sur I avec $\varphi' = \dfrac{f'}{1+f^2}$ et $\psi' = \dfrac{g'}{1+g^2}$. Les questions précédentes montrent que $\varphi' = \psi' = \dfrac{1}{2}$, donc $\varphi = \psi + C$ sur I, où C est une constante. Comme $\varphi(0) = \psi(0) = \pi/4$, la constante est nulle et $\varphi = \psi$. Comme $f(x) = \tan\big(\varphi(x)\big)$ et $g(x) = \tan\big(\psi(x)\big)$, on a $f = g$ sur I.

Exercice 2.13

1. Pour quelles valeurs de x réel l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$ converge-t-elle ?

   On note alors $I(x)$ cette intégrale.
2. Calculer $I(1)$.

   On suppose désormais $x > 0$.

3. En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{x}{u}$, montrer que $I(x) = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$.
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x > 0,\ g(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}.$$

   (a) Montrer que g admet une limite en $+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   (b) Montrer que pour tout $t \in [0, \sqrt{x}]$, on a : $\left|\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right| \leqslant \dfrac{t^2}{1+t^2} \leqslant x$

   (c) À l'aide d'une majoration de $|I(x) - g(x)|$, montrer que lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, on a : $I(x) \sim g(x)$.

5.) Calculer la dérivée de $t \to \ln(t + \sqrt{x^2+t^2})$.
   En déduire un équivalent simple de $I(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Solution de l'exercice 2.13

1. • Si $x \neq 0$, la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.

   Au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) \sim \dfrac{1}{t^2}$ dont l'intégrale converge.

   • Par contre, pour $x = 0$, $\varphi(t) \sim \dfrac{1}{t}$ (en $+\infty$) dont l'intégrale diverge.

   Finalement, I est définie sur $\mathbf{R}^*$. Par parité, il suffira de l'étudier pour $x > 0$.

2. On a $I(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

3. On écrit :

$$I(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$$

   On effectue le changement de variable C^1 proposé. Il vient :

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} = -\int_{\sqrt{x}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2/u^2}\sqrt{x^2+x^2/u^2}} \frac{x}{u^2} du = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{x^2+u^2}}$$

4. (a) Pour $t \geqslant 0$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \dfrac{1}{x}$, d'où $0 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

   (b) Pour $t > 0$, la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 0 donne :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right| = \left|-\int_0^t \frac{u}{(1+u^2)^{3/2}} du\right| \leqslant \int_0^t \frac{|u|}{(1+u^2)^{3/2}} du \leqslant t^2 \leqslant x.$$

   On peut aussi multiplier par la quantité conjuguée ; pour tout $t \in [0, \sqrt{x}]$ on a :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right| = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}(1+\sqrt{1+t^2})} \leqslant \frac{t^2}{1+t^2} \leqslant t^2 \leqslant x.$$

   (c) On fait la différence entre $I(x)$ et l'équivalent proposé. Il vient :

$$|I(x) - g(x)| \leqslant 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right| dt \leqslant x g(x) = o\big(g(x)\big)$$

5. (a) Le calcul donne $\dfrac{d}{dt}(\ln(t + \sqrt{x^2+t^2})) = \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}$.

   (b) Donc, au voisinage de 0, on a :

$$I(x) \sim 2\ln\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^2+x}}{x}\right) \sim 2\ln\frac{2}{\sqrt{x}} \sim -\ln x$$

Exercice 2.14

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   On définit ainsi la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que : $\forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.
5. (a) Montrer que la fonction g définie sur $]0,1]$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{1} \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en 0.

   (b) Montrer que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ au voisinage de 0^+.

   (c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

Solution de l'exercice 2.14

1. L'intégrand est continu et positif sur $[x,+\infty[$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$,
donc par critère de convergence, par négligeabilité, l'intégrale proposée converge.

2. La fonction f se prolonge par continuité en 0 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Comme tout est positif et que $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t} \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$, où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, f ne peut être prolongée par continuité en 0.

3. Par la relation de Chasles, on a : $f(x) = f(1) - \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$.
Donc, par le théorème fondamental du calcul intégral, f est dérivable et :
$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x} < 0,$$
ce qui montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Pour tout $x \geqslant 1$ et tout $t \geqslant x$, on a : $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t} \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}$.
En intégrant sur $[x,+\infty[$ l'encadrement précédent (les intégrales convergent et les bornes sont dans le sens croissant), on obtient :
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2} dt = \left[\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\ \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

5. (a) On a $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t} \underset{t\to0^+}{\sim} t$, donc l'intégrale est faussement impropre.

   (b) Pour tout $x > 0$, on a :
$$f(x) = f(1) + \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = f(1) - \int_x^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = f(1) - g(x) - \ln x.$$
En 0^+, comme ln est prépondérant sur $f(1) - g(x)$ qui converge, on a donc $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$.

   (c) Par intégration par parties, pour tout (a, A) tel que $0 < a < A$, on a :
$$\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x = Af(A) - af(a) + \int_a^A \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$
D'après la question 4, par encadrement on a $\lim\limits_{A\to+\infty} Af(A) = 0$ et d'après la question 5.b), on a $\lim\limits_{a\to0^+} af(a) = 0$. Par suite :
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{x=\frac{u}{\sqrt{2}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 2.15

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute variable aléatoire Z définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend n valeurs réelles distinctes $z_1, \ldots, z_n$ (*i.e.* $Z(\Omega) = \{z_1, \ldots, z_n\}$ et $p_k = P(Z = z_k) \neq 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$), on appelle entropie de Z, le nombre réel défini par :

$$H(Z) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k).$$

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in]0,1[^n$, on note $h_n(x) = h_n(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{k=1}^{n} x_k \ln(x_k)$.

1. Calculer l'entropie d'une variable aléatoire U qui suit une loi uniforme sur un ensemble $\{u_1, \ldots, u_n\}$.
2. Justifier que la fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0,1[^n$ et calculer en tout point $x \in]0,1[^n$, le gradient $\nabla(h_n)(x)$ et la matrice hessienne $\nabla^2(h_n)(x)$ de h_n.
3. Montrer que la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = 1$ n'est pas critique. Montrer que la condition nécessaire d'ordre 1 pour un extremum de la fonction h_n est vérifiée en un unique point critique x^* que l'on précisera.
4. Fixons $x \in]0,1[^n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 1$ et notons $u = x - x^*$.
   (a) Vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $x^* + tu \in]0,1[^n$.
   On note alors ψ la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\psi(t) = h_n(x^* + tu)$.
   (b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour ψ entre les points 0 et 1, montrer que h_n admet en x^* un maximum global sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
   Ce maximum est-il atteint en d'autres points que x^* ?
5. Parmi les variables aléatoires prenant n valeurs (chacune avec une probabilité non nulle), quelles sont les lois de celles qui ont la plus grande entropie ?

Solution de l'exercice 2.15

1. On a $H(U) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n$.

2. La fonction h_n est $\mathcal{C}^2$ comme somme de fonctions $\mathcal{C}^2$ et :
$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \partial_i(h_n) = -(\ln x_i) - 1 \quad \text{et} \quad \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \partial^2_{i,i}(h_n) = -\frac{1}{x_i},\ \partial^2_{i,j}(h_n) = 0 \text{ si } i \neq j.$$
Donc $\nabla(h_n)(x) = \big(-(\ln x_1) - 1, \ldots, -(\ln x_n) - 1\big)$ et $\nabla^2(h_n)(x) = \operatorname{diag}\left(-\dfrac{1}{x_1}, \ldots, -\dfrac{1}{x_n}\right)$.

3. Posons $g(x) = x_1 + \cdots + x_n$. Comme $\nabla g(x) = (1, \ldots, 1) \neq 0$, la contrainte $g(x) = 1$ n'est pas critique, donc pour que h_n admette un point critique sous la contrainte $g(x) = 1$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla h_n(x) = \lambda \nabla g(x)$, soit :
$$-(\ln x_1) - 1 = \cdots = -(\ln x_n) - 1,$$
soit $x_1 = \cdots = x_n$. Comme $x_1 + \cdots + x_n = 1$, on en déduit $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$ *i.e.* $x^* = \left(\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n}\right)$.

4. (a) On a $x^* + tu = (1-t)x^* + tx = \big(tx_1 + (1-t)x_1^*, \ldots, tx_n + (1-t)x_n^*\big)$.
Comme $x_i^* = \dfrac{1}{n} \in]0,1[$, par somme d'encadrements (dont l'un au moins est strict car t et $1-t$ ne sont pas tous les deux nuls), on en déduit que $tx_i + (1-t)x_i^* \in]0,1[$.

   (b) Puisque ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, entre 0 et 1 donne :
$$\psi(1) = \psi(0) + \psi'(0) + \int_0^1 (1-t)\psi''(t)\ \mathrm{d}t.$$
Les formules de dérivation directionnelle du programme d'ECS (dérivée de $t \mapsto h_n(x^* + tu)$ aux ordres 1 et 2) donnent :
$$\psi'(0) = \langle \nabla(h_n)(x^*) | u \rangle \quad \text{et } \psi''(t) = q_{x^*+tu}(u),$$
où q_{x^*+tu} est la forme quadratique associée à la matrice $\nabla^2(h_n)(x)$.
Or, comme $g(x) = 1$, on a :
$$\langle \nabla(h_n)(x^*) | u \rangle = \langle \lambda \nabla(g)(x^*) | u \rangle = u_1 + \cdots + u_n = (x_1 + \cdots + x_n) - (x_1^* + \cdots + x_n^*) = 1 - 1 = 0.$$
Donc la formule de Taylor se simplifie en :
$$h_n(x) = h_n(x^*) + \int_0^1 (1-t) q_{x^*+tu}(u)\ \mathrm{d}t \leqslant h_n(x^*),$$
car $\nabla^2(h_n)(x)$ est diagonale avec des coefficients diagonaux strictement négatifs, et donc $q_{x^*+tu}(u) \leqslant 0$. Ainsi, h_n admet en x^* un maximum global sous la contrainte $g(x) = 1$ (qui vaut $h_n(x^*) = \ln n$).

   Il y a égalité $h_n(x) = h_n(x^*)$ si et seulement si l'intégrale est nulle. Comme il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue négative, cela n'est possible que si la fonction $t \mapsto (1-t)q_{x^*+tu}(u)$ est nulle, soit $q_{x^*+tu}(u) = 0$ pour tout $t \in [0,1[$. Or, $q_{x^*+tu}(u) < 0$ si $u \neq 0$ *i.e.* $x \neq x^*$, donc h_n atteint son maximum en x^* uniquement.

5. Pour toute variable Z, on a $H(Z) = h_n(P(Z = z_1), \ldots, P(Z = z_n))$.
D'après les questions 1 et 4b, on a donc : $H(Z) \leqslant h_n(x^*) = H(U)$,
avec égalité si et seulement si $(P(Z = z_1), \ldots, P(Z = z_n)) = (P(U = u_1), \ldots, P(U = u_n))$.
Donc, l'entropie est maximale pour les variables qui suivent la loi uniforme et pour elles seulement.

Exercice 2.16

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}, \quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln^2(t)} dt.$$

1. Montrer que f est bien définie, de classe C^1 sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
2. Calculer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$. En déduire les variations de f.
3. Montrer que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.
4. (a) Calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt$ pour $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$.
   (b) En déduire un équivalent de $f(x)$ en 1.
5. Quelle est la limite de $f(x)$ en 0 ?

Solution de l'exercice 2.16

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln^2(t)}$ est définie, continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ donc admet une primitive notée G. On a donc :
$$\forall x > 1,\ \ f(x) = G(x^2) - G(x).$$
On en déduit que f est bien définie, et C^1 sur $]1,+\infty[$. Idem sur $]0,1[$.
2. On a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0,1\},\ \ f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{\ln^2(x^2)} - \frac{1}{\ln^2(x)} = \frac{x-2}{2\ln^2(x)}.$$
On en déduit que f est décroissante sur $]0,1[$, puis sur $]1,2[$, puis croissante sur $[2,+\infty[$.
3. On a l'encadrement suivant : $\forall x > 1,\ \ \forall t \in [x,x^2],\ \ \frac{1}{\ln^2(x^2)} \leqslant \frac{1}{\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{\ln^2(x)}$.
D'où en intégrant sur $[x,x^2]$, $\forall x > 1,\ \ \frac{x^2-x}{4\ln^2(x)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2-x}{\ln^2(x)}$.
(*remarque* : ceci s'obtient aussi par le th. des accroissements finis pour G)
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. (a) Connaissant une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ \ln^2(t)}$, on a : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ \ln^2(t)}dt = \frac{1}{2\ln(x)}$.

   (b) Or par encadrement on obtient :
$$\forall x > 1,\ \ \forall t \in [x,x^2],\ \ \frac{1}{x^2\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{t\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{x\ln^2(t)}.$$
On intègre :
$$\forall x > 1,\ \ \frac{f(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2\ln(x)} \leqslant \frac{f(x)}{x}.$$
Soit,
$$\forall x > 1,\ \ \frac{x}{2\ln(x)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2}{2\ln(x)}.$$
De même,
$$\forall\, x \in]0,1[,\ \ \forall t \in [x^2,x],\ \ \frac{1}{x\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{t\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{x^2\ln^2(t)}.$$
On intègre mais puisque les bornes ne sont pas dans l'ordre croissant, on a :
$$\forall\, x \in]0,1[,\ \ \frac{f(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2\ln(x)} \leqslant \frac{f(x)}{x}.$$
On en déduit qu'un équivalent de $f(x)$ en 1 est $\dfrac{1}{2\ln(x)}$.
5. Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln^2(t)}$ est prolongeable par continuité en 0, on en déduit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est 0.

Exercice 2.17

1. Soit la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x (1 + |\sin(t)|)dt$
   (a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
   (c) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (d) Montrer que la fonction définie par $h(x) = F(x) - x$ est strictement croissante.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles positives ou nulles telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   Pour tout $n \geqslant 0$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} v_i$ la somme partielle d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive telle que :
   $$u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \geqslant 0,\ \int_{u_n}^{u_{n+1}} (1 + |\sin(t)|)dt = v_n$$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
3. (a) Calculer $F(k\pi)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Exprimer $F(u_n)$ en fonction de S_{n-1}.
   (c) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n \sim \dfrac{\pi}{2+\pi} S_{n-1}$.

Solution de l'exercice 2.17

1. (a) La fonction $g : t \mapsto 1 + |\sin(t)|$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème fondamental du calcul intégral entraîne l'existence de l'intégrale de g sur $[0, x]$ et donc de $F(x)$; de plus, F est la primitive de g qui s'annule en 0, elle est donc dérivable et $F^{'} = g$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) On a : $1 \leqslant 1 + |\sin(t)| \Rightarrow x \leqslant F(x)$ par croissance de l'intégrale.
   donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   (c) La fonction F est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$; c'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

   (d) La fonction $h(x) = F(x) - x$ est croissante car dérivable et de dérivée $|\sin(x)| \geqslant 0$. De plus, $\sin x$ ne s'annule qu'en des points isolés, d'où la stricte croissance de h.

2. (a) Les conditions voulues sur la suite (u_n) équivalent à : $u_0 = F(0)$ et $\forall n \geqslant 1, v_n = F(u_{n+1}) - F(u_n)$, soit encore, en calculant les sommes partielles et en posant $S_{-1} = 0$:

$$\forall n \geqslant 0,\ F(u_n) = S_{n-1}.$$

   Comme F est bijective cela prouve l'existence et l'unicité de (u_n), donnée par $u_n = F^{-1}(S_{n-1})$.

   (b) La fonction F est croissante, donc F^{-1} aussi, tout comme la suite (S_{n-1}) (car $v_i \geqslant 0$), donc (u_n) est croissante.

   (c) L'égalité s'écrit $v_n = F(u_{n+1}) - F(u_n)$. Par somme et télescopage, $F(u_n) - F(u_0) = F(u_n) = S_{n-1}$ et par bijectivité de F, $u_n = F^{-1}(S_{n-1}) \to +\infty$.

3. (a) On a :

$$\begin{aligned} F(k\pi) &= k\pi + \int_0^{k\pi} |\sin(t)|dt = k\pi + \sum_{i=0}^{k-1} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin(t)|dt \\ &= k\pi + \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{\pi} |\sin(u + i\pi)|du \qquad \text{(changement de variable : } u = t - i\pi) \\ &= k\pi + \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{\pi} |\sin(u)|du = k\pi + k[1+1] = k(\pi + 2) \end{aligned}$$

   (b) Par télescopage déjà vu, $F(u_n) = \sum\limits_{i=0}^{n-1}(F(u_{i+1}) - F(u_i)) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} 1 + |\sin(t)|dt = \sum\limits_{i=0}^{n-1} v_i = S_{n-1}$.

   (c)
   - Soit $n \geqslant 0$. L'entier $m \geqslant 0$ défini par $m = \left\lfloor \frac{u_n}{\pi} \right\rfloor$ est tel que : $m\pi \leqslant u_n < (m+1)\pi$ d'où, par croissance de F, on a : $F(m\pi) \leqslant F(u_n) \leqslant F((m+1)\pi) \Rightarrow m(2+\pi) \leqslant S_{n-1} \leqslant (m+1)(2+\pi)$.
   - Pour n assez grand, on a $m > 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'où :
     $2 + \pi \leqslant \dfrac{S_{n-1}}{m} \leqslant 2 + \pi + \dfrac{2+\pi}{m} \Rightarrow \dfrac{S_{n-1}}{m} \sim 2 + \pi$
   - or $m = \left\lfloor \dfrac{u_n}{\pi} \right\rfloor \sim \dfrac{u_n}{\pi}$

   Donc :

$$u_n \sim \frac{\pi}{2+\pi} S_{n-1}$$

Exercice 2.18

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$ converge. Pour $f \in E$, on pose $I = \int_0^{+\infty} f^2(t)dt$.

On considère la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

1. (a) Montrer que g est définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est prolongeable par continuité en 0. On note g la fonction prolongée en 0.
   (b) Pour $x > 0$, exprimer la dérivée $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$
2. Soient a et b deux réels tels que : $0 \leqslant a < b$.
   (a) Montrer que :
   $$2\int_a^b f(t)g(t)dt = bg^2(b) - ag^2(a) + \int_a^b g^2(t)dt$$
   (b) On suppose établi le fait que $\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (espaces vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$). Montrer que :
   $$\int_a^b g^2(t)dt - 2\sqrt{I}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \leqslant ag^2(a)$$
   (c) En déduire : $\int_a^b g^2(t)dt \leqslant 2I + ag^2(a) + 2\sqrt{I\ (ag^2(a)+I)}$.
3. (a) Prouver alors la convergence de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} g^2(t)dt$
   (b) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$ puis montrer que :
   $$\int_0^{+\infty} g^2(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$$

Solution de l'exercice 2.18

1. (a) La continuité de f entraîne l'existence d'une primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$; g est donc bien définie. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto F(x)$.

   La fonction F est dérivable en 0, d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = F'(0) = f(0)$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = f(0)$.

   (b) Pour $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x}\big(f(x) - g(x)\big)$.

2. (a) Comme une primitive de f est $x \mapsto xg(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour $a > 0$, par intégration par parties, on a :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = [tg(t)g(t)]_a^b - \int_a^b tg(t)\frac{1}{t}(f(t)-g(t))dt = bg^2(b) - ag^2(a) - \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt$$

   soit encore, $2\displaystyle\int_a^b f(t)g(t) = bg^2(b) - ag^2(a) + \int_a^b g^2(t)dt \quad (1)$.

