CONCOURS APRÈS CLASSES PRÉPARATOIRES

Annales des épreuves orales de mathématiques

2022

une école de la
CCI PARIS ILE-DE-FRANCE

AVANT-PROPOS

Ces annales corrigées de mathématiques des épreuves orales du concours ESCP regroupent les exercices posés en 2022 ainsi que leurs corrigés dans les options scientifique et littéraire B/L.

Cet ouvrage devrait permettre aux futurs candidats une meilleure préparation à l'épreuve orale de mathématiques de ESCP et fournir une aide efficace aux enseignants des classes préparatoires économiques et commerciales.

De plus, ces annales constituent également un outil pouvant faciliter la préparation aux épreuves écrites de mathématiques du concours quelle que soit leur option (mathématiques approfondies, mathématiques appliquées, littéraire B/L ou technologique) ; la plupart des thèmes abordés dans les sujets d'oral se retrouvent en effet, peu ou prou, dans les sujets de l'écrit.
Certains exercices publiés dans ces annales sont assez longs : ce sont des sujets d'étude et le jury n'en attend pas nécessairement une résolution complète.
Les énoncés et corrigés des exercices ont été regroupés en quatre rubriques : analyse, algèbre, probabilités et sujets de l'option littéraire B/L.

Chaque candidat doit exposer en une vingtaine de minutes son sujet principal préparé en salle et résoudre directement au tableau, pendant le temps restant, une courte question dont on trouvera, dans cet ouvrage, un échantillon.

On peut également trouver le contenu des annales sur le site internet de ESCP (escp.eu) ; aller dans **Programmes and Training**, puis **Premaster year**, puis **ADMISSIONS** et **LE CONCOURS PREPA ESCP BUSINESS SCHOOL**, puis dans l'étape 2, les **Annales des épreuves orales de Mathématiques**.

Enfin ces annales n'auraient pu voir le jour sans la fidèle collaboration de tous les examinateurs de l'oral de mathématiques de ESCP . Nous les en remercions.

Frank BOURNOIS, Directeur Général ESCP.

Muriel GRANDJEAN, Responsable des Admissions ESCP.

Claude MENENDIAN, Responsable des épreuves orales de mathématiques du concours ESCP.

CHAPITRE

1

ALGÈBRE

Sujet n° 2

1. Soit un entier $n \geqslant 2$ et E un espace vectoriel réel de dimension n. Déterminer tous les sous-espaces stables par l'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer tous les sous-espaces stables par l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ de matrice dans la base canonique
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Soit un entier $n \geqslant 2$, un espace vectoriel réel E de dimension n et un endomorphisme g de E tel que $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$.
   (a) Soit $u \in E$ tel que $g^{n-1}(u) \neq 0$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(g^{n-1}(u), g^{n-2}(u), \cdots, g(u), u\big)$ est une base de E. Préciser la matrice N de g dans cette base.
   (b) Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, expliciter la matrice N^k. On pose : $G_k = \mathrm{Ker}(g^k)$. Préciser G_k et sa dimension.
   (c) Déterminer tous les sous-espaces de E stables par g.
4. Soit un entier $n \geqslant 2$, un espace vectoriel réel E de dimension n et un endomorphisme f de E. On suppose f diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ et de sous-espaces propres associés $E_1, \cdots, E_p$.
   (a) Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, soit F_k un sous-espace vectoriel de E_k. Montrer que le sous-espace vectoriel $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$ est stable par f.

   Dans les questions suivantes, on note F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

   (b) Justifier que :
$$\forall u \in F,\ \exists\, (u_1, \ldots, u_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad u = \sum_{k=1}^{p} u_k.$$
   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{p} \big[(\lambda_k - \lambda_1)\, u_k\big] \in F$.
   En déduire que les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ appartiennent à F.
   (d) Montrer que :
$$F = \sum_{k=1}^{p} \big[F \cap E_k\big].$$
   (e) Déterminer tous les sous-espaces de E stables par f.

Solution du sujet n° 2

1. Tout sous-espace de E est stable par $\lambda\,\mathrm{Id}$.
2. Les sous-espaces triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$ sont stables par f. Une droite est stable par f ssi elle est dirigée par un vecteur propre de f ; or, $A\,X = \lambda\,X \implies \lambda^2 = -1 \quad \text{ou} \quad X = 0$, donc f n'a pas de valeur propre (réelle) et donc pas de droite propre.
3. (a) En composant par g^{n-1}, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big[\alpha_k\, g^k(u)\Big] = 0 \implies \alpha_0 = 0$$

puis par récurrence descendante, tous les α_k nuls ; la famille est libre de cardinal n, donc une base de E. De plus :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

(b) N^k est la matrice avec une « sur-diagonale »de $n-k$ uns ; d'où :

$$G_k = \mathrm{Ker}(g^k) = \mathrm{Vect}\big(g^{n-1}(u), \cdots, g^{n-k}(u)\big) \quad \text{avec} \quad \dim(G_k) = k\,.$$

(c) Soit F un sous-espace de dimension $k \in [\![1, n-1]\!]$ stable par g. Alors la restriction $\tilde{g}$ de g à F est encore nilpotente, donc il existe p tel que $\tilde{g}^{p-1} \neq 0$ et $\tilde{g}^p = 0$. Le même raisonnement qu'en (a) montre que $p \leqslant \dim(F) = k$, d'où :

$$\tilde{g}^p = 0 \implies \tilde{g}^k = 0 \implies F \subset G_k \implies F = G_k$$

par égalité des dimensions et G_k est évidemment stable par g.
Les sous espaces vectoriels stables de g sont exactement les G_k , pour $k \in [\![0, n]\!]$.

4. (a) Pour tout $(u_1, \ldots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$, on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^{p} u_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\Big[\lambda_k\, u_k\Big] \in F \quad \text{donc} \quad f(F) \subset F$$

(b) Comme f est diagonalisable, E est somme directe des E_k , d'où la décomposition de u.

(c) On a :

$$\sum_{k=2}^{p}\big[(\lambda_k - \lambda_1)\,u_k\big] = f(u) - \lambda_1\, u \in F$$

Par récurrence, on obtient :

$$\left[\prod_{k=1}^{p-1}(\lambda_p - \lambda_k)\right] u_p = \left[\prod_{k=1}^{p-1}(f - \lambda_k\,\mathrm{Id}\,)\right](u) \in F$$

et comme le produit est non nul (puisque les valeurs propres sont distinctes), il vient $u_p \in F$; puis par récurrence descendante, tous les u_k dans F.

(d) D'après ce qui précède, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $u_k \in F \cap E_k$, donc, $F \subset \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\big[F \cap E_k\big]$; l'inclusion réciproque étant évidente, on a égalité.

(e) Les sous-espaces stables par f sont donc ceux de la forme $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$, où $\forall k \in [\![1, p]\!]$, F_k est un sous-espace de E_k .

Sujet n° 6

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2 et $E = \mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t dt$ converge pour tout $P \in E$.

On note alors $T(P) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t dt$ (fonction définie sur $\mathbb{R}$).

Soit alors T l'application définie sur E, par $T : P \mapsto T(P)$.

2. Montrer que T est linéaire.
3. Déterminer $\operatorname{Ker} T$.
4. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $e_k = X^k$.
   (a) Calculer $T(e_0)$.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $T(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)T(e_k)$.
   (c) En déduire que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $T(e_k) - e_k \in \operatorname{Vect}(e_0, \ldots, e_{k-1})$.
   En déduire que T est un endomorphisme de E.
5. Montrer que $(I - T)^{n+1} = 0$, où I désigne l'identité de E.
6. Déterminer les valeurs propres de T. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?
7. En déduire une expression de T^{-1} (comme polynôme en T).

Solution du sujet n° 6

1. L'intégrale converge car $t^n e^t = o(1/t^2)$ lorsque t est au voisinage de $-\infty$. Ainsi T est bien défini.
2. L'application T est linéaire, par linéarité de l'intégrale convergente.
3. Supposons que $T(P) = 0$. Alors

$$0 = T(P) = e^{-x} \int_{-\infty}^{0} P(t)e^t dt + e^{-x} \int_{0}^{x} P(t)e^t dt$$

   Par continuité de $t \mapsto e^t P(t)$ et par le théorème fondamental du calcul intégral et après simplification par e^{-x}, il vient, en dérivant :

$$0 = \left(\int_0^x P(t)e^t dt \right)' \Rightarrow P(x)e^x = 0 \Rightarrow P(x) = 0$$

   Donc $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.
4. (a) Le calcul donne $T(e_0) = 1$.
   (b) On peut raisonner par récurrence. Plutôt, une intégration par parties, valable ici, car les fonctions en jeu sont de classe C^1 et toutes les intégrales convergent, donne pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ $T(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)T(e_k)$.
   (c) En posant $u_k = (-1)^k \dfrac{T(e_k)}{k!}$ et en multipliant l'égalité précédente par $\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$,
   il vient $u_{k+1} = (-1)^{k+1} \dfrac{e_{k+1}}{(k+1)!} + u_k$.
   D'où : $u_k = u_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{e_j}{j!} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{e_j}{j!}$,
   soit finalement $T(e_k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{k!}{j!} e_{k-j}$.
   Ainsi T est un endomorphisme de E qui laisse stable tous les polynômes de $\mathbb{R}_j[X]$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$. En particulier c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Par le résultat précédent, pour tout $P \in E$, $\deg((I - T)(P) \leqslant \deg(P) - 1$.
   On en déduit (récurrence) que $\deg(I - T)^k(P) \leqslant \deg(P) - k$. D'où $(I - T)^{n+1} = 0$.
6. D'après le polynôme annulateur trouvé précédemment, l'endomorphisme $I - T$ a pour seule valeur propre possible 0 ; or $I - T \neq 0$, donc il n'est pas diagonalisable.
   L'endomorphisme T non plus car autrement, comme I est diagonalisable, $I - T$ le serait également.
7. Comme I et T commutent la formule du binôme donne :

$$0 = (I - T)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} T^k \Rightarrow T \circ \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} T^{k-1} \right) = -I$$

   d'où $T^{-1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} T^{k-1}$.

Sujet n° 7

Soit un entier $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels. $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$ désignent respectivement le noyau et l'image d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et k un entier supérieur ou égal à 1. On note $v_k = \dim\big(\mathrm{Ker}(A^k)\big)$ la dimension de $\mathrm{Ker}(A^k)$ et $w_k = \dim\big(\mathrm{Im}(A^k)\big)$ la dimension de $\mathrm{Im}(A^k)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^k) \subset \mathrm{Ker}(A^{k+1})$ pour $k \geqslant 1$. En déduire que $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite croissante.
2. Montrer que la suite $(w_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite décroissante.
3. Supposons qu'il existe un entier $k_0 \geqslant 1$ tel que $v_{k_0} = v_{k_0+1}$. Montrer que $v_{k_0+1} = v_{k_0+2}$. Que peut-on alors dire des suites d'entiers $(v_k)_{k\geqslant k_0}$ et $(w_k)_{k\geqslant k_0}$?

   Pour le reste de l'exercice, on définit les notions suivantes.
   Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $M^m = 0$.
   Pour une matrice nilpotente $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit son indice de nilpotence par :

$$p = \min\{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid M^m = 0\}.$$

4. Donner trois exemples de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: un où $p = 1$, un où $p = 2$ et un où $p = 3$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer que $p \leqslant n$.
6. On suppose ici que $n \geqslant 2$. Soit $B = (b_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $b_{i,j}$ sont définis par :

$$b_{i,i+1} = 1 \text{ pour } i \in \{1, \ldots, n-1\} \text{ et } b_{i,j} = 0 \text{ pour } j \neq i+1.$$

   Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue M donnée par :

$$M^2 = B.$$

Solution du sujet n° 7

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(A^k)$. On a donc $A^k\,x = 0$. En composant par A, il vient $A^{k+1}\,x = 0$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(A^{k+1})$ et on conclut que $\mathrm{Ker}(A^k) \subset \mathrm{Ker}(A^{k+1})$. Ainsi, $v_k \leqslant v_{k+1}$ et la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite croissante.
2. D'après le théorème du rang, $n = v_k + w_k = v_{k+1} + w_{k+1}$. Ainsi, comme $v_k \leqslant v_{k+1}$, on a $n - w_k \leqslant n - w_{k+1}$. Par conséquent, $w_{k+1} \leqslant w_k$ et la suite $(w_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante.
3. Supposons que $v_{k_0} = v_{k_0+1}$. De plus, on a d'après la question 1), $\mathrm{Ker}(A^{k_0}) \subset \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$. Par conséquent, on a $\mathrm{Ker}(A^{k_0}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$. Montrons alors que $\mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$. Nous savons d'après la question 1) que $\mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) \subset \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$. Il suffit donc de montrer l'autre inclusion.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$, on a alors $A^{k_0+2}\,x = A^{k_0+1}Ax = 0$. Ainsi, on a $A\,x \in \mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0})$ et donc $A^{k_0}Ax = 0 = A^{k_0+1}x$. On conclut que $x \in \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$ et que $\mathrm{Ker}(A^{k_0+2}) \subset \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$. On a alors finalement $\mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$ et $v_{k_0+1} = v_{k_0+2}$. On montrerait alors aisément par récurrence que pour $k \geqslant k_0$, on a $v_k = v_{k_0}$. La suite $(v_k)_{k\geqslant k_0}$ est donc constante et par le théorème du rang, comme $w_k = n - v_k$, la suite $(w_k)_{k\geqslant k_0}$ est également constante.
4. On a $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$ respectivement pour les trois matrices suivantes de $M_3(\mathbb{R})$:
   $$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Il est clair que $A_1 = 0$, $A_2^2 = 0$ (avec $A_2 \neq 0$) et $A_3^3 = 0$ (avec $A_3 \neq 0$ et $A_3^2 \neq 0$), donc leurs indices de nilpotence sont respectivement 1, 2 et 3.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Supposons par l'absurde que $p > n$. On a donc d'une part, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $A^j \neq 0$ et d'autre part, $A^p = 0$ et donc $v_p = n$. Une matrice nilpotente ne peut être inversible (car $A^p = 0$) donc $\mathrm{Ker}(A) \neq 0$ et $v_1 \geqslant 1$. De plus, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $v_j \neq v_{j+1}$ car si $v_j = v_{j+1}$, la suite $(v_k)_{k\geqslant j}$ est constante et donc $v_j = v_p = n$; on aurait alors $\mathrm{Ker}(A^j) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A^j = 0$, ce qui est impossible car $j \leqslant n < p$. Comme $(v_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite d'entiers croissante et que pour $j \in \{1,\dots,n\}$, $v_j \neq v_{j+1}$ et que $v_1 \geqslant 1$, il s'ensuit que $v_j \geqslant j$ pour $j \in \{1,\dots,n+1\}$. Ainsi, on a $v_{n+1} > n$, ce qui est absurde car la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est bornée par n. On conclut donc que $p \leqslant n$.
6. Il est aisé de vérifier que $B^{n-1} \neq 0$ et que $B^n = 0$. Donc B est nilpotente. On a alors si $M^2 = B$: $M^{2(n-1)} = B^{n-1} \neq 0$ et $M^{2n} = B^n = 0$. Ainsi M est également nilpotente et son indice de nilpotence p vérifie $2(n-1) < p$ (car $M^{2(n-1)} \neq 0$) et $p \leqslant n$ (d'après la question précédente). Ainsi $2(n-1) < n$ et donc $n < 2$ ce qui est impossible car on a supposé que $n \geqslant 2$. L'équation matricielle $M^2 = B$ n'admet donc pas de solution.

Sujet n° 11

Dans cet exercice, on désigne par n un entier naturel de $\mathbb{N}^*$.

On se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on notera $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \{X \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) | AX = \lambda X\}$.

1. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = -I$.
2. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.
   (a) Vérifier que $\frac{1}{2i}\left((A + iI) - (A - iI)\right) = I$.
   (b) En déduire que : $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker}(A - iI) \oplus \operatorname{Ker}(A + iI)$.
   (c) En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et donner ses valeurs propres.
3. (a) Pour toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{2n+1} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})$, on note $\bar{X}$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_{2n+1}} \end{pmatrix}$.
   Montrer que $X \in E_i$ si et seulement si $\bar{X} \in E_{-i}$. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) En déduire que $\dim E_i = \dim E_{-i}$.
   (c) En déduire qu'il n'existe pas de matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$
4. Ce résultat est-il encore valable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

Solution du sujet n° 11

1. La matrice diagonale $D = \text{diag}(i, \dots, i)$ vérifie $D^2 = -I$.
2. (a) Par calcul direct.

   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})$. La relation précédente donne
$$X = \frac{1}{2i}\left((A - iI)\,X - (A + iI)\right) X$$
   En notant $X_1 = (A - iI)\,X$ et $X_2 = (A + iI)\,X$, la relation $A^2 + I = 0$ donne $X_1 \in \text{Ker}\,(A + iI)$ et $X_2 \in (A - iI)$. Tout vecteur de $\mathbb{C}^{n+1}$ se décompose comme somme d'un vecteur de E_i et d'un vecteur de E_{-i}. Donc
$$C^{2n+1} = \text{Ker}\,(A + iI) + \text{Ker}\,(A - iI)$$
   Enfin cette somme est directe car $\text{Ker}\,(A + iI) \cap \text{Ker}\,(A - iI) = \{0\}$.

   (c) La question précédente donne la diagonalisabilité et $\text{Sp}\,(A) \subset \{i, -i\}$. Il y a égalité car si un seul de ces deux sous-espaces propres est réduit à $\{0\}$, par exemple $E_{-i} = \{0\}$, alors $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = E_i$ d'où $A = iI$, ce qui est absurde car A est une matrice réelle.
3. (a) Soit $X \in E_i$. Alors $AX = iX$. En conjuguant cette relation, il vient $A\bar{X} = -i\bar{X}$ puisque A est une matrice réelle (il suffit de faire le produit matriciel). La réciproque est identique puisque $\bar{\bar{X}} = X$.

   (b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des complexes tels que $\lambda_1\overline{u_1} + \lambda_2\overline{u_2} + \dots + \lambda_p\overline{u_p} = 0$
   Alors en conjuguant cette relation il vient : $\overline{\lambda_1}u_1 + \overline{\lambda_2}u_2 + \dots + \overline{\lambda_p}u_p = 0$.
   Et $(u_1, \dots, u_p)$ étant une famille libre par hypothèse, on en déduit que $\overline{\lambda_1} = \overline{\lambda_2} = \dots = \overline{\lambda_p} = 0$.
   Soit encore $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p$. Et donc $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre de $\mathbf{C}^{2n+1}$.
   De plus, elle est bien formée de vecteurs de E_{-i} par la question précédente.
   Ainsi si $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E_i, alors $p = \dim E_i$.
   Et alors $(\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i}, de cardinal p, de sorte que $p \leqslant \dim E_{-i}$. Et donc $\dim E_i \leqslant \dim E_{-i}$.
   Inversement, on peut prouver que si $(v_1, \dots, v_q)$ est une base de E_{-i}, alors $(\overline{v_1}, \dots, \overline{v_q})$ est une famille libre de E_i, et donc que $\dim E_{-i} \leqslant \dim E_i$.
   On en déduit que E_i et E_{-i} sont de même dimension.

   (c) Si A existait, elle serait diagonalisable, et on doit avoir $2n+1 = \dim \mathbb{C}^{2n+1} = \dim E_i + \dim E_{-i} = 2p$, ce qui est absurde.
4. Ce résultat est faux pour n pair. Par exemple , la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = -I_2$. Dans le cas général, on exhibe une matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ formée de n blocs diagonaux de la matrice A précédente.

Sujet n$^{\text{o}}$ 14

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme inversible f de E.
   (a) Montrer que si f est diagonalisable, alors f^2 l'est également.
   (b) Montrer que si F est un sous-espace propre de f^2, alors F est soit un sous-espace propre de f, soit la somme directe de deux sous-espaces propres de f.
   (c) En déduire que si f^2 est diagonalisable, alors f est diagonalisable. Donner un exemple simple montrant que ceci n'est plus vrai en général si on ne suppose pas f inversible.
2. On considère deux endomorphismes inversibles u et v de $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 1$). On munit l'ensemble $E = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ de sa structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel canonique $((x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2))$ et $(\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2))$. Pour $(x, y) \in E$, on pose $f(x, y) = (v(y), u(x))$.
   (a) Justifier le fait que E est de dimension finie et donner sa dimension.
   (b) Prouver que $u \circ v$ est diagonalisable si et seulement si $v \circ u$ l'est aussi. Donner un exemple simple, avec $n = 2$, montrant que cette équivalence n'est plus vraie si on abandonne l'hypothèse selon laquelle u et v sont inversibles.
   (c) Vérifier que f est un endomorphisme de E.
   (d) Montrer que f est inversible et donner son inverse.
   (e) Déterminer l'endomorphisme f^2.
   (f) Prouver que f est diagonalisable si et seulement si $u \circ v$ est diagonalisable.
3. La matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie ci-dessous est-elle diagonalisable ?

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution du sujet n° 14

1. (a) Si f est diagonalisable et si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = P^{-1}DP$. D'où la matrice $A^2 = P^{-1}D^2P$ qui est associée à f^2 dans $\mathcal{B}$ est diagonalisable, donc f^2 l'est également.

   (b) Soient F un sous-espace propre de f^2 associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$ (f est inversible) et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^2 = \lambda$ ($\alpha \neq 0$). Alors pour tout $x \in F$, on a $0 = (f^2 - \lambda Id)x = (f - \alpha Id)(f + \alpha Id)x$. Si $(f - \alpha Id)$ (resp. $(f + \alpha Id)$) est inversible, alors F est égal au sous-espace propre $E_\alpha(f)$ (resp. $F = E_{-\alpha}(f)$). Sinon, les deux sous-espaces $E_\alpha(f)$ et $E_{-\alpha}(f)$ ne sont pas réduits à $\{0\}$, il sont inclus dans F et en somme directe. De plus, tout $x \in F$ peut s'écrire sous la forme $x = \dfrac{1}{2\alpha}((\alpha Id + f)x + (\alpha Id - f)x)$ avec $(\alpha Id + f)x \in E_\alpha(f)$ et $(\alpha Id - f)x \in E_{-\alpha}(f)$; il en résulte que $F = E_\alpha(f) \oplus E_{-\alpha}(f)$.

   (c) Comme f^2 est diagonalisable, l'espace E est somme directe des sous-espaces propres de f^2. De plus, d'après la question précédente, dans chaque sous-espace propre F de f^2, on peut choisir une base de ce sous-espace qui sera formée de vecteurs propres de f. Par concaténation, on construira ainsi une base de E constituée de vecteurs propres de f ; il en résulte que f est diagonalisable. Comme contre-exemple, on peut considérer l'endomorphisme g de $\mathbb{C}^2$ donné par $g(e_1) = 0$ et $g(e_2) = e_1$. L'endomorphisme g^2 est diagonalisable puisqu'il est nul, mais g ne l'est pas. En effet dans le cas contraire sa matrice serait semblable à la matrice nulle et donc nulle, ce qui est absurde.

2. (a) Si $e_1, \cdots, e_n$ est une base de $\mathbb{C}^n$, il est clair que $(e_1, 0), \cdots, (e_n, 0), (0, e_1), \cdots, (0, e_n)$ forment une base de E qui est donc de dimension $2n$.

   (b) Supposons que $u \circ v$ est diagonalisable. Alors, $v \circ u = u^{-1} \circ (u \circ v) \circ u$ est semblable à $u \circ v$ et est donc diagonalisable. Les rôles de u et v étant symétriques, on obtient bien l'assertion souhaitée. Comme contre-exemple, on peut prendre les endomorphismes u et v associés respectivement aux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   puisque $AB = 0$ est évidemment diagonalisable et $BA = A$ ne l'est pas (cf. question 1).

   (c) C'est évident par calculs.

   (d) Comme u et v sont inversibles, il est clair que f est inversible et que $f^{-1}(x, y) = (u^{-1}(y), v^{-1}(x))$.

   (e) On a $f^2(x, y) = (v \circ u(x), u \circ v(y))$.

   (f) Si h est un endomorphisme et $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda(h)$ le noyau de $h - \lambda Id$. Si f est diagonalisable, alors f^2 l'est. On pose $\mathrm{Sp}\,(f^2) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$. On voit facilement que $E_{\lambda_i}(f^2) = \{(x, 0); x \in E_{\lambda_i}(v \circ u)\} \oplus \{(0, y); y \in E_{\lambda_i}(u \circ v)\}$, d'où $\dim(E_{\lambda_i}(f^2)) = \dim(E_{\lambda_i}(v \circ u)) + \dim(E_{\lambda_i}(u \circ v)) = 2\dim(E_{\lambda_i}(u \circ v))$ ($v \circ u - \lambda_i Id$ et $u \circ v - \lambda_i Id$ sont semblables). Comme $2n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(f^2)) = 2\sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u \circ v))$, l'endomorphisme $u \circ v$ est diagonalisable. Supposons que $u \circ v$ est diagonalisable, alors on a vu que $v \circ u$ l'est aussi. Choisissons une base $(x_1, \cdots, x_n)$ (resp. $(y_1, \cdots, y_n)$) de vecteurs propres de $v \circ u$ (resp. $u \circ v$). Alors, la famille $\{(x_1, 0), \cdots, (x_n, 0), (0, y_1), \cdots, (0, y_n)\}$ est une base de vecteurs propres de f^2 qui est donc diagonalisable. Alors, d'après 1.(c), l'endomorphisme f est diagonalisable.