   Si $a = 0$, on remplace a par $\alpha > 0$ dans (1) ; alors le résultat reste vrai en faisant tendre α vers 0.

   (b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \leqslant \sqrt{I\int_a^b g^2(t)dt}$$

   D'où $\displaystyle\int_a^b g^2(t)dt - ag^2(a) \leqslant 2\sqrt{I\int_a^b g^2(t)dt} - bg^2(b) \leqslant 2\sqrt{I\int_a^b g^2(t)dt}$, car $bg^2(b) \geqslant 0$, d'où le résultat voulu.

   (c) On reconnaît le début d'un carré dans l'expression précédente :

$$\Big(\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} - \sqrt{I}\Big)^2 - I \leqslant ag^2(a) \Rightarrow \left|\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} - \sqrt{I}\right| \leqslant \sqrt{ag^2(a)+I}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \leqslant \sqrt{I} + \sqrt{ag^2(a)+I}$$

   et en élevant au carré : $\displaystyle\int_a^b g^2(t)dt \leqslant 2I + ag^2(a) + 2\sqrt{I\ (ag^2(a)+I)}$.

3. (a) • La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $h : b \mapsto \displaystyle\int_0^b g^2(t)dt$ est bien définie. Elle est croissante (positivité de l'intégrale) et majorée (2.c), elle admet donc une limite finie lorsque $b \to +\infty$ (théorème de la limite monotone).

   (b) i. On a $0 \leqslant |f(t)g(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}(f^2(t) + g^2(t))$. Ainsi par le théorème de comparaison des fonctions positives, les questions précédentes entraînent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)g(t)|dt$ converge.

   ii. Dans la question 2.a, pour $a = 0$, il vient : $bg^2(b) = 2\displaystyle\int_0^b f(t)g(t)dt - \int_0^b g^2(t)dt$ et

$$\lim_{b\to+\infty} bg^2(b) = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt - \int_0^{+\infty} g^2(t)dt = M$$

   Nécessairement $M = 0$, sinon on aurait : $g^2(t) \sim \dfrac{M}{t}$ en contradiction avec la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(t)dt$. D'où $M = 0$, ce qui entraîne le résultat de la question.

Exercice 2.19

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$ est bien définie. On la note alors I_n.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive.
   Que peut-on en déduire sur la nature de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et sur sa limite éventuelle ℓ ?
3. Pour tout entier naturel n, calculer $I_n + I_{n+2}$ en fonction de n.
   En déduire la valeur de ℓ.
4. Déduire de la question précédente que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p} = (-1)^p \left(I_0 + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{2k-1} \right)$$

   Trouver une expression semblable de I_{2p+1}, pour $p \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et donner sa somme.

   Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge et préciser sa somme.
6. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} I_n$ est-elle convergente ?

Solution de l'exercice 2.19

1. En effet, I_n est l'intégrale sur le segment $K = [0, \frac{\pi}{4}]$ d'une fonction continue.
2. Comme tan est strictement croissante sur K, on a : $0 = \tan(0) \leqslant \tan x \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
   Ensuite, la décroissance des puissances entières positives d'un réel de $[0, 1]$ donne :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant (\tan x)^{n+1} \leqslant (\tan x)^n \leqslant 1.$$
   Puis, on intègre sur $[0, \pi/4]$, les bornes étant bien rangées, et l'on obtient : $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
   Ainsi, la suite (I_n) est positive et décroissante. Donc, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite ℓ et par passage à la limite sur inégalités, on a $0 \leqslant \ell \leqslant I_0 = \frac{\pi}{4}$.
3. On remarque que :
   $$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1 + \tan^2 x)\, dx = \frac{1}{n+1}\left[\tan^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}.$$
   Du coup, en passant à la limite, on a : $2\ell = 0$, soit $\ell = 0$.
4. Par récurrence sur p :
   - La formule proposée est évidemment vraie pour $p = 1$ car $I_0 + I_2 = 1$.
   - Si la formule $I_{2p} = (-1)^p\left(I_0 + \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{(-1)^k}{2k-1}\right)$ est vraie pour un entier p positif, alors d'après la question précédente,
     $$I_{2(p+1)} = \frac{1}{2p+1} - I_{2p} = \frac{1}{2p+1} - (-1)^p\left(I_0 + \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{(-1)^k}{2k-1}\right) = (-1)^{p+1}\left(I_0 + \sum_{1\leqslant k\leqslant p+1} \frac{(-1)^k}{2k-1}\right),$$
     car le terme $\frac{1}{2p+1}$ correspond bien à $\frac{(-1)^{p+1-k}}{2k-1}$ pour $k = p+1$. Donc, c'est vrai à l'ordre $p+1$.

   On obtient aussi : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p+1} = (-1)^p\left(I_1 + \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{(-1)^k}{2k}\right)$.
5. Comme $(-1)^p I_{2p}$ tend vers 0 (produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle) lorsque p tend vers $+\infty$, on en déduit que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{2k-1}$ $(k \geqslant 1)$ est convergente et que :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -I_0 = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 = \frac{\pi}{4}.$$
   De même, la série de terme général $\frac{(-1)^k}{2k}$ $(k \geqslant 1)$ est convergente et :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k} = -I_1 = -\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\ln(2)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2).$$
6. D'après la formule trouvée à la question 3, si la série de terme général I_n convergeait vers S finie, alors la série de terme général $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ convergerait aussi comme somme de deux séries convergentes, ce qui est faux d'après le cours (série harmonique). Ainsi, la série de terme général I_n est divergente.

Exercice 2.20

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. Déterminer le rang de J_n et en déduire ses valeurs propres. La matrice J_n est-elle diagonalisable ?
   Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$
2. Montrer que f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que f_n possède deux points critiques a et $b = -a$, avec a dont les coordonnés sont positives.
   On admet que la hessienne de f_n en a est $H_n(a) = \dfrac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.
4. Établir que f_n possède un extremum local en a. Quelle est sa nature ? Donner sa valeur.
   On admet que f_n possède un extremum local de nature et de valeur opposées en b.
5. (a) Étudier la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$, par : $\forall\, t \geqslant 0,\ h(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$.
   (b) Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.
   (c)) Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et b des extremums globaux.

Solution de l'exercice 2.20

1. Les colonnes de J_n sont toutes égales et non nulles, donc J_n est de rang 1.. Ceci montre que 0 est valeur propre de J_n, associée à un sous-espace propre de dimension $n-1$ qui est le noyau de $(x_1, \dots, x_n) \to \sum_{k=1}^{n} x_k$.

   Son orthogonal est la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est vecteur propre associé à la valeur propre $n = \operatorname{tr}(J_n)$. La matrice J_n est symétrique réelle, donc ortho-diagonalisable.

2. La fonction f_n est composée d'un produit de fonctions polynomiales de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de la fonction exponentielle qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

3. Par dérivation d'un produit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\partial_i f_n(x) = \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$

   Les points critiques de f_n sont les $(x_1, \dots, x_n)$ qui annulent $1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k = 1 - 2x_i S_n$, donc $x_i = \dfrac{1}{2S_n}$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En sommant, on obtient $2S_n^2 = n$ soit $S_n = \pm\sqrt{\dfrac{n}{2}}$. On en déduit que les points critiques de f_n sont $a = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}(1, \dots, 1)$ et $b = -a$.

4. La matrice J_n étant diagonalisable, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D_n = \operatorname{diag}(n, 0, \dots, 0)$ telles que $J_n = PD_n{}^tP$. D'après l'énoncé, $H_n(a)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont $\dfrac{-2n}{\sqrt{n\mathrm{e}}}$ et $\dfrac{-4n}{\sqrt{n\mathrm{e}}}$ qui sont négatives. Donc, f_n admet un maximum local en a.

   Sa valeur est $f_n(a) = \sqrt{\dfrac{n}{2\mathrm{e}}}$.

5. (a) Une étude de la fonction h montre qu'elle admet un maximum sur $\mathbb{R}^+$ en $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ qui vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$.

   (b) C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   (c) Avec la notation $||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, les deux questions précédentes donnent :

$$|f_n(x)| \leqslant \sqrt{n}||x||\mathrm{e}^{-||x||^2} \Rightarrow |f_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{n}{2\mathrm{e}}}$$

   Donc, f_n admet en a et b des extremums globaux.

Chapitre 3

Probabilités

Exercice 3.1

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une urne qui contient trois boules : une blanche, une noire et une rouge.
On effectue des tirages au hasard d'une boule avec remise dans cette urne.

On note X le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule blanche et Y le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule noire.

On note également $U = |X - Y|$ et $W = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de W, son espérance et sa variance.
3. Écrire en Scilab une fonction `escp` qui renvoie un vecteur `C` à deux composantes qui simule la valeur du couple (X, Y).
4. À partir de cette question et jusqu'à la question 6, *on admet* que pour $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.
   Que peut-on en déduire sur la loi de U et sur le couple (U, W) ?
5. Que représente la variable aléatoire $U + W$? En déduire une relation linéaire entre U, W, X et Y.
6. En déduire la valeur de la covariance de X et de Y.
   Expliquer de manière probabiliste le signe de la valeur obtenue.
7. Justifier l'affirmation de la question 4, à savoir que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

Solution de l'exercice 3.1

1. Les tirages étant identiques et indépendants $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right),\ E(X) = 3,\ V(X) = 6.}$
2. Pour $W = \min(X, Y)$, c'est la même chose : on effectue des tirages identiques et indépendants jusqu'à obtenir une boule noire ou blanche. Ainsi :
$\boxed{W \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right),\ E(W) = \frac{3}{2},\ V(W) = \frac{3}{4}.}$
3.
```
function C=escp()
 n=0;
 X=0;
 Y=0;
while (X==0 or Y==0)
  n=n+1;
  b=grand(1,1,'uin',1,3);
  if b==1 and X==0;
     then X=n;end;
  if b==2 and Y==0
     then Y=n;end;
  end;
  C=[x,y]
endfunction
```
4. Comme la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ ne dépend pas de k, il vient :
$\boxed{U \text{ et } W \text{ sont indépendantes et } U \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right).}$
5. La variable $U + W$ représente le maximum de X et de Y ; en effet :
   - si $X(\omega) < Y(\omega)$, $U(\omega) + W(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) - X(\omega) = Y(\omega)$
   - si $X(\omega) > Y(\omega)$, $U(\omega) + W(\omega) = Y(\omega) + X(\omega) - Y(\omega) = X(\omega)$.

   Par conséquent, $X + Y = \max(X, Y) + \min(X, Y) = (U + W) + W = \boxed{U + 2W.}$
6. Comme U et W sont indépendantes, on a : $V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = V(X + Y) = V(U + 2W) = V(U) + 4V(W)$,
soit $6 + 6 + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = 6 + 4 \times \frac{3}{4}$ *i.e.* $\boxed{\mathrm{cov}(X, Y) = -\frac{3}{2}}$
Si X est grand, il y aura peu de boules blanches au début, cela induira une augmentation de boules noires et donc à une baise de Y, *i.e.* X et Y varient en sens contraires, d'où le signe de la covariance.
7. La loi du couple (X, Y) est donnée par :
   - Si $i = j$, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = 0$.
   - Si $i < j$, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{3^{i-1}} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{j-i-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{j-i-1}}{3^j}$.

     En effet, $[X = i] \cap [Y = j] = \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} R_k\right) \cap B_i \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} \overline{N}_k\right) \cap N_j$.
   - De même si $i > j$, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \frac{2^{i-j-1}}{3^i}$.

   Donc, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\mathbb{P}_{[W=k]}(U = i) = \frac{\mathbb{P}(U = i \cap W = k)}{\mathbb{P}(W = k)} = \frac{\mathbb{P}(X = k \cap Y = k + i) + \mathbb{P}(Y = k \cap X = k + i)}{\mathbb{P}(W = k)}$$
   Ainsi,
$$\mathbb{P}_{[W=k]}(U = i) = \frac{2 \times \frac{2^{i-1}}{3^{i+k}}}{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}} = \frac{2^i.3^k}{2.3^{i+k}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$$
   Et la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est bien la $\boxed{\text{loi géométrique de paramètre } \frac{1}{3}.}$

Exercice 3.2

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et à valeurs dans $[-1,1]$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

1. Montrer que X_1 admet une espérance, ainsi que e^{tX_1}, pour tout $t > 0$.
2. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, e^{tnS_n} admet une espérance.
   Exprimer cette espérance en fonction de $E\left(\mathrm{e}^{tX_1}\right)$.

On suppose désormais que X_1 est *centrée.*

3. (a) Montrer que : $\forall t > 0,\ \forall x \in [-1,1],\ \mathrm{e}^{tx} \leqslant \dfrac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}$.

   (b) En déduire que : $\forall t > 0,\ E\big(\mathrm{e}^{tX_1}\big) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$.
4. (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P\big(S_n \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\big(E\big(\mathrm{e}^{tX_1}\big)\big)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

   On admet que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t > 0$ tel que : $\left(\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-nt\varepsilon} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

   (b) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $P(|S_n| > \varepsilon)$ converge.
5. (a) Soit $(C_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements telle que $P(C_k) = 0$ pour tout k.
   Montrer que $P\left(\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} C_k\right) = 0$.

   (b) Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement : $B_n(\varepsilon) = \displaystyle\bigcup_{m\geqslant n} \{\omega \in \Omega\ ;\ \ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}$.

   Montrer que : $P\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

   (c) Soit l'évènement $A = \{\omega \in \Omega\ ;\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n(\omega) = 0\}$.
   Déduire des questions précédentes que $P(A) = 1$.

Solution de l'exercice 3.2

1. D'après le théorème d'existence d'une espérance par majoration, toute variable aléatoire bornée admet une espérance. C'est le cas de X_1 (à valeurs dans $[-1,1]$), donc aussi de e^{tX_1}.
2. Comme les X_i sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, les e^{tX_i} aussi, donc leur produit e^{tnS_n} admet une espérance qui est donnée par : $E\left(e^{tnS_n}\right) = E\left(e^{tX_1}\right)\cdots E\left(e^{tX_n}\right) = \left(E\left(e^{tX_1}\right)\right)^n$.
3. (a) La fonction $x \mapsto e^{tx}$ est convexe, donc son graphe est situé sous la sécante entre les points d'abscisse $x=-1$ et $x=1$:
$$\forall p \in [0,1],\ e^{t(p\times(-1)+(1-p)\times 1)} \leqslant pe^{-t} + (1-p)e^{t}.$$
On obtient le résultat voulu en prenant $p = \dfrac{1-x}{2}$ (et alors $1-p = \dfrac{1+x}{2}$ et $-p+(1-p)=x$).

   (b) Comme $X_1(\Omega) \subset [-1,1]$, on en déduit : $e^{tX_1} \leqslant \dfrac{1-X_1}{2}e^{-t} + \dfrac{1+X_1}{2}e^{t} = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2} + \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}X_1$.

   D'où, par croissance et linéarité de l'espérance : $E\left(e^{X_1}\right) \leqslant \dfrac{e^t+e^{-t}}{2} + \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}E(X_1) = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$.
4. (a) L'inégalité de Markov donne : $P\big(S_n \geqslant \varepsilon\big) = P\big(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}\big) \leqslant \dfrac{E\left(e^{tnS_n}\right)}{e^{tn\varepsilon}} = \dfrac{\big(E\big(e^{tX_1}\big)\big)^n}{e^{tn\varepsilon}}$.

   (b) L'événement $[|S_n| \geqslant \varepsilon]$ est égal à $[S_n \geqslant \varepsilon] \cup [-S_n \geqslant \varepsilon]$. En reprenant la même démonstration que précédemment, avec $-X_i$ en lieu de X_i, on obtient $P(-S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\big(E\big(e^{tX_1}\big)\big)^n}{e^{tn\varepsilon}}$. Ainsi :
$$0 \leqslant P(|S_n| > \varepsilon) = 2P\big(S_n \geqslant \varepsilon\big) \leqslant 2\frac{\big(\mathbb{E}\big(e^{tX_1}\big)\big)^n}{e^{tn\varepsilon}} \leqslant 2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n e^{-nt\varepsilon} \leqslant 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}},$$
en choisissant le t dont l'existence est admise. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$ est géométrique, de raison $e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \in]0,1[$, donc elle est convergente. D'où le résultat voulu par comparaison de séries.
5. (a) Par sous-additivité (inégalité de Boole), on a : $0 \leqslant P\left(\bigcup\limits_{k\leqslant n} C_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} P(C_k) = 0$.

   Ainsi par continuité croissante, on a : $P\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} C_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{k\leqslant n} C_k\right) = 0$.

   (b) Par continuité décroissante, on a : $P\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n(\varepsilon))$.

   Or, par sous-additivité, on a : $0 \leqslant P(B_n(\varepsilon)) = P\left(\bigcup\limits_{m\geqslant n} (|S_m| > \varepsilon)\right) \leqslant \sum\limits_{m=n}^{+\infty} P\left(|S_m| > \varepsilon\right)$,
où le majorant est, d'après la question 4b, le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où le résultat voulu par théorème d'encadrement.

   (c) D'après la définition, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0$ est caractérisée par :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ |S_n(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}.$$
Donc : $A = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup\limits_{n_0\in\mathbb{N}^*} \bigcap\limits_{n\geqslant n_0} \left(|S_n| \leqslant \dfrac{1}{k}\right) = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup\limits_{n_0\in\mathbb{N}^*} \overline{B_{n_0}\left(\dfrac{1}{k}\right)} = \overline{\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap\limits_{n_0\in\mathbb{N}^*} B_{n_0}\left(\dfrac{1}{k}\right)}$.

   Par suite, $P(A) = 1 - P\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} C_k\right)$ avec $C_k = \bigcap\limits_{n_0\in\mathbb{N}^*} B_{n_0}\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

   D'où le résultat d'après les deux questions précédentes.

Exercice 3.3

On considère 6 variables aléatoires $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui sont mutuellement indépendantes. Les variables X_1, X_2 et X_3 suivent la même loi qui est donnée par $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 1/2$ et les variables Y_1, Y_2 et Y_3 suivent des lois géométriques de paramètres respectifs p_1, p_2 et p_3 qui appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$. On pose $Z = X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3$.

1. Justifier l'existence de l'espérance de la variable aléatoire Z et celle de sa variance, et les déterminer.
2. Pour $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \Lambda = \{-1, 1\}^3$, on introduit l'événement $A_\varepsilon = [X_1 = \varepsilon_1] \cap [X_2 = \varepsilon_2] \cap [X_3 = \varepsilon_3]$.
   (a) Soit $\varepsilon \in \Lambda$. On note $E_{A_\varepsilon}(|Z|)$ l'espérance de $|Z|$ pour la probabilité conditionnelle P_{A_ε}. Justifier son existence et montrer que :
   $$E_{A_\varepsilon}(|Z|) = E(|\varepsilon_1 Y_1 + \varepsilon_2 Y_2 + \varepsilon_3 Y_3|).$$
   (b) En déduire que :
   $$E(|Z|) = \frac{1}{4}\left[E(|Y_1 + Y_2 + Y_3| + E(|Y_1 + Y_2 - Y_3| + E(|Y_1 - Y_2 + Y_3| + E(|Y_1 - Y_2 - Y_3|\right].$$
3. (a) Soient a et b deux réels. Montrer que :
   $$\max(|a|, |b|) = \frac{|a + b| + |a - b|}{2}.$$
   (b) En déduire que :
   $$E(|Z|) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right).$$
4. Dans cette question, on suppose que $p_1 = p_2 = p_3 = 1/2$.
   (a) Exprimer la variance de $|Z|$ en fonction de $E(|Z|)$.
   (b) Soit r un réel strictement positif. A l'aide du cours et de la question 3.(b), donner une majoration de la probabilité $P(||Z| - E(|Z|)| \geqslant r)$. À partir de quelle valeur de r cette majoration est-elle significative ?