3. Posons
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   et notons u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A (resp B). Alors, l'endomorphisme f de la question 2 admet M comme matrice associée dans la base $(e_1, 0), (e_2, 0), (0, e_1), (0, e_2)$. Comme les matrices A et B sont inversibles et que la matrice AB est diagonalisable (elle admet deux valeurs propres distinctes, ce que l'on voit facilement avec les éléments du cours sur les matrices 2×2), on déduit de la question précédente que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Sujet n° 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.
Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, sous réserve de convergence de l'intégrale, on note :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

1. Pour tout $(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$, montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\langle X^k, X^\ell\rangle$.
2. Montrer que l'application suivante est bien définie et que c'est un produit scalaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \langle P, Q\rangle \end{array}$$

Soit l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

3. Vérifier, rapidement, que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
5. Déterminer le spectre de α. L'endomorphisme α est-il diagonalisable ?
6. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire P_k de degré k tel que :

$$\mathrm{Ker}(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{Vect}(P_k).$$

7. Montrer que l'endomorphisme α est symétrique.
   Que peut-on en déduire pour la famille $(P_0, \ldots, P_n)$?

Solution du sujet n° 18

1. On reconnaît que $\langle X^k, X^\ell\rangle = \Gamma(k+\ell+1) = (k+\ell)!$.
2.
   - L'intégrale qui définit $\langle P, Q\rangle$ s'écrit comme une combinaison linéaire d'intégrales $\langle X^k, X^\ell\rangle$, qui convergent d'après la question précédente, donc $\langle P, Q\rangle$ est une intégrale convergente.
   - Les caractères bilinéaire et symétrique de $\langle\ ,\ \rangle$ sont faciles.
   - Par positivité de l'intégration, comme $P^2(t)e^{-t} \geqslant 0$, on a : $\langle P, P\rangle \geqslant 0$.
   - Si $\langle P, P\rangle = 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t = 0$ où $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.
     Donc on a : $\forall, t \in \mathbb{R}_+,\ P^2(t)e^{-t} = 0$, *i.e.* $P(t) = 0$.
     Ainsi P possède une infinité de racines, donc $P = 0$ (sur $\mathbb{R}$).
3. On vérifie que $\deg(\alpha(P)) \leqslant n$, pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$. La linéarité provient de la linéarité de la dérivation.
4. On trouve : $\alpha(1) = 0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \alpha(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1}$, d'où la matrice de α :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$
5. La matrice est triangulaire supérieure, donc son spectre se lit sur la diagonale :
$$\mathrm{Sp}\,(\alpha) = \mathrm{Sp}\,M = \{-k | k \in [\![0, n]\!]\}.$$
   L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ et α a $n+1$ valeurs propres distinctes, donc α est diagonalisable...
6. ...et les sous-espaces propres E_{-k} sont tous de dimension 1. Ainsi $E_{-k} = \mathrm{Ker}(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}))$ est formé de tous les multiples (avec facteur scalaire) d'un même polynôme non nul ; parmi ces polynômes il y en a un seul, P_k, qui est unitaire.
   Soit $d \in [\![0, n]\!]$ le degré de P_k et $a_d \neq 0$ son coefficient dominant.
   Alors $\deg XP_k'' < d$ et $\deg(1-X)P_k' = d$, donc, par somme, $\deg \alpha(P_k) = d$, et le coefficient de degré d de $\alpha(P_k)$ est celui de $(1-X)P_k'$, soit $(-1) \times (da_d)$. Par ailleurs le coefficients de degré d de $-kP_k$ est $-ka_d$. Pour que $\alpha(P_k) = -kP_k$, il faut donc que $(-1) \times (da_d) = -ka_d$, soit $d = k$ *i.e.* P_k est de degré k.
7. Utilisons une intégration par parties, toutes les fonctions en jeu étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. Soit $A > 0$:
$$\begin{aligned}\int_0^A (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt &= \int_0^A tP''(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt + \int_0^A (1-t)P'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt \\ &= \left[tP'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A - \int_0^A P'(t)Q'(t)t\mathrm{e}^{-t}dt - \int_0^A (1-t)P'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt + \int_0^A (1-t)P'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt \\ &= \left[tP'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A - \int_0^A P'(t)Q'(t)t\mathrm{e}^{-t}dt\end{aligned}$$
   Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} AP'A)Q(A)\mathrm{e}^{-A} = 0$ et $[tP'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}]_{t=0} = 0$. Donc
$$\langle\alpha(P), Q\rangle = -\int_0^{+\infty} P'(t)Q'(t)t\mathrm{e}^{-t}dt = \langle P, \alpha(Q)\rangle$$
   au vu des rôles symétriques joués par P et Q.
   Ainsi, d'après le théorème spectral, les sous-espaces propres de α sont orthogonaux entre eux, donc la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est orthogonale. Ainsi la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Sujet n$^{\text{o}}$ 20

Pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels.

Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on pose $C = A \star B$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ définie par, $\forall i \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![1,q]\!]$,

$$c_{i,j} = a_{i,j}\ b_{i,j}$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive si :

- A est symétrique ;
- pour tout $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tUAU \geqslant 0$.

On note $S_p^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ symétriques positives.

1. Montrer que si $(M,N) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda M + N \in S_p^+(\mathbb{R})$.
2. Soit $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $A = U\,{}^tU \in S_p^+(\mathbb{R})$
3. Montrer que si $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors $(U\,{}^tU) \star (V\,{}^tV) = (U \star V)\,{}^t(U \star V)$.
4. Soit $A \in S_p^+(\mathbb{R})$. On note $(U_1, \ldots, U_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A et on note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ les valeurs propres correspondantes.
   (a) Montrer que $\lambda_j \geqslant 0$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$.
   (b) Montrer que $A = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j\,{}^tU_j$.
5. Montrer que si A et B appartiennent à $S_p^+(\mathbb{R})$, alors $A \star B$ appartient à $S_p^+(\mathbb{R})$.

Solution du sujet n^o 20

1. Si $M, N \in S_p(\mathbb{R})$, alors $\lambda M + N$ est encore symétrique. Et si $\lambda \geqslant 0$, alors
$$U^T(\lambda M)U = \lambda(U^T M U) \geqslant 0$$
2. On a $(UU^T)^T = UU^T$ et $X^T UU^T X = ||U^T X|| \geqslant 0$.
3. Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$. Alors $(U\,{}^tU) = (u_i u_j)$ et $(V\,{}^tV) = (v_i v_j)$.
Donc $(U\,{}^tU) \star (V\,{}^tV) = (u_i u_j v_i v_j)$. De même $(U \star V) = (u_i v_i)$ et $(U \star V)^t(U \star V) = (u_i v_i u_j v_j)$.
4. (a) Les valeurs propres d'une matrice symétrique positive sont positives. Car si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ :
$$AX = \lambda X \Rightarrow 0 \leqslant {}^tXAX = \lambda ||X||^2 \Rightarrow \lambda \geqslant 0 \;\text{ car } ||X|| > 0$$
(b) En utilisant le fait que $(U_1, \ldots, U_p)$ est orthonormée, le calcul donne :
$$\forall k, \; \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j\,{}^tU_j\right) U_k = \lambda_k U_k.$$
Par ailleurs on a : $\forall k,\; AU_k = \lambda_k U_k$. Comme les endomorphismes canoniquement associés à A et $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j\,{}^tU_j$ sont égaux, puisqu'ils coïncident sur une base, leurs matrices sont égales.
5. Il reste à appliquer les résultats précédents. On a $A = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j\,{}^tU_j$, $B = \sum_{j=1}^{p} \mu_j V_j\,{}^tV_j$.
En utilisant la distributivité (évidente) de $\star$ sur la somme, on obtient :
$$A \star B = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \lambda_i \mu_j (U_i\,{}^tU_i) \star (V_j\,{}^tV_j) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \lambda_i \mu_j (U_i\,{}^tV_j)^t(U_i\,{}^tV_j) \geqslant 0$$

Sujet n° 22

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_{p+3} = 4\,u_{p+2} - 5u_{p+1} + 2u_p$$

   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

   (b) Vérifier que la suite $(p)_{p\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}$.

   (c) Déterminer les suites géométriques appartenant à $\mathcal{E}$.

   (d) En déduire l'expression des suites appartenant à $\mathcal{E}$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Vérifier que 1 et 2 sont valeurs propres de A.

   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

   (c) Justifier que A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (d) En déduire que le polynôme $P(X) = (X-1)^2(X-2)$ est annulateur de A.

3. (a) Justifier que

$$\forall p \in \mathbb{N}\,,\ \exists (a_p, b_p, c_p) \in \mathbb{R}^3, \quad A^p = a_p\,A^2 + b_p\,A + c_p\,I_3$$

   où A a été définie dans la question précédente.

   (b) Montrer que $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$.

   (c) Expliciter A^p en fonction de A^2, A, I_3.

   (d) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

Solution du sujet n° 22

1. (a) $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel (vérification immédiate). On a $\dim(E) = 3$. En effet $\varphi : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $(u_p) \mapsto \big(u_0, u_1, u_2\big)$ est un isomorphime. L'application φ est linéaire. On vérifie que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ et que φ est surjective par définition de la suite (u_p).
   (b) Vérification : $\forall p\,,\ 4(p+2) - 5(p+1) + 2p = p + 3\,.$
   (c) On a $(r^p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ si et seulement si $0 = r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = (r-1)^2(r-2)$ si et seulement si $r \in \{1, 2\}\,.$
   (d) On vient de trouver 3 suites éléments de $\mathcal{E}$. On vérifie que ces trois suites forment une famille libre (système de trois équations et on prend les trois premiers termes de la suite combinaison linéaire). C'est une base de $\mathcal{E}$. Ainsi
$$\mathcal{E} = \operatorname{Vect}\Big((p)_{p\in\mathbb{N}}\,,\,(1)\,,\,(2^p)_{p\in\mathbb{N}}\Big) = \Big\{\big(ap + b + c2^p\big)_{p\in\mathbb{N}}\,,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\Big\}$$

2. (a) On a $E_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Vect}(e_1)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \operatorname{Vect}(e_3)$ avec $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   (b) Supposons que A soit diagonalisable. Alors
$$A \sim D = \operatorname{diag}\big(\lambda, 1, 2\big) \Rightarrow 4 = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) = \lambda + 3 \Rightarrow \lambda = 1$$
   En contradiction avec $\dim E_1 = 1\,.$ Donc A n'est pas diagonalisable.
   (c) Il suffit de trouver e_2 tel que $\mathcal{B} = \big(e_1, e_2, e_3\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et $f(e_2) = e_1 + e_2$, soit
$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$
   On peut prendre $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (d) On montre par calcul que $(T - I_3)^2\,(T - 2I_3) = 0$, puis que P est annulateur de A par similitude.

3. (a) Par récurrence, $A^3 = 4\,A^2 - 5\,A + 2\,I_3$. On suppose que $A^p = a_p\,A^2 + b_p\,A + c_p\,I_3$; alors $A^{p+1} = a_p\,A^3 + b_p\,A^2 + c_p\,A$ puis en remplaçant :
$$\left\{\begin{array}{ll} a_{p+1} & = 4a_p + b_p \\ b_{p+1} & = -5a_p + c_p \\ c_{p+1} & = 2a_p \end{array}\right.$$
   (b) Puis par substitution, $a_{p+1} - 4a_p + 5a_{p-1} - 2a_{p-2} = 0$ soit $(a_p) \in \mathcal{E}\,.$
   (c) D'où l'existence de $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_p = \alpha\,2^p + \beta\,p + \gamma$; puis $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$ donnent $a_p = 2^p - p - 1$, puis
$$A^p = \big(2^p - p - 1\big)\,A^2 + \big(-2^{p+1} + 3p + 2\big)\,A + \big(2^p - 2p\big)\,I_3$$
   (d) Comme $0 \notin \operatorname{Sp}(A)$, la matrice A est inversible. Alors
$$P(A) = 0 \Rightarrow A\left[A^2 - 4A + 5I_3\right] = 2I_3 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\left[A^2 - 4A + 5I_3\right]$$

Sujet n° 27

Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. On note I_2 la matrice identité d'ordre 2. On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui sont inversibles .

Pour tout A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on note $S(A)$ l'ensemble des matrices semblables à A, soit :

$$S(A) = \{PAP^{-1} \mid P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})\}.$$

Dans les quatre premières questions, on a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) L'ensemble $S(A)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
   (b) On suppose que pour tout $(M, N) \in S(A)^2$, $M + N \in S(A)$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.
   La réciproque est-elle vraie ?
2. Déterminer $S(A)$ lorsque $A = xI_2$, avec x réel.
3. On suppose dans cette question que A est diagonale.
   L'ensemble $S(A)$ est-il constitué uniquement de matrices diagonales ?
4. On admet que l'application $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}(M^tN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où ${}^tM$ désigne la transposée de la matrice M. On note $||\cdot||$ la norme euclidienne associée.
   On dit qu'une partie $\mathcal{X}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est bornée lorsqu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que
   $$\forall M \in \mathcal{X},\ ||M|| \leqslant C.$$
   (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $E_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$. Calculer E_λ^{-1} et F_λ^{-1}.
   (b) Montrer que l'ensemble $S(A)$ est borné si et seulement si $A = xI_2$, avec x réel.
5. Dans cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (a) Justifier que A admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.
   (b) On suppose que $2A \in S(A)$.
      i. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n\lambda$ est valeur propre de A.
      ii. En déduire que $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$ puis que $A^2 = 0$.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $2A \in S(A)$.
   (*On pourra considérer f l'endomorphisme canoniquement associé à A*)

Solution du sujet n$^{\text{o}}$ 27

1. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$.
   (a) Si $S(A)$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $0_2 \in S(A)$. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $0_2 = P^{-1}AP$ et alors $A = 0_2$. Or on a supposé que $A \neq 0_2$. Ainsi $S(A)$ n'est pas un sous-espace vectoriel.
   (b) Soient P et Q dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Supposons que $S(A)$ soit stable pour l'addition. Alors $PAP^{-1} + QAQ^{-1} \in S(A)$ et il existe $H \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $PAP^{-1} + QAQ^{-1} = HAH^{-1}$. Donc $\mathrm{tr}(HAH^{-1}) = \mathrm{tr}(PAP^{-1}) + \mathrm{tr}(QAQ^{-1})$ soit $\mathrm{tr}(A) = 2\,\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$.
   Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $P^{-1} = P$ et $PAP^{-1} = -A$. On a alors $A \in S(A)$ et $PAP^{-1} \in S(A)$ mais $A + PAP^{-1} = 0_2 \notin S(A)$ car sinon $A = 0_2$.
   La réciproque est fausse.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors $S(xI_2) = \{xI_2\}$.
3. Bien évidemment non. Toute matrice diagonalisable non diagonale est semblable à une matrice diagonale.
4. (a) Un calcul élémentaire (pivot) ou le cours donne $E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $S(A)$ est bornée.
   Il existe alors une constante $C > 0$ telle que $\forall P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), ||PAP^{-1}||^2 \leqslant C^2$.
   Or, pour $P = E_\lambda$, il vient
   $$B = P_\lambda A P_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & -\lambda(a + \lambda c) + b + \lambda d \\ c & -\lambda c + d \end{pmatrix}.$$
   Comme $b_{i_0,j_0}^2 \leqslant \sum_{i,j} b_{i,j}^2 = ||B||^2$ les quatre coefficients ci-dessus sont bornés quand λ varie.
   Donc $c = 0$ et $a = d$. On recommence le même travail avec F_λ : il vient en plus $b = 0$.
   Donc $A = aI_2$. La réciproque est évidente.
5. (a) Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$.
   Or $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_2)$ est un polynôme de degré deux, qui admet au moins une racine complexe, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.
   (b) i. Soit λ une valeur propre de A, alors 2λ est une valeur propre de $2A$ et donc de A, puisque A et $2A$ sont semblables. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n\lambda$ est valeur propre de A.
   ii. Si $\lambda \neq 0$, alors A admet une infinité de valeurs propres, ce qui est impossible. Donc $\lambda = 0$ et $\mathrm{sp}(A) = \{0\}$; par suite, A n'est pas inversible donc $\det(A) = 0$.
   Or si l'on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = \lambda(\lambda - a - d)$, car $ad - bc = \det(A) = 0$. Comme 0 est la seule racine de ce polynôme en λ (puisque 0 est la seule valeur propre), on a $a = -d$ et $0 = ad - bc = -a^2 - bc$. Alors le calcul donne :
   $$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = 0.$$
   (c) Réciproquement supposons $A \neq 0_2$ et $A^2 = 0_2$.
   Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Comme $A \neq 0_2$, alors $f \neq 0$. Il existe $e_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(e_1) \neq 0$. Et $\mathcal{B} = (f(e_1), e_1)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
   Enfin, on a $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi B est semblable à A et appartient donc à $S(A)$.
   On pose maintenant : $\mathcal{B}' = (f(e_1), 2e_1)$. La famille $\mathcal{B}'$ reste une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et on a $B' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(2f)$. La matrice B' est encore semblable à A et aussi à $2A$.
   Donc $2A$ est semblable à A et est donc dans $S(A)$. La condition est donc suffisante.

Sujet n° 28

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
On note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E et Id_E l'identité de E.

Pour tout endomorphisme f de E, on définit la suite d'endomorphismes $(f^k)_{k\geqslant 0}$ par récurrence par : $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $k \geqslant 1$: $f^k = f \circ f^{k-1}$.

1. Montrer que la suite $(\mathrm{Ker}(f^k))_{k\geqslant 0}$ est croissante au sens de l'inclusion.
2. (a) Montrer l'existence d'un entier $q \leqslant n$ tel que $\mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^{q+1})$.
   On pose alors : $p = \min\{q \in \mathbb{N} / \mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^{q+1})\}$.

   (b) Montrer que la suite finie $(\mathrm{Ker}(f^k))_{0\leqslant k\leqslant p}$ est strictement croissante au sens de l'inclusion et que la suite $(\mathrm{Ker}(f^k))_{k\geqslant p}$ est constante.

Soit α un réel non nul. On considère la famille de polynômes $P_k = X^k(X - \alpha)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Dans la suite de l'exercice, f désigne un endomorphisme de E tel que :

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!], P_k(f) \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } P_{n-1}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Le but de l'exercice est d'établir que $p = n - 1$.

3. Dans cette question, on suppose que $f^{n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\forall k \in [\![0, n-2]\!], f^k \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et conclure.
4. Dans cette question, on suppose : $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de f.

   (b) Montrer : $\mathrm{Im}(f^{n-1}) = \mathrm{Ker}(f - \alpha\mathrm{Id}_E)$.

   (c) En déduire que $\mathrm{Ker}(f^{n-1})$ et $\mathrm{Ker}(f - \alpha\mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

   (d) Conclure par l'absurde en distinguant successivement les deux cas $p = n$ et $p < n - 1$.

Solution du sujet n° 28

1. Pour tout $k \geqslant 0$, on a : $f^k(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0$ d'où la croissance de la suite des noyaux $(\mathrm{Ker}(f^k))_{k \geqslant 0}$.
2. (a) Pour $k \geqslant 0$, posons $d_k = \dim(\mathrm{Ker}(f^k))$. Cette suite d'entiers naturels est croissante et majorée par n. Elle est donc stationnaire à partir d'un certain rang et ce rang est inférieur à n. Il existe donc q tel que $\mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^{q+1})$. Soit $p = \min\{q \in \mathbb{N} / \mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^{q+1})\}$.
   (b) Par définition de p, la suite $(\mathrm{Ker}(f^k))_{0 \leqslant k \leqslant p}$ est strictement croissante.
   (c) Montrons par récurrence sur $j \geqslant 1$ que $\mathrm{Ker}(f^{p+j}) = \mathrm{Ker}(f^p)$.
   - Pour $j = 1$, c'est vrai par définition de p
   - On a $f^{p+j+1}(x) = 0 \Rightarrow f^{p+j}(f(x)) = 0 \Rightarrow f^p(f(x)) = 0$, puis par hypothèse de récurrence. $\Rightarrow f^p(x) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f^{p+j}) \subset \mathrm{Ker}(f^p)$. L'inclusion réciproque ayant été établie à la question 1, on a montré que $\mathrm{Ker}(f^{p+j+1}) = \mathrm{Ker}(f^p)$, ce qui achève la récurrence.
3. On a : $0 \neq P_{n-2}(f) = f^{n-1} - \alpha f^{n-2} = -\alpha f^{n-2}$,
   Donc $f^{n-2} \neq 0$, et a fortiori $f^k \neq 0$ si $k \leqslant n-2$. Ainsi, $p = n-1$.
4. Supposons $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$:
   (a) Les valeurs propres de f sont incluses dans les racines de tout polynôme annulateur, donc dans $\{0, \alpha\}$.
   - Si α n'est pas valeur propre, alors $f - \alpha \mathrm{Id}_E$ est bijective et $f^{n-1} = 0$, ce qui est absurde.
   - Si 0 n'est pas valeur propre, alors f bijective entraîne $f - \alpha \mathrm{Id}_E = 0$ ce qui est impossible car, par définition de f, le polynôme $P_0 = X - \alpha$ n'est pas annulateur de f (car $n \geqslant 2$).

   (b)
   - On a $x \in \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \Rightarrow f(x) = \alpha x \Rightarrow f^{n-1}(x) = \alpha^{n-1} x \Rightarrow x = f^{n-1}\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right) \Rightarrow x \in \mathrm{Im}(f^{n-1})$.
   - Réciproquement, $x \in \mathrm{Im}(f^{n-1}) \Rightarrow \exists y \in E, f^{n-1}(y) = x$. Et on a
   $$0 = f^{n-1} \circ [f - \alpha \mathrm{Id}_E](y) = (f - \alpha \mathrm{Id}_E)[f^{n-1}(y)] = (f - \alpha \mathrm{Id}_E)(x) \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$$

   Donc $\mathrm{Im}(f^{n-1}) = \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$.

   (c) Lorsque $\alpha \neq 0$, on montre que $\mathrm{Ker}(f^{n-1})$ et $\mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. En effet :
   $$x \in \mathrm{Ker}(f^{n-1}) \cap \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \Rightarrow f^{n-1}(x) = 0 \text{ et } f^{n-1}(x) = \alpha^{n-1} x$$
   ce qui entraîne $x = 0_E$ car $\alpha \neq 0$.
   Le théorème du rang affirme alors que $\mathrm{Ker}(f^{n-1})$ est supplémentaire de $\mathrm{Im}(f^{n-1}) = \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$.

   (d)
   - si $p = n$, $d_p = d_n = n \Rightarrow \mathrm{Ker}(f^n) = E \Rightarrow f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et dans ce cas : $P_{n-1}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow f^{n-1}(f - \alpha \mathrm{Id}_E) = 0 \Rightarrow \alpha f^{n-1} = 0$. Absurde.
   - si $p < n-1$, $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{n-1})$ d'où en utilisant (c) : $\mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$ sont donc supplémentaires dans E.
   Soit $x \in E$. On a $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}(f^p), x_2 \in \mathrm{Ker}(f - \alpha Id_E)$ et
   $$P_p(f)(x) = P_p(f)(x_1) + P_p(f)(x_2) = (f - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ (f^p)(x_1) + f^p \circ (f - \alpha \mathrm{Id}_E)(x_2) = 0$$
   cela contredit l'hypothèse $P_p(f) \neq 0$ (en contradiction avec la définition de p).

Sujet n° 31

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie et u un endomorphisme de E.

On désigne par Id l'endomorphisme identité de E. Le noyau et l'image d'un endomorphisme v sont notés $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ respectivement. Dans cet exercice, on considère un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Soit v un endomorphisme de E.

   Prouver l'équivalence suivante :

$$E = \mathrm{Ker}\,(v) \oplus \mathrm{Im}\,(v) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Ker}(v^2)$$

   où la notation v^2 désigne l'endomorphisme $v \circ v$.

2. Prouver qu'on a également l'équivalence :

$$\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Ker}(v^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Im}(v^2)$$

Soit u un endomorphime de E.

3. Prouver que si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_1\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\,(u - \lambda_2\,\mathrm{Id})$.

4. On note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme u. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Sp}(u) \setminus \{\lambda_0\} \neq \varnothing$. Montrer alors que :

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{\lambda_0\}} \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id})$$

   On justifiera tout d'abord la raison pour laquelle la somme $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{\lambda_0\}} \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id})$ est bien directe.

5. En déduire que s'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}\,\big((u - \lambda_0\,\mathrm{Id})^2\big)$, alors u n'est pas diagonalisable.

   Indication : on pourra montrer en premier lieu que $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(u)$.

6. Prouver que s'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) \neq \mathrm{Im}\,\big((u - \lambda_0\,\mathrm{Id})^2\big)$, alors u n'est pas diagonalisable.

Solution du sujet n° 31

1. De manière générale, on montre aisément que $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(v^2)$. Supposons maintenant que $E = \mathrm{Ker}\,(v) \oplus \mathrm{Im}\,(v)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(v^2\right)$, il vient $v(v(x)) = 0$. Donc $v(x) \in \mathrm{Ker}\,(v) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0\}$. Ainsi, $v(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(v)$. On conclut que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(v^2)$.
   Supposons réciproquement que $\mathrm{Ker}(v^2) = \mathrm{Ker}(v)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}\,(v)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = v(y)$ avec $v(x) = 0$. Donc $v^2(y) = 0$ et $y \in \mathrm{Ker}(v^2) = \mathrm{Ker}(v)$, il s'ensuit que $v(y) = 0 = x$. Par conséquent, comme $0 \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}\,(v)$, on a $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0\}$.
   Comme $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0\}$, en utilisant le théorème du rang, on obtient :
   $$\dim\left(\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(v)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(v)\right) = \dim(E).$$
   Or, $\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v) \subset E$ et par suite, on conclut que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

2. De manière générale, on montre aisément que $\mathrm{Im}(v^2) \subset \mathrm{Im}(v)$. De même, on a toujours $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(v^2)$. Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(v^2) \Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(v)) = \dim(\mathrm{Ker}(v^2))$, ce qui est encore équivalent à l'aide du théorème du rang à $\dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(\mathrm{Im}(v^2)) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(v^2) = \mathrm{Im}(v)$ (car $\mathrm{Im}(v^2) \subset \mathrm{Im}(v)$).

3. Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_1\,\mathrm{Id})$ alors $u(x) = \lambda_1 x$ et $(u - \lambda_2\,\mathrm{Id})x = (\lambda_1 - \lambda_2)x$. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $x = \left(u - \lambda_2\,\mathrm{Id}\right)(x/(\lambda_1 - \lambda_2)) \in \mathrm{Im}\,(u - \lambda_2\,\mathrm{Id})$. On conclut que $\mathrm{Ker}(u - \lambda_1\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\,(u - \lambda_2\,\mathrm{Id})$.

4. La somme $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{\lambda_0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$ est bien directe car il s'agit de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes
   Et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \setminus \{\lambda_0\}$, on a $\lambda \neq \lambda_0$, donc d'après la question 3), $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id})$.

   Par somme on en déduit que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{\lambda_0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id})$.

5. Montrons d'abord que $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(u)$. Comme $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_0\,\mathrm{Id})^2\right)$ (question 1), on a par hypothèse $\mathrm{Ker}\left((u - \lambda_0\,\mathrm{Id})^2\right) \neq \{0\}$. Il existe donc $x \neq 0$ tel que $(u - \lambda_0\,\mathrm{Id})(u(x) - \lambda_0 x) = 0$. Si $y = u(x) - \lambda_0 x = 0$, on a $x \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) \setminus \{0\}$. On obtient alors $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(u)$. Si $y \neq 0$, comme on a $y \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id})$, il vient encore $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(u)$.
   Raisonnons par l'absurde, supposons que u est diagonalisable. Comme $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(u)$, on a soit $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_0\}$, soit $\mathrm{Sp}(u) \setminus \{\lambda_0\} \neq \varnothing$. Si $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_0\}$, il vient immédiatement $u = \lambda_0\mathrm{Id}$ et on arrive à la contradiction $E = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_0\,\mathrm{Id})^2\right)$. Si $\mathrm{Sp}(u) \setminus \{\lambda_0\} \neq \varnothing$, on a $E = \mathrm{Ker}(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) \oplus \mathcal{V}$ où $\mathcal{V} = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{\lambda_0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$. On en déduit que $\dim(\mathcal{V}) = n - \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda_0\,\mathrm{Id})) = \dim((\mathrm{Im}(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}))$ (par théorème du rang) et comme $\mathcal{V} \subset \mathrm{Im}(u - \lambda_0\,\mathrm{Id})$ d'après la question 4), on obtient $\mathcal{V} = \mathrm{Im}(u - \lambda_0\,\mathrm{Id})$. Il s'ensuit que $E = \mathrm{Ker}(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \lambda_0\,\mathrm{Id})$, ce qui est absurde d'après la question 1) car $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_0\,\mathrm{Id})^2\right)$.

6. Si $\mathrm{Im}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) \neq \mathrm{Im}\left((u - \lambda_0\,\mathrm{Id})^2\right)$, on obtient d'après la question 2), $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_0\,\mathrm{Id})^2\right)$. On conclut alors avec la question 5) que u n'est pas diagonalisable.

Sujet n° 34

Soit a un nombre réel strictement positif. Soient les deux suites réelles strictement positives $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a,\ b_0 = 1$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{b_k}\right),\ b_{k+1} = \frac{1}{2}\left(b_k + \frac{1}{a_k}\right).$$

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $x + 2 + \dfrac{1}{x} \geqslant 4$.
2. Établir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ u_k = a_k b_k\,.$$

   En déduire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
3. Montrer que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont proportionnelles et convergentes.
   Déterminer leurs limites respectives.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique définie positive* lorsque :

$$S \text{ symétrique} \quad \text{et} \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\},\ {}^tXSX > 0.$$

4. L'ensemble des matrices symétriques définies positives est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
5. Montrer que toute matrice symétrique définie positive est inversible et que son inverse est symétrique définie positive.
6. En déduire que si A est une matrice symétrique définie positive, on peut définir deux suites de matrices symétriques définies positives $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A(0) = A,\ B(0) = I_n$$

$$\text{et } \forall k \in \mathbb{N},\ A(k+1) = \frac{1}{2}\left(A(k) + B(k)^{-1}\right),\ B(k+1) = \frac{1}{2}\left(B(k) + A(k)^{-1}\right).$$

On dit qu'une suite de matrices $(U(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convergente lorsque, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, la suite $(u_{i,j}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients de la i-ème ligne et de la j-ème colonne converge (quand k tend vers $+\infty$). On appelle alors limite de cette suite la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{i,j}(k)$, pour tout i et tout j. On pourra utiliser sans démonstration que le produit de deux suites de matrices convergentes est convergente et que sa limite est le produit (de matrices) des limites.

7. Montrer que les suites $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution du sujet n° 34

1. Soit la fonction $f : x \mapsto x + 2 + \dfrac{1}{x}$.
   Comme $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, f est minimale sur $\mathbb{R}_+^*$ en 1 où elle vaut 4.
2. On a : $u_{k+1} = a_{k+1}b_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_k + \dfrac{1}{b_k}\right)\dfrac{1}{2}\left(b_k + \dfrac{1}{a_k}\right) = \dfrac{1}{4}\left(a_kb_k + 1 + 1 + \dfrac{1}{a_kb_k}\right) = \dfrac{1}{4}\left(u_k + 2 + \dfrac{1}{u_k}\right)$.
   D'après la question précédente, on a donc $u_k \geqslant 1$ pour tout $k \geqslant 1$. Et donc :
   $$u_{k+1} - u_k = \frac{-3u_k^2 + 2u_k + 1}{4u_k} = \frac{(u_k-1)(-3u_k-1)}{4u_k} \leqslant 0.$$
   La suite (u_k) est décroissante et minorée, donc elle converge. Sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit $\ell - 1 = 0$ ou $-3\ell - 1 = 0$, impossible car $u_k \geqslant 1$. Donc $\ell = 1$.
3. On a : $\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{b_k}\right)}{\frac{1}{2}\left(b_k + \frac{1}{a_k}\right)} = \dfrac{a_kb_k+1}{b_k}\dfrac{a_k}{a_kb_k+1} = \dfrac{a_k}{b_k}$. La suite de terme général $\dfrac{a_k}{b_k}$ est constante et vaut $\dfrac{a_0}{b_0} = a$, soit $a_k = a\,b_k$. D'où :
   $$a_k = \sqrt{a_k^2} = \sqrt{\frac{a_k}{b_k}u_k} = \sqrt{au_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a} \quad \text{ et } \quad b_k = \frac{1}{a}a_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$
4. Non, il est stable par somme, mais pas par produit par un scalaire (sauf si le scalaire est strictement positif). De plus il ne contient pas 0.
5. Pour toute matrice S symétrique définie positive, si (λ, X) est un couple propre de S, alors :
   $$0 < {}^tXSX = {}^tX\lambda X = \lambda \underbrace{\|X\|^2}_{>0 \text{ car } X\neq 0} \qquad \text{d'où } \lambda > 0.$$
   Donc, 0 n'étant pas valeur propre de S, la matrice S est inversible.
   En transposant $SS^{-1} = I$, on obtient ${}^t(S^{-1})({}^tS) = I$, donc ${}^t(S^{-1}) = ({}^tS)^{-1} = S^{-1}$ et par suite, la matrice S^{-1} est symétrique. De plus, pour tout $X \neq 0$, on a :
   $${}^tXS^{-1}X = {}^t(S^{-1}X)S(S^{-1}X) > 0 \qquad \text{car } S^{-1}X \neq 0.$$
6. Les stabilités par somme, inverse et produit par un scalaire strictement positif permettent de montrer par récurrence sur $k \geqslant 0$ la relation : « $A(k)$ et $B(k)$ sont bien définies et sont symétriques définies positives ».
7. D'après le théorème spectral, on diagonalise $A(0) = A = PDP^{-1}$ avec P orthogonale et D diagonale à valeurs propres strictement positives. Comme $B(0) = I = PIP^{-1}$, par récurrence, on a $A(k) = PD(k)P^{-1}$ et $B(k) = P\Delta(k)P^{-1}$, avec $D(k) = \operatorname{diag}(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)})$ et $\Delta(k) = \operatorname{diag}(b_k^{(1)}, \dots, b_k^{(n)})$ diagonales qui vérifient :
   $$D_0 = D,\ \Delta_0 = I_n,\ D_{k+1} = \frac{1}{2}\left(D_k + \Delta_k^{-1}\right), \Delta_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\Delta_k + D_k^{-1}\right).$$
   Alors, d'après la question 3, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :
   $$\lim_{k\to+\infty} a_k^{(i)} = \sqrt{a_0^{(i)}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} b_k^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{a_0^{(i)}}}.$$
   Donc, les suites $(D(k))$ et $(\Delta(k))$ convergent et par produit $(A(k) = PD(k)P^{-1})$, la suite $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge et de même pour $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$.

Sujet n° 39

On dira qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ($n \geqslant 2$) est nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$M^{p-1} \neq 0 \text{ et } M^p = 0$$

1. Montrer que si une matrice triangulaire supérieure T a ses éléments diagonaux nuls, alors elle est nilpotente.
2. Montrer que l'inversibilité d'une matrice est équivalente à celle de sa transposée.
3. Soit p un entier naturel non nul. On considère des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ deux à deux distincts et non nuls.

   Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_p & \dots & \lambda_p^p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

   (a) Soit $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

   Montrer que, si $NX = 0$, alors pour tout k de $[\![1, p]\!]$, on a l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i \lambda_k^{i-1} = 0$.

   (b) En déduire que N est inversible.
4. Soit une matrice triangulaire supérieure $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], \operatorname{Tr}\left(B^k\right) = 0$.

   Montrer que les éléments diagonaux de B sont nuls (on pourra raisonner par l'absurde en supposant que B possède p éléments diagonaux 2 à 2 distincts et non nuls, certains pouvant être répétés).
   En déduire que B est nilpotente.
5. Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], \operatorname{Tr}\left(M^k\right) = 0$.

   (a) En admettant que toute matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire, montrer que M est nilpotente.

   (b) Le raisonnement précédent est-il encore valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
   Plus précisément, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, existe-t-il toujours une matrice triangulaire T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PTP^{-1}$?

SOLUTION DU SUJET N° 39

1. En considérant l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice T, et si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a (avec des notations évidentes) :

$$f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = t_{1,2}e_1 \text{ donc } f^2(e_2) = 0, \quad f(e_3) = t_{1,3}e_1 + t_{2,3}e_2 \text{ donc } f^3(e_3) = 0$$

Une récurrence (ou une simple itération) montre que : $\forall k \in [\![1,n]\!], f^k(e_k) = 0$.
On a, a fortiori : $\forall k \in [\![1,n]\!], f^n(e_k) = 0$. Ainsi, $f^n = 0$, donc $T^n = 0$.
Comme $T^0 = I_n \neq 0$, l'entier $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* | M^k = 0\}$ existe, donc T est nilpotente.

2. A inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AB = I \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), {}^tB^tA = I \Leftrightarrow {}^tA$ inversible.

3. (a) Le système $NX = 0$ s'écrit : $\forall k \in [\![1,p]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i\lambda_k^i = 0$, et en simplifiant par $\lambda_k \neq 0$, on obtient :

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \sum_{i=1}^{p} a_i\lambda_k^{i-1} = 0$$

   (b) En notant P le polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_iY^{i-1}$ de $\mathbb{R}_n[Y]$, ce qui précède montre que P possède $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ comme racines distinctes. Comme P est de degré inférieur ou égal à $p-1$, P est le polynôme nul donc ses coefficients (les a_i) sont nuls, ce qui prouve que $X = 0$ et ainsi N est inversible.

4. Notons $d_1, \ldots, d_n$ les coefficients diagonaux de B.
Comme, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on a $\mathrm{Tr}\left(B^k\right) = 0$, on obtient : (1) $\forall k \in [\![1,n]\!], d_1^k + \ldots + d_n^k = 0$.
Si on suppose que parmi les réels $d_1, \ldots, d_n$, il en existe p qui sont 2 à 2 distincts et non nuls, et en les notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (pour coller à ce qui précède), alors, en désignant par c_i le nombre d'occurrences de λ_i sur la diagonale de B, l'équation (1) devient :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], c_1\lambda_1^k + \ldots + c_p\lambda_p^k = 0$$

En prenant les p premières équations, on obtient le système : $\left\{\begin{array}{l} c_1\lambda_1 + \ldots + c_p\lambda_p = 0 \\ c_1\lambda_1^2 + \ldots + c_p\lambda_p^2 = 0 \\ \vdots \\ c_1\lambda_1^p + \ldots + c_p\lambda_p^p = 0 \end{array}\right.$.

En considérant $c_1, \ldots, c_p$ comme les inconnues, la matrice de ce système est : $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^p & \cdots & \lambda_p^p \end{pmatrix}$.

On a ${}^tM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_p & \cdots & \lambda_p^p \end{pmatrix}$ et la question 2 nous garantit que ${}^tM$ est inversible donc M aussi.
On conclut que le système écrit plus haut est de CRAMER et ainsi $(c_1, \ldots, c_p) = (0, 0, \ldots, 0)$, ce qui prouve, par l'absurde, qu'aucun λ_i n'est différent de 0.
Finalement, tous les λ_i sont nuls donc, grâce à la première question, B est nilpotente.

5. (a) Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle est semblable à une matrice triangulaire T, donc il existe une matrice inversible P telle que : $B = PTP^{-1}$. On en déduit : $\forall k \in \mathbb{N}, B^k = PT^kP^{-1}$.
Comme pour tout entier naturel k, on a $\mathrm{Tr}\left(B^k\right) = 0$, alors $\mathrm{Tr}\left(T^k\right) = 0$ (car deux matrices semblables ont même trace) et d'après la question 4, T est nilpotente donc B aussi.

   (b) Non, par exemple : $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si M était semblable à une matrice triangulaire réelle T, alors, les éléments diagonaux de T seraient valeurs propres de M, ce qui est impossible puisque les valeurs propres de M ne sont pas réelles.

Sujet n° 40

Soit un entier $n \geqslant 1$. Soit E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$; la norme euclidienne associée est notée $\| \cdot \|$. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Soit u un endomorphisme **symétrique** de $\mathcal{L}(E)$. Le but de cet exercice est de construire des approximations de valeurs propres et de vecteurs propres de u. À cette fin, on suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ et deux réels $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\|u(x) - \lambda\, x\| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|x\| = 1.$$

1. (a) Justifier qu'il existe n réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ordonnés par ordre croissant et une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \quad \text{et} \quad u(e_k) = \lambda_k\, e_k,\ \ \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

   (b) Exprimer $\|u(x) - \lambda\, x\|^2$ en fonction de λ, des λ_k et des x_k.

   (c) En déduire qu'il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda - \lambda_{i_0}| \leqslant \varepsilon$.

2. Soit $d > \varepsilon$. On définit les ensembles d'indices I et J par :

$$I = \big\{ i \in [\![1, n]\!] \ \mid |\lambda - \lambda_i| \leqslant d \big\} \quad \text{et} \quad J = [\![1, n]\!] \setminus I.$$

   (a) Justifier que $I \neq \varnothing$.

   (b) On définit les vecteurs x_I et x_J par

$$x_I = \sum_{i \in I} x_i\, e_i \quad \text{et} \quad x_J = \sum_{j \in J} x_j\, e_j$$

   avec la convention que $x_J = 0$ si $J = \varnothing$. Montrer que $\|x_J\| < \dfrac{\varepsilon}{d}$.

   (c) Montrer que $1 - \|x_I\| \leqslant \|x_J\|$ et que $0 < \|x_I\| \leqslant 1$.

   (d) Conclure que

$$\Big\| x - \frac{x_I}{\|x_I\|} \Big\| < \frac{2\,\varepsilon}{d}.$$

   (e) Que peut-on en déduire sur x dans le cas où $\{\lambda_i, i \in I\}$ est un singleton ?

Solution du sujet n° 40

1. (a) L'endomorphisme u est symétrique réel. D'après le cours, son spectre est réel et il est diagonalisable dans une base orthonormée. On peut choisir cette base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres tels que les valeurs propres associées λ_k pour $k = 1, \ldots, n$ satisfassent $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Les x_k sont alors les coefficients du vecteur x dans cette base. Avec ce choix, on obtient les relations demandées.

   (b) On a $x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$ et $u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k\, e_k$. En utilisant le fait que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale, il vient :

$$\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda) x_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda)^2\, x_k^2. \tag{1.1}$$

   (c) En utilisant les hypothèses : $\|u(x) - \lambda\, x\| \leqslant \varepsilon$ et $\|x\| = 1$ et la relation (1.1), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda)^2\, x_k^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1. \tag{1.2}$$

   Il existe alors un indice i_0 tel que $|\lambda - \lambda_{i_0}|^2 = \min_{k=1,\ldots,n} |\lambda - \lambda_k|^2$. Il découle alors de (1.2) la minoration :

$$|\lambda - \lambda_{i_0}|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda)^2\, x_k^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

   Il vient $|\lambda - \lambda_{i_0}| \leqslant \varepsilon$. On conclut que λ est une approximation de la valeur propre λ_{i_0} à ε près.

2. (a) D'après 1), il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda - \lambda_{i_0}| \leqslant \varepsilon$ et comme $\varepsilon < d$, on a $i_0 \in I$ d'où $I \neq \varnothing$.

   (b) Si $J = \varnothing$, on a $x_J = 0$, donc l'inégalité demandée est vérifiée. Si $J \neq \varnothing$, il découle avec (1.2) que

$$\varepsilon^3 \geqslant \|u(x) - \lambda x\| = \sum_{j\in J} (\lambda_j - \lambda)^2\, x_j^2 + \sum_{j \in I} (\lambda_j - \lambda)^2\, x_j^2 \geqslant \sum_{j\in J} (\lambda_j - \lambda)^2\, x_j^2 > d^2 \sum_{j \in J} x_j^2 = d^2\, \|x_J\|^2\,,$$

   (où l'inégalité stricte utilise que $J \neq \varnothing$ et la définition de J) ce qui est équivalent au résultat demandé.

   (c) On observe que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = x_I + x_J$.
   D'après la question 2), on a donc $\|x\| = \|x_I + x_J\| \leqslant \|x_I\| + \|x_J\|$ et donc $\|x\| - \|x_I\| \leqslant \|x_J\|$.
   On obtient alors la première inégalité en utilisant le fait que $\|x\| = 1$. Pour la seconde inégalité, on remarque que x_I et x_J sont orthogonaux (car la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale).
   On a donc $1 = \|x\|^2 = \|x_I\|^2 + \|x_J\|^2$ et ainsi $\|x_I\| \leqslant 1$.
   Si l'on avait $\|x_I\| = 0$, alors $x_J = x$ et $I = \emptyset$, ce qui contredirait la question 2.a).

   (d) On a

$$\Big\|x - \frac{x_I}{\|x_I\|}\Big\| = \Big\|x - x_I + x_I - \frac{x_I}{\|x_I\|}\Big\| \leqslant \|x - x_I\| + \Big\|x_I - \frac{x_I}{\|x_I\|}\Big\| = \|x_J\| + \Big\|x_I - \frac{x_I}{\|x_I\|}\Big\|. \tag{1.3}$$

   On a alors en utilisant la question 2)c) :

$$\Big\|x_I - \frac{x_I}{\|x_I\|}\Big\| = \Big\|(\|x_I\| - 1)\, \frac{x_I}{\|x_I\|}\Big\| = |\|x_I\| - 1| = (1 - \|x_I\|) \leqslant \|x_J\|.$$

   Il découle alors avec (1.3) que $\Big\|x - \frac{x_I}{\|x_I\|}\Big\| \leqslant 2\|x_J\|$ et on conclut avec la question 2)b).

3. Si $\{\lambda_i, i \in I\}$ est un singleton, on a nécessairement $\{\lambda_i, i \in I\} = \{\lambda_{i_0}\}$ car d'après 2)a) $i_0 \in I$. Le vecteur $x_I/\|x_I\|$ est donc un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_{i_0}.
   Le vecteur unitaire x est donc une approximation à $2\varepsilon/d$ près de ce vecteur propre.

Sujet n$^{\text{o}}$ 44

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si pour toute matrice colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX > 0$.
2. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si ${}^tPAP \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre réelle de AB.
   (a) Montrer que pour toute matrice non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^tX\,{}^tBABX > 0$. Montrer que $\lambda > 0$.
   (b) En déduire que $AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $AB = BA$.
4. Soient A, B et C trois matrices appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. **On suppose que ABC est symétrique**.
   (a) Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = Q\,{}^tQ$.
   (b) Montrer que ${}^tQABCQ \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (c) Qu'en déduit-on sur ABC ?

Solution du sujet n° 44

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. A est donc diagonalisable. Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de A associée aux valeurs propres (pas nécessairement distinctes) $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, alors on a : $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\, {}^t X_k$, d'où pour toute X matrice colonne non nulle, ${}^t XAX = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k ({}^t XX_k)^2$. Comme X est non nulle, il existe un i dans $[\![1, n]\!]$ tel que ${}^t XX_i \neq 0$, et comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a donc : ${}^t XAX > 0$.
   Réciproquement, soit A une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable, telle que l'on a pour tout vecteur colonne X non nul : ${}^t XAX > 0$. En particulier pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$ et X vecteur propre associé à λ on obtient : $\lambda\, {}^t XX > 0$, d'où $\lambda > 0$ car ${}^t XX > 0$ (X étant un vecteur propre donc non nul).
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors ${}^t PAP$ est symétrique. De plus, soit X un vecteur colonne non nul, alors : ${}^t X {}^t PAPX = {}^t (PX)A(PX)$, avec $PX \neq 0$ car P est inversible.
   D'où ${}^t X {}^t PAPX = {}^t (PX)A(PX) > 0$ car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ainsi ${}^t PAP \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ en utilisant la question 1.
   Réciproquement, si ${}^t PAP \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A = {}^t (P^{-1})({}^t PAP)(P^{-1})$ et on applique ce qu'on vient de montrer à ${}^t PAP$ et P^{-1}.
3. (a) $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc B est inversible (0 n'est pas valeur propre), alors pour $X \neq 0$: ${}^t BAB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après la question 2. Ainsi, ${}^t X {}^t BABX > 0$. Or ${}^t X {}^t BABX = \lambda {}^t XBX$, d'où $\lambda > 0$ car ${}^t XBX > 0$.
   (b) Supposons que $AB = BA$. Comme A et B sont symétriques réelles, ${}^t A = A, {}^t B = B$. Ainsi $AB = BA \Rightarrow AB = {}^t (AB)$ et $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ses valeurs propres sont réelles et donc strictement positives par la question précédente.
   Réciproquement, si $AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont réelles strictement positives et ${}^t (AB) = AB \Leftrightarrow {}^t B {}^t A = AB \Leftrightarrow AB = BA$.
4. (a) B est diagonalisable dans une base orthonormée, donc $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$: $B = P\Delta\, {}^t P$ où Δ est diagonale. Les éléments diagonaux de Δ étant strictement positifs, il existe une matrice U diagonale à coefficients strictement positifs telle que : $U^2 = \Delta$. Ainsi : $B = PUU {}^t P$. Posons $Q = PU$. On a alors : ${}^t U {}^t P = U {}^t P$, d'où $B = Q\, {}^t Q$ et Q est inversible comme produit de matrices inversibles.
   (b) On a : ${}^t QABCQ = {}^t QAQ {}^t QCQ = A'B'$ où $A' = {}^t QAQ \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B' = {}^t QCQ \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Et $B'A' = {}^t QCQ {}^t QAQ = {}^t QCBAQ = {}^t QABCQ$ par symétrie de ABC, donc on a : $B'A' = A'B'$. D'après la question 3b, on a donc $A'B' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, c'est à dire : ${}^t QABCQ \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (c) D'après la question 2, on a donc $ABC \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec $P = Q^{-1}$.