Solution de l'exercice 3.3

1. On a $|Z| \leqslant Y_1+Y_2+Y_3$. La variable Z admet donc une espérance par domination. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient $Z^2 \leqslant 3\left(Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2\right)$. Comme les variables Y_i admettent un moment d'ordre 2, par domination on en déduit que Z en admet un aussi. Ainsi, la variance de Z existe. Avec l'indépendance des variables considérées, il vient $E(Z) = E(X_1)E(Y_1)+E(X_2)E(Y_2)+E(X_3)E(Y_3) = 0$ ($E(X_i)=0$). Le lemme des coalitions nous dit que Z est la somme de trois variables indépendantes. Ceci et la formule de Huygens entraînent que $V(Z) = V(X_1Y_1)+V(X_2Y_2)+V(X_3Y_3) = E(Y_1^2)+E(Y_2^2)+E(Y_3^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{2-p_i}{p_i^2}$.

2. (a) La variable Y_i est indépendante de l'événement A_ε ; l'espérance de Y_i pour la probabilité conditionnelle P_{A_ε} existe et est égale à $E(Y_i)$. L'espérance de Z par rapport à la probabilité conditionnelle P_{A_ε} existe alors par domination puisque $|Z| \leqslant Y_1+Y_2+Y_3$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
E_{A_\varepsilon}(|Z|) &= \frac{1}{P(A_\varepsilon)} \sum_{n\in|Z|(\Omega)} nP\left([|X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3| = n] \cap A_\varepsilon\right)\\
&= \frac{1}{P(A_\varepsilon)} \sum_{n\in|Z|(\Omega)} nP\left([|\varepsilon_1Y_1+\varepsilon_2Y_2+\varepsilon_3Y_3| = n] \cap A_\varepsilon\right)\\
&= \sum_{n\in|\varepsilon_1Y_1+\varepsilon_2Y_2+\varepsilon_3Y_3|(\Omega)} nP\left(|\varepsilon_1Y_1+\varepsilon_2Y_2+\varepsilon_3Y_3| = n\right) = E(|\varepsilon_1Y_1+\varepsilon_2Y_2+\varepsilon_3Y_3|).
\end{aligned}$$

   (b) Avec la formule de l'espérance totale et la question précédente, il vient $E(|Z|) = \dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{\varepsilon\in\Lambda} E_{A_\varepsilon}(|Z|) = \dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{\varepsilon\in\Lambda} E(|\varepsilon_1Y_1+\varepsilon_2Y_2+\varepsilon_3Y_3|)$. On aboutit à la formule demandée en observant que ε et $-\varepsilon$ donnent la même contribution dans la somme précédente.

3. (a) On remarque que la valeur de l'expression $|a+b|+|a-b|$ est la même si on remplace a par $|a|$. Puis on voit que c'est encore la même valeur si on remplace b par $|b|$. Comme a et b jouent des rôles symétriques, on peut ensuite supposer que $|a| \geqslant |b|$; on trouve alors $2|a|$ et c'est terminé.

   (b) En utilisant la question 3.(a), on trouve :

$$\begin{aligned}
&|Y_1+Y_2+Y_3| + |Y_1+Y_2-Y_3| + |Y_1-Y_2+Y_3| + |Y_1-Y_2-Y_3|\\
&= 2\max(Y_1+Y_2, Y_3) + 2\max(|Y_1-Y_2|, Y_3) \geqslant 2(Y_1+Y_2+Y_3).
\end{aligned}$$

   On termine en utilisant la question 2.(b), la croissance de l'espérance et le fait que $E(Y_i) = 1/p_i$.

4. (a) Avec le formule de Huygens, il vient $V(|Z|) = E(Z^2) - E(|Z|)^2 = V(Z) - E(|Z|)^2 = 18 - E(|Z|)^2$.

   (b) Avec la question 3.(b), on obtient $E(|Z|) \geqslant 3$, d'où $V(|Z|) \leqslant 9$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne la majoration $P\left(||Z| - E(|Z|)| \geqslant r\right) \leqslant \dfrac{9}{r^2}$ qui sera significative dès que $r > 3$.

Exercice 3.4

Dans tout l'exercice, on considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui sont mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi. On supposera également que N est une variable aléatoire, définie sur le même espace probabilisé, qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et qui est indépendante de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) & \text{si} \quad N(\omega) \geqslant 1 \\ \qquad 0 & \text{si} \quad N(\omega) = 0 \end{cases}$$

et $Z(\omega) = N(\omega) - Y(\omega)$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\{\omega \in \Omega; Y(\omega) \leqslant x\} \cap \{\omega \in \Omega; N(\omega) = n\} \in \mathcal{A}$.
   (b) En déduire que Y et Z sont deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
2. Dans cette question, on suppose que chaque X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $q = 1 - p$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Vérifier que $Z(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} (1 - X_k(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $N(\omega) \geqslant 1$.
   (c) En déduire la loi de Z.
   (d) Montrer que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.
3. Dans cette question, on suppose que chaque X_n est à valeurs dans un segment $[a, b]$ $(a < b)$ et suit une loi à densité de densité f, et que la variable $N + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_n = \{\omega \in \Omega; 0 \leqslant N(\omega) \leqslant n\}$ et $Y_n = \mathbf{1}_{A_n} Y$.
   (*Si* $A \in \mathcal{A}$, *on désigne par* $\mathbf{1}_A$ *la variable aléatoire qui vaut* 1 *sur* A *et* 0 *en dehors de* A.)
   (a) Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $|Y| \leqslant cN$. En déduire que Y admet une espérance et une variance.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[N=k]} \left(\sum_{i=1}^{k} X_i \right)$.
   (c) Vérifier que $|Y - Y_n| = \mathbf{1}_{A_n^c} |Y|$ (où A_n^c est l'événement contraire de A_n).
   Montrer que la suite $(E(Y_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers $E(Y)$.
   (d) En déduire une expression de $E(Y)$ en fonction de f.

Solution de l'exercice 3.4

1. (a) Si $n \geqslant 1$, on a $A_n = [Y \leqslant x] \cap [N = n] = \left[\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant x\right] \cap [N = n] \in \mathcal{A}$ puisque $\sum_{k=1}^{n} X_k$ et N sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. De plus, $A_0 = \emptyset \in \mathcal{A}$ si $x < 0$ et $A_0 = [N = 0] \in \mathcal{A}$ si $x \geqslant 0$.

   (b) On en déduit que $[Y \leqslant x] = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n \in \mathcal{A}$ comme réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. Par suite Y (et donc Z, par somme de v.a.) est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. (a) On a : $P(Y = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([Y = 0] \cap [N = n]) = P([N = 0]) + \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\right] \cap [N = n]\right) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda}(e^{\lambda q} - 1) = e^{-\lambda p}$

   Et si $m \geqslant 1$, $P(Y = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([Y = m] \cap [N = n]) = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^m}{m!}$.
   La variable Y suit donc une loi de Poisson de paramètre λp.

   (b) Si $N(\omega) \geqslant 1$, on a $Z(\omega) = N(\omega) - Y(\omega) = N(\omega) - \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} (1 - X_k(\omega))$.

   (c) Comme $Z(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$ et que les variables $1 - X_k$ suivent suit la loi de Bernoulli de paramètre $q \in]0, 1[$, on observe que Z joue le rôle de Y si on remplace p par q, d'où $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q)$.

   (d) On a $P([Y = 0] \cap [Z = 0]) = P([Y = 0] \cap [N = 0]) = P(N = 0) = e^{-\lambda} = e^{-\lambda p} e^{-\lambda q} = P(Y = 0) \times P(Z = 0)$. Si $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, en utilisant l'indépendance des variables concernées il vient :

$$\begin{aligned} P([Y = m_1] \cap [Z = m_2]) &= P\left(\left[\sum_{k=1}^{m_1+m_2} X_k = m_1\right] \cap [N = m_1 + m_2]\right) \\ &= \binom{m_1 + m_2}{m_1} p^{m_1} q^{m_2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{m_1+m_2}}{(m_1 + m_2)!} = P(Y = m_1) \times P(Z = m_2). \end{aligned}$$

   Les variables Y et Z sont bien indépendantes.

3. (a) Lorsque $N(\omega) \geqslant 1$, on a $|Y(\omega)| \leqslant \sum_{k=1}^{N(\omega)} |X_k(\omega)| \leqslant \max(|a|, |b|) N(\omega)$. On peut donc prendre $c = \max(|a|, |b|)$ puisque $Y(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$. On a donc $Y^2 \leqslant c^2 N^2$ et par domination, Y admet une espérance et une variance.

   (b) Si $n \geqslant 1$, $Y_n(\omega) = \mathbf{1}_{A_n}(\omega) Y(\omega) = \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{[N=k]}(\omega)\right) Y(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[N=k]}(\omega) \left(\sum_{i=1}^{k} X_i(\omega)\right)$.

   (c) Si $\omega \in \Omega$, on a $|Y(\omega) - Y_n(\omega)| = |(1 - \mathbf{1}_{A_n}(\omega)) Y(\omega)| = \mathbf{1}_{A_n^c}(\omega) |Y(\omega)|$. Par conséquent, en utilisant 3.(a), on voit que $-c\mathbf{1}_{A_n^c}(\omega) N(\omega) \leqslant Y(\omega) - Y_n(\omega) \leqslant c\mathbf{1}_{A_n^c}(\omega) N(\omega)$, d'où $|E(Y) - E(Y_n)| \leqslant cE(\mathbf{1}_{A_n^c} N) = c \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(N = k) \to 0$ lorsque n tend vers l'infini.

   (d) Avec le cours, on sait que les variables $\mathbf{1}_{[N=k]}$ et $\sum_{i=1}^{k} X_i$ sont indépendantes, d'où $E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} E(\mathbf{1}_{[N=k]}) E(\sum_{i=1}^{k} X_i) = E(X_1) \sum_{k=1}^{n} kP(N = k) \to E(X_1)E(N)$, d'où $E(Y) = E(X_1)E(N)$.
   D'où :

$$E(Y) = \frac{q}{p} \int_a^b t f(t) dt$$

EXERCICE 3.5

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient α un réel strictement positif et f_α la fonction définie par :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet sans démonstration le résultat suivant : une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable certaine λ si et seulement si elle converge en loi vers λ.

1. (a) Montrer que f_α définit une densité.

   (b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $]1, +\infty[$ et dont la densité est f_α avec $\alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α l'espérance $E(X)$ existe-t-elle ? Calculer $E(X)$ lorsqu'elle existe. Pour quelles valeurs de α la variance $V(X)$ existe-t-elle ?

   Pour la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $]1, +\infty[$ chacune de densité f_α avec $\alpha > 2$. On définit la variable aléatoire $\overline{X_n}$ par :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

2. Étudier la convergence en probabilité de la suite $(\overline{X_n})_{n\geqslant 1}$.

3. (a) Soit $g :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(u) = \dfrac{u}{u-1}$. Étudier les variations de g sur $]1, +\infty[$ et caractériser l'ensemble $g(]1, +\infty[)$. Puis, justifier l'existence et calculer $g(g(u))$ pour $u > 1$. Montrer, ensuite que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera le domaine de définition et l'expression. Enfin, montrer que $g(E(X_1))$ est bien définie et exprimer sa valeur en fonction de α.

   (b) On admet que $g(\overline{X_n})$ est une variable aléatoire. Montrer que $g(\overline{X_n})$ est à valeurs dans $]1, +\infty[$.

   (c) Soit u un réel tel que $1 < u < g(E(X_1))$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\overline{X_n} < g(u)) = 1$.

   (d) Soit u un réel tel que $g((E(X_1)) < u$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\overline{X_n} < g(u)) = 0$.

   (e) Montrer que $(g(\overline{X_n}))_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable certaine $g(E(X_1))$.

Solution de l'exercice 3.5

1. (a) f_α est positive sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 1]$ et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. En 1^+, l'intégrale converge car $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$. De plus, $f_\alpha(x) = \alpha x^{-(1+\alpha)}$ en $+\infty$ avec $\alpha > 0$, donc l'intégrale de f_α converge sur $\mathbb{R}$. Enfin, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \alpha x^{-(\alpha+1)}\mathrm{d}x = [-x^{-\alpha}]_1^{+\infty} = 1$. On conclut que f_α est une densité.

   (b) $x \mapsto x f_\alpha(x)$ et $x \mapsto x^2 f_\alpha(x)$ sont positives sur $\mathbb{R}$, nulles sur $]-\infty,1]$, continues sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et admettent 1 comme limite en 1^+. On a $x f_\alpha(x) = \alpha x^{-\alpha}$ et $x^2 f_\alpha(x) = \alpha x^{(1-\alpha)}$ en $+\infty$. Donc, par théorème du transfert, $E(X)$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ existent respectivement pour $\alpha > 1$ et pour $\alpha > 2$. Enfin, pour $\alpha > 1$, on a $E(X) = \displaystyle\int_1^{\infty} \alpha x^{-\alpha}\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$.

2. Pour $\alpha > 2$, $E(X_n) = E(X_1)$ et $V(X_n) = V(X_1)$ existent pour $n \geqslant 1$ (cf. 1)(b)) et les X_n sont indépendantes, donc d'après la loi faible des grands nombres, $\overline{X_n} \to E(X_1)$ en probabilité.

3. (a) Pour $u > 1$, $g'(u) = -1/(u-1)^2 < 0$, donc g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et de plus, elle est continue sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, g est inversible de $]1,+\infty[$ vers $g(]1,+\infty[) =]1,+\infty[$. Ainsi on a pour $u > 1$, $g(u) > 1$ et donc $g(g(u))$ est bien définie. Un petit calcul donne $g(g(u)) = u$ pour $u > 1$ et donc $g = g^{-1}$ sur $]1,+\infty[$. Enfin, comme $\alpha > 2$, d'après 1)b), $E(X_1) = g(\alpha) > 1$, donc $g(E(X_1))$ est bien définie et $g(E(X_1)) = g(g(\alpha)) = \alpha$.

   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, X_n est à valeurs dans $]1,+\infty[$, donc $\overline{X_n}$ est aussi à valeurs dans $]1,+\infty[$. Ainsi comme d'après 4)(a), $g(]1,+\infty[) =]1,+\infty[$, on a $g(\overline{X_n})$ qui est à valeurs dans $]1,+\infty[$.

   (c) Soit $1 < u < g(E(X_1))$. D'après 4) (a), $g = g^{-1}$ est une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$ qui est strictement décroissante. On en déduit que $E(X_1) < g(u)$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(X_1) + \varepsilon < g(u)$. On obtient donc l'encadrement suivant : $F_{\overline{X_n}}(E(X_1)+\varepsilon) = P(\overline{X_n} \leqslant E(X_1)+\varepsilon) \leqslant P(\overline{X_n} < g(u)) \leqslant 1$. Comme $\alpha > 2$, nous savons que la suite $(\overline{X_n})_{n\geqslant 1}$ converge vers $E(X_1)$ en probabilité (cf. question 3)). Elle tend donc également en loi vers $E(X_1)$ d'après la question 2). La fonction de répartition de $E(X_1)$ est donnée par $F_{E(X_1)}(u) = 0$ si $u < E(X_1)$ et $F_{E(X_1)}(u) = 1$ si $u \geqslant E(X_1)$. Son seul point de discontinuité est $u = E(X_1)$. Ainsi, il résulte de la convergence en loi de $\overline{X_n}$ vers $E(X_1)$ que $F_{\overline{X_n}}(E(X_1)+\varepsilon) \to F_{E(X_1)}(E(X_1)+\varepsilon) = 1$. On conclut de l'encadrement que $P(\overline{X_n} < g(u)) \to 1$ quand $n \to +\infty$.

   (d) Soit $g((E(X_1)) < u$. Comme $g = g^{-1}$ est une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$ qui est strictement décroissante, on a alors $g(u) < E(X_1)$. Il vient donc, $0 \leqslant P(\overline{X_n} < g(u)) \leqslant P(\overline{X_n} \leqslant g(u)) = F_{\overline{X_n}}(g(u))$. A l'instar de 4)(b), on déduit de la convergence en loi de $\overline{X_n}$ vers $E(X_1)$ que $F_{\overline{X_n}}(g(u)) \to F_{E(X_1)}(g(u)) = 0$ (car $g(u) < E(X_1)$). Donc avec l'encadrement précédent, on a $P(\overline{X_n} < g(u)) \to 0$.

   (e) En $u = g(E(X_1))$ la fonction de répartition $F_{g(E(X_1))}$ est discontinue. Étudions donc la convergence sur tous les autres points. Il y a 3 cas à étudier. Tout d'abord, si $u \leqslant 1$, comme $g(\overline{X_n})$ est à valeurs dans $]1,+\infty[$ (d'après 4)(a)), il vient : $F_{g(\overline{X_n})}(u) = 0 \to 0 = F_{g(E(X_1))}(u)$ pour $n \to +\infty$. Puis, pour $1 < u < g(E(X_1))$, on a $F_{g(\overline{X_n})}(u) = P(g(\overline{X_n}) \leqslant u) = P(g(u) \leqslant \overline{X_n}))$ car $g = g^{-1}$ définie de $]1,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$ est strictement décroissante. Il en résulte que $F_{g(\overline{X_n})}(u) = 1 - P(\overline{X_n} < g(u))$ et donc avec 4)(c) que $F_{g(\overline{X_n})}(u) \to 0 = F_{g(E(X_1))}(u)$ pour $n \to +\infty$. Enfin si $g(E(X_1)) < u$, on a : $F_{g(\overline{X_n})}(u) = P(g(\overline{X_n}) \leqslant u) = P(g(u) \leqslant \overline{X_n})$ et il vient avec 4)(d) : $F_{g(\overline{X_n})}(u) = 1 - P(\overline{X_n} < g(u)) \to 1 = F_{g(E(X_1))}(u)$. La suite $(g(\overline{X_n}))_{n\geqslant 1}$ converge donc en loi vers $g(E(X_1))$.

Exercice 3.6

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes dont les lois de probabilité sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X = n]) = (\mathrm{e} - 1)\mathrm{e}^{-n}, \qquad \text{et} \quad P([Y = n]) = \frac{1}{(\mathrm{e} - 1)n!}$$

Soit $(U_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

On suppose enfin que les variables aléatoires U_i, X et Y sont indépendantes.

1. Reconnaître la loi de la variable aléatoire X.
2. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $M_n = \max(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.
   Déterminer la fonction de répartition de M_n.
3. On pose, pour tout ω de Ω, $M(\omega) = \max(U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots, U_{Y(\omega)}(\omega))$ et on admet que M est bien une variable aléatoire.
   (a) Calculer F_M la fonction de répartition de M.
   (b) Calculer l'espérance de M.
   (c) On pose $Z = X - M$. Pour tout réel x, calculer $P([Z > x])$ et en déduire la loi de Z.

Solution de l'exercice 3.6

1. • Pour X : en écrivant $P(X=n)=\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$, on constate que X suit la loi géométrique de paramètre $1-\dfrac{1}{e}$. C'est donc une variable aléatoire.

   • Pour Y : les termes sont positifs et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P([Y=n])=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(e-1)n!}=\frac{1}{e-1}(e-1)=1$.

2. On a classiquement : $F_{M_n}(x)=F_{U_1}(x)^n$. D'où : $F_{M_n}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ x^n \text{ si } 0\leq x\leq 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$.

3. (a) On considère le système complet d'événements : $\{[Y=n], n\in\mathbb{N}^*\}$. On a donc, pour tout réel x :

   $$[M\leqslant x]\cap[Y=n]=[M_n\leqslant x]\cap[Y=n]$$

   Par indépendance, $P([M_n\leqslant x]\cap[Y=n])=P([M_n\leqslant x]\times P([Y=n])$. Ainsi

   $$P([M\leqslant x])=\sum_{n=1}^{+\infty}P\big([M_n\leqslant x]\big)\times\big([Y=n]\big)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\frac{1}{(e-1)n!},\ \forall x\in[0,1]$$

   Finalement : $F_M(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ \dfrac{e^x-1}{e-1} \text{ si } 0\leq x\leq 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$.

   (b) Ainsi M est à densité, donc par th. de transfert : $E(M)=\displaystyle\int_0^1 x\frac{e^x-1}{e-1}\,\mathrm{d}x$,
   soit, après intégration par parties : $E(M)=\frac{1}{e-1}$.

4. On commence par remarquer que $Z(\Omega)=\mathbb{R}^+$. On utilise à nouveau la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements $\{[X=n], n\in\mathbb{N}^*\}$.

   On a donc, pour tout réel x positif : $P([Z>x])=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P\big([Z>x]\cap[X=n]\big)$.

   Mais, $[Z>x]\cap[X=n]=[X-M>x]\cap[X=n]=[M<n-x]\cap[X=n]$.

   Comme X et M sont indépendantes, on obtient : $P([Z>x])=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P([M<n-x])\times P([X=n])$.

   Comme $M(\Omega)=[0,1]$, il faut distinguer trois cas :
   • Si $n-x\leqslant 0$, c'est-à-dire si $n\leqslant\lfloor x\rfloor$, on a $P([M<n-x])=0$.
   • Si $0\leqslant n-x\leq 1$, c'est-à-dire si $n=\lfloor x\rfloor+1$, on a $P([M<n-x])=\dfrac{e^{n-x}-1}{e-1}$.
   • Enfin, si $n-x>1$, c'est-à-dire si $x\geq\lfloor x\rfloor+2$, on a $P([M<n-x])=1$. Finalement :

   $$P([Z>x])=\frac{e^{\lfloor x\rfloor+1-x}-1}{e-1}\times(e-1)e^{-(\lfloor x\rfloor+1)}+\sum_{n=\lfloor x\rfloor+2}^{+\infty}(e-1)e^{-n}$$

   Après simplification, il reste finalement : $P([Z>x])=\begin{cases}e^{-x} \text{ si } x>0\\ 1 \text{ sinon}\end{cases}$.

   On constate que Z suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3.7

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère un réel θ appartenant à $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et la densité f_θ définie par :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\theta}{2} \text{ si } x \in [-1, 0[\\ \\ \dfrac{1+\theta}{2} \text{ si } x \in [0, 1] \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note X une variable aléatoire admettant f_θ comme densité et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un $n-$échantilllon de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X.

1. On pose $F_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Déterminer la valeur du réel c pour que $\widehat{F_n} = cF_n$ soit un estimateur sans biais de θ.
   (b) Montrer que la suite $(\widehat{F_n})_n$ converge en probabilité vers θ.
2. On note, pour $k \in [\![1, n]\!]$, Y_n le nombre de variables parmi les variables X_k qui ont pris une valeur positive ou nulle.
   (a) Montrer que Y_n suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
   (b) On note $\widehat{\theta}_n$ la variable aléatoire définie par : $\widehat{\theta}_n = \dfrac{2}{n} Y_n - 1$.
   Montrer que $(\widehat{\theta}_n)$ est un estimateur sans biais de θ.
   (c) Montrer que la suite $(\widehat{\theta}_n)_n$ converge en probabilité vers θ.
3. (a) Montrer qu'il existe un réel λ strictement positif tel que :

$$|\sqrt{1 - \widehat{\theta}_n^2} - \sqrt{1 - \theta^2}| \leqslant \lambda |\widehat{\theta}_n - \theta|$$

   (b) Montrer que la suite $(\sqrt{1 - \widehat{\theta_n}^2})_n$ converge en probabilité vers $\sqrt{1 - \theta^2}$.
   (c) Montrer que la suite $(\sqrt{n} \dfrac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{1 - \theta^2}})_n$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Solution de l'exercice 3.7

1. (a) On a : $E(X)=\displaystyle\int_{-1}^{0} t\frac{1-\theta}{2}dt+\int_{0}^{1} t\frac{1+\theta}{2}dt=\frac{\theta}{2}\Longrightarrow E(F_n)=\frac{\theta}{2}\Longrightarrow \hat{F}_n=2F_n$.

   (b) Comme $\hat{F}_n$ est sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance. Or $E(X^2)=\dfrac{1}{3}$ et $V(X)=\dfrac{4-3\theta^2}{12}\Longrightarrow V(F_n)=\dfrac{4-3\theta^2}{12n}$, par indépendance.

   Enfin, $V(\hat{F}_n)=4V(F_n)=\dfrac{4-3\theta^2}{3n}$. On applique alors la loi faible des grands nombres à $\hat{F}_n$.

2. (a) $\mathbf{1}_{[X_k>0]}$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1+\theta}{2}$. Ainsi, Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\dfrac{1+\theta}{2})$.

   On a alors : $E(Y_n)=n\dfrac{1+\theta}{2}$ et $V(Y_n)=n\dfrac{1-\theta^2}{4}$.

   (b) On a, toujours par linéarité de l'espérance, $E(\hat{\theta}_n)=\dfrac{2}{n}E(Y_n)-1=\theta$.

   (c) On a $V(\hat{\theta}_n)=\dfrac{4}{n^2}V(Y_n)=\dfrac{1-\theta^2}{n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à $\hat{\theta}_n$ donne :

$$\forall\varepsilon>0,\quad 0\leqslant P\big(|\hat{\theta}_n-\theta|\geqslant\varepsilon\big)\leq\frac{1-\theta^2}{n\varepsilon^2}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}P\big(|\hat{\theta}_n-\theta|\geqslant\varepsilon\big)=0$$

3. (a) On multiplie par l'expression conjuguée. Comme $|\sqrt{1-\widehat{\theta}_n^2}+\sqrt{1-\theta^2}|\geq\sqrt{1-\theta^2}\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, il vient $|\sqrt{1-\widehat{\theta}_n^2}-\sqrt{1-\theta^2}|\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Comme $\widehat{\theta_n}$ prend toutes ses valeurs entre -1 et 1 et comme θ appartient à $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$, on a : $|\widehat{\theta}_n+\theta|\leqslant\dfrac{3}{2}$ et $|\sqrt{1-\widehat{\theta}_n^2}-\sqrt{1-\theta^2}|\leq\sqrt{3}|\widehat{\theta}_n-\theta|$.

   (b) On a donc, pour tout ω de Ω, $|\sqrt{1-\widehat{\theta}_n^2(\omega)}-\sqrt{1-\theta^2}|\geqslant\varepsilon\Rightarrow\sqrt{3}|\widehat{\theta}_n(\omega)-\theta|\geqslant\varepsilon$, et

$$P\big(|\sqrt{1-\widehat{\theta}_n^2}-\sqrt{1-\theta^2}|\geqslant\varepsilon\big)\leqslant P\big(|\widehat{\theta}_n-\theta|\geqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\big)\to 0$$

   (c) On applique le TLC à Y_n : $E(Y_n)=n\dfrac{1+\theta}{2}$ et $V(Y_n)=n\dfrac{1-\theta^2}{4}$. La suite $\left(\dfrac{Y_n-n\frac{1+\theta}{2}}{\sqrt{n\frac{1-\theta^2}{4}}}\right)_n$ converge en loi vers une variable T qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. En arrangeant, on conclut : $\left(2\sqrt{n}\dfrac{\frac{Y_n}{n}-\left(\frac{1+\theta}{2}\right)}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)_n$ converge en loi vers T. Comme $Y_n=\dfrac{n\widehat{\theta}_n}{2}+\dfrac{n}{2}$, on obtient : $\left(\sqrt{n}\dfrac{\widehat{\theta}_n-\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)_n$ converge en loi vers T.

EXERCICE 3.8

On considère deux réels λ et θ strictement positifs et une variable aléatoire X dont une densité f_X est donnée par :

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\theta}\left(\dfrac{\theta}{t}\right)^{\lambda+1} & \text{si } t > \theta \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes suivant toutes la loi de X, où θ est connu et λ un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer.
On pose :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], Y_k = \ln\left(\frac{X_k}{\theta}\right), \quad \overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \text{ et } \widehat{\lambda}_n = \frac{1}{\overline{Y}_n}$$

1. (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (b) Étudier l'existence de l'espérance et de la variance de X et en cas d'existence les calculer.
2. (a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Y_k suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.
   (b) En déduire les valeurs de $E(\overline{Y}_n)$ et de $V(\overline{Y}_n)$.
   (c) Écrire une instruction en **Scilab** qui permet de simuler 100 réalisations de X lorsque λ et θ sont connus.
3. Justifier les deux convergences suivantes :
   (a) la suite $\left(\lambda\sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - \dfrac{1}{\lambda}\right)\right)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$
   (b) La suite $\left(\lambda\overline{Y}_n\right)_n$ converge en probabilité vers 1.
4. En remarquant que l'on peut écrire :

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda} = \frac{\lambda\sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\lambda} - \overline{Y}_n\right)}{\lambda\overline{Y}_n}$$

   montrer que la suite $\left(\dfrac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda}\right)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
5. En approchant la loi de $\dfrac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda}$ par $\mathcal{N}(0, 1)$, déterminer, un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$ pour λ.
   Rappel : si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a $\Phi(1,96) = 0,975$.

Solution de l'exercice 3.8

1. (a) On vérifie facilement que f est un densité de probabilité et on trouve :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\theta}{x}\right)^\lambda & \text{si } x > \theta \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   (b) On a $tf_X(t) = \lambda\theta^\lambda \dfrac{1}{t^\lambda}$ donc $\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si $\lambda > 1$ et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\theta\lambda}{(\lambda-1)}$. De même : $t^2 f_X(t) = \lambda\theta^\lambda \dfrac{1}{t^{\lambda-1}}$. Donc $E(X^2)$ et $V(X)$ existent si et seulement si $\lambda > 2$ et dans ce cas : $E(X^2) = \dfrac{\theta^2\lambda}{\lambda-2}$ et $V(X) = \dfrac{\theta^2}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)}$.

2. (a) On a donc : $Y = \ln\left(\frac{X}{\theta}\right)$. D'où :

$$F_Y(y) = P\left(\ln\left(\frac{X}{\theta}\right) \leqslant y\right) = P(\frac{X}{\theta} \leqslant e^y) = P(X \leqslant \theta e^y) = F_X(\theta e^y)$$

   On a donc, pour tout réel y : $F_Y(y) = F_X(\theta e^y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} \text{ si } y > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

   soit $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

   (b) On trouve donc, par linéarité $E(\overline{Y}_n) = \dfrac{1}{\lambda}$ et, par indépendance $V(\overline{Y}_n) = \dfrac{1}{n\lambda^2}$.

   (c) On a donc $X = \theta e^Y$ où Y suit la loi exponentielle de paramètre λ, or on sait simuler une loi exponentielle. On écrit donc :

```
x=theta*exp(grand(1,100,'exp',1/lambda))
```

3. (a) Il suffit d'appliquer à $(\overline{Y}_n)$ le théorème limite central : $\dfrac{\overline{Y}_n - E(\overline{Y}_n)}{\sqrt{V(\overline{Y}_n)}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$, ce qui donne bien :

$$\lambda\sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$$

   (b) En appliquant à $(\overline{Y}_n)$ la LFGN, il vient $(\overline{Y}_n) \xrightarrow{P} \dfrac{1}{\lambda}$. On en déduit que $(\lambda\overline{Y}_n) \xrightarrow{P} 1$.

4. On a donc : $\dfrac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{n}\Big(\frac{1}{\overline{Y}_n} - \lambda\Big)}{\lambda} = \dfrac{\lambda\sqrt{n}\left(\frac{1}{\lambda} - \overline{Y}_n\right)}{\lambda\overline{Y}_n} = \lambda\sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\lambda} - \overline{Y}_n\right) \times \dfrac{1}{\lambda\overline{Y}_n}$.

   Or : $(\lambda\overline{Y}_n) \xrightarrow{P} 1$, donc, par continuité, $\dfrac{1}{\lambda\overline{Y}_n} \xrightarrow{P} 1$ et $\lambda\sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - \dfrac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow{L} Z$, où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On a donc, là aussi par continuité :

$$\lambda\sqrt{n}\left(\frac{1}{\lambda} - \overline{Y}_n\right) \xrightarrow{L} -Z \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$$

   On applique alors le lemme de Slutsky : $\lambda\sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\lambda} - \overline{Y}_n\right) \times \dfrac{1}{\lambda\overline{Y}_n} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$. D'où : $\dfrac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$.

5. On trouve, pour n assez grand, $P\left(\lambda \in \left[\dfrac{\widehat{\lambda}_n}{1 + \frac{1,96}{\sqrt{n}}}, \dfrac{\widehat{\lambda}_n}{1 - \frac{1,96}{\sqrt{n}}}\right]\right) \geqslant 0,95$.

Exercice 3.9

Soit $p \in]0,1[$. On considère une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.

On pose $q = 1-p$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $\Pi_n = \prod_{j=1}^{n}(1-q^j)$.

1. (a) Montrer que $P(X_1 = X_2) = \dfrac{p}{2-p}$.

   (b) En déduire $P(X_1 < X_2)$ en fonction de p seulement.

Dans la suite de cet exercice, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note A_n l'événement :

$$A_n = (X_1 < X_2 < \cdots < X_n),$$

et, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note $B_{n,k}$ l'événement :

$$B_{n,k} = A_n \cap (X_1 = k)$$

On note aussi $u_n = P(A_n)$ et $v_{n,k} = P(B_{n,k})$.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$\forall k \geqslant 1,\ v_{n,k} = pq^{k-1}\sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}$$

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un entier α_n que l'on déterminera tel que :

$$\forall k \geqslant 1,\ v_{n,k} = \frac{1}{\Pi_{n-1}}p^n q^{n(k-1)}q^{\alpha_n}$$

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{p^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\Pi_n}$.
5. Montrer que la suite $(\Pi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite α.
   En déduire un équivalent de u_n, qui dépend de α, lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 3.9

1. (a) En utilisant le système complet $(X_1 = k)_{k\geqslant 1}$, puis par indépendance, on obtient :

$$\begin{aligned}P(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = X_2)\cap(X_1 = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = k)\cap(X_2 = k))\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2(k-1)} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} = \boxed{\frac{p}{2-p}}.\end{aligned}$$

   (b) Comme $P(X_1 < X_2) = P(X_2 < X_1)$ par symétrie et comme $(X_1 = X_2), (X_1 < X_2), (X_1 > X_2)$ forment un système complet, on a : $P(X_1 < X_2) = \dfrac{1 - P(X_1 = X_2)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{p}{2-p}\right) = \boxed{\dfrac{1-p}{2-p}}$.

2. La formule des probabilités totales avec le système $(X_2 = j)_{j\geqslant 1}$, puis l'indépendance, donnent :

$$\begin{aligned}v_{n,k} &= \sum_{j=1}^{+\infty} P\big((X_1 < \cdots < X_n)\cap(X_1 = k)\cap(X_2 = j)\big) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} P\big((X_1 = k)\cap(X_2 = j)\cap(X_2 < \cdots < X_n)\big)\\ &= pq^{k-1}\sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j} \quad \text{car } P\big((X_2 = j)\cap(X_2 < X_3 < \cdots < X_n)\big) = v_{n-1,j} \text{ par symétrie.}\end{aligned}$$

3. On opère par récurrence sur $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}v_{2,k} &= P(A_2 \cap (X_1 = k)) = P((k < X_2)\cap(X_1 = k)) = P(k < X_2)P(X_1 = k) \text{ par indépendance}\\ &= q^k pq^{k-1} = pq^{2k-1} = \frac{1}{p}p^2 q^{2(k-1)}q^1 = \frac{1}{\Pi_1}p^2 q^{2(k-1)}q^{\alpha_2} \text{ avec } \boxed{\alpha_2 = 1.}\end{aligned}$$

Soit $n \geqslant 3$; on suppose le résultat vrai pour $n-1$; alors, comme $|q^{n-1}| < 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}v_{n,k} &= pq^{k-1}\sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j} = pq^{k-1}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{1}{\Pi_{n-2}}p^{n-1}q^{(n-1)(j-1)}q^{\alpha_{n-1}} = \frac{1}{\Pi_{n-2}}p^n q^{k-1}q^{\alpha_{n-1}}\sum_{j=k+1}^{+\infty}(q^{n-1})^{j-1}\\ &= \frac{1}{\Pi_{n-2}}p^n q^{k-1}q^{\alpha_{n-1}}\frac{q^{(n-1)k}}{1-q^{n-1}} = \frac{1}{\Pi_{n-1}}p^n q^{n(k-1)}q^{\alpha_n} \text{ si } \boxed{\alpha_n = \alpha_{n-1} + n - 1.}\end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ d'où $v_{n,k} = \dfrac{p^n q^{n(k-1)}q^{n(n-1)/2}}{\Pi_{n-1}}$.

4. La formule des probabilités totales avec le système complet $(X_1 = k)_{k\geqslant 1}$ donne :

$$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} v_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\Pi_{n-1}}p^n q^{n(k-1)}q^{\alpha_n} = \frac{1}{\Pi_{n-1}}p^n q^{\alpha_n}\frac{1}{1-q^n} = \boxed{\frac{p^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\Pi_n}.}$$

5. On a $\ln(\Pi_n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\ln(1-q^j)$; or $\ln(1-q^j) \underset{j\to+\infty}{\sim} -q^j$ qui est le terme général d'une série convergente ; l'équivalent étant de signe constant, la série $\sum \ln(1-q^j)$ converge et donc la suite $(\ln(\Pi_n))$ converge vers un réel ℓ. Il en résulte que la suite $(\Pi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\alpha = \exp(\ell) > 0$. Alors, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha}p^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Exercice 3.10

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$. Soit $q \in]0,1[$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Déterminer la limite en probabilité de la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \ln(1 - p + p\,\mathrm{e}^t)$.
   Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a $f''(t) \leqslant \dfrac{1}{4}$ et en déduire que : $\forall\, t \geqslant 0,\ \ f(t) \leqslant p\,t + \dfrac{t^2}{8}$.

   On suppose dans la suite que $p < q$.
3. Montrer que :
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - p\right|\right) = P\left(S_n \geqslant n\,\frac{p+q}{2}\right)$$
4. (a) Montrer que pour tout $t > 0$, on a :
$$P\left(S_n \geqslant n\,\frac{p+q}{2}\right) \leqslant \exp\left(-n\Big(\frac{p+q}{2}t - f(t)\Big)\right)$$
   (b) Établir la relation : $\forall\, t \geqslant 0,\ \ \dfrac{p+q}{2}\,t - f(t) \geqslant -\dfrac{1}{8}\,t^2 + \dfrac{1}{2}(q-p)t$.