Sujet n° 46

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ muni du produit scalaire $\langle\ \rangle$ et de la norme $\|\ \|$ associée. On note Id_E l'endomorphisme identité de E

1. Soit f un endomorphisme symétrique de E que l'on suppose **non bijectif** et non nul. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.
2. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

   On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{0\leqslant j\leqslant k}$ avec $k \geqslant 1$ et

   $$\lambda_0 = 0 \text{ et } 0 < |\lambda_1| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_k|.$$

   Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, on note E_{λ_j} le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j. On rappelle que $E = \displaystyle\bigoplus_{j=0}^{k} E_{\lambda_j}$ et que ces sous-espaces sont orthogonaux. On note p_j le projecteur orthogonal sur E_{λ_j} (c'est-à-dire le projecteur sur E_{λ_j} parallèlement à son orthogonal $E_{\lambda_j}^{\perp}$).

3. Montrer que : $\mathrm{Id}_E = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} p_j$.
4. Démontrer que : $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j$.
5. Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que l'on a : $p = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j$.

   On note alors g l'endomorphisme de E défini par : $g = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$,

6. Montrer que l'on a : $f \circ g = p$.
7. Soit y un vecteur de E. Montrer que l'on a :

   $$\forall x \in E, \quad \|f(x) - y\| = \inf_{z\in E} \|f(z) - y\| \Longleftrightarrow x - g(y) \in \mathrm{Ker}(f)$$

Solution du sujet n$^{\text{o}}$ 46

1. Comme f est un endomorphisme symétrique réel, il est diagonalisable. Le fait que l'endomorphisme f soit non bijectif est équivalent à 0 valeur propre de f et le fait qu'il ne soit pas l'endomorphisme nul et diagonalisable permet d'affirmer qu'il admet au moins une autre valeur propre non nulle.
2. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$ et $y \in \operatorname{Im} f$. Alors $y = f(z)$ et, par endomorphisme symétrique
$$0 = \langle f(x), z\rangle = \langle x, f(z)\rangle = \langle x, y\rangle.$$
Ainsi $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux. Ils sont supplémentaires par le théorème du rang.
3. L'endomorphisme f est diagonalisable. Ainsi $E = \bigoplus_{j=0}^{k} E_{\lambda_j}$. Donc tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$ avec $x_j \in E_{\lambda_j}$, et alors $p_j(x) = x_j$.
Donc $\operatorname{Id}_E = \sum_{j=0}^{k} p_j$.
4. De même
$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} f(x_j) = 0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j(x)$$
5. On sait que $E_0 = \operatorname{Ker} f$, que $\operatorname{Ker} f \oplus^{\perp} \operatorname{Im} f$ et que $\bigoplus_{j=1}^{k} E_{\lambda_j} \subset \operatorname{Im} f$ et qu'ils sont de même dimension, car tous deux supplémentaires orthogonaux de $\operatorname{Ker} f$ (même égaux car il n'existe qu'un seul supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel). Donc $\bigoplus_{j=1}^{k} E_{\lambda_j} = \operatorname{Im} f$ et $p = \sum_{j=1}^{k} p_j$.
6. On remarque que $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$. Donc
$$f \circ g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}(p_i \circ p_j) = \sum_{i=1}^{k} p_i = p$$
7. Il s'agit ici du théorème de la projection orthogonale.
Soit $y \in E$, Il existe un couple $(x, f(z)) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f$ tel que $y = x + f(y)$ et x et $f(y)$ orthogonaux. De plus $\inf_{z \in E} \|f(z) - y\| = d(y, \operatorname{Im} f)$; cette distance est atteinte par le projeté orthogonal de y sur $\operatorname{Im} f$ et elle vaut $||x||$. Ainsi
$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Longleftrightarrow x - g(y) \in \operatorname{Ker}(f)$$

Sujet n° 49

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Soit E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme euclidienne associée est notée $|| \cdot ||$.
Un endomorphisme f de E est appelé une contraction si pour tout x de E, $||f(x)|| \leqslant ||x||$.

1. Soit p un projecteur orthogonal de E. Montrer que p est une contraction.
2. Dans cette question, f est un endomorphisme symétrique de E,
   c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.
   Montrer que f est une contraction si et seulement si toute valeur propre λ de f vérifie $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Soit f un endomorphisme bijectif de E. On note M la matrice associée à f dans une base orthonormée de E.
   (a) Montrer que la matrice $A = {}^tMM$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice symétrique S dont les valeurs propres sont strictement positives telle que $A = S^2$.
   (c) Montrer qu'il existe une matrice Ω orthogonale telle que $M = \Omega S$.
   (d) Montrer que f est une contraction si et seulement si toute valeur propre λ de s vérifie $|\lambda| \leqslant 1$, où s désigne l'endomorphisme canoniquement associé à S.
4. Montrer qu'on a unicité du couple (Ω, S) dans la décomposition de $M = \Omega S$ avec Ω orthogonale et S symétrique à valeurs propres strictement positives.

Solution du sujet n° 49

1. Un projecteur orthogonal est un endomorphisme symétrique. On sait alors que $E = \operatorname{Ker} p \oplus^{\perp} \operatorname{Im} p$. Donc pour tout $x \in E$, $x = y + z$ avec $(y, z) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ et $||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$. Ainsi
$$||p(x)||^2 = ||z||^2 \leqslant ||y||^2 + ||z||^2 \leqslant ||x||^2$$
2. L'endomorphisme f est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de f. Soit $x \in E$. Alors
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \text{ et } ||f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2$$
   - si $|\lambda_i| \leqslant 1$, alors $||f(x)||^2 \leqslant ||x||^2$.
   - si pour tout $x \in E$, $||f(x)|| \leqslant ||x||$, ceci est encore vrai pour $x = e_i$ et $|\lambda_i| \leqslant 1$, puisque $e_i \neq 0$.
3. (a) La matrice A est clairement symétrique réelle et si $AX = \lambda X$, alors ${}^tX{}^tMMX = \lambda{}^tXX$ ou $||MX||^2 = \lambda ||X||^2$. La matrice M étant inversible (f bijectif), il vient $\lambda > 0$.
   (b) Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i > 0$ telles que $A = {}^tPDP$. On pose $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})$. Il vient $A = {}^tPDP = {}^tP\Delta P{}^tP{}^t\Delta P = S^2$, avec S symétrique à valeurs propres strictement positives, car S est orthosemblable à une matrice Δ diagonale à valeurs propres strictement positives.
   (c) On pose $\Omega = MS^{-1}$. On a alors ${}^t\Omega\Omega = {}^tS^{-1}{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$. La matrice Ω est orthogonale.
   (d) Soit ω et s les endomorphismes canoniquement associés à Ω et S. On peut écrire que $f = \omega \circ s$ et $||f(x)|| = ||\omega(s(x))|| = ||s(x)||$. On est ainsi ramené à la question 2.
4. Supposons que $M = \Omega_1 S_1 = \Omega_2 S_2$, sous les conditions demandées. Alors ${}^tMM = S_2^2 = S_1^2$. Soit (λ, X) un couple propre de S_1, alors $S_2^2 X = S_1^2 X = \lambda^2 X$. Ainsi λ^2 est une valeur propre de S_2^2. La matrice $S_2^2 - \lambda^2 I$ n'est pas inversible, le produit $(S_2 - \lambda I)(S_2 + \lambda I)$ non plus. Mais la matrice $S_2 + \lambda I$ est inversible puisque les valeurs propres de S_2 sont toutes strictement positives. Donc (λ, X) est un couple propre de S_2.

   En inversant les rôles de S_1 et S_2, on obtient que ces deux matrices ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres. Elles sont diagonalisables dans cette base commune de vecteurs propres et semblables à la même matrice diagonale. Donc $S_1 = S_2$ et $\Omega_1 = \Omega_2$, puisque S_1 est inversible.

Sujet n° 54

On considère un espace euclidien E de dimension supérieure ou égale à 2. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on désigne par $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de u.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal dont l'image est notée F. En utilisant la décomposition orthogonale $E = F \oplus F^{\perp}$, montrer que $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ et que l'on a égalité si et seulement si $x \in F$.
2. On considère un deuxième projecteur orthogonal $q \in \mathcal{L}(E)$ et on note G son image. On introduit l'endomorphisme $u = p \circ q \circ p$.
   (a) Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E. Qu'en déduire quant à la diagonalisabilité de u ?
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Sp}\,(u)$ des valeurs propres de u est contenu dans le segment $[0, 1]$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - Id_E) = F \cap G$.
   (d) On suppose que $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in E$. Prouver que la suite $(\|u^n(x)\|)$ tend vers 0.
   (e) Lorsque $F \cap G \neq \{0\}$, justifier l'existence d'une base orthonormée $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ de E dans laquelle u se diagonalise et telle que $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ soit une base orthonormée de $F \cap G$ ($n = \dim(E)$ et $p = \dim(F \cap G)$).
   (f) En déduire que dans tous les cas, pour tout $x \in E$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u^n(x) - p_{F\cap G}(x)\| = 0$ où $p_{F\cap G}$ est la projection orthogonale sur $F \cap G$.
3. On se donne $x_0 \in E$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = p_n(x_{n-1})$ où la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par
$$p_n = \begin{cases} p & \text{si } n \text{ est impair} \\ q & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$
   (a) Exprimer x_{2k} (resp. x_{2k+1}) en faisant intervenir u pour $k \geqslant 2$ (resp. $k \geqslant 1$).
   (b) En déduire que (x_n) converge dans E vers $p_{F\cap G}(x_0)$ (c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - p_{F\cap G}(x_0)\| = 0$).
4. Dans cette question, on se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$ et on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$, $G = \mathrm{Vect}\left(\dfrac{e_1 + e_3}{2}, \dfrac{e_2 + e_3}{2}\right)$ et que $x_0 = (1, 2, 1)$.
   Vers quel point de $\mathbb{R}^3$ la suite (x_n) converge-t-elle ?

Solution du sujet n° 54

1. Soit $x \in E$, écrivons $x = x_1 + x_2$ dans la décomposition orthogonale $E = F \oplus F^\perp$; alors nous avons $\|p(x)\|^2 = \|x_1\|^2 \leqslant \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$ d'où l'inégalité souhaitée. Si on est dans le cas d'égalité, d'après ce qui précède on a nécessairement $\|x_2\| = 0$ et par suite $x = x_1 \in F$. La réciproque est évidente.
2. (a) Le cours nous dit qu'un projecteur orthogonal est symétrique, d'où pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x) \mid y\rangle = \langle p(q \circ p(x)) \mid y\rangle = \langle q \circ p(x) \mid p(y)\rangle = \cdots = \langle x \mid u(y)\rangle$ et par conséquent u est symétrique. L'endomorphisme u est donc diagonalisable dans une base orthonormée.

   (b) Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre unitaire associé à λ, il vient $\lambda = \langle u(x) \mid x\rangle = \langle q \circ p(x) \mid p(x)\rangle = \|q \circ p(x)\|^2$ (q est un projecteur symétrique). On voit donc que $\lambda \geqslant 0$, et par ailleurs $\lambda \leqslant \|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2 = 1$ avec la question 1.). Il en découle bien que $\mathrm{Sp}\,(u) \subseteq [0, 1]$.

   (c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - Id_E)$, on a donc $x = p(q \circ p(x)) \in \mathrm{Im}(p) = F$. Avec 1.), on en déduit d'abord que $\|x\| = \|u(x)\| \leqslant \|q \circ p(x)\| = \|q(x)\| \leqslant \|x\|$ (on sait déjà que $p(x) = x$ puisque $x \in F$), d'où $\|x\| = \|q(x)\|$ et par suite $x \in G$. On a donc bien $x \in F \cap G$. L'inclusion réciproque est évidente.

   (d) Notons $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Compte tenu de la question 2. b) l'hypothèse $F \cap G = \{0\}$ implique que tous les λ_k appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$. Il s'ensuit que $\|u^n(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{2n} \langle x \mid \varepsilon_k\rangle^2$ décroît vers 0, ce qui termine la question.

   (e) Comme u est symétrique, ses sous-espaces propres fournissent une décomposition orthogonale de E. Il suffit donc de choisir une base orthonormée $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ de $Ker(u - Id_E) = F \cap G$, de choisir ensuite une base orthonormée dans chacun des sous-espaces propres restants et de terminer par concaténation.

   (f) La question 2.d) donne la réponse lorsque $F \cap G = \{0\}$. Si $F \cap G \neq \{0\}$, avec les notations déjà introduites et adaptées à la base orthonormée construite dans la question précédente, il vient $u^n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle x \mid \varepsilon_k\rangle\varepsilon_k + \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k^n \langle x \mid \varepsilon_k\rangle\varepsilon_k = p_{F\cap G}(x) + \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k^n \langle x \mid \varepsilon_k\rangle\varepsilon_k$. Ce qui implique $\|u^n(x) - p_{F\cap G}(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k^{2n} \langle x \mid \varepsilon_k\rangle^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\lambda_k \in [0, 1[$ pour $k = p + 1, \cdots, n$.
3. (a) Par récurrence, on montre que $x_{2k} = q \circ u^{k-1}(x_0)$ pour $k \geqslant 2$ et $x_{2k+1} = u^k(x_0)$ pour $k \geqslant 1$.

   (b) Pour $k \geqslant 2$, on en déduit que
   $$\|x_{2k} - p_{F\cap G}(x_0)\| = \|q\left(u^{k-1}(x_0) - p_{F\cap G}(x_0)\right)\| \leqslant \|u^{k-1}(x_0) - p_{F\cap G}(x_0)\|.$$
   En notant $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y, il est alors clair que pour $n \geqslant 4$
   $$\|x_n - p_{F\cap G}(x_0)\| \leqslant \|u^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(x_0) - p_{F\cap G}(x_0)\| + \|u^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x_0) - p_{F\cap G}(x_0)\|.$$
   Grâce à la question 2. f) on peut alors en conclure que x_n converge dans E vers $p_{F\cap G}(x_0)$.
4. On observe que $F \cap G = \mathrm{Vect}\,(e_1 - e_2)$. On considère le vecteur unitaire $u = \dfrac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$. Le cours nous dit alors que $p_{F\cap G}(x_0) = (U\,{}^tU)X_0 = \langle x_0 \mid u\rangle u$. En utilisant maintenant la question 3. b), on en déduit que la suite (x_n) converge vers le point $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Sujet n° 55

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe une unique famille de polynôme $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{R}_n[X]$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ L_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

   Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, préciser le degré et le coefficient dominant λ_i de L_i.

2. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Déterminer les coordonnées de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

3. Soit l'application $\mathbb{R}_n[X] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(P) = P^{(n)}(0)$.
   Montrer que φ est linéaire et calculer la matrice-ligne $U_n = \big(\varphi(L_0), \ldots, \varphi(L_n)\big)$.

4. Soit la matrice-ligne $K_n = \big(\varphi(1), \varphi(X) \ldots, \varphi(X^n)\big)$. Soit V_n la matrice de passage de la base $\mathcal{L}$ à la base $\mathcal{C} = (1, X, \ldots, X^n)$. Montrer que $K_n = U_n V_n$.

5. En déduire que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [\![0, n-1]\!] \\ n! & \text{si } j = n. \end{cases}$

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x_0 + kh).$$

Solution du sujet n° 55

1. La condition $L_i(j) = 0$ si $j \neq i$ donne n racines de L_i, distinctes donc simples puisque $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$, d'où : $L_i = \lambda_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - j)$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Alors : $L_i(i) = 1 \iff \lambda_i = \dfrac{1}{\prod_{j \neq i} (i-j)} = \dfrac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}$.
   D'où l'existence et l'unicité de L_i (pour tout i), qui est de degré n.
2. Comme l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, la famille de $n+1$ vecteurs $L_0, \ldots, L_n$ est une base si et seulement si elle est libre.
   Or, pour tout $\mu_0, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$, si $\mu_0 L_0 + \cdots + \mu_n L_n = 0$, alors en évaluant cette égalité en j, on obtient $\mu_j = 0$, car $L_i(j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_j(j) = 1$. Donc : $\mu_0 L_0 + \cdots + \mu_n L_n = 0 \Longrightarrow \mu_0 = \cdots = \mu_n = 0$.
   Les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base $L_0, \ldots, L_n$ sont les nombres $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha_0 L_0 + \cdots + \alpha_n L_n = P$. En évaluant cette égalité en j, on a alors : $\alpha_j = P(j)$.
3. L'application φ est linéaire d'après les linéarités de la dérivation et de $P \mapsto P(0)$.
   Comme $(X^k)^{(n)} = 0$ si $k < n$ et $(X^n)^{(n)} = n!$, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a : $L_i^{(n)}(0) = \lambda_i n! = (-1)^{n-i}\binom{n}{i}$.
   Donc la matrice-ligne recherchée est : $U_n = \begin{pmatrix} (-1)^n\binom{n}{0} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & (-1)^0\binom{n}{n} \end{pmatrix}$.
4. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, en numérotant à partir de 0, le j-ème coefficient de la matrice ligne $U_n V_n$ est le produit de U_n avec la j-ème colonne de V_n, colonne qui est formée des coefficients $v_{i,j}$ tels que $X^j = \sum_{i=0}^{n} v_{i,j} L_i$; ce produit vaut donc : $\sum_{i=0}^{n} \varphi(L_i) v_{i,j} = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} v_{i,j} L_i\right) = \varphi(X^j)$,
   qui est le j-ème coefficient de la matrice-ligne K_n.
5. D'après la question 2, les coordonnées de P dans la base $\mathcal{L}$, sont $(P(0), P(1), \ldots, P(n))$.
   Donc $V_n = (i^j)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.

   Par produit de matrices, on en déduit que : $K_n = U_n V_n = \begin{pmatrix} c_0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$ avec $c_j = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^j$.

   Par ailleurs, comme $\varphi(X^k) = 0$ si $k < n$ et $\varphi(X^n) = n!$, on a directement $K_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & n! \end{pmatrix}$.

   Ainsi : $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [\![0, n-1]\!] \\ n! & \text{si } j = n. \end{cases}$

6. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre n en x_0, on a : $f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) h^j + \mathrm{o}(h^n)$.

   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, comme kh tend vers 0 quand h tend vers 0, on peut remplacer h par kh, d'où :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x_0 + kh) &= \frac{1}{h^n} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \times (kh)^j + \mathrm{o}(h^n) \right) \\
&= \frac{1}{h^n} \left(\sum_{0 \leqslant jk \leqslant n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \times (kh)^j \right) + \mathrm{o}(1) \\
&= \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x_0) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^j \right) \right) + \mathrm{o}(1) \\
&= f^{(n)}(x_0) + \mathrm{o}(1) \ \text{ d'après la question précédente}
\end{aligned}
$$

   Et $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x_0 + kh) = f^{(n)}(x_0)$.

Sujet n° 58

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On suppose que X et Y admettent des moments d'ordre 2 et on suppose que X n'a pas une variance nulle.
Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} E(X^2) & E(X) \\ E(X) & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer l'existence de l'espérance $E((Y - aX - b)^2)$ et trouver une matrice colonne B et un nombre $C \in \mathbb{R}$ (qui ne dépendent ni de a ni de b) tels que :
$$E((Y - aX - b)^2) = {}^tUAU - 2{}^tBU + C \qquad \text{avec } U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

On souhaite montrer l'existence et trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $E((Y - aX - b)^2)$ soit minimal.
On pose $f(a, b) = E((Y - aX - b)^2)$.

2. Montrer que f admet une borne inférieure sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont strictement positives.
4. En déduire l'existence d'un minimum pour f sur $\mathbb{R}^2$.
5. Trouver explicitement tous les couples (a, b) pour lesquels ce minimum est atteint.

SOLUTION DU SUJET N° 58

1. On a : $(Y-aX-b)^2 = Y^2+a^2X^2+b^2-2aXY-2bY+2abX$.
Comme $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ existent, on en déduit que $E(XY)$ existe (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).
Comme $E(X^2)$ (resp. $E(Y^2)$) existe, on en déduit que $E(X)$ (resp. $E(Y)$) existe.
Donc, par linéarité de l'espérance, $E((Y-aX-b)^2)$ existe et :
$$E((Y-aX-b)^2) = a^2E(X^2)+2abE(X)+b^2-2aE(XY)-2bE(Y)+E(Y^2) = {}^tUAU - 2{}^tBU + C,$$
en posant $B = \begin{pmatrix} E(XY) \\ E(Y) \end{pmatrix}$ et $C = E(Y^2)$.
2. La fonction f est minorée (par 0, d'après la positivité de l'espérance), donc elle admet un borne inférieure.
3. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable, d'après le théorème spectral — semblable à $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Ses valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement positives puisque :
$$\lambda_1+\lambda_2 = \operatorname{tr}(A) = E(X^2)+1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1\lambda_2 = \det(A) = E(X^2)-E^2(X) = V(X) > 0.$$
Autre idée : ${}^tXAX = E\big((x_1X+x_2)^2\big)$...
4. D'après le théorème spectral encore, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PD{}^tP$. On a alors :
$$\begin{aligned} f(a,b) &= {}^tUPD{}^tPU - 2{}^tBP{}^tPU + C \\ &= {}^tU'DU' - 2{}^tB'U' + C \text{ avec } U' = {}^tPU = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \text{ et } B' = {}^tPB = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 a'^2 + \lambda_2 b'^2 - 2\mu_1 a' - 2\mu_2 b' + C \\ &= \lambda_1\left(a' - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(b' - \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2 + C - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} - \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} \end{aligned}$$
Comme $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, on en déduit que la borne inférieure est $C - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} - \frac{\mu_2^2}{\lambda_2}$ et qu'elle est atteinte en un unique point donné par $a' = \frac{\mu_1}{\lambda_1}$ et $b' = \frac{\mu_2}{\lambda_2}$ — qui détermine un unique couple (a,b).
5. La fonction f est polynomiale. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est ouvert, donc ce minimum est atteint en un point critique. Or :
$$\partial_1 f(a,b) = 2aE(X^2)+2bE(X)-2E(XY) \qquad \text{et} \qquad \partial_2 f(a,b) = 2aE(X)+2b-2E(Y).$$
Donc les points critiques sont les points (a,b) tels que
$$\begin{cases} aE(X^2)+bE(X) = E(XY), \\ aE(X)+b = E(Y), \end{cases} \iff MU = B \iff U = M^{-1}B.$$
Soit :
$$a = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{V(X)} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\operatorname{Cov}(X,XY)-\operatorname{Cov}(X^2,Y)}{V(X)}$$
qui ne peut être que le point où le minimum est atteint.

Sujet n° 63

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, chacun de dimension n, de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
On note $\mathcal{B}$ la base de E obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ — c'est à dire que si $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$, alors $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$.

Soit u un endomorphisme de E_1 diagonalisable. Soit f l'application linéaire de E_1 sur E_2 dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est I_n (matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Pour tout vecteur $x = x_1 + x_2$ de E, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on pose :

$$F(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2)$$

1. (a) Montrer que F est linéaire. Calculer $\operatorname{Ker} F$.
   (b) Montrer que F est un automorphisme de E.
2. Soit μ une valeur propre de F et $x = x_1 + x_2$ un vecteur propre associé, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
   (a) Montrer que $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$.
   (b) Montrer que x_1 est un vecteur propre de u. Déterminer sa valeur propre associée en fonction de μ.
3. Soit λ une valeur propre de u et x_1 un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que l'équation d'inconnue $\mu \in \mathbb{R}^*$ suivante :
   $$\mu - \frac{1}{\mu} = \lambda$$
   admet deux solutions réelles distinctes μ_1, μ_2.
   (b) Montrer que μ_1 et μ_2 sont des valeurs propres de F et donner, en fonction de x_1, un vecteur propre associé à chacune de ces valeurs propres.
4. Montrer que F est diagonalisable.