   (c) En déduire l'inégalité :
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - p\right|\right) \leqslant \exp\left(-n\frac{(q-p)^2}{2}\right)$$

Solution de l'exercice 3.10

1. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, (ou la loi faible des grands nombres), la suite (S_n/n) tend en probabilité vers p.

2. La fonction f est de classe $C^\infty(\mathbb{R}_+)$. On a $f'(t) = \dfrac{p\mathrm{e}^t}{1-p+p\,\mathrm{e}^t}$ et $f''(t) = (1-p)\dfrac{p\,\mathrm{e}^t}{(1-p+p\,\mathrm{e}^t)^2}$.

   En posant $a = 1-p$ et $b = p\,\mathrm{e}^t$, on obtient :

$$f''(t) = \frac{ab}{(a+b)^2} \leqslant \frac{1}{4}$$

   En intégrant : $f'(t) - f'(0) \leqslant \dfrac{t}{4}$, soit $f'(t) - p \leqslant \dfrac{t}{4}$, puis en intégrant de nouveau :

$$f(t) - p\,t - 0 \leqslant \frac{t^2}{8}$$

   Autre idée : par la formule de Taylor avec reste intégrale.

3.

$$\left|\frac{S_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - p\right| \iff \left(\frac{S_n}{n} - q\right)^2 \leqslant \left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2 - 2\frac{S_n}{n}(q-p)+q^2-p^2 \leqslant 0 \iff \frac{S_n}{n} \geqslant \frac{p+q}{2} \text{ car } p < q$$

4. (a) Pour $t > 0$, par croissance de la fonction exponentielle, on a l'égalité suivante entre les événements :

$$[S_n \geqslant n\frac{p+q}{2}] = [tS_n \geqslant nt\frac{p+q}{2}] = [\mathrm{e}^{tS_n} \geqslant \mathrm{e}^{nt\frac{p+q}{2}}]$$

   Par l'inégalité de Markov, on obtient :

$$P([S_n \geqslant n\frac{p+q}{2}]) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{tS_n})}{\mathrm{e}^{nt\frac{p+q}{2}}}$$

   Or, par indépendance des (X_k), et théorème de transfert, on a :

$$E(\mathrm{e}^{tS_n}) = E\left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k}\right) = (E(\mathrm{e}^{tX}))^n = (1-p+p\,\mathrm{e}^t)^n$$

   soit

$$P([S_n \geqslant n\frac{p+q}{2}]) \leqslant \frac{(1-p+p\,\mathrm{e}^t)^n}{\mathrm{e}^{nt\frac{p+q}{2}}} = \mathrm{e}^{-n(\frac{p+q}{2}t - f(t))}$$

   (b) Il suffit d'utiliser l'inégalité établie dans la question 2 pour parvenir au résultat.

   (c) L'inégalité précédente étant valable pour tout $t \geqslant 0$, il vient :

$$P([S_n \geqslant n\frac{p+q}{2}]) \leqslant \min_{t\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n(-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{2}(q-p)t)} = \mathrm{e}^{-n\frac{(q-p)^2}{2}}$$

Exercice 3.11

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$ et $D_n = Y_n(\Omega)$.

1. Montrer par récurrence que $D_n = \{k/2^n \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1\}$.
2. Soit $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}$ et $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{2^k}$, où $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$.
   Montrer que $x = y$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!], x_k = y_k$.
3. (a) En déduire la loi de Y_n.
   (b) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi et préciser la loi limite.
4. On admet le résultat suivant : soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, telle que :
   - pour tout $t \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = g(t)$, avec g continue sur $[0,1]$;
   - il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in [0,1], |g_n(t)| \leqslant C$.

   Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(u)du = \int_0^1 g(u)du$.

   À l'aide des questions précédentes et du résultat admis, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

   (on pourra considérer $\displaystyle\int_0^1 E(t^{Y_n})dt$)

Solution de l'exercice 3.11

1. On montre par récurrence sur n que $D_n = \{k/2^n \ ; 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1\}$.
   - Si $n = 1$, $Y_1 = \dfrac{X_1}{2}$ donc $D_1 = \{0, 1/2\}$.
   - Supposons le résultat vrai pour n. On a $Y_{n+1} = Y_n + \dfrac{X_{n+1}}{2^{n+1}}$. Donc :

$$D_{n+1} = D_n \cup \left\{\frac{1}{2^{n+1}}\right\} + x; x \in D_n\} = \left\{\frac{k}{2^n}; 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1\right\} \cup \left\{\frac{2k+1}{2^{n+1}}; 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1\right\}$$
$$= \{k/2^{n+1} \ ; 0 \leqslant k \leqslant 2^{n+1} - 1\}$$

2. Un sens est évident. Supposons donc que $(x_1, \dots, x_n) \neq (y_1, \dots, y_n)$. Soit p le premier indice pour lequel $x_p \neq y_p$ et supposons que $x = y$. On peut supposer que $x_p = 1$ et $y_p = 0$. Ainsi :

$$\frac{1}{2^p} + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{x_k}{2^k} = \sum_{k=p+1}^{n} \frac{y_k}{2^k} \leqslant \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p}\left(1 - (1/2)^{n-p}\right) < \frac{1}{2^p}$$

   Ceci est impossible, même si $x_k = 0$, pour $k \in [\![p+1, n]\!]$. Donc $x \neq y$.

3. (a) Soit $\frac{k}{2^n} \in D_n$. Comme la fonction de $\{0,1\}^n$ dans D_n : $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j}$ est injective, et comme les ensembles de départ et d'arrivée ont le même cardinal, elle est surjective, donc on peut écrire $\frac{k}{2^n} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j}$ d'où : $P\left(Y_n = \dfrac{k}{2^n}\right) = P\left(\displaystyle\bigcap_{j;a_j=1} (X_j = 1) \cap \bigcap_{j;a_j=0} (X_j = 0)\right) = \dfrac{1}{2^n}$.

   Ainsi Y_n suit la loi uniforme sur D_n.

   (b) Pour tout $x = \dfrac{k}{2^n} \in D_n$, on a : $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} P(Y_n = \frac{j}{2^n}) = \frac{k+1}{2^n} = x + \frac{1}{2^n}$.

   Donc, pour tout $x \in D_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = x$.

   Soit $x \in [0, 1[\backslash D_n$. En utilisant la partie entière de $2^n x$, il existe $k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]$ tel que $\dfrac{k}{2^n} < x < \dfrac{k+1}{2^n}$.
   Par croissance de la fonction de répartition, on obtient :

$$x + \frac{1}{2^n} \leqslant F_n(x) \leqslant x + \frac{3}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = x$$

   Le raisonnement pour $x = 1$ est identique.
   Ainsi la la suite (Y_n) convergee en loi vers le loi uniforme sur $[0, 1]$.

4. On a $E(t^{Y_n}) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}} t^{k/2^n}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 E(t^{Y_n}) dt = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\frac{k}{2^n} + 1}$.

   Comme sous-suite d'une somme de Riemann, $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 E(t^{Y_n}) dt = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln 2$.

   Par ailleurs, en posant $g_n(t) = E(t^{Y_n})$, par le théorème de transfert, $\lim\limits_{n \to +\infty} E(t^{Y_n}) = \lim\limits_{n \to +\infty} E(f(Y_n)) = \displaystyle\int_0^1 t^x dx = \frac{t-1}{\ln t}$.
   Cette dernière fonction est continue sur $[0, 1[$ et admet un prolongement par continuité en $t = 1$ (on utilise les équivalents).
   De plus, comme $Y_n \geqslant 0$, $t^{Y_n} = \mathrm{e}^{Y_n \ln(t)} \leqslant 1$ sur $[0, 1]$. Par croissance de l'espérance, $0 \leqslant E(t^{Y_n}) \leqslant 1$.
   Ainsi, par le résultat admis : $\ln 2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 E(t^{Y_n}) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Exercice 3.12

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Le temps d'attente d'un patient chez le dentiste suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$, où le réel $\theta > 0$ est un paramètre inconnu propre à chaque dentiste. Un nouveau dentiste s'installe dans votre voisinage. Vous voulez estimer son paramètre θ. A cette fin, vous interrogez ses patients sur leur temps d'attente. On modélise les temps d'attentes des patients par une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$.

1. (a) On définit la variable aléatoire Y_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2X_k.$$

   Montrer que Y_n est un estimateur sans biais et convergent de θ.

   (b) Calculer le risque quadratique $r_\theta(Y_n)$ pour $n \geqslant 1$.

   (c) Étudier la convergence en loi de la suite $\big(\sqrt{n}(Y_n - \theta)\big)_{n\geqslant 1}$.

   (d) En déduire un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

2. (a) Soit $Z_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ pour $n \geqslant 1$. Calculer pour $n \geqslant 1$, la fonction de répartition de Z_n.

   (b) Montrer que Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ et calculer le risque quadratique $r_\theta(Z_n)$ de Z_n pour $n \geqslant 1$.

   (c) Lequel des estimateurs Z_n ou Y_n a le plus petit risque quadratique pour de grandes valeurs de n ? Que peut-on alors conjecturer sur la vitesse de convergence de ces estimateurs ?

   (d) Étudier la convergence en loi de la suite $\big(-n(Z_n - \theta)\big)_{n\geqslant 1}$.

Solution de l'exercice 3.12

1. (a) On a $Y_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ avec $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} 2x_k/n$, donc Y_n est un estimateur de θ. Une densité g de la loi uniforme est donnée par $g(x) = 0$ on $\mathbb{R}\backslash]0, \theta[$ et $g(x) = 1/\theta$ sur $[0, \theta]$. On a alors $E(X_1) = \theta/2$ et $E(Y_n) = \theta$. Ainsi, Y_n est sans biais. La suite $(2X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes (par le lemme des coalitions) admettant la même espérance $E(2X_1) = \theta$ et la même variance $V(2X_1) = 4V(X_1) = \theta^2/3$. Par la loi faible des grands nombres, la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $E(2X_1) = \theta$. L'estimateur Y_n est donc convergent.

   (b) La variance $V(Y_n)$ existe. De plus, l'estimateur Y_n est sans biais donc $r_\theta(Y_n) = V(Y_n)$. Par indépendance des variables $2X_k$, on a alors $r_\theta(Y_n) = \theta^2/(3n)$ pour $n \geqslant 1$.

   (c) La suite $(2X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. Par le théorème limite central $\sqrt{n}(Y_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X suit une loi $\mathcal{N}(0, \theta^2/3)$.

   (d) On pose $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$. D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(-t_\alpha \leqslant \sqrt{3n}\,\dfrac{Y_n - \theta}{\theta} \leqslant t_\alpha\Big) = 1 - \alpha$,

   soit encore $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(\dfrac{\sqrt{3n}}{\sqrt{3n} + t_\alpha} Y_n \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\sqrt{3n}}{\sqrt{3n} - t_\alpha} Y_n\Big) = 1 - \alpha$.

2. (a) On a $F_{Z_n}(t) = P(Z_n \leqslant t) = P\big(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant t)\big)$, pour $t \in \mathbb{R}$. Comme les X_k sont indépendantes et de même loi, on a $F_{Z_n}(x) = \big(P(X_1 \leqslant t)\big)^n$. Il vient : $F_{Z_n}(t) = 0$ si $t < 0$, $F_{Z_n}(t) = (t/\theta)^n$ si $t \in [0, \theta]$ et $F_{Z_n}(t) = 1$ si $t > \theta$.

   (b) Pour $n \geqslant 1$, une densité de Z_n est donnée par $f_{Z_n}(t) = \dfrac{n}{\theta}\Big(\dfrac{t}{\theta}\Big)^{n-1}$ pour $0 \leqslant t \leqslant \theta$ et 0 ailleurs.

   On en déduit aisément $E(Z_n) = \dfrac{n}{n+1}\theta$, $V(Z_n) = \dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$ et

   $r_\theta(Z_n) = \big(E(Z_n) - \theta\big)^2 + V(Z_n) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Z_n) = \theta$, donc, l'estimateur Z_n est asymptotiquement sans biais.

   (c) On a $r_\theta(Z_n)/r_\theta(Y_n) = 6n/[(n+1)(n+2)] \leqslant 6/n$, ainsi pour $n > 6$, $r_\theta(Z_n) < r_\theta(Y_n)$. Comme le risque quadratique estime la vitesse de convergence de l'estimateur, on peut conjecturer que Z_n converge plus vite que Y_n vers θ.

   (d) Soit $W_n = -n(Z_n - \theta)$ pour $n \geqslant 1$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $F_{W_n}(t) = P(-n(Z_n - \theta) \leqslant t)$,
   et donc $F_{W_n}(t) = P(Z_n \geqslant \theta - t/n) = 1 - P(Z_n < \theta - t/n) = 1 - P(Z_n \leqslant \theta - t/n)$ (car Z_n est à densité).
   On a donc si $t \leqslant 0$: $F_{W_n}(t) = 1 - 1 = 0 \to 0$ (car $\theta - t/n \geqslant \theta$).
   Pour $t > 0$, on a pour n suffisamment grand, $\theta - t/n > 0$ et

   $$F_{W_n}(t) = 1 - (\theta - t/n)^n/\theta^n = 1 - (1 - t/(n\theta))^n = 1 - e^{n\ln(1-t/(n\theta))} = 1 - e^{-t/\theta + o(1)} \to 1 - e^{-t/\theta}$$

   Ainsi, $(W_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la loi exponentielle de paramètre $1/\theta$.

Exercice 3.13

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que, pour tout réel $t \in [-1, 1]$, la série $\sum_{n \geqslant 0} P(X = n)t^n$ converge. On note alors G_X la fonction définie sur $[-1, 1]$ par :

$$\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

Déterminer une expression de G_X lorsque X suit la loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

On admet que la fonction G_X caractérise la loi de X, c'est-à-dire que si deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifient $G_X = G_Y$, alors X et Y ont la même loi.

2. Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que si A et B sont des événements, alors : $|P(A) - P(B)| \leqslant P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$.
   (b) En déduire que, pour tout $t \in [-1, 1]$, on a : $|G_X(t) - G_Y(t)| \leqslant 2P(X \neq Y)$.

3. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que la série $\sum_{i \geqslant 1} P(U_i \neq 0)$ converge.
On admet sans démonstration que pour toute suite d'événements $(A_i)_{i \geqslant 1}$ et pour tout les entiers n et N tels que $N \geqslant n$, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=n}^{N} A_i\right) \leqslant \sum_{i=n}^{N} P(A_i).$$

   (a) En déduire que le nombre de variables aléatoires U_i prenant une valeur non nulle est presque sûrement fini.

   Ainsi, il existe un événement A tel que $P(A) = 1$ et pour tout $\omega \in A$, la série $\sum_{i \geqslant 1} U_i(\omega)$ est convergente. On admet qu'il existe alors une variable aléatoire S à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que :

$$\forall \omega \in A,\ S(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} U_i(\omega).$$

   On note aussi $S = \sum_{i=1}^{+\infty} U_i$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$.

   (b) Montrer que, pour tout $t \in [-1, 1]$, on a : $\lim_{n \to +\infty} G_{S_n}(t) = G_S(t)$.

4. Soit $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \lambda_i$ une série convergente à termes strictement positifs. On note $\lambda = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i$.
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre λ_i.
   (a) Montrer que la série $\sum_{i \geqslant 0} P(X_i \neq 0)$ converge.

   D'après la question 3.a), on en déduit que l'on peut définir la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{+\infty} X_i$.

   (b) Montrer que X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Solution de l'exercice 3.13

1. Par théorème de comparaison car $|P(X=n)t^n| \leqslant P(X=n)$, comme la série $\sum_n P(X=n)$ converge, la série $\sum_n P(X=n)t^n$ converge absolument.

   Si X suit la loi de Poisson, on trouve : $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!} t^n = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{(t-1)\lambda}$.

2. (a) La formule des probabilités totales donne :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \quad \text{et} \quad P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}),$$

   donc par différence : $P(A) - P(B) = P(A \cap \bar{B}) - P(B \cap \bar{A}) \leqslant P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A})$.
   En échangeant A et B, on a de même : $P(B) - P(A) \leqslant P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A})$. D'où le résultat.

   (b) Par inégalité triangulaire et comme $|t| \leqslant 1$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N} P(X=n)t^n - \sum_{n=0}^{N} P(Y=n)t^n\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{N} |P(X=n) - P(Y=n)|\,|t|^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N} P((X=n)\cap(Y \neq n)) + P((Y=n)\cap(X\neq n)) \quad \text{cf. 2.a)}\end{aligned}$$

   D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$P(X \neq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=n)\cap(X\neq Y)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=n)\cap(Y\neq n)).$$

   Et $P(X \neq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((Y=n)\cap(X\neq n))$, d'où le résultat avec $N \to +\infty$ dans la majoration.

3. (a) L'événement A « le nombre de variables U_i qui prennent une valeur non nulle est fini », vaut $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{i=n}^{+\infty} (U_i = 0)$. En prenant $A_i = (U_i \neq 0)$, l'inégalité admise donne : $P\left(\bigcup_{i=n}^{N} (U_i \neq 0)\right) \leqslant \sum_{i=n}^{N} P(U_i \neq 0)$. Quand $N \to +\infty$, par continuité croissante, on en déduit : $P\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} (U_i \neq 0)\right) \leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} P(U_i \neq 0)$.
   Le membre de droite est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
   Par encadrement, on en déduit bien que $P(\bar{A}) = 0$.

   (b) Pour tout $t \in [-1,1]$, on a : $|G_S(t) - G_{S_n}(t)| \leqslant 2P(S_n \neq S)$.
   D'où le résultat voulu par encadrement car les U_i sont à valeurs positives. Donc, on a :

$$(S_n = S) = \bigcap_{i=n+1}^{+\infty} (U_i = 0) \text{ d'où } P(S_n \neq S) = P\left(\bigcup_{i=n+1}^{+\infty} (U_i \neq 0)\right) \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} P(U_i \neq 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. (a) Par théorème de comparaison car la série $\sum \lambda_i$ converge et que :

$$P(X_i \neq 0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_i} \underset{i\to+\infty}{\sim} \lambda_i \quad \text{car } \lambda_i \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (la série } \textstyle\sum \lambda_i \text{ converge).}$$

   (b) Par stabilité de la loi de Poisson, S_n suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$, donc $G_{S_n}(t) = \mathrm{e}^{(t-1)(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}$, donc $G_{S_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{(t-1)\lambda}$, soit $G_S(t) = \mathrm{e}^{(t-1)\lambda}$.
   Comme G_S caractérise la loi de S, on en déduit que S suit loi la de Poisson de paramètre λ .

EXERCICE 3.14

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\ln x)^2} & \text{si } x \geqslant \mathrm{e} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
   Soit X une variable aléatoire de densité f.

   (b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (c) Montrer que la variable aléatoire X n'admet aucun moment.

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X.

2. Pour tout entier $n \geqslant 3$ et pour tout $\omega \in \Omega$, on note $Y_n(\omega)$ le « deuxième plus petit » des nombres $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$, c'est-à-dire le deuxième lorsqu'ils sont classés par ordre croissant (au sens large).
On admet que l'on définit ainsi une variable aléatoire Y_n pour tout $n \geqslant 3$.

   (a) Exprimer la fonction de répartition G_n de Y_n.

   (b) En déduire que Y_n est une variable à densité et montrer qu'une densité de Y_n est la fonction g_n donnée par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{x(\ln x)^n}\left(1 - \dfrac{1}{\ln x}\right) & \text{si } x \geqslant \mathrm{e} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

   (c) Montrer que la variable aléatoire $Z_n = \ln(Y_n)$ admet une espérance et calculer sa valeur.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$T_n = \big(\max(X_1, \ldots, X_n)\big)^{\frac{1}{n}}.$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition H_n de T_n.