Solution du sujet n° 63

1. (a) La linéarité de F est donnée la linéarité des applications u, f et f^{-1}, ainsi que celle des projections sur E_1 et E_2. En outre,

$$F(x)=0 \iff u(x_1)+f(x_1)+f^{-1}(x_2)=0 \iff \begin{cases} u(x_1)+f^{-1}(x_2) & =0 \\ f(x_1) & =0 \end{cases}$$

Or, f est bijective, donc $x_1=0$ et, en reportant : $f^{-1}(x_2)=0$, d'où $x_2=0$ (par bijectivité de f^{-1}), ainsi, $x=0$. Donc $\operatorname{Ker} F=\{0\}$.

(b) Ainsi, F est injective, donc bijective car E est de dimension finie.

2. (a) Puisque $F(x)=\mu x$, alors $u(x_1)+f(x_1)+f^{-1}(x_2)=\mu x_1+\mu x_2$ donc, en identifiant, on a : $u(x_1)+f^{-1}(x_2)=\mu x_1$et $f(x_1)=\mu x_2$.
Si $x_1=0$, alors $\mu x_2=0$ et donc $x_2=0$ ($\mu\neq 0$ car F est bijective). Par suite, $x=0$: absurde.
Si $x_2=0$, alors $f(x_1)=0$, donc $x_1=0$ (car f est bijective). Par suite, $x=0$: absurde.

(b) D'une part, $x_1\neq 0$. D'autre part, en reprenant la deuxième égalité de la question précédente, comme $\mu\neq 0$ puisque f bijective, on déduit que $x_2=\frac{1}{\mu}f(x_1)$ puis, en reportant dans la première égalité : $u(x_1)+\frac{1}{\mu}x_1=\mu x_1$ d'où $u(x_1)=\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)x_1$.

3. (a) L'équation équivaut à la suivante : $\mu^2-\lambda\mu-1=0$ (avec $\mu\neq 0$).
Le discriminant de cette équation vaut λ^2+4. Il est strictement positif, d'où la réponse.

(b) Étudions le cas de μ_1 et posons $x=x_1+\frac{1}{\mu_1}f(x_1)$. Comme $x_1\neq 0$ et $\frac{1}{\mu_1}f(x_1)\in E_2$, alors $x\neq 0$. En outre,

$$F(x)=u(x_1)+f(x_1)+f^{-1}\left(\frac{1}{\mu_1}f(x_1)\right)=\lambda x_1+f(x_1)+\frac{1}{\mu_1}x_1=\mu_1 x_1+f(x_1)=\mu_1 x$$

On en déduit que μ_1 est une valeur propre de F et $x_1+\frac{1}{\mu_1}f(x_1)$ est un vecteur propre associé.
De même, μ_2 est une valeur propre de F et $x_1+\frac{1}{\mu_2}f(x_1)$ est un vecteur propre associé.

4. On note $(e_1,\dots,e_n)$ une base de vecteurs propres de u. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note λ_i la valeur propre de u associée à e_i, et on note $\mu_1^{(i)}$ et $\mu_2^{(i)}$ les solutions de l'équation $\mu-\frac{1}{\mu}=\lambda_i$. On note encore $y_i=e_i+\frac{1}{\mu_1^{(i)}}f(e_i)$ et $z_i=e_i+\frac{1}{\mu_2^{(i)}}f(e_i)$ et on considère la famille $\mathcal{C}=(y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_n)$.
D'après la question précédente, $\mathcal{C}$ est formée de vecteurs propres de F. Montrons que c'est une base. D'après la dimension, il suffit de montrer qu'elle est libre ; pour cela considérons $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i+\sum_{i=1}^n b_i z_i=0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{i=1}^n a_i\left(e_i+\frac{1}{\mu_1^{(i)}}f(e_i)\right)+\sum_{i=1}^n b_i\left(e_i+\frac{1}{\mu_2^{(i)}}f(e_i)\right)=0$$

$$\textit{i.e.} : \underbrace{\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)e_i}_{\in E_1}+\underbrace{\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_i}{\mu_1^{(i)}}+\frac{b_i}{\mu_2^{(i)}}\right)f(e_i)}_{\in E_2}=0 \quad \text{d'où :} \quad \sum_{i=1}^n (a_i+b_i)e_i=\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_i}{\mu_1^{(i)}}+\frac{b_i}{\mu_2^{(i)}}\right)f(e_i)=0$$

Or, la famille $(e_1,...,e_n)$ est libre et la famille $(f(e_1),...,f(e_n))$ aussi car f est bijective, donc :

$$\forall i\in[\![1,n]\!], a_i+b_i=0 \text{ et } \frac{a_i}{\mu_1^{(i)}}+\frac{b_i}{\mu_2^{(i)}}=0.$$

Comme $\mu_1^{(i)}\neq\mu_2^{(i)}$, on en déduit que : $\forall i\in[\![1,n]\!], a_i=b_i=0$.
La famille $(e_1,\dots,e_n,f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base de vecteurs propres de F ; ainsi, F est diagonalisable.

Sujet n° 65

On note $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et on pose $A = C\,{}^tC$. Par ailleurs, on note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Donner les valeurs de $1 + j + j^2$ et j^3 puis expliciter les matrices A et A^2.
2. (a) Déterminer le rang de A et en déduire son spectre.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ associe $\varphi(M) = AMA$.
3. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   (b) Donner l'image de la matrice A par φ. Qu'en déduire concernant l'endomorphisme φ ?
   (c) Montrer que φ n'a pas de valeur propre non nulle.
   (d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
4. Pour tout couple (k, ℓ) de $[\![1, 3]\!]^2$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la k^{e} ligne et de la ℓ^{e} colonne, et on rappelle que la famille des 9 matrices $(E_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant 3}$ est une base du $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   Pour tout k de $[\![1, 3]\!]$, on note e_k l'élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé à la k^{e} ligne qui vaut 1. En vérifiant que, pour tout couple (k, ℓ) de $[\![1, 3]\!]^2$, on a $E_{k,\ell} = e_k\,{}^te_\ell$, montrer que :
$$\forall (k, \ell) \in [\![1, 3]\!]^2, \varphi\left(E_{k,\ell}\right) = j^{k+\ell-2}A$$
5. (a) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   (b) Déduire des calculs faits à la question 4 une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Solution du sujet n° 65

1. On trouve ou on sait que $1+j+j^2=0$ et $j^3=1$ (racines cubiques de l'unité).
   Comme $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$, alors $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et après calculs, on obtient : $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.
   Grâce aux relations $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$, on trouve : $A^2 = 0_3$.
2. (a) En notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on voit, toujours grâce à la relation $j^3=1$, que $C_2 = jC_1$, $C_3 = j^2C_1$ et comme C_1 n'est pas la colonne nulle, on peut conclure : $\operatorname{rg}(A)=1$.
   Ceci prouve que A n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre de A. De plus, le polynôme X^2 est annulateur de A et sa seule racine est 0 donc la seule valeur propre possible de A est 0 . On peut donc conclure que $\operatorname{sp}(A)=\{0\}$.
   (b) Pour que A soit diagonalisable, il faut que son seul sous-espace propre soit de dimension 3, or il n'est que de dimension 2 (étant donné que $\operatorname{rg}(A)=1$) ; donc A n'est pas diagonalisable.
3. (a)
   - Par stabilité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ pour le produit matriciel, $\varphi(M)$ appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   - Si l'on prend deux matrices M et N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et un complexe λ, on a $\varphi(M+\lambda N) = A(M+\lambda N)A$, et par propriété du produit matriciel, on obtient :
     $\varphi(M+\lambda N) = AMA + \lambda ANA = \varphi(M) + \lambda\varphi(N)$
   - Ainsi, φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

   (b) On a $\varphi(A) = A^3 = A^2A$ et comme $A^2 = 0_3$, on peut conclure : $\varphi(A) = 0_3$. La matrice A n'est pas nulle et appartient au noyau de φ, donc φ n'est pas injectif.
   (c) On a :
   $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), \varphi^2(M) = A(AMA)A = A^2MA^2 = 0_3$, car $A^2 = 0_3$. Ceci prouve que $\varphi^2 = 0$ et ainsi le polynôme X^2 est annulateur de φ. Sa seule racine étant 0, on en conclut que 0 est la seule valeur propre possible de φ, et comme φ n'est pas injectif, ceci veut dire que φ admet 0 comme seule valeur propre donc que φ n'a pas de valeur propre non nulle.
   (d) Si φ était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait la matrice diagonale nulle, donc φ serait l'endomorphisme nul, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, φ n'est pas diagonalisable
4. Comme ${}^tCe_k = j^{k-1}$ pour tout k, on a :
$$\varphi\left(E_{k,\ell}\right) = AE_{k,\ell}A = C{}^tCe_k{}^te_\ell C{}^tC = C\left({}^tCe_k\right)\left({}^te_\ell C\right){}^tC = j^{k-1}j^{\ell-1}C{}^tC = j^{k+\ell-2}A.$$
5. (a) On sait que $\operatorname{Im}(\varphi)$ est engendré par la famille des images par φ des vecteurs de la base $(E_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant 3}$ et on constate, grâce à la question 4, que $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}(A)$.
   Comme A n'est pas nulle, on en déduit que $\operatorname{rg}(\varphi)=1$ et comme $\dim\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{C})\right) = 9$, le théorème du rang permet de conclure : $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 8$.
   (b) On va utiliser le calcul fait à la question 4) pour trouver une famille de 8 matrices de Ker (φ). Comme $\varphi\left(E_{1,1}\right) = A$, on en déduit, par linéarité de φ :
   $\varphi\left(E_{1,2} - jE_{1,1}\right) = \varphi\left(E_{2,1} - jE_{1,1}\right) = 0_3$ car $\varphi\left(E_{1,2}\right) = \varphi\left(E_{2,1}\right) = jA$.
   $\varphi\left(E_{1,3} - j^2E_{1,1}\right) = \varphi\left(E_{3,1} - j^2E_{1,1}\right) = 0_3$ car $\varphi\left(E_{1,3}\right) = \varphi\left(E_{3,1}\right) = j^2A$.
   $\varphi\left(E_{2,3} - E_{1,1}\right) = \varphi\left(E_{3,2} - E_{1,1}\right) = 0_3$ car $\varphi\left(E_{2,3}\right) = \varphi\left(E_{3,2}\right) = A$.
   $\varphi\left(E_{2,2} - j^2E_{1,1}\right) = \varphi\left(E_{3,3} - jE_{1,1}\right) = 0_3$ car $\varphi\left(E_{2,2}\right) = j^2A$ et $\varphi\left(E_{3,3}\right) = jA$
   Les matrices $B_1 = E_{1,2} - jE_{1,1}, B_2 = E_{2,1} - jE_{1,1}, B_3 = E_{1,3} - j^2E_{1,1}, B_4 = E_{3,1} - j^2E_{1,1}$,
   $B_5 = E_{2,3} - E_{1,1}$, $B_6 = E_{3,2} - E_{1,1}, B_7 = E_{2,2} - j^2E_{1,1}, B_8 = E_{3,3} - jE_{1,1}$ forment une famille libre (conséquence de la liberté de la famille $\left.(E_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant 3}\right)$, et ainsi, la famille $(B_1,\dots,B_8)$ est une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.

CHAPITRE

2

ANALYSE

Sujet n° 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $||f||_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

1. Soit φ l'application définie sur E par $\varphi(f) = F$ avec $F' = f$ et $\displaystyle\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = 0$.
   (a) Montrer que φ est bien définie.
   (b) Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. (a) Justifier que l'ensemble
$$A = \left\{ \frac{||\varphi(f)||_\infty}{||f||_\infty}\,,\ f \in E \setminus \{0\} \right\}$$
   est non vide et majoré. On note M sa borne supérieure.
   (b) Soit $f \in E$, $F = \varphi(f)$ et G la primitive de F sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.
   Pour $x \in [0,1]$, exprimer $G(0)$ et $G(1)$ en fonction de $G(x)$ à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral.
   En déduire
$$\forall x \in [0,1], \quad |F(x)| \leqslant \left[\frac{(1-x)^2 + x^2}{2} \right] ||f||_\infty$$
   (c) Déterminer M.
3. On définit une suite de fonctions de E par $P_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = \varphi(P_n)$$
   (a) Expliciter P_1 et P_2.
   (b) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la série de terme général $P_n(x)\,t^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge pour tout réel t tel que $|t| < 2$.

Solution du sujet n° 1

1. (a) Le polynôme $f \in E$ a des primitives polynomiales sur $\mathbb{R}$; si H est celle qui s'annule en 0, les autres sont de la forme $H + k$, $k \in \mathbb{R}$; alors

$$0 = \int_0^1 (H+k) \Leftrightarrow k = -\int_0^1 H \quad \text{d'où} \quad F = H - \int_0^1 H$$

d'où l'existence et l'unicité de F.

(b) Le polynôme $F \in E$ par primitivation, et φ est linéaire par linéarité de l'intégration et de $f \mapsto H$.

2. (a) Soit $E' = E \setminus \{0\}$ qui est non vide ; la fonction $f \in E'$ est polynomiale donc continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée ; de même pour $\varphi(f)$. Enfin, $||f||_\infty = 0$ implique $f = 0$, ce qui est exclu pour $f \in E'$. Donc A est bien défini et non vide.
Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}|F(x)| &= \left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \left[\int_0^s f(t)\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}s\right| \leqslant \int_0^1 |f| + \int_0^1 \left[\int_0^s |f|\right] \mathrm{d}s \\ &\leqslant ||f||_\infty + \int_0^1 s||f||_\infty \mathrm{d}s \leqslant 2||f||_\infty\end{aligned}$$

Ainsi $M \leqslant 2$.

(b)

$$G(0) = G(x)+(0-x)G'(x)+\int_x^0 (0-t)G''(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(1) = G(x)+(1-x)G'(x)+\int_x^1 (1-t)G''(t)\mathrm{d}t$$

Pour tout $x \in [0,1]$, par soustraction vu que $G(0) = G(1) = 0$ (par hypothèse sur F), il vient

$$F(x) = G'(x) = -\int_x^1 (1-t)G''(t)\mathrm{d}t + \int_x^0 (0-t)G''(t)\mathrm{d}t$$

$$|F(x)| \leqslant ||f||_\infty \left(\int_x^1 (1-t)\mathrm{d}t + \int_0^x t\mathrm{d}t\right) = \left[\frac{(1-x)^2 + x^2}{2}\right] ||f||_\infty$$

(c) Pour $x \in [0,1]$, $\dfrac{(1-x)^2 + x^2}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}$; d'où $M \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Pour $f = 1$, on a $F(x) = x - \frac{1}{2}$, $||f||_\infty = 1$ et $||F||_\infty = \frac{1}{2}$; donc $M \geqslant \frac{1}{2}$, d'où l'égalité.

3. (a) On a $P_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ et $P_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{12}$.

(b) Par récurrence, $||P_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. D'où si $|t| < 2$ alors

$$|P_n(x)\, t^n| \leqslant \left(\frac{|t|}{2}\right)^n$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

Sujet n° 4

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
On note F la primitive de f qui s'annule en 0.
On pose, pour tout réel x strictement positif :

$$K(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt$$

1. Un exemple. On suppose dans cette question que f est la fonction définie par :

$$f : t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$$

   Vérifier que f répond bien aux hypothèses de l'exercice et déterminer les limites de $K(x)$ aux bornes de son domaine.

   Dans la suite, on revient au cas général où f est quelconque .

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} K(x)$.
3. (a) Soit ε un réel strictement positif.
   Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, on a :$|F(x) - I| < \varepsilon$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x F(t)dt = I$ (on pourra découper $\displaystyle\int_0^x F(t)dt$ en fonction de A).

   (c) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x)$.

Solution du sujet n° 4

1. Par calcul d'une primitive de $t \mapsto f(t)$ puis de limite, on a la convergence et $K(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}$.
   D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} K(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x) = 0$
2. Posons $G(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ la primitive de $t \to tf(t)$ qui s'annule en 0. Alors, $K(x) = \dfrac{G(x) - G(0)}{x - 0}$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} K(x) = G'(0) = 0$.
3. (a) Comme l'intégrale est convergente, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = I$.

   (b) On remarque que $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x I dt = I$. Ainsi
   $$\frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt - I = \frac{1}{x}\int_0^x (F(t) - I)dt = \frac{1}{x}\int_0^A (F(t) - I)dt + \frac{1}{x}\int_A^x (F(t) - I)dt$$
   Par définition de A et inégalité triangulaire, on a : $\displaystyle\left|\frac{1}{x}\int_A^x (F(t) - I)dt\right| < \varepsilon\frac{x - A}{x} < \varepsilon$,
   et il existe B tel que si $x > B$ alors :
   $$\left|\frac{1}{x}\int_0^A (F(t) - I)dt\right| = \frac{C_A}{x} < \varepsilon$$
   Ainsi si $x > \max(A, B)$, on obtient $\displaystyle\left|\int_0^x F(t)dt - I\right| < 2\varepsilon$.

   (c) On intègre par parties $\displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ et on divise par x. Il vient $K(x) = F(x) - \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt$. D'après ce qui précède : $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x) = 0$.

Sujet n° 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{x}{2\left(1+\sqrt{1+x}\right)}$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme v_0 (avec $v_0 > 0$) et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, strictement positive et qu'elle converge vers 0.
2. Trouver un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\ln\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{v_n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} {v_n}^{\alpha}$.

Dans la suite, on admet que : $\forall x > 0,\ \dfrac{2f'(x)}{\sqrt{f(x)\left(f(x)+1\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{v_n} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}$.
   On la note w_n.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation simple entre w_{n+1} et w_n (on pourra effectuer un changement de variable $x = f(t)$ après l'avoir justifié).
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $w_n = \dfrac{w_0}{2^n}$.
5. *Dans cette question, on pourra utiliser sans démonstration que la dérivée de la fonction* $h : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *est donnée par :*

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}.$$

   Trouver un équivalent de v_n qui ne dépend que de n et v_0, quand n tend vers $+\infty$.

Solution du sujet n$^{\text{o}}$ 8

1. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation : v_n est défini et $v_n > 0$.
   - Comme $v_0 > 0$ est donné, la relation est vraie pour $n = 0$.
   - Si la relation est vrai pour n, alors, comme f est clairement définie sur $\mathbb{R}_+$, $v_{n+1} = f(v_n)$ est défini. Or, pour tout $x > 0$, on a clairement $f(x) > 0$, donc $v_{n+1} > 0$.
     Ainsi la relation est vraie à l'ordre $n+1$.

   Autre rédaction : f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $\forall x > 0,\ f(x) > 0$ *i.e.* la partie $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f et $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
   Comme $v_n > 0$, on peut étudier la monotonie de (v_n) à l'aide de : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2(1+\sqrt{1+v_n})} \leqslant \dfrac{1}{4} \leqslant 1$.
   Donc (v_n) est décroissante et minorée (par 0) ; ainsi elle converge, d'après le théorème de la limite monotone.
   Comme f est continue, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on a : $\ell = f(\ell)$.
   Soit $\ell = 0$ ou $2(1+\sqrt{1+\ell}) = 1$. Comme la seconde égalité est impossible, on a donc $\lim(v_n) = 0$.
2. D'après un DL usuel, on a : $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{=} \sqrt{x} + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$ (terme prépondérant).
   En posant $u = \sqrt{x} + \sqrt{1+x} - 1$, qui tend vers 0, dans l'équivalent usuel $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on a donc :
   $$\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x} + \sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}.$$
   Comme $\lim(v_n) = 0$, on peut remplacer x par v_n, soit : $\ln\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{v_n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^{\frac{1}{2}}$ *i.e.* $\alpha = \frac{1}{2}$.
3. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(t+1)}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   Comme $v_n > 0$, la convergence de l'intégrale ne pose problème qu'en 0. Or : $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t(t+1)}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
   Donc, comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge, par théorème de comparaison l'intégrale $\displaystyle\int_0^{v_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}}$ existe.
   Autre idée moins acceptable : utiliser la dérivée fournie à la fin de l'exercice pour calculer $\displaystyle\int_X^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}}$ puis montrer que cela converge quand X tend vers 0^+.
4. Comme $f(0) = 0$ et $v_{n+1} = f(v_n)$, et comme $f'(x) = \dfrac{\sqrt{f(x)(f(x)+1)}}{2\sqrt{1+x}} > 0$, on peut effectuer le changement de variable $x = f(t)$ qui est $\mathcal{C}^1$, strictement croissant, bijectif de $]0, u_n]$ sur $]0, u_{n+1}]$:
   $$w_{n+1} = \int_0^{v_{n+1}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}} = \int_0^{v_n} \frac{f'(t)}{\sqrt{f(t)\,(f(t)+1)}}\,\mathrm{d}t \underset{\text{Q2}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{v_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}} = \frac{1}{2} w_n.$$
   On voit que la suite (w_n) est géométrique, donc $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n w_0$.
5. D'après la primitive fournie par l'énoncé, on a :
   $$w_n = \int_0^{v_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}} = \Big[\ \left(2\ln\left(\sqrt{t} + \sqrt{t+1}\right)\right)\ \Big]_0^{v_n} = 2\ln\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{v_n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2v_n^{\frac{1}{2}} \qquad \text{d'après Q2.}$$
   Donc, d'après Q4 : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{w_n^2}{4} = \dfrac{1}{4}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \displaystyle\int_0^{v_0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \ln^2\left(\sqrt{v_0} + \sqrt{v_0+1}\right).$

SUJET N$^{\text{O}}$ 12

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$ converge. On la note I_n.

   (b) Établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\quad I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.

   (c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'expression de I_n en fonction de I_1 et de n.

2. Une urne contient initialement une boule blanche et deux boules rouges. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : à chaque extraction d'une boule, on note sa couleur puis on la replace dans l'urne accompagnée de trois boules ayant la même couleur que celle-ci. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité d'obtenir n boules rouges lors des n premiers tirages.
   Exprimer p_n en fonction des intégrales I_k $(k \in \mathbb{N}^*.)$

3. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\quad I_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^3}{n}\right)^{-n} dt.$

   On pose alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^3}{n}\right)^{-n} dt.$

   (b) On pose, pour tout t de $\mathbb{R}_+$ et tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $g_t(x) = -x \ln\left(1 + \dfrac{t^3}{x}\right)$ et $\quad u_t(x) = \left(1 + \dfrac{t^3}{x}\right)^{-x}$.

   On donne $g_t''(x) = \dfrac{t^6}{x(x+t^3)^2}$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g_t'(x) = 0$.
   Etudier la monotonie de la fonction u_t.

   (c) En déduire convergence de (a_n). On note ℓ sa limite.

   (d) On admet l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt$. Montrer que $\ell \geqslant I > 0$.

   (e) Déterminer un équivalent de p_n lorsque n tend vers $+\infty$, en fonction de ℓ et de I_1.

SOLUTION DU SUJET N° 12

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

   De plus : $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3n}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n}} dx$ converge car $3n > 1$.
   Donc, par thèorème de comparaison, l'intégrale I_n est bien définie.

   (b) Soit $a \geqslant 0$. Par intégration par parties avec $u(x) = (1+x^3)^{-n}$, $v'(x) = 1$, $u'(x) = \dfrac{-3nx^2}{(1+x)^{n+1}}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n} dx &= \left[\frac{x}{(1+x^3)^n}\right]_0^a + 3n \int_0^a \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx \\ &= \frac{a}{(1+a^3)^n} + 3n \int_0^a \frac{1+x^3-1}{(1+x^3)^{n+1}} dx \\ &= \frac{a}{(1+a^3)^n} + 3n \left(\int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n} dx - \int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} dx \right)\end{aligned}$$

   Quand a tend vers $+\infty$, on obtient : $I_n = 3n(I_n - I_{n+1})$, soit : $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.

   (c) Un raisonnement par récurrence permet alors d'établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = I_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note R_k : « on obtient une boule rouge au k-ième tirage ».
   On a : $\forall n \geqslant 2$, $P(R_1) = \dfrac{2}{3}$, $\quad P_{R_1}(R_2) = \dfrac{5}{6}$, $\quad P_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \dfrac{8}{9}, \ldots, \quad P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}}(R_n) = \dfrac{3n-1}{3n}$.
   Ainsi, d'après la formule des probabilités composées :

$$p_n = P(R_1 \cap \ldots \cap R_n) = P(R_1) P_{R_1}(R_2) \ldots P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}}(R_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{3k} = \frac{I_{n+1}}{I_1},$$

   car I_1 n'est pas nulle (intégrale d'une fonction continue positive, non indentiquement nulle, sur un intervalle d'amplitude non nulle).

3. (a) On fait le changement de variable affine $t = n^{\frac{1}{3}} x$ dans l'intégrale I_n

   (b) Comme g_t'' est clairement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, alors g_t' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et de limite 0 en $+\infty$. Donc g_t décroit sur $\mathbb{R}_+^*$, tout comme $u_t = exp \circ g_t$.

   (c) Pour tout réel t positif, u_t décroit sur $]0, +\infty[$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_t(n+1) \leqslant u_t(n)$.
   Alors, par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant), on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} \leqslant a_n$.
   Ainsi (a_n) décroit. Or, par positivité de l'intégrale, (a_n) est minorée par 0 donc elle converge.