   (b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Solution de l'exercice 3.14

1. (a) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\mathrm{e}\}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{\ln x} \Big]_{\mathrm{e}}^{+\infty} = 1$.

   (b) Le calcul donne : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \mathrm{e} \\ 1 - \dfrac{1}{\ln x} & \text{si } x \geqslant \mathrm{e}. \end{cases}$

   (c) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, par croissances comparées, on a : $x \times x^r f(x) = \dfrac{x^r}{(\ln x)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Donc $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(x^r f(x))$ et tout est positif ; donc par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge (en $+\infty$). Donc, par théorème de transfert, X^r n'a pas d'espérance, donc X n'admet aucun moment.

2. (a) Il est clair que Y_n est à valeurs dans $[\mathrm{e}, +\infty[$, donc $G_n(x) = 0$ si $x < \mathrm{e}$.
   Pour tout $x \geqslant \mathrm{e}$, soit U_x la variable aléatoire qui compte le nombre de variables X_i qui prennent une valeur inférieure ou égal à x. Alors U_x suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p = P(X \leqslant x) = F(x)$. Donc :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= 1 - P(Y_n > x) = 1 - P(U_x \leqslant 1) = 1 - P(U_x = 0) - P(U_n = 1) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\ln x}\right)^n - n\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{n-1} = 1 - \frac{n}{(\ln x)^{n-1}} + \frac{n-1}{(\ln x)^n}. \end{aligned}$$

   (b) La fonction G_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\mathrm{e}\}$ et le raccordement est continu en e, donc Y_n est une variable à densité. D'où une densité par dérivation (et valeur arbitraire en $x = \mathrm{e}$), donnée par $g_n(x) = 0$ si $x < \mathrm{e}$ et :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e},\ g_n(x) = \frac{n(n-1)}{x(\ln x)^n} - \frac{(n-1)n}{x(\ln x)^{n+1}} = \frac{n(n-1)}{x(\ln x)^n}\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right).$$

   (c) La densité g_n de Y_n est nulle en dehors de $[\mathrm{e}, +\infty[$ et la fonction ln est continue sur cet intervalle. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire Z_n admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} (\ln x) g_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, ce qui est le cas car :

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} (\ln x) g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{n}{n-2}\, g_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n-2}. \text{ Donc : } E(Z_n) = \frac{n}{n-2}.$$

3. (a) Pour tout $x < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, on a $H_n(x) = 0$ et pour $x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, par indépendance des X_k, on a :

$$H_n(x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant x^n)\right) = F(x^n)^n = \left(1 - \frac{1}{\ln(x^n)}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n \ln x}\right)^n.$$

   (b) Si $x \leqslant 1$, alors $x < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ pour tout n, donc $H_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = 0$.
   Si $x > 1$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = 1$, alors pour n assez grand, on a $x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$. Alors , quand $n \to +\infty$:

$$H_n(x) = \exp\big(n \ln(1 - 1/\ln x)\big) = \exp\big(n(-1/n \ln x + \mathrm{o}\,(1/n)\big) = \exp\big(-1/\ln x\big) \times \mathrm{e}^{\mathrm{o}(1)}.$$

   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = \exp\big(-1/\ln x\big)$, qui se dérive en $x \mapsto 1/x(\ln x)^2 \exp(-1/\ln x)$.

   Or, $h(x) = \begin{cases} 1/x(\ln x)^2 \exp(-1/\ln x) & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$ est une densité. Elle est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\exp\Big(-1/\ln x\Big) \Big]_1^{+\infty} = 1$.

   Donc la suite (T_n) converge en loi vers une variable aléatoire T à densité dont une densité est h.

EXERCICE 3.15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\quad f(x) = \frac{\sin(2\pi \ln(x))}{x\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\ln^2(x)/2}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel k, on a :

$$\int_0^{+\infty} x^k f(x) dx = 0.$$

   On pourra effectuer un changement de variable $u = \ln x - k$ en le justifiant.

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $X = \mathrm{e}^Y$.
   Montrer que X est une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\ln^2(x)/2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Soit a un réel tel que $|a| \leqslant 1$. On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_a(x) = \begin{cases} (1 + a\sin(2\pi \ln(x))) \times g(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que f_a est une densité.

4. Soit Y_a une variable aléatoire à densité de densité f_a. Montrer que pour tout entier naturel k, on a :

$$E(Y_a^k) = E(X^k).$$

   En déduire qu'il existe une infinité de lois distinctes qui ont les mêmes moments de tout ordre.

Solution de l'exercice 3.15

1. L'application qui à x associe $x^k f(x)$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$. On applique le changement de variable $x \mapsto \ln x - k$ qui est une fonction strictement croissante et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. On obtient que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, f(x)dx$ est de même nature que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{k(u+k)}\, \frac{\sin(2\pi(u+k))}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(u+k)^2/2} du$$
soit
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi u))}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(u^2-k^2)/2} du$$
Or en $+\infty$, la fonction sous l'intégrale est en valeur absolue négligeable devant $1/u^2$ d'où l'absolue convergence donc la convergence de l'intégrale en $+\infty$. De plus, la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(2\pi u))}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(u^2-k^2)/2}$ est impaire ; on en conclut que l'intégrale est convergente et vaut 0, d'où le résultat.
2. On a $X(\Omega) = \mathbb{R}_*^+$. On détermine la fonction de répartition de X. Pour $x > 0$, on a :
$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(Y \leqslant \ln x) = \Phi(\ln x)$$
où Φ est la fonction de répartition de Y. Par conséquent,
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_X(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On en déduit que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc X est une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction g.
3. La fonction f_a est positive sur $\mathbb{R}$. En effet pour x négatif, la fonction est nulle et si x est positif, le sinus étant en valeur absolue inférieur à 1 et puisque $|a| \leqslant 1$, on a $1 + a\sin(2\pi \ln(x)) \geqslant 0$. Comme la fonction g, en tant que densité, est positive, il en résulte que f_a est positive. De plus, f_a est continue sur $\mathbb{R}^*$. Enfin $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx$ revient à $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)dx$, soit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(g(x) + af(x)\big)dx$. Or, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ sont convergentes ; par linéarité on obtient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx = \int_0^{+\infty} g(x)dx + a\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1.$$
Par conséquent, f_a est une densité.
4. $E(Y_a^k)$ existe si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_a(x)dx$ existe. En utilisant la linéarité des intégrales convergentes, on obtient :
$$E(Y_a^k) = \int_0^{+\infty} x^k g(x)dx + a\int_0^{+\infty} x^k f(x)dx = E(X^k).$$
Par conséquent, X et Y_a ont les mêmes moments et pourtant n'ont pas la même loi.

Exercice 3.16

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante de limite 0. Soit la suite (S_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

1. Montrer que les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes de limite S et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S - S_n| \leqslant u_{n+1}$ et en déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$.

   Quelle est sa somme ?

   Les membres d'un groupe de n personnes (avec $n \geqslant 2$) veulent se faire des cadeaux mutuels. Pour cela, chacun achète un cadeau, et le met dans un paquet, les paquets étant indiscernables. Les cadeaux sont mis dans un pot commun, puis chacune des n personnes choisit au hasard un cadeau dans le pot commun.

   On note a_n le nombre de façons possibles d'attribuer les n cadeaux sans que personne ne reçoive son propre cadeau.
3. Calculer a_2 et a_3.
4. On admet provisoirement la relation : pour tout $n \geqslant 4$, $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a :

   $$a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   (b) Calculer la probabilité p_n qu'une répartition aléatoire des n cadeaux donne une répartition où chaque personne reçoit bien le cadeau d'une autre personne.

   (c) A quelle condition sur n peut-on dire que $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ est une approximation de p_n à 10^{-3} près ?
5. Établir la relation admise dans la question précédente, c'est-à-dire :

$$\forall\, n \geqslant 4,\ a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$$

Solution de l'exercice 3.16

1. La décroissance de la suite (u_n) entraîne :
   - $S_{2n+1} - S_{2n-1} = -u_{2n+1} + u_{2n} \geqslant 0$ donc $(S_{2n-1}))$ est croissante.
   - $S_{2n} - S_{2n-2} = u_{2n} - u_{2n+1} \leqslant 0$ donc (S_{2n}) est décroissante.
   - $|S_{2n} - S_{2n-1}| = u_{2n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

   Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ; elles convergent vers la même limite S et on a :
   $$S_{2n-1} \leqslant S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$
2. On en déduit :
   - $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \Rightarrow S_{2n+1} - S_{2n} \leqslant S - S_{2n} \leqslant 0 \Rightarrow |S_{2n} - S| \leqslant u_{2n+1}$.
   - $S_{2n-1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \Rightarrow 0 \leqslant S - S_{2n-1} \leqslant S_{2n} - S_{2n-1} \Rightarrow |S_{2n-1} - S| \leqslant u_{2n}$.

   donc pour tout $n \in \mathbb{N},\ |S - S_n| \leqslant u_{n+1}$
3. On a : $a_2 = 1$ $((x, y) \to (y, x))$ et $a_3 = 2$ $((x, y, z) \to (y, z, x)$ ou $(z, x, y))$.
4. (a) Par récurrence double sur $n \geqslant 2$, on montre $a_n = n!S_n$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   - pour $n = 2$, on bien $a_2 = 1 = 2!(1 - 1 + \frac{1}{2}) = 2!S_2$.
   - pour $n = 3$, on bien $a_3 = 2 = 3!S_3 = 2$.
   - On suppose : $a_{n-1} = (n-1)!S_{n-1}$ et $a_{n-2} = (n-2)!S_{n-2}$. Alors :
   $$\begin{aligned} a_n &= (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) = (n-1)[(n-1)!S_{n-1} + (n-2)!S_{n-2}] \\ &= (n-1)(n-1)![\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + S_{n-2}] + (n-1)!S_{n-2} \\ &= (n-1)(-1)^{n-1} + n!S_{n-2} \\ &= (n-1)(-1)^{n-1} + n![S_n - \frac{(-1)^n}{n!} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}] \\ &= (n-1)(-1)^{n-1} + n!S_n - (n-1)(-1)^{n-1} \\ &= n!S_n \end{aligned}$$

   (b) Il y a $n!$ répartitions de n personnes (permutations) parmi lesquelles a_n sont des répartitions où chaque personne reçoit bien le cadeau d'une autre personne, soit $p_n = \dfrac{a_n}{n!}$.

   (c) On reconnaît en $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ la somme de la série exponentielle qui vaut $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. On peut appliquer les résultats de la question 2 à la suite $(u_n) = \left(\dfrac{1}{n!}\right)$. On a $p_n = S_n$ et on obtient : $\left|\dfrac{1}{\mathrm{e}} - p_n\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$.
   Donc, pour que $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ approche p_n à 10^{-3} près il suffit de prendre $n \geqslant 6$ (car $6! = 720 < 10^3 < 7!$).
5. Le problème proposé possède plusieurs formes équivalentes. Ils se modélisent tous de la façon suivante : déterminer le nombre a_n de permutations sans point fixe dans l'ensemble des permutations sur $[\![1, n]\!]$.
   Soit $n \geqslant 2$ et σ une permutation sans points fixe de $[\![1, n]\!]$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $j = \sigma(i)$.
   On distingue deux cas :
   - $\sigma(j) = i$. Les $(n-2)$ autres éléments de la permutations réalisent une permutation sans point fixe de $[\![1, n-2]\!]$. Il y en a a_{n-2}.
   - sinon $\sigma(j) = k \neq i$. Si on retire j, tout se passe comme si j était absent et que $\sigma(i) = k$. Il y a alors a_{n-1} permutations sans point fixe.

   Dans les deux cas, il y a $n - 1$ choix de j on a donc $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$.

Exercice 3.17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in]0,1[$ tel que $p \neq \dfrac{1}{2}$; on pose $q = 1 - p$. Soit $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de $n+1$ variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $Y_k = f(|X_k - X_{k+1}|)$.
   Déterminer la loi de Y_k. Donner son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que la covariance de Y_k et Y_{k+1} est donnée par : $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = pq(1-4pq)$.
3. Soit $(i,j) \in [\![0, n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Étudier l'indépendance de Y_i et Y_j.
4. Exprimer en fonction de $a = 2pq(1-2pq)$ et $b = pq(1-4pq)$ la matrice de covariance C définie par :
   $$C = (\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j))_{0 \leqslant i,j \leqslant n} .$$
5. Pour $n = 2$, diagonaliser la matrice C.

Solution de l'exercice 3.17

1. La variable $Y_k = f(|X_k - X_{k+1}|)$ prend les valeurs $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Y_k = 1) = 2pq$. Et, par incompatibilité puis indépendance :
$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}((X_k = 0) \cap (X_{k+1} = 1)) \cup ((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0)) = 2pq.$$
Ainsi, $\mathbb{E}(Y_k) = 2pq$ et $V(Y_k) = 2pq(1 - 2pq)$.
2. Par Koenig-Huyghens, on a : $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = \mathbb{E}(Y_k Y_{k+1}) - \mathbb{E}(Y_k)\mathbb{E}(Y_{k+1})$.
Or, $T_k = Y_k Y_{k+1}$ prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_k) &= \mathbb{P}(T_k = 1) = \mathbb{P}((Y_k = 1) \cap (Y_{k+1} = 1)) \\ &= \mathbb{P}\Big(\big((X_k = 0) \cap (X_{k+1} = 1) \cap (X_{k+2} = 0)\big) \cup \big((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0) \cap (X_{k+2} = 1)\big)\Big) \\ &= p^2q + q^2p = pq.\end{aligned}$$
Ainsi, $\mathrm{Cov}\,(Y_k, Y_{k+1}) = pq(1 - 4pq)$.
3.
   - Si $|j - i| \geqslant 2$, le lemme des coalitions donne l'indépendance de Y_i et Y_j.
   - Sinon, par symétrie de la covariance, on peut supposer que $j > i$ et alors $j = i + 1$.
   Dans ce cas, d'après la question précédente, il n'y a pas indépendance car
   $$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = pq(1 - 4pq) \neq 0 \text{ car } p, q \neq 0 \text{ et } pq \neq \frac{1}{4}.$$
   En effet, par l'étude de la fonction $p \mapsto p(1 - p)$, on a : $p(1 - p) = \dfrac{1}{4} \iff p = \dfrac{1}{2}$.
4. On a $V(Y_k) = 2pq(1 - 2pq) = a$ et $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = pq(1 - 4pq) = b$. Donc, la matrice C est une matrice tridiagonale à $n + 1$ lignes et $n + 1$ colonnes, avec des a sur sa diagonale principale, des b juste au-dessus et juste au-dessous, et des 0 partout ailleurs.
5. Pour $n = 2$, on a : $C = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$.
Ainsi, C est diagonalisable en base orthonormée, car elle est symétrique réelle.
Comme $b \neq 0$, les valeurs propres de C sont les réels λ tels que le système suivant admette d'autres solutions que la solution nulle :
$$\begin{cases} (a - \lambda)x + by &= 0 \\ bx + (a - \lambda)y + bz &= 0 \\ by + (a - \lambda)z &= 0 \end{cases}$$
Donc soit $\lambda = a$ et $y = 0$ et $x + z = 0$, soit $\lambda \neq a$ et $z = x = -\dfrac{by}{a - \lambda}$ avec :
$$-2\frac{b^2}{a - \lambda} + (a - \lambda) = 0 \iff (a - \lambda)^2 = 2b^2 \iff \lambda = a \pm b\sqrt{2} \neq a.$$
Comme $b \neq 0$, on a donc $\mathrm{Sp}\,(C) = \{a - b\sqrt{2}, a, a + b\sqrt{2}\}$.
et : $E_a = \mathrm{Vect}(1, 0, -1)$, $E_{a-b\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $E_{a+b\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
D'où une base orthonormée : $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $w_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$, $w_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$
(les vecteurs de base initiaux étaient déjà deux à deux orthogonaux car les sous-espaces propres le sont ; et cela reste valable si $b = 0$).

Exercice 3.18

Soit une suite réelle (u_n) vérifiant $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0,1]$. On définit alors la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est décroissante, positive et convergente.
   Donner un encadrement de sa limite ℓ.
2. Montrer que s'il existe $k \in]0,1[$, tel qu'à partir d'un certain rang, on ait : $u_n \leqslant k$, alors $\ell = 0$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Y_0 est la variable certaine égale à 1 et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable Y_n suit une loi de Bernoulli dont le paramètre est noté r_n (avec $r_n \in]0,1[$). On pose également $r_0 = 1$. On suppose encore que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}_{(Y_n=0)}\left(Y_{n+1} = 1\right) = 0.$$

On pose alors $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \mathbb{P}_{(Y_{n-1}=1)}\left(Y_n = 1\right).$$

3. Pour tout entier naturel n, exprimer r_n en fonction de v_n.
4. Dans cette question seulement on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{1}{n}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_k$.

   Calculer la limite de la suite $(E(S_n))_n$.
5. Pour tout entier naturel $n_0 \geqslant 1$, à quelle condition nécessaire et suffisante sur la suite (u_n), les variables aléatoires Y_{n_0} et Y_{n_0-1} sont-elles indépendantes ?
6. Soit l'événement $A = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Y_n = 1)$. Exprimer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de ℓ.

Solution de l'exercice 3.18

1. Comme $u_n \in [0,1]$, on obtient $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 1$ (par récurrence évidente).
   Ainsi, la suite (v_n) est décroissante et positive, donc converge d'après le théorème de la limite monotone.
   De plus, en passant à la limite dans l'inégalité $0 \leqslant v_n \leqslant 1$, on a $\ell \in [0,1]$.
2. Si $0 \leqslant u_n \leqslant k$ avec $k \in]0,1[$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors par récurrence évidente, on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant v_n \leqslant k^{n-n_0} v_{n_0}.$$

   Donc, par théorème d'encadrement, la suite (v_n) converge vers 0.
3. Montrons récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation $r_n = v_n$.
   - On a $r_0 = 1 = u_0$ dans l'énoncé.
   - Soit n tel que $r_n = v_n$. Alors, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) = \mathbb{P}_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 1)\,\mathbb{P}([Y_n = 1]) + \mathbb{P}_{[Y_n=0]}(Y_{n+1} = 1)\,\mathbb{P}(Y_n = 0) \\ &= u_{n+1} v_n + 0 = v_{n+1}. \end{aligned}$$

4. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} E(Y_k) = \sum_{k=0}^{n} v_k$.
   Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$, alors $v_n = \dfrac{1}{n!}$ pour $n \geqslant 0$.
   Donc $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to \mathrm{e}$, lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Comme Y_{n_0} et Y_{n_0-1} suivent des lois de Bernoulli, elles sont indépendantes si et seulement si les évènements $(Y_{n_0} = 1)$ et $(Y_{n_0-1} = 1)$ le sont, soit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(Y_{n_0-1}=1)}(Y_{n_0} = 1) = \mathbb{P}(Y_{n_0} = 1) \\ \Longleftrightarrow\ & u_{n_0} = v_{n_0} \\ \Longleftrightarrow\ & u_{n_0} = v_{n_0-1} u_{n_0} \\ \Longleftrightarrow\ & v_{n_0-1} = 1 \text{ ou } u_{n_0} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & u_0 = \cdots = u_{n_0-1} = 1 \text{ ou } u_{n_0} = 0. \end{aligned}$$

6. Comme A est l'intersection décroissante des événements $B_n = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} [Y_k = 1]$ alors, d'après le théorème de continuité décroissante, on a : $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.
   Or l'hypothèse $\mathbb{P}_{(Y_k=0)}(Y_{k+1} = 1) = 0$ signifie que $P((Y_k = 0) \cap (Y_{k+1} = 1)) = 0$,
   soit $(Y_{k+1} = 1) \subset \overline{(Y_k = 0)} = (Y_k = 1)$ presque sûrement. Ainsi $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.
   Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(B_n) = v_n$ et donc $\mathbb{P}(A) = \ell$

Exercice 3.19

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.

Au départ, (instant $t = 0$), le mobile se trouve sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant $t = n$ (avec $n \geqslant 1$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \ldots, n$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).

On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que (X_n) est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la loi de X_n ainsi que son espérance et sa variance.
2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[Y = n]$ à l'aide des variables aléatoires (X_i).
   (b) En déduire la loi de Y.
   (c) Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.
   (d) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?
3. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Déterminer pour tout couple (i, j) d'entiers, la probabilité $P_{[Y=i]}(Z = j)$.
   (b) Écrire, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(Z = j)$ comme une somme finie.
   (c) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?

Solution de l'exercice 3.19

1. D'après l'énoncé, X_n suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$. On sait que $E(X_n) = \dfrac{n}{2}$ et $V(X_n) = \dfrac{n(n+2)}{12}$.
2. (a) Le mobile revient au point d'abscisse 0 pour la première fois à l'instant n si, et seulement si, il ne s'y trouve pas pendant les $n-1$ premiers déplacements puis s'il se déplace sur l'origine lors de son n-ième déplacement. On a donc $[Y = n] = [X_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [X_{n-1} \neq 0] \cap [X_n = 0]$.

   (b) L'énoncé indique que les variables (X_i) sont mutuellement indépendantes (c'est normal puisque la position du mobile à un instant quelconque ne dépend pas de sa position aux instants précédents). On a donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$P(Y = n) = \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i \neq 0) P(X_n = 0) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

   (c) On écrit $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ et en passant aux sommes partielles, on montre le résultat demandé.

   (d) Comme $nP(Y = n) \sim \dfrac{1}{n}$, la variable aléatoire Y n'a pas d'espérance.
3. (a) Le deuxième retour à l'origine a lieu strictement après le premier, donc $P_{[Y=i]}(Z = j) = 0$ si $j \leqslant i$.
   - On a $P_{[Y=i]}(Z = i+1) = P(X_{i+1} = 0) = \dfrac{1}{i+2}$.
   - pour $i \leqslant j-2$,

$$P_{[Y=i]}(Z = j) = \frac{P((X_{i+1} \neq 0) \cap \ldots \cap (X_{j-1} \neq 0) \cap (X_j = 0) \cap (Y = i))}{P(Y = i)}$$

   et, par indépendance des variables aléatoires en jeu :

$$P_{[Y=i]}(Z = j) = \prod_{k=i+1}^{j-1} P(X_k \neq 0) \times P(X_j = 0) = \frac{i+1}{j(j+1)}$$

   Ce dernier résultat reste valable pour $P_{[Y=i]}(Z = i+1)$.

   (b) Il faut au moins deux déplacements pour se trouver pour la deuxième fois à l'origine,
   donc $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.
   Pour tout entier naturel $j \geqslant 2$, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(Y = i)_{i \geqslant 1}$ s'écrit :

$$P(Z = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P_{[Y=i]}(Z = j) P(Y = i) = \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}$$

   (c) Comme Y n'a pas d'espérance, Z ne possède pas d'espérance car $0 < Y < Z$.

Exercice 3.20

On note E l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2$ converge.

Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on pose : $u = (u_n)$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.
2. (a) Soit $((a_n)_{n\geqslant 0}, (b_n)_{n\geqslant 0})$ deux suites de E. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ est absolument convergente.

   (b) Soit φ l'application qui à tout couple de suites $((a_n), (b_n))$ de E^2, associe le réel $\varphi(a, b) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.

   Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

   Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire X définie sur cet espace vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si :

   - $X(\Omega) = \mathbb{N}$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}, u_k = P(X = k) > 0$;
   - X admet un moment d'ordre 2 ;
   - la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(u_k - u_{k-1})^2}{u_k}$ converge, avec $u_{-1} = 0$ et on note $I(X)$ la somme de cette série.

3. Montrer que si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors X vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Calculer $I(X)$ et comparer $I(X)V(X)$ et 1, où $V(X)$ désigne la variance de X.
4. Soit X une variable aléatoire vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.

   (a) Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} (u_k - u_{k-1})(k - E(X))$ converge et calculer sa somme.

   (b) Montrer que $1 \leq I(X)V(X)$.

Solution de l'exercice 3.20

1. L'ensemble E contient la suite nulle et si a et b sont deux suites de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, (a_n+\lambda b_n)^2 = a_n^2 + 2\lambda a_n b_n + \lambda^2 b_n^2$ et $(|a_n| - |b_n|)^2 \geq 0$ donne $|a_n b_n| \leqslant \dfrac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$.
   Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $a_n b_n$ est absolument convergente. Par suite, $a + \lambda b$ est bien dans E, de même que la suite nulle.
2. (a) On vient de démontrer ce résultat à la question précédente.
   (b) Ainsi, φ est bien définie. Elle est symétrique, bilinéaire et définie positive. Vérification immédiate.
3. Si X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. Les deux premières propriétés sont vérifiées et $E(X) = V(X) = \lambda$. Ensuite pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{(u_k - u_{k-1})^2}{u_k} = u_k - 2u_{k-1} + \dfrac{u_{k-1}^2}{u_k}$.
   Et
   $$\frac{u_{k-1}^2}{u_k} = \frac{\lambda^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda}k}{(k-1)!} = \frac{\lambda^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda}(k-1)}{(k-1)!} + \frac{\lambda^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-1)!}$$
   Ainsi $\dfrac{u_{k-1}^2}{u_k}$ est la somme de deux séries convergentes. La troisième propriété est donc vérifiée. De plus, $S = I(X) = 1 - 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-1)!} = 1 - 2 + 1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$.
   Donc, $I(X)V(X) = 1$.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k-1})(k - E(X)) = \sum_{k=0}^{n}(ku_k - (k-1)u_{k-1} - u_{k-1}) - E(X)\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k-1})$$
   Puis, $S_n = nu_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k - E(X)u_n$. Or, X admet une espérance donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nu_n$ converge.
   Donc, la suite (nu_n) tend vers 0. De même, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et sa somme vaut 1.
   Donc, la suite (u_n) tend vers 0. Ainsi, la suite (S_n) a pour limite -1.
   Par suite, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k - u_{k-1})(k - E(X)) = -1$.
   (b) $V(X) = E((X - E(X))^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(k - E(X))^2$, par le théorème de transfert.
   En posant pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = \dfrac{u_k - u_{k-1}}{\sqrt{u_k}}$ et $b_k = \sqrt{u_k}(k - E(X))$, on sait que (a_n) et (b_n) sont dans E donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k^2\right)$$
   ou $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k - u_{k-1})(k - E(X))\right)^2 \leqslant I(X)V(X)$. Donc, $1 \leqslant I(X)V(X)$.

Chapitre 4

Option B/L

Exercice 4.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2 et soit u un endomorphisme non nul de E pour lequel il existe un entier naturel $p \geqslant 2$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1. Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Soit q un entier vérifiant $0 \leqslant q \leqslant p-1$ et $x \in E$ tel que $u^q(x) \neq 0$.
   Justifier l'existence d'un tel vecteur x. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^q(x))$ est une famille libre de E.
3. On note Id l'endomorphisme identité de E et soit v l'endomorphisme de E défini par :

$$v = Id + u + \frac{u^2}{2!} + \cdots + \frac{u^{p-1}}{(p-1)!}$$

   Montrer que v est bijectif.
4. Déterminer un lien entre $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v - Id)$.
5. En déduire les valeurs propres de v. L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

Solution de l'exercice 4.1

1. Si $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors pour tout $k \geqslant 1, u^k(x) = \lambda^k x$ ce qui entraîne que $\lambda^p = 0$ et $\lambda = 0$. Réciproquement, 0 est valeur propre de u, car sinon, u^{-1} existerait et par composition on aurait $u = 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}\,(u) = \{0\}$ et u n'est pas diagonalisable car autrement, u serait nul.
2. Par l'absurde si, pour tout $x \in E$, $u^q(x) = 0$, alors $u^q = 0$ en contradiction avec $u^{p-1} \neq 0$. Par définition de $u^{p-1} \neq 0$, il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Comme $q \leqslant p-1$, on a $u^q(x) \neq 0$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k u^k(x) = 0$. En composant par u^{p-1}, il vient $a_0 = 0$, puis par u^{p-2}, on obtient $a_1 = 0$, etc.
3. Montrons que $\mathrm{Ker}(v) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$ et supposons $x \neq 0$. Alors :
$$x + \frac{u(x)}{1!} + \frac{u^2(x)}{2!} + \cdots + \frac{u^{p-1}(x)}{(p-1)!} = 0$$
Soit q le plus grand entier tel que $u^q(x) \neq 0$, c'est-à-dire tel que $u^q(x) \neq 0$ et $u^k(x) = 0$, pour $k \geqslant q+1$. On a alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{q} \frac{u^j(x)}{j!} = 0$, en contradiction avec la question précédente. Donc $x = 0$.
On pourrait aussi montrer, en effectuant un produit de deux polynômes, que la réciproque de v est $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{u^k}{k!}$.
4. Il est évident que $\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(v - Id)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(v - Id)$ et si $u(x) \neq 0$, on note q le plus grand entier tel que $u^q(x) \neq 0$. Le même raisonnement que précédemment aboutit à une contradiction. Donc $u(x) = 0$.
5. Soit λ une valeur propre de u. Alors $v(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda^k}{k!}\right) x$. Comme 0 est la seule valeur propre de u, 1 est valeur propre de v.
Réciproquement, si λ est valeur propre de v, alors
$$(1-\lambda)x + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{u^k(x)}{k!} = 0$$
Le même raisonnement que dans les deux questions précédentes, montre que si $\lambda \neq 1$, on obtient une contradiction concernant la liberté de la famille $(x, u(x), \ldots, u^q(x))$. Donc $\lambda = 1$.
L'endomorphisme v n'est pas diagonalisable car sinon, v serait égal à l'identité et u serait nul.

EXERCICE 4.2

1. Soit a un réel positif ou nul. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'équation d'inconnue x réel : $x^n + n^a x - 1 = 0$. Montrer que cette équation admet une seule solution sur $\mathbb{R}^{+*}$. On la note x_n.
2. Étudier la convergence de la suite (x_n).
3. On suppose $a > 0$.
   (a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{1/n^a} = 1$.
   (b) Soit $b > 0$. Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum x_n, \quad \sum \ln(x_n), \quad \sum \ln(1 + x_n^b), \quad \sum \left(x_n - \frac{1}{n^a} \right)$$

Solution de l'exercice 4.2

1. On étudie $f_n : x \to x^n + n^a x - 1$. Sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n(0)f_n(1) < 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. Comme $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$ pour n assez grand, on a alors $x_n < \dfrac{1}{2}$. On sait que $x_n^n + n^a x_n = 1$, donc :
$$0 < x_n = \frac{1 - x_n^n}{n^a} \leqslant \frac{1}{n^a}.$$
Ainsi, si $a > 0$, par encadrement, on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.
Si $a = 0$, on a $f_n(x) = x^n + x - 1$. En étudiant $f_{n+1}(x_n) < 0$, on montre que la suite (x_n) est croissante. Elle est majoré par 1 et donc converge. Supposons que $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$.
Si $\ell < 1$, comme $0 < x_n < \ell$ par croissance, on a $\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$: contradiction. Donc $\ell = 1$.

3. (a) On a $x_n = \dfrac{1 - x_n^n}{n^a}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, on a $0 < x_n < 1/2$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. Ceci prouve que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{1/n^a} = 1$.

   (b) La série $\sum x_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^a}$. On peut également conclure avec un critère de comparaison car $0 < x_n < 1/2 \Longrightarrow 1/n^a - 1/n^a 2^n < x_n < 1/n^a$.
   La série $\sum \ln(x_n)$ diverge grossièrement.
   On sait que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Donc si $b > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x_n^b)}{x_n^b} = 1$ et la série $\sum \ln(1+x_n^b)$ se comporte comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{ab}}$ (ou bien, par comparaison).
   Enfin, comme $x_n - \dfrac{1}{n^a} = -\dfrac{x_n^n}{n^a}$ et comme $x_n < 1/2$, alors $\left|x_n - \dfrac{1}{n^a}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et la série $\sum \left(x_n - \dfrac{1}{n^a}\right)$ converge.

Exercice 4.3

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{2\mathrm{e}^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Faire une étude rapide de la fonction f : domaine de définition, variations, limites aux bornes du domaine de définition, asymptotes éventuelles.
2. On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   On admet que, pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f(t) > t$.
   Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).
3. On considère l'application G définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ G(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

   Étudier les variations de G.
   Étudier la limite éventuelle de la suite $(G(u_n))$.

Solution de l'exercice 4.3

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et $f'(t) = \dfrac{2e^t(t^2-t+1)}{(1+t^2)^{3/2}}$. Son signe est celui de $t^2-t+1>0$.
   La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   De plus, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$, par croissances comparées.
   La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.
2. Comme f est à valeurs positives et $u_n \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Comme $f(t) \geqslant t$, alors la suite (u_n) est croissante. Si elle est majorée, elle converge vers une limite ℓ telle que $f(\ell)=\ell$ ce qui n'est pas possible au vu de la proposition admise. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Comme f est continue, elle admet une primtive F et la fonction G est de classe C^1 d'après le théorème fondamental du calcul intégral puisque $G(x)=F(x)-F(-x)$. Alors :

$$G'(x) = f(x)+f(-x) = 2\frac{e^x+e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

   Donc, la fonction G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ est convergente car $|f(t)| \leqslant 2e^t$, donc $F(-u_n)$ converge quand n tend vers $+\infty$.
   Mais l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ tend vers $+\infty$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} tf(t)=+\infty$, donc $F(u_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
   Ainsi, la suite de terme général $G(u_n)=F(u_n)-F(-u_n)$ est divergente et tend vers $+\infty$.

Exercice 4.4

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

   $$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n).$$

   (b) On suppose que la série $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.

   (c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance.
   Démontrer alors que la suite $\big(n\mathbb{P}(X > n)\big)$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge et enfin que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

2. *Une application* : soit n et N deux entiers naturels non nuls. On dispose d'une urne qui contient N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue dans cette urne, n tirages successifs avec remise d'une boule et on note X le plus grand nombre obtenu.

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$. En déduire la loi de X.

   (b) A l'aide des questions précédentes, déterminer l'espérance de X en fonction de n et N.

Solution de l'exercice 4.4

1. (a) La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\mathbb{P}(X>j) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X>k)(k+1-k)\right) + \mathbb{P}(X>0) - n\mathbb{P}(X>n)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n)
\end{aligned}$$

(b) Si on suppose la série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(X>k)$ convergente, alors, la question précédente donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$.

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}(X>k)$ est majorée et croissante.

La série est donc convergente mais aussi absolument convergente et X admet ainsi une espérance.

(c) On suppose que X admet une espérance, alors la série $\sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}(X=k)$ est convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant n\mathbb{P}(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$.

Ce dernier terme étant le reste d'une série convergente, il tend donc vers 0. Le théorème d'encadrement donne alors : $\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = 0$.

En utilisant l'égalité de la question 1.(a), on obtient alors successivement que la série $\sum_{k\leqslant 0}\mathbb{P}(X>k)$ converge puis que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$.

2. (a) On a tout d'abord : $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$.

On note E_i la variable aléatoire qui donne le résultat du i-ième tirage. Cette variable suit une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(X \leqslant k) = \mathbb{P}\left((E_1 \leqslant k)\cap \ldots \cap (E_n \leqslant k)\right) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$ par indépendance des tirages (remise). Par suite, $\mathbb{P}(X>k) = 1-\left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

Pour tout entier $k \in [\![1, N]\!]$, on en déduit : $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X\leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1) = \dfrac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$.

(b) La variable aléatoire X étant finie, elle admet une espérance. On a :

$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k) = \sum_{k=0}^{N-1}\left(1-\left(\dfrac{k}{N}\right)^n\right) = N - \sum_{k=0}^{N-1}\left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

EXERCICE 4.5

On considère un dé bien équilibré à 6 faces. On lance ce dé jusqu'à obtenir les six faces et on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers.

On suppose que l'expérience est modélisée avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que X est la somme de 6 variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois géométriques dont on précisera les paramètres respectifs.
2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère un dé bien équilibré à n faces et on note X_n le nombre de lancers nécessaires pour obtenir les n faces.

   Montrer que X_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois géométriques dont on précisera les paramètres respectifs.
3. Exprimer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ sous forme de sommes.
4. *On rappelle* que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E\Big(\dfrac{X_n}{n\ln(n)}\Big)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V\Big(\dfrac{X_n}{n\ln(n)}\Big)$.

Solution de l'exercice 4.5

1. Au premier lancer, on obtient un numéro d'une face. On note Y_1 la variable aléatoire constante égale à 1 que l'on peut considérer comme suivant une loi géométrique de paramètre 1. Puis on continue les lancers jusqu'à obtenir un autre numéro que le premier obtenu, ce qui se produit avec une probabilité 5/6. Donc, le nombre de lancers nécessaires Y_2 correspond à une loi géométrique de paramètre 5/6 et ainsi de suite, on définit la variable aléatoire Y_i suivant une loi géométrique de paramètre $(7-i)/6$ et on a :

$$X = \sum_{i=1}^{6} Y_i.$$

L'indépendance des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_6$ provient de l'indépendance des lancers.

2. Le même raisonnement donne :

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ où } Y_i \text{ suit la loi } \mathcal{G}\Big(\frac{n-i+1}{n}\Big), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

3. On a par linéarité de l'espérance et changement d'indice :

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Par indépendance des variables, on a :

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = n \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{j^2}.$$

4. On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} E\Big(\frac{X_n}{n \ln(n)}\Big) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1\,.$$

Par ailleurs :

$$V\Big(\frac{X_n}{n \ln n}\Big) = \frac{1}{n^2 \ln^2 n} n \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{j^2} = \frac{1}{\ln^2 n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} - \frac{1}{n \ln n} \times \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\,.$$

La série $\displaystyle\sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{j^2}$ est convergente, donc, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = 0$ et puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 1$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n \ln n} \times \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 0$. Par suite, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} V\Big(\frac{X_n}{n \ln n}\Big) = 0$.

Exercice 4.6

Soit m un entier naturel non nul. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_m[x]$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à m et l'application f associant à tout polynôme P de $\mathbb{R}_m[x]$, le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, Q(x) = m(x-1)P(x) - x(x-1)P'(x)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[x]$.
2. Montrer que si P est un vecteur propre de f, alors 0 ou 1 sont racines de P.
3. Pour tout entier naturel $k \leqslant m$, on note W_k la fonction polynomiale de $\mathbb{R}_m[x]$ définie par :

   $$W_k(x) = x^k (x-1)^{m-k}.$$

   Montrer que pour tout k, W_k est un vecteur propre de f.
4. Quelles sont les valeurs propres de l'endomorphisme f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
5. Montrer que $(W_0, W_1, \cdots, W_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[x]$ et déterminer les composantes du polynôme constant $U(x) = 1$ dans cette base.