   (d) La fonction u_t décroît sur $]0, +\infty[$ et a pour limite e^{-t^3} en $+\infty$ (puisque $g_t(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -t^3$) donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_t(n) \geqslant e^{-t^3}$. Par croissance de l'intégrale, $a_n \geqslant I$. Comme I est l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive sur un intervalle non réduit à un point, elle est strictement positive.
   Par passage à la limite, $\ell \geqslant I > 0$.

   (e) On en déduit que : $p_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{I_1 \, n^{\frac{1}{3}}}$.

Sujet n° 13

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x\mathrm{e}^x$.
2. (a) Montrer que la restriction de f à $[-1, +\infty[$ réalise une bijection sur un intervalle J qu'on déterminera. On note W la réciproque de cette bijection.
   (b) Déterminer $W(0)$ et $W'(0)$.
   (c) Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque x tend vers 0 et un équivalent de $W(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (d) Tracer les courbes représentatives de f et W.
3. Montrer rapidement que la restriction de f à $]-\infty, -1[$ réalise une bijection sur un intervalle J' qu'on déterminera. On note V la réciproque de cette bijection.
4. Soit m réel.
   Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x\mathrm{e}^x = m$.
   Exprimer, lorsqu'elles existent, ces solutions à l'aide des fonctions W et V.
5. Soit a, b deux réels non nuls. Soit l'équation $\mathrm{e}^{ax} + bx = 0$. Déterminer le nombre de solutions de cette équation en fonction de a et b.
   Exprimer, lorsqu'elles existent, ces solutions à l'aide des fonctions W et V.

Solution du sujet n° 13

1. D'une part f est continue. D'autre part, comme $f'(x) = (x+1)e^x$, la fonction f est strictement décroissante donc bijective de $]-\infty, -1]$ sur $]0, -1/e]$. Et f est strictement croissante donc bijective de $[-1, +\infty[$ sur $[-1/e, +\infty[$.
2. (a) La restriction de f à $[-1, +\infty[$ réalise une bijection sur $[-1/e, +\infty[$, car f y est strictement croissante. On note W la réciproque de cette bijection.
   (b) On a $f(0) = 0$, donc $W(0) = 0$. Ensuite comme $f'(0) = 1$, le théorème de dérivation des fonctions réciproques s'applique en 0 et $W'(0) = \dfrac{1}{f'(W(0))} = 1$.
   (c) En 0, on a $W(x) = W(0) + xW'(0) + o(x)$ soit $W(w) \sim x$.
   Au voisinage de $+\infty$, comme $W(x) > 0$, on écrit
   $$x = f(W(x)) = W(x)e^{W(x)} \Rightarrow W(x) + \ln W(x) = \ln x$$
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} W(x) = +\infty$; donc $\ln W(x) = o(W(x))$ et $W(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.
   (d) $[\cdots]$ (à faire).
3. La fonction f est strictement décroissante de $]-\infty, -1[$ sur $]0, -1/e]$.
   C'est donc une bijection de réciproque notée V.
4. On s'aide de la représentation graphique
   - si $m \in]-\infty, -1/e[$, il n'y a pas de solution.
   - si $m = -1/e$, il y a une unique solution $W(m)$.
   - si $m \in]-1/e, 0[$, il y a deux solutions $W(m)$ et $V(m)$.
   - si $m = 0$, une seule solution $x = 0 = W(0)$
   - si $m > 0$, il y a une unique solution $W(m)$.
5. L'équation $e^{ax} + bx = 0$ est équivalente à l'équation $-axe^{-ax} = \dfrac{a}{b}$, soit $f(-ax) = \dfrac{a}{b}$.
   On est revenu à l'équation précédente avec $m = \dfrac{a}{b}$ et x remplacé par $-ax$. Ainsi :
   - si $a/b \in]-\infty, -1/e[$, il n'y a pas de solution.
   - si $a/b = -1/e$, il y a une unique solution $-ax = W(a/b)$, soit $x = -\frac{1}{a}W(a/b)$.
   - si $a/b \in]-1/e, 0[$, il y a deux solutions $W(a/b)$ et $V(a/b)$ et $x = -\frac{1}{a}W(a/b)$, $x = -\frac{1}{a}V(a/b)$.
   - si $a/b > 0$, il y a une unique solution $x = -\frac{1}{a}W(a/b)$.

Sujet n° 16

Soit la fonction $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0,1[$, par $f(x) = \ln(1-x)$

1. (a) Montrer que f admet une primitive F qui s'annule en 0. Donner une expression de F.
   (b) Calculer les dérivées successives de F au point 0.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, pour tout entier $n \geqslant 2$
   $$F(x) = -\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k(k-1)} - \frac{1}{n}\int_0^x \Big(\frac{x-t}{1-t}\Big)^n dt$$
   (d) En déduire pour tout $x \in [0,1[$,
   $$F(x) = -\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k(k-1)}$$

   Dans la suite, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Soit p un réel fixé de $]0,1[$. On note $q = 1-p$.
   Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = pq^k$.
   On pose
   $$Y = \frac{1}{(X+1)(X+2)}$$
   (a) Montrer l'existence de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$, et les calculer.
   (b) Déterminer la loi de Y. Montrer qu'elle admet une espérance $E(Y)$ et la calculer.

3. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit
   $$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(n+1)pq^k}{(k+1)(k+2)}$$
   (a) Montrer que u_n est le terme général d'une série convergente puis calculer sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

   On pourra utiliser le résultat suivant : si $(\alpha_{n,k})_{n\geqslant 0, k\geqslant 0}$ désigne une famille de réels positifs tel que la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_{n,k}$ converge alors on a l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_{n,k}\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{k} \alpha_{n,k}\Big)$

   (b) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ P_{[X=k]}(Z = n+1) = \begin{cases} \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} & \text{si } n \in [\![0,k]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Solution du sujet n° 16

1. (a) La fonction f est continue sur $[0,1[$ donc admet une primitive $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ qui s'annule en 0.

   Par IPP : $F(x) = \int_0^x 1.\ln(1-t)dt = [t\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x (1 - \frac{1}{1-t})dt = (x-1)\ln(1-x) - x$

   (b) On a par le théorème fondamental du calcul intégral, $F'(x) = f(x) = \ln(1-x) \Rightarrow F''(x) = \frac{-1}{1-x}$.

   Par une récurrence immédiate : $\forall p \geqslant 2,\ F^{(p)}(x) = \frac{-(p-2)!}{(1-x)^{p-1}}$.

   On en déduit les dérivées successives en 0 : $F(0) = F'(0) = 0$ et $\forall p \geqslant 2,\ F^{(p)}(0) = -(p-2)!$.

   (c) Par application de la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction F sur le segment $[0,x]$ avec $x \in [0,1[$, on obtient :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} F^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)dt = -\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k(k-1)} - \frac{1}{n}\int_0^x \Big(\frac{x-t}{1-t}\Big)^n dt$$

   (d) Soit $x \in [0,1[$, $\forall t \in [0,x]$ on a $0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant 1$. D'où : $\left|\frac{1}{n}\int_0^x \Big(\frac{x-t}{1-t}\Big)^n dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_0^x dt = \frac{x}{n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   En passant à la limite : $F(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k(k-1)}$.

2. (a) La variable aléatoire $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre p d'où l'existence de moments de tous ordres et $E(X) = E(X+1) - 1 = \frac{1}{p} - 1$ et $V(X) = V(X+1) = \frac{1-p}{p^2}$.

   (b) Par théorème de transfert, on a :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} pq^k = \frac{p}{q^2} \sum_{k'=2}^{+\infty} \frac{q^{k'}}{(k'-1)k'} = -\frac{p}{q^2} F(q) = \frac{p}{q^2}(q + p\ln(p)).$$

3. (a) On a $\frac{(n+1)pq^k}{(k+1)(k+2)} \leqslant (n+1)pq^k$ et $\sum_{k=n}^{+\infty} q^k = q^n \sum_{k'=0}^{+\infty} q^{k'} = q^n \frac{1}{1-q} = \frac{q^n}{p}$

   d'où $u_n \leqslant (n+1)p\frac{q^n}{p} = (n+1)q^n$, qui est le terme général d'une série convergente ; donc la série $\sum u_n$ (à termes positifs) converge. De plus

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(n+1)pq^k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{k} \frac{(n+1)pq^k}{(k+1)(k+2)}\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{pq^k}{(k+1)(k+2)} \sum_{n=0}^{k}(n+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{pq^k}{(k+1)(k+2)} \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\ &= \frac{p}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{p}{2}\frac{1}{1-q} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   (b) La formule des probabilités totales donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Z = n+1) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} pq^k = u_n$

   Si Z admet une espérance, alors son expression est : $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)P(Z = n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

   On a vu que cette série converge et que sa somme vaut $\frac{1}{2}$; on obtient $E(Z) = \frac{1}{2}$.

Sujet n$^{\text{o}}$ 21

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^a \,\mathrm{d}t$.
   (b) Déterminer :
   $$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{t^{(p+1)\,\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\right) .$$
   (c) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1}$. On pose alors :
   $$U(\alpha)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1}$$
   Déterminer une expression de $U(\alpha)$ sous forme d'une intégrale.
2. (a) Déterminer l'ensemble D des réels α tels que l'intégrale
   $$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$
   soit convergente. On pose alors : $V(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.
   (b) Soit $\alpha \in D$. Déterminer un réel β tel que $u \mapsto u^\beta = t$ définisse un changement de variables licite qui permet d'exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$ à l'aide de la fonction U.
   (c) En déduire que :
   $$\forall \alpha \in D\,, \qquad V(\alpha)=U(\alpha)+\frac{1}{\alpha-1}\,U\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big)\,.$$
3. Exprimer
   $$S = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\,\alpha^2-1}$$
   à l'aide d'une intégrale.

Solution du sujet n° 21

1. (a) $\displaystyle\int_0^1 t^a \,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+1}$.

   (b) $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{(p+1)\,\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{(p+1)\,\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)\,\alpha+1} \underset{p\,\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1} = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{p} (-1)^n\, t^{n\,\alpha}\,\mathrm{d}t\right] = \int_0^1 \frac{1-(-1)^{p+1}\,t^{(p+1)\,\alpha}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} + (-1)^p \int_0^1 \frac{t^{(p+1)\,\alpha}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t$
   (valable car $-t^\alpha \neq 1$), d'où :

$$U(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$

2. (a) La fonction $t \mapsto 1/(1+t^\alpha)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout α réel et :

   * si $\alpha > 0$, elle est continue en 0 et équivalente à $1/t^\alpha$ quand $t \longrightarrow +\infty$, d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$ ssi $\alpha > 1$;
   * si $\alpha = 0$, elle vaut $1/2$, d'intégrale divergente en $+\infty$;
   * si $\alpha < 0$, elle tend vers 1 en $+\infty$, donc d'intégrale divergente.

$$D = \,]1, +\infty[$$

   (b) Le changement de variable $u \mapsto u^\beta = t$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$ pour $\beta < 0$ et donne

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \int_1^0 \frac{\beta\,u^{\beta-1}}{1+u^{\alpha\,\beta}}\,\mathrm{d}u = -\beta \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{1-\beta}+u^{(\alpha-1)\,\beta+1}}\,.$$

   Pour obtenir $(\alpha-1)\,\beta+1 = 0$, on choisit $\beta = 1/(1-\alpha) < 0$ d'où, comme $\alpha/(\alpha-1) > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = -\beta \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{\alpha/(\alpha-1)}} = \frac{1}{\alpha-1}\,U\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big)$$

   (c) Puis, par la relation de Chasles :

$$V(\alpha) = U(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1}\,U\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big)$$

3. On tire de ce qui précède, en changeant d'indice,

$$V(\alpha) = U(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1}\,U\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+\alpha-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n\,\alpha-1}\right]$$

   soit

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\,\alpha^2-1} = V(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$

Sujet n° 24

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \cos(u_n)$$

1. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n appartient à l'intervalle $[0, \pi/2]$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = \dfrac{\pi}{2} - u_n$.
   (a) Montrer que : $v_n - v_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général v_n.
3. (a) Soit deux suites (a_n) et (b_n) à termes strictement positifs telles que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.
   On suppose que la série de terme général a_n est convergente. Montrer que l'on a :
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$
   (b) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

Solution du sujet n° 24

1. (a) On montre par récurrence la relation demandée.
   - • Vérifiée pour $u_0 = 0$. On a $u_1 = \cos(0) = 1 > u_0$.
   - • La fonction $f : x \to x + \cos x$ est strictement croissante sur $[0, \pi/2[$ (de dérivée positive). Donc $1 = f(u_0) < f(u_n) < f(\pi/2) = \pi/2$.

   (b) Si l'on suppose que $u_{n-1} < u_n$ (c'est vérifié pour $u_0 < u_1$), la croissance de f donne $u_n = f(u_{n-1}) < f(u_n) = u_{n+1}$.
   La suite (u_n) est croissante et majorée : elle est donc convergente.
   En notant ℓ sa limite, on obtient par passage à la limite dans l'égalité définissant u_n, et par continuité de la fonction cosinus, $\ell = \ell + \cos(\ell)$. Donc $\ell = \dfrac{\pi}{2}$.

2. (a) Pour tout entier naturel n, on a :
$$v_n - v_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \cos(u_n) = \cos(\pi/2 - v_n) = \sin v_n$$
   Or (v_n) tend vers 0. Donc $v_n - v_{n+1} = \sin v_n \sim v_n$.

   (b) On a, pour tout entier n supérieur ou égal à 1
$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n = \frac{\pi}{2} - v_n \to \frac{\pi}{2}$$
   On en déduit que la série de terme général $v_k - v_{k+1}$ est convergente et comme $v_k - v_{k+1} \sim v_k$, le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs permet de conclure que la série de terme général v_n est convergente.

3. (a) On écrit la définition de deux suites (a_n) et (b_n) positives équivalentes
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \;/ n \geqslant N \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon b_n$$
   Les séries $\sum a_n$ et donc $\sum b_n$ étant convergentes, pour $n \geqslant N$
$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n}^{+\infty} b_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |a_k - b_k| < \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$
   ce qui donne la réponse à cette question.

   (b) On sait que $v_k - v_{k+1} \sim v_k$ et que la série $\sum v_k - v_{k+1}$ est à termes positifs et convergente.
   La question précédente donne :
$$\sum_{k=n}^{+\infty}(v_k - v_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$
   Enfin
$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty}(v_k - v_{k+1}) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n}^{N}(v_k - v_{k+1}) = \lim_{N\to+\infty} v_n - v_{N+1} = v_n$$

Sujet n° 26

On suppose qu'il existe trois rationnels a, b, c, avec $a \neq 0$, tels que $a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c = 0$, où $\mathrm{e} = \exp(1)$.

1. Montrer que l'hypothèse ci-dessus est équivalente à la même hypothèse mais où a, b, c sont des entiers relatifs.

On suppose désormais qu'il existe trois entiers relatifs a, b, c, avec $a \neq 0$ tels que $a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c = 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a\mathrm{e}^x + c\mathrm{e}^{-x}$.
   (a) Montrer que f est de classe C^∞ et déterminer $f^{(k)}(x)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer qu'il existe une constante $s > 0$ telle que
   pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $k \geqslant 0$, on a : $|f^{(k)}(x)| \leqslant s$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$f(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$
   (d) Montrer qu'il existe $\theta_n \in [0, 1]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n!}$
3. (a) Montrer que $f(1)$ est un entier.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0)$ est un entier.
   (c) En déduire que $\dfrac{f^{(n)}(\theta_n)}{n}$ est un entier.
4. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $\dfrac{f^{(n)}(\theta_n)}{n} = 0$.
5. Qu'en conclut-on sur a, b, c ?

Solution du sujet n° 26

1. On réduit au même dénominateur l'équation. L'égalité à zéro ne modifie rien.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a\mathrm{e}^x + c\mathrm{e}^{-x}$.
   (a) La fonction f est de classe C^∞ car l'exponentielle l'est et $f^{(k)}(x) = a\mathrm{e}^x + (-1)^k c\mathrm{e}^{-x}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) On a $|f^{(k)}(x)| = |a\mathrm{e}^x + (-1)^k c\mathrm{e}^{-x}| \leqslant |a|\mathrm{e} + |c|$.
   (c) Il s'agit de la formule de Taylor reste intégral sur l'intervalle $[0, 1]$ pour une fonction C^∞.
   Autre idée : par récurrence sur n en intégrant par parties.
   (d) D'après le théorème des bornes atteintes, on a :
   $$\forall t \in [0,1],\ m = \min_{[0,1]} f^{(n)} \leqslant f^{(n)}(t) \leqslant M = \max_{[0,1]} f^{(n)}.$$
   Donc :
   $$\frac{m}{n!} \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \frac{M}{n!}$$
   Le réel $n! \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$ est un élément de $[m, M]$.
   On termine avec le théorème des valeurs intermédiaires.
3. (a) On a : $f(1) = a\mathrm{e} + c\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{a\mathrm{e}^2 + c}{\mathrm{e}} = -b \in \mathbb{Z}$.
   (b) On a : $f^{(k)}(0) = a + (-1)^k c \in \mathbb{Z}$.
   (c) En utilisant les questions précédentes et le fait que $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :
   $$\frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n} = (n-1)! \left(f(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right) \in \mathbb{Z}$$
4. La suite $\left(\dfrac{(f^{(n)}(\theta_n))}{n} \right)$ est une suite d'entiers relatifs et qui tend vers 0.
   Donc elle est nulle à partir d'un certain rang.
5. On obtient pour $n \geqslant n_0$, $a\mathrm{e}^{\theta_n} + (-1)^n c\mathrm{e}^{-\theta_n} = 0$.
   - Si a et c sont de même signe, il vient, avec n pair $a = c = 0$ et $b = 0$
   - Si a et c sont de signes contraires, il vient, avec n impair $a = c = 0$ et $b = 0$

   On a montré par l'absurde qu'un tel triplet a, b, c, avec $a \neq 0$ n'existe pas.

   On pourrait démontrer que si $a = 0$, il n'existe pas b, c entiers tels que $b\mathrm{e} + c = 0$, en démontrant que e *n'est pas un nombre rationnel.*

Sujet n$^{\text{o}}$ 30

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, on pose $P_\lambda(x) = x^3 + \lambda x - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique $u(\lambda) \in \mathbb{R}_+$ tel que $P_\lambda(u(\lambda)) = 0$.
   On considère désormais l'application $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\lambda \mapsto u(\lambda)$.
2. Montrer que u est décroissante sur $\mathbb{R}_+$
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. On suppose que $f(I)$ est un intervalle. Montrer que f est continue sur I (on pourra raisonner par contraposée).
4. Montrer que $u(\mathbb{R}_+^*) =]0,1[$.
5. En déduire que u est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} u(\lambda)$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} u(\lambda)$

Solution du sujet n° 30

1. On met de côté le cas $\lambda = 0$, auquel cas $u_0(0) = 1$. On suppose désormais que $\lambda > 0$.
   On étudie la fonction polynomiale $P_\lambda : x \to P_\lambda(x)$. Sa dérivée est $x \to 3x^2 + \lambda > 0$. La fonction P_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Or $P_\lambda(0) = -1$ et $P_\lambda(1) = \lambda > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance de P_λ, il existe un unique $u(\lambda)$ tel que $P_\lambda(u(\lambda)) = 0$. De plus $0 < u(\lambda) < 1$.
2. Soit λ, μ tels que $0 \leqslant \lambda < \mu$. On a $P_\mu(u(\lambda)) = u(\lambda)^3 + \mu u(\lambda) - 1 \geqslant u(\lambda)^3 + \lambda u(\lambda) - 1 = 0$ (car $0 \leqslant u(\lambda)$).
   Donc $P_\mu(u(\lambda)) \geqslant 0$, et $P_\mu(\mu) = 0$. Par la stricte croissance de P_μ, on a $u(\mu) < u(\lambda)$. Ainsi l'application u est décroissante.
3. Supposons que f est décroissante et que f ne soit pas continue en $x_0 \in I$.
   Ainsi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a > b = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. Soit $b < \alpha \neq f(x_0) < a$. Il n'existe pas de $x \in I$ tel que $f(x) = \alpha$.
   En effet si $x < x_0, f(x) \geqslant a$ et si $x > x_0, f(x) \leqslant b$. Ainsi $f(I)$ n'est pas un intervalle.
4. Montrons que $u(]0, +\infty[) =]0, 1[$. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Alors $\lambda = \dfrac{1 - \alpha^3}{\alpha} > 0$ vérifie $\alpha^3 + \lambda\alpha - 1 = 0$; soit $P_\lambda(\alpha) = 0$. Par unicité de $u(\lambda)$, il vient $u(\lambda) = \alpha$.
5. La fonction u est monotone décroissante. La question précédente montre que u est continue.
6. On peut utiliser directement la question 4 et la monotonie de f ou refaire une démonstration.
   Les limites $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} u(\lambda)$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} u(\lambda)$ existent puisque la fonction u est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et bornée.
   Posons $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} u(\lambda) = a$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} u(\lambda) = b$. Il vient $0 \leqslant a, b \leqslant 1$.
   - On a : $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} u(\lambda)^3 = a^3$ et $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \lambda u(\lambda) = 0$. Donc $a^3 = 1$ et $a = 1$.
   - Supposons que $b \neq 0$. On a $\lambda = \dfrac{1 - u^3(\lambda)}{u(\lambda)}$. Par limite de u, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda = \dfrac{1 - b^3}{b}$.
     Contradiction. Donc $b = 0$.

Sujet n° 33

Soit ω une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x,

$$\omega(x) = \int_{x-1}^{x} \omega(t)\mathrm{d}t$$

1. (a) Pour tout entier naturel n, justifier l'existence du maximum b_n de ω sur $[n, n+1]$.
   On note x_n un réel de $[n, n+1]$ tel que $\omega(x_n) = b_n$.
   (b) Soit n un entier naturel non nul.
      i. Montrer que, si $x_n \in]n, n+1[$, alors $\omega'(x_n) = 0$ et comparer alors $\omega(x_n - 1)$ à $\omega(x_n)$.
      ii. Montrer que, si $x_n = n+1$, alors ω est constante sur $[n, n+1]$.
      iii. Montrer que $b_{n-1} \geqslant b_n$.

   On définit de même le minimum a_n de ω sur $[n, n+1]$ et on montrerait que $a_{n-1} \leqslant a_n$.

2. On pose $\ell = 2\displaystyle\int_0^1 t\omega(t)\mathrm{d}t$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} (t-x)\omega(t)\mathrm{d}t$.
   Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée et exprimer $F(x)$ à l'aide de ℓ.
   (b) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant n$,
   $$0 \leqslant \int_x^{x+1} (t-x)(b_n - \omega(t))\mathrm{d}t \leqslant b_n - \omega(x+1)$$
   (c) En déduire que
   $$0 \leqslant \frac{b_n - \ell}{2} \leqslant b_n - b_{n+1}$$
   On montrerait de même l'encadrement :
   $$0 \leqslant \frac{\ell - a_n}{2} \leqslant a_{n+1} - a_n$$

3. Montrer que les suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \omega(x)$.

Solution du sujet n$^{\text{o}}$ 33

1. (a) Pour tout entier naturel n, la fonction ω est continue sur le segment $[n, n+1]$, donc elle y est bornée et elle atteint ses bornes.

   (b) i. La fonction ω est dérivable sur l'ouvert $]n, n+1[$ et si $x_n \in]n, n+1[$, alors elle atteint son maximum en x_n qui est un point de cet ouvert, donc $\omega'(x_n) = 0$. En dérivant l'égalité initiale, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, \omega'(x) = \omega(x) - \omega(x-1)$. En l'évaluant en x_n, on a alors : $\omega(x_n) = \omega(x_n - 1)$.

   ii. Si $x_n = n+1$, l'égalité initiale appliquée à $n+1$ donne :

$$b_n = \int_n^{n+1} \omega(t)\mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad \int_n^{n+1} (b_n - \omega(t))\mathrm{d}t = 0$$

   La fonction intégrée étant continue et positive sur $[n, n+1]$, elle est nulle sur cet intervalle, c'est-à-dire que ω est constante sur $[n, n+1]$.

   iii. Dans le cas (i), $b_n = \omega(x_n) = \omega(x_{n-1}) \leqslant b_{n-1}$ car $x_{n-1} \in [n-1, n]$.
   Dans le cas (ii), $b_n = \omega(n+1) = \omega(n) \leqslant b_{n-1}$ car $n \in [n-1, n]$.
   Il reste un cas : celui où $x_n = n$. Dans ce cas, $b_n = \omega(n) \leqslant b_{n-1}$ car $n \in [n-1, n]$.
   Dans tous les cas, on a bien : $b_{n-1} \geqslant b_n$.

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} t\omega(t)\mathrm{d}t - x\int_x^{x+1} \omega(t)\mathrm{d}t$, donc F est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = (x+1)\omega(x+1) - x\omega(x) - \int_x^{x+1} \omega(t)\mathrm{d}t - x(\omega(x+1) - \omega(x)) = \omega(x+1) - \int_x^{x+1} \omega(t)\mathrm{d}t = 0$$

   On en déduit que F est constante et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = F(0) = \dfrac{\ell}{2}$.

   (b) Pour tout $t \in [x, x+1]$, on a $0 \leqslant t - x \leqslant 1$.
   En notant $p = \lfloor t \rfloor$, on a d'une part $t \in [p, p+1]$; d'autre part $t \geqslant x \geqslant n$ entraîne $p \geqslant n$.
   Ainsi $\omega(t) \leqslant \max\limits_{[p,p+1]} \omega = b_p \leqslant b_n$, puisque la suite (b_k) est décroissante, d'où $b_n - \omega(t) \geqslant 0$.
   Ainsi, par produit, on a : $0 \leqslant (t-x)(b_n - \omega(t)) \leqslant b_n - \omega(t)$.
   D'où, en intégrant :

$$0 \leqslant \int_x^{x+1} (t-x)(b_n - \omega(t))\mathrm{d}t \leqslant b_n - \int_x^{x+1} \omega(t)\mathrm{d}t = b_n - \omega(x+1)$$

   (c) On remarque que, pour tout réel $x \geqslant n$:

$$\int_x^{x+1} (t-x)(b_n - \omega(t))\mathrm{d}t = b_n \int_x^{x+1} (t-x)\mathrm{d}t - \int_x^{x+1} (t-x)\omega(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}b_n - F(x) = \frac{b_n - \ell}{2}$$

   On conclut alors en évaluant l'encadrement de la question précédente en $x = x_{n+1} - 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}, a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$, donc les suites (a_n) et (b_n) sont bornées et monotones, elles sont donc convergentes. Un passage à la limite dans les deux encadrements de la question précédente montre qu'elles convergent toutes deux vers ℓ.
   Soit maintenant un réel $\varepsilon > 0$ fixé.
   Il existe un entier n_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_1, \ell - \varepsilon \leqslant a_n$ et il existe un entier n_2 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_2, b_n \leqslant \ell + \varepsilon$. En notant $n_3 = \max(n_1, n_2)$, pour tout réel $x \geqslant n_3$, $x \in [n, n+1]$, où n est un entier supérieur ou égal à n_3. On a donc :

$$\ell - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant \omega(x) \leqslant b_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

   On en déduit que la limite de ω en $+\infty$ est égale à ℓ

Sujet n° 36

Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout λ réel , on pose

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$$

1. Soit λ, μ réels tels que $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Montrer que $\lambda = \mu$.
2. Pour tout réel x, on pose $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))dt$. On suppose que H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$.

   Montrer que $I(\lambda)$ existe.

3. Soit T un réel strictement positif. Dans cette question, on suppose que la fonction f est T-périodique.
   (a) Montrer qu'il existe un réel λ_0 pour lequel la fonction H_{λ_0} est elle aussi T-périodique.
   (b) En déduire qu'il existe une unique valeur λ pour laquelle $I(\lambda)$ existe.
4. Déterminer un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_1^x \frac{|\sin t|}{t} dt$.

Solution du sujet n° 36

1. Supposons $\lambda \neq \mu$. Les deux intégrales $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existant, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda-\mu}{t}dt$ converge comme différence de deux intégrales convergentes : contradiction.
2. La fonction $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))dt$ est une primitive de $x \to \lambda - f(t)$. Une intégration par parties donne
$$\int_a^x \frac{\lambda - f(t)}{t}dt = \left[\frac{H_\lambda(t)}{t}\right]_a^x + \int_a^x \frac{H_\lambda(t)}{t^2}dt$$
Lorsque $x \to +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{H_\lambda(x)}{x} = 0$ (car H_λ est bornée) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{H(t)}{t^2}dt$ existe par comparaison avec un intégrale de Riemann. Donc $I(\lambda)$ existe.
3. (a) La condition nécessaire et suffisante pour que les primitives d'une fonction f, T-périodique, soient également T-périodiques et $\displaystyle\int_0^T f(t)dt = 0$. On le démontre en remarquant que pour tout x, $\displaystyle\int_x^{x+T} f(u)du = \int_0^T f(u)du$.

   Ici, on obtient
$$0 = \int_0^T (\lambda - f(t))dt \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$
   (b) Pour cette valeur λ_0, la fonction H est T-périodique, donc bornée sur $\mathbb{R}$. Par les question 2 et 1, Il existe une unique valeur λ_0 pour laquelle $I(\lambda_0)$ existe.
4. La question 3 s'applique à la fonction $f : t \to |\sin(t)|$ qui est π périodique. Or $\displaystyle\int_0^\pi |\sin t|dt = 2$. Donc en posant $\lambda_0 = \dfrac{2}{\pi}$, il vient
$$\int_1^x \frac{|\sin t|}{t}dt = \frac{2}{\pi}\int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^x \frac{f(t)-\lambda_0}{t}dt$$
Et $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\ln x$ avec $x \to \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)-\lambda_0}{t}dt$ bornée. En utilisant les résultats précédents :
$$\int_1^x \frac{|\sin t|}{t}dt \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln x$$

Sujet n° 38

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

   On pose désormais $u_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, \mathrm{d}t$ et on se propose, d'une part, de trouver un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$, puis, d'autre part, de déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, \mathrm{d}t$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.

   (b) En déduire un équivalent de H_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout entier naturel k non nul, on pose $v_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, \mathrm{d}t$.

   (a) Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{2}{(k+1)\pi} \leqslant v_k \leqslant \dfrac{2}{k\pi}$.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\,(H_n - 1) \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\left(H_n - \frac{1}{n}\right)$.

   (c) En déduire, d'une part, un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$, et d'autre part, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, \mathrm{d}t$

4. Cette question est indépendante des précédentes. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$?

Solution du sujet n° 38

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{|\sin t|}{t}$ est continue sur $]0, n\pi]$. De plus, au voisinage de 0^+, on a $\dfrac{|\sin t|}{t} = \dfrac{\sin t}{t}$ mais $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, donc $t \mapsto \dfrac{|\sin t|}{t}$ se prolonge par continuité en 0 . Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. (a) On connait (ou on prouve) l'inégalité, valable pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$. On somme pour k allant de 1 à $n-1 (n \geqslant 2)$, ce qui donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, soit :

   $H_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant H_n - \dfrac{1}{n}$ (valable aussi pour $n = 1$).

   En recentrant l'encadrement, on trouve bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln n + \dfrac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln n + 1$.

   (b) Pour $n \geqslant 2$, on peut tout diviser par $\ln n > 0$, ce qui donne : $1 + \dfrac{1}{n \ln n} \leqslant \dfrac{H_n}{\ln n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln n}$. On trouve, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{\ln n} = 1$ et on peut conclure : $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

3. (a) On effectue le changement de variable $u = t - k\pi$ de classe C^1 sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ et on trouve :
   $v_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u + k\pi)|}{u + k\pi}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{\left|(-1)^k \sin u\right|}{u + k\pi}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{u + k\pi}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u + k\pi}\mathrm{d}u.$
   Pour tout u de $[0, \pi]$, on a $k\pi \leqslant u + k\pi \leqslant (k+1)\pi$ puis en inversant (car $k \in \mathbb{N}^*$ donc tout est strictement positif), et en multipliant par $\sin u \geqslant 0$, on arrive à : $\dfrac{\sin u}{(k+1)\pi} \leqslant \dfrac{\sin u}{u + k\pi} \leqslant \dfrac{\sin u}{k\pi}$.

   On intègre sur $[0, \pi]$ (fonctions continues et $0 < \pi$) : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{2}{(k+1)\pi} \leqslant v_k \leqslant \dfrac{2}{k\pi}$.

   (b) Avec la relation de Chasles, on peut écrire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = u_n - u_1 = u_n - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

   Conclusion : $\forall n \geqslant 2, u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$. Comme, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{(k+1)\pi} \leqslant v_k \leqslant \dfrac{2}{k\pi}$, on en déduit $\displaystyle\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} v_k \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et on trouve :

   $$\forall n \geqslant 2, \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}(H_n - 1) \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\left(H_n - \frac{1}{n}\right)$$

   Cette relation est aussi valable pour $n = 1$ puisqu'elle donne : $u_1 \leqslant u_1 \leqslant u_1$.

   (c) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est indépendante de n et $H_n \sim \ln n$ donc on peut supposer que $u_n \sim \dfrac{2}{\pi} \ln n$, ce qui se confirme aisément en divisant l'encadrement de 4 b) par $\dfrac{2}{\pi} \ln n > 0$.

   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\pi} \ln n = +\infty$, et comme $u_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$, on peut conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (sinon $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ serait finie).

4. En 0, pas de problème, puisque $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, et en $+\infty$, une IPP, avec $u = \dfrac{1}{t}$ et $v' = \sin t$, fournit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. On conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Sujet n° 41

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant a_0, a_1 et a_2 donnés et

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$$

1. (a) Montrer (sans calculer les a_n) que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$, alors il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|a_n| \leqslant M\, 2^n$.
   (b) En déduire la convergence de la série de terme général $a_n x^n$ pour des valeurs de x à préciser.
   (c) Pour ces valeurs de x, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$. Calculer $f(x)$.
2. (a) Que dire de l'ensemble $\mathcal{E}$?
   (b) Déterminer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}$ telle que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
   (c) Déterminer les suites géométriques appartenant à $\mathcal{E}$.
   (d) En déduire une base de $\mathcal{E}$, et exprimer le terme général d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ en fonction de a_0, a_1, a_2.
   (e) Retrouver alors l'expression de $f(x)$. Pour quels réels x est-elle valable ?
3. (a) Soit $(a_n) \in \mathcal{E}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

   (b) Calculer A^n à l'aide de ce qui précède.

Solution du sujet n° 41

1. (a) Par récurrence forte en choisissant $M \geqslant \max\big(|a_0|, 2|a_1|, 4|a_2|\big)$; alors :

$$|a_{n+3}| \leqslant |a_{n+2}| + |a_{n+1}| + |a_n| \leqslant M\, 2^n \big(2^2 + 2 + 1\big) \leqslant M\, 2^n \times 8 = M\, 2^{n+3}$$

   (b) Si $|x| < 1/2$, alors $\forall n$, $|a_n\, x^n| \leqslant M\, |2x|^n$ terme général d'une série géométrique convergente ; par comparaison, $\sum a_n\, x^n$ converge absolument, donc converge.

   (c) Pour $0 < |x| < 1/2$, on a en multipliant par x^n et en sommant :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+3}\, x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
\frac{1}{x^3}\Big[f(x) - a_0 - a_1\, x - a_2\, x^2\Big] &= \frac{1}{x^2}\Big[f(x) - a_0 - a_1\, x\Big] + \frac{1}{x}\Big[f(x) - a_0\Big] - f(x) \\
f(x) &= \frac{(a_2 - a_1 - a_0)\, x^2 + (a_1 - a_0)\, x + a_0}{x^3 - x^2 - x + 1}
\end{aligned}$$

   cette égalité étant encore vraie pour $x = 0$.

2. (a) Par linéarité de la relation, $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 via l'isomorphisme

$$\Phi : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E} \mapsto \big(a_0, a_1, a_2\big) \in \mathbb{R}^3$$

   (b) Par récurrence forte immédiate, $\forall n$, $a_n = n$.

   (c) La suite nulle est solution. Sinon on a :

$$(r^n) \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow \forall n,\ r^n \Big[r^3 - r^2 - r + 1\Big] = 0 \Longleftrightarrow (r-1)^2\,(r+1) = 0 \Longleftrightarrow r \in \{-1, 1\}$$

   (d) D'où une base de $\mathcal{E}$ constituée de $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$; donc il existe α, β, γ réels tels que, pour tout n, on a : $a_n = \alpha + n\,\beta + (-1)^n\,\gamma$; puis

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & & +\gamma & = & a_0 \\ \alpha & +\beta & -\gamma & = & a_1 \\ \alpha & +2\beta & +\gamma & = & a_2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & & +\gamma & = & a_0 \\ -\alpha & & +3\gamma & = & a_2 - 2a_1 \\ \alpha & +\beta & -\gamma & = & a_1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} \alpha & = & \frac{1}{4}\big[-a_2 + 2a_1 + 3a_0\big] \\ \beta & = & \frac{1}{4}\big[2a_2 - 2a_0\big] \\ \gamma & = & \frac{1}{4}\big[a_2 - 2a_1 + a_0\big] \end{array}\right.$$

   (e) Par somme d'une série géométrique (dérivée) convergente pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big[\alpha + n\,\beta + (-1)^n\,\gamma\big]\, x^n = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta x}{(1-x)^2} + \frac{\gamma}{1+x} = \frac{x^2\,(-\alpha + \beta + \gamma) + x\,(\beta - 2\gamma) + (\alpha + \gamma)}{(1-x)^2\,(1+x)}$$

   qui redonne bien l'expression ci-dessus, pour $|x| < 1$.

3. (a) Par identification :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Par récurrence immédiate on a :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

   d'où A^n par identification en remplaçant α, β, γ trouvés en 2.(d) dans l'expression de a_n, a_{n+1}, a_{n+2}.

SUJET N° 43

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ positive continue et décroissante.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$.

Dans tout l'exercice, on suppose la suite (S_n) convergente et on note

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n\geqslant 0} f(n)$$

1. Montrer la convergence de la série : $\sum(-1)^n f(n)$. On note $A = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n f(n)$
2. Montrer la convergence des séries $\sum f(2n)$ et $\sum f(2n+1)$.
   On note SP et SI les sommes des ces deux séries. Exprimer SP et SI en fonction de S et A.
3. Pour tout entier $n > 0$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)dt$ converge et que : $|S - S_n| \leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)dt$
4. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note : $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f(k)$, $v_n = A_{2n-1}$ et $w_n = A_{2n}$.
   (a) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes puis que :
   $$\forall n > 0,\ A_{2n-1} \leqslant A_{2n+1} \leqslant A \leqslant A_{2n}$$
   (b) En déduire : $\forall n > 0, |A - A_n| \leqslant f(n+1)$

On suppose désormais la fonction f **strictement** décroissante.

5. Pour tout $(p, \varepsilon) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$ on note $H(p, \varepsilon)$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+p} - S_n \leqslant \varepsilon\}$.
   (a) Montrer que $H(p, \varepsilon)$ admet un plus petit élément qu'on notera $\varphi(p, \varepsilon)$
   (b) Justifier la bijectivité de f et montrer l'inégalité :
   $$\varphi(p, \varepsilon) \leqslant f^{-1}(\frac{\varepsilon}{p}) - 1$$
6. Cas particulier. On prend $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2}$ et on donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer A, SP, SI.
   Comment choisir n de telle sorte que S_n et A_n approchent respectivement S et A avec une erreur inférieure à 0.1 ?

Solution du sujet n^{o} 43

1. L'hypothèse $f \geqslant 0$ entraîne $|(-1)^n f(n)| = f(n)$ d'où la convergence absolue de la série $\sum (-1)^n f(n)$.

2. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(2k) \leqslant S_{2n} \leqslant S$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(2k+1) \leqslant S_{2n+1} \leqslant S$.
   Ainsi les sommes partielles des deux séries à termes positifs étudiées sont bornées ; donc ces séries convergent.
$$\left\{\begin{array}{l} S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(2k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(2k+1) \\ A_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(2k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(2k+1) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(2k) = \frac{1}{2}(S_{2n} + A_{2n}) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(2k+1) = \frac{1}{2}(S_{2n} - A_{2n}) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} SP = \displaystyle\sum_{\geqslant 0} f(2k) = \frac{1}{2}(S+A) \\ SI = \displaystyle\sum_{\geqslant 0} f(2k+1) = \frac{1}{2}(S-A) \end{array}\right.$$

3. Comme f est décroissante, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) \Rightarrow \forall p > 0,\ \int_n^{n+p} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} f(k) \leqslant S$
   d'où la convergence de l'intégrale $\int_n^{+\infty} f(t)dt$.
$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt \Rightarrow \forall p > 0,\ 0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} f(k) < \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_{k-1}^{k} f(t)dt = \int_n^{n+p} f(t)dt \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt$$
   d'où en prenant la limite quand p tend vers $+\infty$: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) = |S - S_n| \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt$

4. (a) on a : $v_{n+1} - v_n = -f(2n+1) + f(2n) \geqslant 0$, $w_{n+1} - w_n = f(2n+2) - f(2n+1) \leqslant 0$ et $w_n - v_n = f(2n)$ La série $\sum f(n)$ étant supposée convergente, nécessairement $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} (w_n - v_n) = 0$ ce qui montre que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes ; elles convergent vers la même limite A vérifiant $w_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} w_n \leqslant A \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant v_n$
   La croissance de w_n entraîne : $A_{2n-1} \leqslant A_{2n+1} \leqslant A \leqslant A_{2n}$
   (b) on en déduit : $|A - A_{2n-1}| \leqslant A_{2n} - A_{2n-1} = f(2n)$(cas pair)
   et $|A - A_{2n}| \leqslant A_{2n} - A_{2n+1} = f(2n+1)$(cas impair)
   d'où : $\forall n > 0, |A - A_n| \leqslant f(n+1)$

5. (a) $S_{n+p} - S_n = f(n+1) + \cdots f(n+p)$ est la somme de p suites toutes convergentes et de limites nulles, donc $\lim_{n\to+\infty} (S_{n+p} - S_n) = 0$, ce qui prouve que $H(p,\varepsilon)$ est non vide.
   $H(p,\varepsilon)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus petit élément.
   (b) La fonction f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ donc bijective.
   La décroissance de f entraîne : $S_{n+p} - S_n = f(n+1) + \cdots f(n+p) \leqslant pf(n+1)$
   Tout n tel que $pf(n+1) \leqslant \varepsilon \Rightarrow n \geqslant f^{-1}(\frac{\varepsilon}{p}) - 1$ appartient à $H(p,\varepsilon)$. Donc $\varphi(p,\varepsilon) \leqslant f^{-1}(\frac{\varepsilon}{p}) - 1$.

6.
$$f(t) = \frac{1}{(t+1)^2} \Rightarrow S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } SI = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2(k+1))^2} = \frac{1}{4}S = \frac{\pi^2}{24}$$
   On sait aussi : $SI = \frac{1}{2}(S - A)$ on en déduit $A = \frac{S}{2} = \frac{\pi^2}{12}$, d'où : $SI = \frac{\pi^2}{24}$ et $SP = \frac{3\pi^2}{24}$.
   $|S - S_n| \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{n+1}$ est inférieur à 0.1 pour $n \geqslant 9$.
   $|A - A_n| \leqslant f(n+1) = \frac{1}{(n+2)^2}$ est inférieur à 0.1 pour $n \geqslant \sqrt{10} - 2$ donc dès que $n \geqslant 2$.
   On choisit donc $n \geqslant 9$ pour avoir les deux simultanément.

Sujet n° 48

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$. On définit $F :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F : (x,y) \mapsto f(x) + f(y) - f(x+y)$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0,+\infty\left[^2\right.$ et exprimer, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty\left[^2\right.$, les dérivées partielles premières $\partial_1 F(x,y)$ et $\partial_2 F(x,y)$ en fonction de $f'(x), f'(y)$ et $f'(x+y)$.
2. Établir que, pour tout $a \in]0,+\infty[$, l'équation $f'(x) = f'(a)$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet au plus une solution distincte de a.
3. En déduire que, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty\left[^2\right., (x,y)$ est un point critique de F si et seulement si :

$$x = y \text{ et } f'(x) = f'(2x).$$

4. Montrer que F admet un unique point critique, noté (α,α), et montrer que $1 < \alpha < 2$.
5. Montrer : $f''(\alpha) < 0$ et $f''(2\alpha) > 0$.
6. Montrer que F admet un extremum local. Déterminer la nature de cet extremum local.

SOLUTION DU SUJET N° 48

1. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ par produit de fonctions $\mathcal{C}^2$.
   Les fonctions $(x,y)\mapsto x, (x,y)\mapsto y$ et $(x,y)\mapsto x+y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$ car polynomiales, et à valeurs dans $]0,+\infty[$. Donc, par composition, F est $\mathcal{C}^2$ car somme de fonctions $\mathcal{C}^2$. On a alors
   $$\partial_1 f(x,y)=f'(x)-f'(x+y) \text{ et } \partial_2 F(x,y)=f'(y)-f'(x+y)$$
2. On a $f' : x\mapsto e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$, et donc $f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=e^{-x}(x-2)$. On a f' qui est strictement monotone sur $]0,2]$ et sur $]2,+\infty[$, l'équation $f'(x)=f'(a)$ possède au plus deux solutions. Puisque l'une d'elles est a, elle possède au plus une solution distincte de a.
3. (x,y) est un point critique de F si et seulement si $\partial_1 F(x,y)=\partial_2 F(x,y)=0$, soit
   $$\begin{cases} f'(x)=f'(x+y)\\ f'(y)=f'(x+y)\end{cases}$$
   Comme x et y sont strictement positifs, $x+y>x$ et $x+y>y$. Donc d'après la question précédente, l'équation $f'(t)=f'(x+y)$ possède au plus une solution différente de $x+y$.
   Et donc si $f'(x)=f'(y)=f'(x+y)$, alors nécessairement $x=y$, et alors $x+y=2x$, donc $f'(x)=f'(2x)$. Réciproquement, si $x=y$ et $f'(2x)=f'(2x)$, alors $f'(x)=f'(x+y)$ et $f'(y)=f'(x+y)$ et donc (x,y) est un point critique de F.
   En conclusion, (x,y) est un point critique de F si et seulement si $x=y$ et $f'(x)=f'(2x)$.
4. Une solution de l'équation $f'(x)=f'(2x)$ sera nécessairement dans $[0,2]$, avec $2x\in[2,+\infty[$. Autrement dit, une solution de $f'(x)=f'(2x)$ est nécessairement dans $]1,2[$.
   De plus, on a
   $$f'(x)=f'(2x)\Leftrightarrow e^{-x}(1-x)=e^{-2x}(1-2x)\Leftrightarrow(1-x)=e^{-x}(1-2x).$$
   Posons alors $g(x)=1-x-e^{-x}(1-2x)$, de sorte que $f'(x)=f'(2x)$ si et seulement si $g(x)=0$. Une étude de la fonction g donne $g'(x)=-1+e^{-x}(1-2x)+2e^{-x}=e^{-x}(3-2x)-1$. On montre que g est strictement décroissante sur $]1,2[$.
   D'autre part, $g(1)=\mathrm{e}^{-1}\geqslant 0$ et $g(2)=-1+3\mathrm{e}^{-2}$. Puisque $\mathrm{e}\geqslant 2, \mathrm{e}^{-2}\leqslant\frac{1}{4}$ et donc $g(2)\leqslant 0$.
   D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique $\alpha\in]1,2[$ tel que $g(\alpha)=0$ et donc un unique $\alpha\in]1,2[$ tel que $f'(\alpha)=f'(2\alpha)$.
5. Puisque $\alpha\in]1,2[$ et $2\alpha>2$, d'après le tableau de variation, on a $f''(\alpha)<0$ et $f''(2\alpha)>0$.
6. Puisque F possède un unique point critique, elle possède au plus un extremum local, qui sera nécessairement en (α,α). Un calcul rapide de la hessiennne de F en (α,α) donne
   $\nabla^2 F(\alpha,\alpha)=\begin{pmatrix} f''(\alpha)-f''(2\alpha) & -f''(2\alpha)\\ -f''(2\alpha) & f''(\alpha)-f''(2\alpha)\end{pmatrix}.$
   Par la question précédente, $\mathrm{tr}(\nabla^2 F)<0$ et $\det((\nabla^2 F))=f''(\alpha)(f''(\alpha)-2f''(2\alpha))>0$. Cette matrice possède deux valeurs propres non nulles de même signe (déterminant positif) et qui sont négatives par la trace. Ainsi F admet en (α,α) un maximum local.

Sujet n° 51

On note I le segment $[0,1]$ de $\mathbb{R}$.