Solution de l'exercice 4.6

1. On calcule $f(x^k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant m$. On a :

$$f(x^k) = m(x-1)x^k - x(x-1)kx^{k-1} = (m-k)x^{k+1} - (m-k)x^k.$$

Si $k < m$, alors $f(x^k)$ est de degré $k+1$ donc est dans $\mathbb{R}_m[x]$. De même, pour $k = m$, $f(x^m) = 0$ et donc est dans $\mathbb{R}_m[x]$. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_m[x]$. On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k,$$

On montre ensuite que :

$$f(P)(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k f(x^k),$$

On en déduit que f est une application de $\mathbb{R}_m[x]$ dans $\mathbb{R}_m[x]$. On prouve la linéarité directement, donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[x]$.

2. Soit P un vecteur propre de f ; alors il existe un réel λ tel que :

$$f(P) = \lambda P,$$

soit

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ m(x-1)P(x) - x(x-1)P'(x) = \lambda P(x).$$

En particulier pour $x = 0$ et $x = 1$, on obtient :

$$-mP(0) = \lambda P(0) \text{ et } 0 = \lambda P(1).$$

Si $\lambda = 0$, alors 0 est racine de P et si $\lambda \neq 0$, alors 1 est racine de P. Par conséquent, 0 ou 1 sont racines de P.

3. Soit $k \leqslant m$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(W_k)(x) &= m(x-1)x^k(x-1)^{m-k} - x(x-1)(kx^{k-1}(x-1)^{m-k} + (m-k)x^k(x-1)^{m-k-1}) \\
&= mx^k(x-1)^{m-k+1} - kx^{k-1+1}(x-1)^{m-k+1} - (m-k)x^{k+1}(x-1)^{m-k-1+1} \\
&= (m-k)\,(x-1-x)\,W_k(x) \\
&= (k-m)W_k(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent, W_k est un vecteur propre de f.

4. Les valeurs $(k-m)$, $0 \leqslant k \leqslant m$, sont des valeurs propres de f ; il s'agit donc de $m+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Puisque $\mathbb{R}_m[x]$ est de dimension $m+1$, on en conclut que f est diagonalisable.

5. $(W_0, W_1, \cdots, W_m)$ est une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}_m[x]$. On considère le polynôme constant $U(x) = 1$; on applique la formule du binôme de Newton et on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ U(x) = 1 = ((-x) + (x-1))^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} W_k(x).$$

Exercice 4.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.
2. (a) Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.
   (b) Montrer que X possède une variance (on ne demande pas sa valeur).
3. On note F la fonction de répartition de X. Montrer, sans calculer $F(x)$, que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I que l'on précisera.
4. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = F(X)$.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Calculer l'expression de $F(x)$ pour tout réel x.
   (c) Déterminer F^{-1}, bijection réciproque de F.

Solution de l'exercice 4.7

1. La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient bien défini de telles fonctions. De plus, pour $x > 0$, on a :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{2\mathrm{e}^{2t}}{(\mathrm{e}^{2t}+1)^2}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2}$$

Par parité de la fonction f, on déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

Ainsi, f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire .

2. (a) Pour tout réel t positif, on a : $0 < tf(t) = \dfrac{2t}{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2} \leqslant 2t\mathrm{e}^{-2t}$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-2t}dt$ converge (c'est l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2). Pour terminer, la fonction $t \to tf(t)$ est impaire donc $E(X)$ existe et vaut 0.

   (b) Pour tout réel t positif, on a : $0 < t^2f(t) = \dfrac{2t^2}{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2} \leqslant 2t^2\mathrm{e}^{-2t}$. On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-2t}dt$ converge (moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2). Par parité de la fonction $t \to t^2f(t)$, on conclut que X admet un moment d'ordre 2 et donc que $V(X)$ existe.

3. La fonction f est continue, strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 et de dérivée f. De plus, on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, ce qui permet d'affirmer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

4. (a) La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. Ainsi, Y prend ses valeurs dans $]0,1[$. De plus, pour tout $x \in]0,1[$, en notant F_Y la fonction de répartition de Y et par le fait que F est une bijection strictement croissante, comme F^{-1}, on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(F(X) \leqslant x) = P(X \leqslant F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$$

   Ainsi, Y suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

   (b) Pour tout réel x, on trouve, d'après la question 1 :

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}$$

   (c) Pour déterminer F^{-1}, on résout, pour tout x réel, l'équation $F(t) = x$ d'inconnue t, dont la solution est :

$$F^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Exercice 4.8

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit U et V deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2.
   (a) En développant $(|U| - |V|)^2$, montrer que UV possède une espérance.
   (b) En considérant la quantité $(\lambda U + V)^2$ pour λ réel, montrer l'inégalité suivante :
   $$(E(UV))^2 \leqslant E(U^2)E(V^2)$$
2. On considère une variable aléatoire X à valeurs positives, qui n'est pas quasi certaine et qui possède une variance. On désigne par α un réel de $[0, 1]$ et on note Y la variable aléatoire indicatrice de l'événement $[X > \alpha E(X)]$, soit ;
   $$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X > \alpha E(X) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (a) Écrire l'espérance de Y en fonction de X et α.
   (b) Vérifier l'inégalité (entre variables aléatoires) suivante : $X \leqslant \alpha E(X) + XY$.
   (c) Justifier que $E(X^2) \neq 0$, puis déduire de ce qui précède l'inégalité :
   $$P\big(X > \alpha E(X)\big) \geqslant (1 - \alpha)^2 \frac{(E(X))^2}{E(X^2)}$$
3. (a) Que devient cette inégalité si X suit la loi binomiale de paramètres n et p ?
   (b) En déduire que $(1 - p)^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)p + 1}$

Solution de l'exercice 4.8

1. (a) On sait que $|UV| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(U^2+V^2\right)$, donc, par domination, UV possède une espérance.

   (b) La quantité $(\lambda U+V)^2$ est un polynôme du second degré en λ qui est positif pour tout λ réel. Son discriminant est négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité (de Cauchy-Schwarz) demandée.

2. (a) L'espérance d'une variable indicatrice est égale à son paramètre. Donc $E(Y) = P(X > \alpha E(X))$.

   (b) Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant \alpha E(X) + X(\omega)Y(\omega)$ (regarder suivant les valeurs prises par $Y(\omega)$) car $\alpha E(X) > 0$.

3. Si $E(X^2) = 0$, alors $V(X) = 0$ et X est quasi certaine ce qui n'est pas le cas. Donc $E(X^2) \neq 0$.
   D'après la question précédente, $XY \geqslant X - \alpha E(X)$, puis $E(XY) \geqslant E(X - \alpha E(X)) = (1-\alpha)E(X)$.
   En élevant au carré $(E(XY))^2 \geqslant (1-\alpha)^2(E(X))^2$.
   En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a $(1-\alpha)^2 E(X)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$. Mais, Y suivant une loi de Bernoulli, on a $Y = Y^2$ d'où $E(Y^2) = E(Y)$ et

$$P\big(X > \alpha E(X)\big) \geqslant (1-\alpha)^2 \frac{(E(X))^2}{E(X^2)}$$

4. (a) Lorsque X suit la loi binomiale de paramètres n et p, on obtient $P(X > \alpha np) \geqslant (1-\alpha)^2 \dfrac{np}{(n-1)p+1}$.

   (b) On choisit $\alpha = 0$ et on obtient le résultat annoncé.

Exercice 4.9

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire et on effectue dans cette urne des tirages selon le protocole suivant : à chaque tirage, une boule est prélevée de l'urne et est remplacée par deux boules de la même couleur (que celle que l'on vient de prélever). On souligne qu'après n tirages, il y a $n+2$ boules dans l'urne. On note X_n le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages et on cherche à déterminer la loi de X_n pour tout $n \geqslant 1$.

On suppose que l'expérience est modélisée avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
   Indication : On pourra considérer les événements $(A_k)_{k \geq 1}$, où A_k est défini par « on tire une boule blanche lors du k-ème tirage ».
3. Calculer, pour $n \geqslant 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
4. Calculer, pour $n \geqslant 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k+1)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
5. En déduire la loi de X_n.

Solution de l'exercice 4.9

1. Notons que X_1 est à valeurs dans $\{1,2\}$, et que X_1 vaut 1 si au premier tour on a tiré la boule noire, et X_1 vaut 2 si on a tiré la boule blanche. On a donc $\mathbb{P}(X_1=1)=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1=2)=\dfrac{1}{2}$ (car il y a dans l'urne une boule noire et une boule blanche).
2. Pour X_2, on remarque que X_2 est à valeurs dans $\{1,2,3\}$: X_2 vaut 1 si on a tiré une boule noire lors des deux tirages ; X_2 vaut 2 si on a tiré une boule noire puis une boule blanche ou une boule blanche puis une boule noire ; X_2 vaut 3 si on a tiré une boule blanche lors des deux tours. On a donc $\mathbb{P}(X_2=1)=\mathbb{P}(\overline{A}_1)\cap\overline{A}_2)=\mathbb{P}(\overline{A}_1)\mathbb{P}_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)$. Notons que $\mathbb{P}(\overline{A}_1)=\dfrac{1}{2}$ car au premier tirage il y a une boule blanche et une boule noire dans l'urne. On a aussi $\mathbb{P}_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)=\dfrac{2}{3}$ car si on a tiré une boule noire au premier tirage alors il y a une boule blanche et deux boule noires dans l'urne au deuxième tirage. On a donc $\mathbb{P}(X_2=1)=\dfrac{1}{3}$. De la même manière, on a $\mathbb{P}(X_2=2)=\mathbb{P}(\overline{A}_1)\mathbb{P}_{\overline{A}_1}(A_2)+\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(\overline{A}_2)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$; et enfin $\mathbb{P}(X_2=3)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$. En conclusion, on a montré que $\mathbb{P}(X_2=1)=\mathbb{P}(X_2=2)=\mathbb{P}(X_2=3)=\dfrac{1}{3}$.

3. et 4. Conditionnellement à $[X_n=k]$, il y a k boules blanches et $(n+2-k)$ boules noires dans l'urne après n tours. Lors du $(n+1)$-ème tour, on tire donc une boule blanche avec probabilité $\dfrac{k}{n+2}$ et une boule noire avec probabilité $\dfrac{n+2-k}{n+2}$: avec les notations précédentes, on a $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(A_{n+1})=\dfrac{k}{n+2}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{A}_{n+1})=\dfrac{n+2-k}{n+2}$. Notons que l'événement A_{n+1} correspond au fait qu'après le $(n+1)$-ème tour il y a une boule blanche supplémentaire : $A_{n+1}=\{X_{n+1}=X_n+1\}$ et $\overline{A}_{n+1}=\{X_{n+1}=X_n\}$. On a donc montré que

$$\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=X_n+1)=\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k+1)=\frac{k}{n+2}\,,$$
$$\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=X_n)=\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k)=\frac{n+2-k}{n+2}\,.$$

5. Montrons par récurrence sur $n\geqslant 1$ que $X_n\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,n+1]\!])$. Pour $k=1$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}(X_n=1,X_{n+1}=1)=\mathbb{P}(X_n=1)\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence et la question 3.
Si c'est vrai pour $k\in[\![2,n+1]\!]$, on a : $\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=\mathbb{P}(X_n=k,X_{n+1}=k)+\mathbb{P}(X_n=k-1,X_{n+1}=k)$, car si $X_{n+1}=k$, X_n ne peut valoir que k ou $k-1$.
Par suite, $\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=\dfrac{1}{n+1}\dfrac{n+2-k}{n+2}+\dfrac{1}{n+1}\dfrac{k-1}{n+2}=\dfrac{1}{n+2}$, où on a aussi utilisé l'hypothèse de récurrence et les questions 3 et 4.
Enfin, pour $k=n+2$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=n+2)=\mathbb{P}(X_n=n+1)\mathbb{P}_{(X_n=n+1)}(X_{n+1}=n+2)=\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}\,.$$

Cela montre bien que pour tout $k\in\{1,\dots,n+2\}$, on a $\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=\dfrac{1}{n+2}$

Exercice 4.10

On considère une famille d'urnes numérotées par les entiers de $\mathbb{N}^*$: pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la k-ème urne contient une boule noire et k boules jaunes.

Un joueur tire successivement (au hasard, uniformément et de manière indépendante entre les urnes) une boule dans l'urne numéro 1, puis une boule dans l'urne numero 2, puis une boule dans l'urne numéro 3, etc. On note X_n le nombre de boules noires obtenues lors des n premiers tirages ($n \geqslant 1$).

On suppose que l'expérience est modélisée avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Justifier que l'on peut écrire $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$, où A_k est l'événement « lors du k-ème tirage, la boule tirée par le joueur est noire »et où la variable aléatoire $\mathbf{1}_{A_k}$ est définie par :
$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbf{1}_{A_k}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
2. Exprimer $\mathbb{E}(X_n)$ sous forme de somme.
3. Calculer $V(X_n)$.
4. Montrer que $V(X_n) \leqslant \mathbb{E}(X_n)$.
5. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :
$$\mathbb{P}\Big(\big|X_n - \mathbb{E}(X_n)\big| \geqslant \varepsilon \mathbb{E}(X_n)\Big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(X_n)}\,.$$
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n+2) - \ln 2 \leqslant \mathbb{E}(X_n) \leqslant \ln(n+1)$.
7. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \in \ \big]1-\varepsilon, 1+\varepsilon\big[\Big) = 1\,.$$
8. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\ln n}$.

Solution de l'exercice 4.10

1. La variable aléatoire $\mathbf{1}_{A_i}$ vaut 1 si on tire une boule noire lors du i-ème tirage et 0 sinon : l'expression $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}$ compte donc le nombre de boules noires tirées lors des n premiers tirages.
2. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}$.
3. Les variables aléatoires $(\mathbf{1}_{A_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ étant indépendantes d'après l'énoncé, on a :
$$V(X_n) = V\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} V(\mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)(1 - \mathbb{P}(A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)^2},$$
où on a utilisé la propriété selon laquelle la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut $p(1-p)$.
4. En utilisant l'inégalité $1 - \mathbb{P}(A_i) \leqslant 1$, on en déduit que :
$$V(X_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{E}(X_n)\,.$$
5. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la question 4.
6. On a $\frac{1}{i+1} \geq \frac{1}{x+1}$ pour tout $x \in [i, i+1]$ car la fonction $x \mapsto 1/(x+1)$ est décroissante. Ainsi, pour tout $i \geqslant 1$,
$$\frac{1}{i+1} = \int_i^{i+1} \frac{1}{i+1} \mathrm{d}x \geqslant \int_i^{i+1} \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x\,,$$
et donc,
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x\,.$$
Par une intégration directe, on obtient $\int_1^{n+1} \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_1^{n+1} = \ln(n+2) - \ln 2$.
On a donc $\mathbb{E}(X_n) \geqslant \ln(n+2) - \ln 2$.
Par un raisonnement similaire, on obtient le majorant :
$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \leqslant \int_0^{n} \frac{1}{x+1} = \ln(n+1).$$
7. En passant au complémentaire et en réécrivant l'événement $\{\big|\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} - 1\big| \geqslant \varepsilon\}$ sous la forme $\{\big|X_n - \mathbb{E}(X_n)\big| \geqslant \varepsilon \mathbb{E}(X_n)\}$, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \in \ ]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} - 1\Big| < \varepsilon\Big) &= 1 - \mathbb{P}\Big(\big|X_n - \mathbb{E}(X_n)\big| \geqslant \varepsilon \mathbb{E}(X_n)\Big)\\ &\geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(X_n)}\,.\end{aligned}$$
Comme $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$, on obtient le résultat.
8. On déduit aisément de la question 6 que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\ln n} = 1$.

Exercice 4.11

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2 et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on pose $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. (a) Montrer que l'application tr : $A \to \operatorname{tr}(A)$ est linéaire.
   (b) Montrer que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}({}^tA)$.
   Dans la suite de l'exercice, on note :
$$S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/M = {}^tM\} \text{ et } A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/M = -{}^tM\}$$
2. Montrer que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans E.
   Pour A de E, on note $\Delta_A = \{M \in E/M + {}^tM = \operatorname{tr}(M)A\}$.
3. Montrer que Δ_A est un sous-espace vectoriel de E tel que $A_n(\mathbb{R}) \subset \Delta_A$.
4. Soit $M \in \Delta_A$. Montrer que $2\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(A)$.
5. Déterminer Δ_A en discutant suivant les valeurs de $\operatorname{tr}(A)$.

Solution de l'exercice 4.11

$S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices symétriques de E et l'ensemble des matrices antisymétriques de E.

1. (a) On vérifie que $\mathrm{tr}(\lambda M + N) = \lambda\,\mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N)$.
   (b) La matrice M et sa transposée ont la même diagonale.
2. On écrit $M = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2} \in S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$ et on vérifie que $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.
3. L'ensemble Δ_A est un sous-espace vectoriel de E par linéarité de la trace, de la transposition, etc.
   La diagonale d'une matrice antisymétrique n'est constituée que de 0.
   Donc, on a bien, pour $M \in A_n(\mathbb{R}), 0 = 0\,\mathrm{tr}(A)$.
4. On prend la trace des deux membres et on obtient : $2\,\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{tr}(A)$.
5.
   - Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors $\mathrm{tr}(M) = 0$ et $M + {}^tM = 0$. Donc M est antisymétrique.
   - si $\mathrm{tr}(A) = 2$, la relation $2\,\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{tr}(A)$ ne donne rien.
     - si $\mathrm{tr}(M) = 0$, on retombe sur les matrices antisymétrques, et si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$, alors :
     - si A n'est pas symétrique, il n'y a pas de solutions.
     - si A est symétrique, alors comme $A = \dfrac{A + {}^tA}{2} + \dfrac{A - {}^tA}{2}$, il vient $M = A + B$ avec $B \in A_n(\mathbb{R})$.
       En effet, $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(A) = 2$ et ${}^tM = A - B$ et $M + {}^tM = 2A = \mathrm{tr}(M)A$.

Chapitre 5

Exemples de questions courtes

Question sans préparation 1

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}X_k$$

Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

Question sans préparation 2

Soit (σ_n) une suite de réels strictement positifs.
On considère une suite (X_n) de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n, X_n suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_n^2)$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $(\sigma > 0)$.
Montrer que :

$$X_n \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \sigma$$

Question sans préparation 3

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\int_{n+\sqrt{n}}^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$.

Question sans préparation 4

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Reconnaître la loi de $Y = \lfloor X\rfloor + 1$. En déduire $\mathbb{E}\left(\lfloor X\rfloor\right)$ et $V\left(\lfloor X\rfloor\right)$.

Question sans préparation 5

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f\in E$, on pose :

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} T$.

Question sans préparation 6

Soit $\in \mathbb{N}^*$. Soit l'ensemble $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$.

1. Quelles sont les matrices symétriques qui appartiennent à $\mathcal{N}$?
2. En déduire que $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Question sans préparation 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - \mathrm{tr}(M)A$.
À quelles conditions sur A l'application f est-elle bijective ?

Question sans préparation 8

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/ AM = MA\}$.

1. Vérifier rapidement que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer

$$\max_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim C(A) \text{ et } \min_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim C(A)$$

Question sans préparation 9

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On note Φ sa fonction de répartition.
Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))dt$.

Question sans préparation 10

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit U l'application définie sur E par :

$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \int_0^x \cos(t) f(x-t)dt$$

1. Montrer que U est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $U(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.