1. Soit $r \in]0,1[$. Dans cette question, f désigne une fonction continue sur I qui est strictement croissante sur $[0,r]$ et strictement décroissante sur $[r,1]$. De plus, on suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et on pose $M = f(r)$.
   (a) Donner l'allure de la courbe représentative de f.
   (b) Justifier que f est une bijection de $[0,r]$ (resp. $[r,1]$) sur le segment $[0,M]$; on note g_1 (resp. g_2) sa réciproque. Que peut-on dire de g_1 et g_2 ?
   (c) Vérifier que pour tout $x \in I$, on a $g_1(f(x)) \leqslant x \leqslant g_2(f(x))$. En déduire que si (x_n) est une suite de points de I telle que la suite $(f(x_n))$ tend vers M, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = r$.
2. Dans cette question, on pose $f(x) = x(1-x)$.
   (a) Étudier rapidement la fonction f.
   (b) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie en se donnant $u_0 \in [0, \dfrac{1}{2}[$ et en posant $u_{n+1} = \dfrac{1}{4(1-u_n)}$.
   Vérifier que la suite (u_n) est correctement définie et que pour tout entier $n \geqslant 0$, u_n est contenu dans $[0, \dfrac{1}{2}[$.
   (c) Montrer que $u_0 < u_1$, puis étudier les variations de la suite (u_n).
   (d) Montrer que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Dans toute la suite, on considère une fonction g qui est continue sur $[0,1]$, strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et telle que : $g(0) = g(1) = 0$ et $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

3. (a) On se donne $v_0 \in [0, \dfrac{1}{2}[$. Montrer que l'on peut trouver $v_1 \in]0, \dfrac{1}{2}[$ tel que $g(v_1)(1-g(v_0)) > \dfrac{1}{4}$.
   (b) Construire par récurrence une suite $(v_n)_{n\geqslant 0} \subseteq I$ telle que $g(v_{n+1})(1-g(v_n)) > \dfrac{1}{4}$ pour tout $n \geqslant 0$.
4. Dans cette question, on considère une suite $(w_n)_{n\geqslant 0} \subseteq I$ telle que $g(w_{n+1})(1-g(w_n)) \geqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout $n \geqslant 0$.
   (a) Montrer que la suite $(g(w_n))$ est croissante.
   (b) En déduire que la suite (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution du sujet n° 51

1. (a) La courbe passe par les points remarquables $(0,0)$, (r,M) et $(1,0)$. Il est clair que cette courbe passe par un unique sommet (maximum global) qui est atteint au point d'abscisse r.

   (b) La fonction f est continue et strictement croissante (resp strictement décroissante) sur l'intervalle $I_1=[0,r]$ (resp. $I_2=[r,1]$). Le théorème de la bijection s'applique sur chacun de ces segments, d'où l'existence des réciproques g_1 et g_2. De plus, ce théorème nous dit que ces deux fonctions sont continues, que g_1 est strictement croissante et g_2 strictement décroissante et de plus on a $g_1 \leqslant g_2$.

   (c) Il est clair que cette inégalité est vérifiée puisque x est nécessairement l'un des deux termes extrêmes. Comme la suite $(f(x_n))$ tend vers M, par encadrement on voit que la suite (x_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_1(f(x_n)) = g_1(M) = r \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} g_2(f(x_n)) = g_2(M) = r$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = r$.

2. (a) On voit facilement que f satisfait les hypothèses requises dans la question 1.) avec $r=\dfrac{1}{2}$ et $M=\dfrac{1}{4}$. De plus, la courbe est symétrique par rapport à l'axe $y=\dfrac{1}{2}$ car $f(x)=f(1-x)$.

   (b) Comme $u_0 \in [0,\dfrac{1}{2}[$, le quotient associé à u_1 est bien défini et $0<u_1<\dfrac{1}{4}\times 2=\dfrac{1}{2}$. Soit $n\geqslant 1$, supposons que u_n soit bien défini et que $u_n \in]0,\dfrac{1}{2}[$; alors de la même manière, on voit que u_{n+1} est bien défini ($u_n \neq 1$) et que $0<u_{n+1}<\dfrac{1}{4}\times 2=\dfrac{1}{2}$ $(0<(1-u_n)^{-1}<2)$, ce qui termine la question.

   (c) On observe que $u_1-u_0=\dfrac{(1-2u_0)^2}{4(1-u_0)}>0$. Comme la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{4(1-x)}$ est strictement croissante sur $[0,\dfrac{1}{2}[$ et que $u_n\in[0,\dfrac{1}{2}[$ pour tout entier n, on voit en appliquant n fois cette fonction que $u_n<u_{n+1}$; la suite (u_n) est donc strictement croissante.

   (d) La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente, d'où $M=\dfrac{1}{4}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}(1-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$. Avec 1. c), on en déduit que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

3. (a) Comme $v_0\in[0,\dfrac{1}{2}[$, on a $1-g(v_0)>\dfrac{1}{2}$ et il suffit alors de considérer la fonction $h : x\mapsto g(x)\times(1-g(v_0))$ sur l'intervalle $[0,\dfrac{1}{2}]$ qui est évidemment continue, et telle que $h(0)=0$ et $h(\dfrac{1}{2})>\dfrac{1}{4}$, ce qui nous assure l'existence d'un $v_1\in]0,\dfrac{1}{2}[$ tel que $g(v_1)(1-g(v_0))>\dfrac{1}{4}$.

   (b) Il suffit de prendre pour hypothèse de récurrence au rang $n\geqslant 0$: « il existe $v_{n+1}\in]0,\dfrac{1}{2}[$ (bien penser à mettre cette relation d'appartenance) tel que $g(v_{n+1})(1-g(v_n))>\dfrac{1}{4}$ ». La question 3. a) nous dit que c'est vrai au rang 0. Si on suppose que c'est vrai au rang n, un raisonnement analogue à celui de la question précédente nous montre que c'est encore vrai au rang $n+1$.

4. (a) On remarque que $g(w_n)$ est toujours différent de 1. Par ailleurs, il vient $g(w_{n+1})(1-g(w_n))\geqslant\dfrac{1}{4}=M\geqslant f(g(w_n))=g(w_n)(1-g(w_n))$, d'où $g(w_{n+1})\geqslant g(w_n)$ puisque $1-g(w_n)>0$.

   (b) La suite $(g(w_n))$ est convergente car elle est croissante et majorée. On a $\dfrac{1}{4}\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty} g(w_{n+1})(1-g(w_n))=\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(w_n))$. D'autre part, on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(w_n))\leqslant\dfrac{1}{4}$. D'où $M=\dfrac{1}{4}=\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(w_n))$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} g(w_n)=\dfrac{1}{2}$. Or $\dfrac{1}{2}$ est le maximum de g sur I et la propriété montrée en 1.c) s'applique aussi pour g ; il en résulte que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Sujet n° 52

Soit t un réel non nul. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la moyenne d'ordre t de n réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ en posant :

$$m_t(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^t + \cdots + x_n^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}}.$$

1. Que représente $m_1(x_1, \cdots, x_n)$?
2. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$. On introduit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $f(t) = \ln(x_1^t + \cdots + x_n^t)$.
   (a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 (on notera encore f ce prolongement).
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer f' et f''. Vérifier que ces deux fonctions se prolongent par continuité en 0.
   On admet que la fonction f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et que l'on a : $f'(0) = \lim\limits_{0^+} f'$ et $f''(0) = \lim\limits_{0^+} f''$.
   (c) Soit $t > 0$. Établir l'inégalité suivante :
   $$\left[(\ln x_1)x_1^t + \cdots + (\ln x_n)x_n^t\right]^2 \leqslant \left[(\ln x_1)^2 x_1^t + \cdots + (\ln x_n)^2 x_n^t\right]\left[x_1^t + \cdots + x_n^t\right].$$
   (d) Prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
3. Dans cette question, on suppose que les n réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ sont fixés, et pour $t > 0$, on pose $m(t) = m_t(x_1, \ldots, x_n)$.
   (a) Exprimer $m(t)$ en fonction de $f(t)$ (introduite dans la question 2.).
   (b) En revenant à la définition, prouver que m est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant une inégalité de Taylor, montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0.
   (c) Justifier les inégalités
   $$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^n x_k}{n} \leqslant \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^n x_k^2}{n}}.$$
   (d) Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} m(t) = \max(x_1, \cdots, x_n)$ (*On pourra se ramener au cas où $x_1 = \max(x_1, \ldots, x_n)$ et introduire les points $y_k = \dfrac{x_k}{x_1}$ pour $k = 2, \ldots, n$.*).
4. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Soit $t < 0$. Vérifier que
   $$m_t(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{m_{|t|}(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n})}.$$
   (b) En déduire que la fonction $t \mapsto m_t(x_1, \cdots, x_n)$ se prolonge en une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Que peut-on dire de $m_t(x_1, \ldots, x_n)$ lorsque t tend vers $-\infty$.

SOLUTION DU SUJET N$^{\text{O}}$ 52

1. C'est tout simplement la moyenne arithmétique habituelle.
2. (a) Comme $x_k^t = \exp(t \ln x_k) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, on voit que $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \ln n$, et par suite la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln n$.

   (b) Par somme et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on voit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ouvert. De plus, pour $t > 0$ on a

$$f'(t) = \frac{\sum_{k=1}^n (\ln x_k) x_k^t}{\sum_{k=1}^n x_k^t} \text{ et } f''(t) = \frac{\left[\sum_{k=1}^n (\ln x_k)^2 x_k^t\right]\left[\sum_{k=1}^n x_k^t\right] - \left[\sum_{k=1}^n (\ln x_k) x_k^t\right]^2}{\left[\sum_{k=1}^n x_k^t\right]^2}.$$

   Ces deux fonctions se prolongent donc par continuité en 0 car

$$\lim_{t\to 0^+} f'(t) = \ln\left((x_1 \times \cdots \times x_n)^{\frac{1}{n}}\right) = f'(0) \text{ et}$$

$$\lim_{t\to 0^+} f''(t) = n^{-2}\left[n\sum_{k=1}^n (\ln x_k)^2 - \ln(x_1 \times \cdots \times x_n)^2\right] = f''(0).$$

   (c) On écrit le terme général de la somme, qui apparaît dans le membre de gauche, sous la forme $\left(x_k^{\frac{t}{2}} \ln(x_k)\right) \times x_k^{\frac{t}{2}}$ et on utilise l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans $\mathbb{R}^n$.

   (d) Avec la question 2. b) et l'inégalité précédente, on voit que f'' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Le cours nous dit alors que f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Par continuité, elle l'est encore sur $\mathbb{R}_+$.
3. (a) Pour faire intervenir f, on s'intéresse bien sûr à $\ln m(t) = t^{-1}[f(t) - \ln n] = t^{-1}[f(t) - f(0)]$, d'où $m(t) = \exp\left(t^{-1}[f(t) - f(0)]\right)$.

   (b) Supposons que $0 < t_1 < t_2$. Avec la question précédente on voit que $m(t_1) \leqslant m(t_2)$ équivaut après simplification à $f(t_1) \leqslant \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) f(0) + \frac{t_1}{t_2} f(t_2)$ et cette inégalité est vraie puisque f est convexe ($t_1 \in]0, t_2]$, $\frac{t_1}{t_2} < 1$ et $t_1 = \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \times 0 + \frac{t_1}{t_2} t_2$). Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, f'' est bornée sur $[0, 1]$ et l'inégalité de TAYLOR reste intégral ou de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre 1 conduit immédiatement à $|t^{-1}[f(t) - f(0)] - f'(0)| \leqslant Mt$ (où M est une constante strictement positive). Il s'ensuit que la fonction m se prolonge par continuité en 0 en posant $m(0) = (x_1 \times \cdots \times x_n)^{\frac{1}{n}}$ ($m(0)$ est la moyenne géométrique).

   (c) Par croissance de m, on a bien $m(0) \leqslant m(1) \leqslant m(2)$ ($m(2)$ est la moyenne quadratique).

   (d) Comme les x_k jouent des rôles symétriques, on peut se ramener au cas où $x_1 = \max(x_1, \cdots, x_n)$. Il vient $m(t) = x_1 \exp\left[\frac{\ln\left(1 + \sum_{k=2}^k y_k^t\right)}{t}\right] \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} x_1$ car $y_k = \frac{x_k}{x_1} \in]0, 1]$ pour $k = 2, \cdots, n$.
4. (a) Soit $t < 0$. Alors $t = -|t|$ et l'égalité demandée devient un jeu d'écriture.

   (b) La valeur absolue est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. Par composition avec une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ on obtient une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et en passant à l'inverse, il en découle que $t \mapsto m_t(x_1, \cdots, x_n)$ est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$. La réponse complète provient du raccordement continu en 0 car $\lim_{t\to 0^-} m_t(x_1, \cdots, x_n) = \lim_{s\to 0^+} m_s(x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1})^{-1} = (x_1 \times \cdots \times x_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0^+} m_t(x_1, \cdots, x_n)$.

   (c) En utilisant une nouvelle fois 4. a), il vient

$$\lim_{t\to-\infty} m_t(x_1, \cdots, x_n) = \lim_{s\to+\infty} m_s(x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1})^{-1} = \frac{1}{\max(x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1})} = \min(x_1, \cdots, x_n).$$

Sujet n° 56

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u^{(n)}$ la dérivée n-ième de u.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction H_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u^{(n)}(x) = H_n(x)u(x)$.

1. Trouver une relation simple entre $u'(x)$, $u(x)$ et x qui est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_{n+2}(x) = xH_{n+1}(x) + (n+1)H_n(x)$.
2. Montrer que H_n est une fonction paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair).
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, exprimer $H_{2p}(0)$ en fonction de p.
4. Montrer que la fonction H_n est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

Soit la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ définie par récurrence par $T_0 = 1$, $T_1 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 0,\ T_{n+2} = T_{n+1} + (n+1)T_n.$$

5. Montrer que $T_n = H_n(1)$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit la fonction v_p par : $v_p(x) = H_{2p}(x)\exp\left(\frac{x^2}{4}\right)$.
On admet qu'alors on a : $\forall x \in [0,1],\ \alpha^2 v_p(x) \leqslant v_p''(x) \leqslant \beta^2 v_p(x)$, avec $\beta = \sqrt{2p + \frac{3}{4}}$ et $\alpha = \sqrt{2p + \frac{1}{2}}$.

6. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{H_{2p}(0)}{2}\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right)$.
   En étudiant le signe de $w = v_p \times \varphi' - v_p' \times \varphi$, montrer que : $\forall x \in [0,1],\ v_p(x) \leqslant \varphi(x)$.

On obtiendrait de même le résultat suivant que l'on admet :

$$\forall x \in [0,1],\ v_p(x) \geqslant \frac{H_{2p}(0)}{2}\left(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}\right).$$

7. Déduire des questions précédentes un équivalent de T_{2p} lorsque p tend vers $+\infty$.

Solution du sujet n$^{\text{o}}$ 56

1. On a $u'(x) = xu(x)$. Donc en dérivant $n+1$ fois par la formule de Leibniz, on a :

$$u^{(n+2)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x) \times u^{(n+1-k)}(x) = xu^{(n+1)}(x) + (n+1)u^{(n)}(x).$$

   Puis on multiplie tout par $u(x)$. *Autre idée :* par récurrence sur n (hérédité en dérivant une fois).

2. Comme u est paire, $u^{(n)}$ est de même parité que n, donc $H_n = \frac{u^{(n)}}{u}$ aussi.
   Autre idée : montrer $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ par récurrence double sur $n \geqslant 0$.

3. En évaluant en $x = 0$ (avec $n = 2p$), on a : $H_{2(p+1)}(0) = (2p+1)H_{2p}(0)$,
   Donc : $H_{2p}(0) = H_0(0) \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(2k+1) = \frac{(2p)!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p} 2k} = \frac{(2p)!}{2^p p!}$.

4. Montrons par récurrence double sur $n \geqslant 0$ la relation : $\forall x > 0,\ H_n(x) > 0$.
   - C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ car $H_0 = 1$ et $H_1 = X$.
   - Si c'est vrai aux rangs n et $n+1$, la question 1 montre que c'est vrai pour $n+2$.

5. Par récurrence double évidente, car $T_0 = H_0(1),\ T_1 = H_1(1)$ et

$$H_{n+2}(1) = H_{n+1}(1) + (n+1)H_n(1),\ T_{n+1} + (n+1)T_n = T_{n+2}$$

6. Notons $a = H_{2p}(0)$. Comme $H_{2p}(0) \geqslant 0$ (cf. Q3), on a $\varphi(x) \geqslant 0$, donc :

$$w'(x) = v_p(x)\varphi''(x) - v_p''(x)\varphi(x) = v_p(x)\beta^2\varphi(x) - v_p''(x)\varphi(x) = \varphi(x)\big(v_p(x)\beta^2 - v_p''(x)\big) \geqslant 0.$$

   Or $\varphi'(0) = 0$ et $v_p'(0) = 0$ (car H_{2p}' impaire, car H_{2p} paire), d'où : $w(0) = v_p(0)\varphi'(0) - v_p'(0)\varphi(0) = 0$.
   Comme w est croissante, on donc w est positive sur $[0,1]$.
   Ainsi ($\varphi > 0$) : $\left(\dfrac{v_p}{\varphi}\right)' = -\dfrac{w}{\varphi^2} \leqslant 0$. Or $\left(\dfrac{v_p}{\varphi}\right)(0) = \dfrac{a}{a} = 1$.
   Donc : $\forall x \in [0,1],\ \dfrac{v_p(x)}{\varphi(x)} \leqslant 1$, soit : $\forall x \in [0,1],\ v_p(x) \leqslant \varphi(x)$.

7. D'après la question prédédente, pour $x = 1$, en notant $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, on a :

$$H_{2p}(0)\cosh\left(\sqrt{2p+\frac{1}{2}}\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{4}\right) \times H_{2p}(1) \leqslant H_{2p}(0)\cosh\left(\sqrt{2p+\frac{3}{4}}\right).$$

   Comme $\sqrt{2p+\frac{1}{2}}$ tend vers $+\infty$ et $\cosh x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}$, on a : $\cosh\left(\sqrt{2p+\frac{1}{2}}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p+\frac{1}{2}}}}{2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p}}}{2}$,
   où cette seconde équivalence se justifie par : $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p+\frac{1}{2}}}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2p}}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2p+\frac{1}{2}}-\sqrt{2p}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2p+\frac{1}{2}}-\sqrt{2p}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,
   puisque : $\sqrt{2p+\frac{1}{2}} - \sqrt{2p} = \sqrt{2p}\left(\sqrt{1+\frac{1}{2p}} - 1\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{2p} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2p} = \dfrac{1}{\sqrt{2p}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   De même, on a $\cosh\left(\sqrt{2p+\frac{3}{4}}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p}}}{2}$, donc par théorème d'encadrement, on en déduit que

$$T_{2p} = H_{2p}(1) \underset{p\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} H_{2p}(0) \times \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p}}}{2} = \frac{(2p)!}{2^{p+1}p!}\mathrm{e}^{\sqrt{2p}-\frac{1}{4}}.$$

Sujet n° 60

Pour tout entier naturel n, on considère $a_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,dt$ et $g_n : t \longmapsto e^{-t}\dfrac{t^n}{n!}$

1. Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

2. (a) Calculer f_n'. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $\mathbb{R}_+$: $f_n(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,dt$.

   (b) Etablir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $f_n(n) = a_n$.

3. (a) Étudier, pour tout n de $\mathbb{N}$, les variations de la fonction g_n sur $[n, n+1]$.

   (b) En déduire que la suite (a_n) est décroissante. Étudier sa convergence.

4. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Donner la loi de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

5. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que l'équation $f_n(x) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une unique solution que l'on notera b_n.

   (b) Montrer l'existence de la suite (b_n) et déterminer sa limite.

Solution du sujet n^o 60

1. Comme l'intégrale $\Gamma(n+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,dt$ converge, il en est de même de l'intégrale qui définit a_n.

2. (a) La fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $f_n'(x) = -e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+$.
L'égalité découle de l'intégration de f_n' sur $[0, x]$ avec $x \geqslant 0$.

   (b) On a l'égalité car $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1$.

3. (a) Si $n \geqslant 1$, alors g_n décroît sur $[n, n+1]$ car : $g_n'(t) = e^{-t}\dfrac{t^{n-1}}{n!}(n-t) \leqslant 0$.
Même résultat pour $n = 0$ car $g_0(t) = -e^{-t}$.

   (b) En posant $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$, et en intégrant par parties, u et v étant C^1 sur $\mathbb{R}$, on obtient :
$$\int_{n+1}^X e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt = \left[-e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{n+1}^X + \int_{n+1}^X e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt.$$
En faisant tendre X vers $+\infty$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = e^{-(n+1)}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_{n+1}^n e^{-t}\frac{t^n}{n!} = g_n(n+1) - \int_n^{n+1} g_n(t)dt \geqslant 0,$$
car g_n décroit sur $[n, n+1]$.
Ainsi, la suite (a_n) est décroissante. Elle est de plus minorée par 0, par positivité de l'intégrale, donc elle converge.

4. (a) Comme S_n est la somme de n variables indépendantes suvant la loi de Poisson de paramètre 1, alors S_n suit la loi de Poisson de paramètre n.
Comme $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance non nulle ($V[X_1] = 1$), d'après le théorème limite central, on a : $\dfrac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{V[S_n]}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.
Comme $E[S_n] = n$ et $V[S_n] = n$, puisque $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$, cela donne :
$$e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = P(S_n \leqslant n) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n = f_n(n) = e^{-n}\sum\limits_{k=0}^n \dfrac{n^k}{k!}$, donc (a_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

5. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f_n'(x) = -e^{-x}\dfrac{x^n}{n!} \leqslant 0$. Donc f_n est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ (f_n' négative et ne s'annule qu'en 0). Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f_n est bijective de $[0, +\infty[$ sur l'intervalle $]0, 1]$.
Par conséquent, $\dfrac{1}{2}$ admet un unique antécédent b_n par f_n dans $\mathbb{R}_+$.

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n(b_n) = \dfrac{1}{2}$ et (a_n) est décroissante de limite $\dfrac{1}{2}$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$a_n \geqslant \dfrac{1}{2} \iff f_n(n) \geqslant f_n(b_n) \iff b_n \geqslant n$ par décroissance de f_n^{-1} sur $]0, 1]$.
On en déduit que (b_n) diverge vers $+\infty$ d'après les théorèmes de comparaison.

Sujet n° 62

Soit $(s_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$s_0 = 2 \text{ et pour tout } n \geqslant 0, s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k$$

1. Calculer s_1, s_2 et s_3.
2. Montrer que la suite (s_n) est croissante.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$

   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{s_k}$ converge et calculer sa somme.
5. On pose $r = 2^{\frac{1}{3}}$ et on admet que pour tout $n \geqslant 3, s_n \geqslant r^{2^{n+1}}$.

   (a) Montrer que $r < \frac{21}{16}$. En déduire que $s_0 s_1 s_2 \geqslant r^{16}$.

   (b) On pose pour tout $n \geqslant 0, u_n = \dfrac{\ln(s_n)}{2^{n+1}}$. Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

   (c) Montrer que $\ell \geqslant \dfrac{\ln 2}{3}$.

Solution du sujet n° 62

1. On a $s_0 = 2, s_1 = 3, s_2 = 7, s_3 = 42$.
2. Par récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant 0, s_n \in \mathbb{N}^*$; donc $s_{n+1} > 1 + s_n > s_n$.
3. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, s_n \geqslant n$. Ceci est vérifié pour $n = 0, 1, 2, 3$. Et si $s_n \geqslant n$, alors $s_{n+1} \geqslant n! > n$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.
4. (a) On a
$$s_{n+1} - 1 = s_n \left(\prod_{k=0}^{n-1} s_k\right) = s_n(s_n - 1)$$
   (b) Ainsi
$$\frac{1}{s_{n+1}-1} = \frac{1}{s_n(s_n-1)} = \frac{1}{s_n-1} - \frac{1}{s_n}$$
   Puis en sommant, $-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{s_{k+1}-1} - \frac{1}{s_k-1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{s_k}$. Et par télescopage
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{s_k} = -\frac{1}{s_n-1} + 1 \longrightarrow 1$$
5. On pose pour tout $n \geqslant 0, u_n = \dfrac{\ln(s_n)}{2^{n+1}}$.

   (non demandé dans l'exercice). Montrons par récurrence forte sur n que pour tout $n \geqslant 3, s_n \geqslant r^{2^{n+1}}$.
   - Ceci est vérifié pour $n = 3$.
   - Supposons que $s_k \geqslant r^{2^{k+1}}$, pour tout $k \in [\![3, n]\!]$. Alors

$$s_{n+1} = 1+\prod_{k=0}^{n} s_k > s_0s_1s_2\prod_{k=3}^{n} s_k > r^{16}\times\prod_{k=3}^{n} r^{2^{k+1}} \geqslant r^{16+\sum_{k=3}^{n}2^{k+1}} = r^{16+\sum_{k=4}^{n+1}2^{k}} = r^{16+2^{n+2}-16} = r^{2^{n+2}}$$

   (a) On a
$$r < \frac{21}{16} \Leftrightarrow 2 < \left(1 + \frac{5}{16}\right)^3$$
   Il suffit alors de développer la dernière expression par le binôme de Newton.
   On a $s_0s_1s_2 = 42$ et $r^{16} = 2^{16/3} = 32 \times r$. Ainsi
$$\frac{s_0s_1s_2}{r^{16}} = \frac{42}{32r} > \frac{r}{r} = 1$$
   (b) La suite (u_n) est décroissante (au moins à partir d'un certain rang) et minorée par 0. En effet
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+2}}\left(\ln(s_{n+1} - 2\ln(s_n))\right) = \frac{1}{2^{n+2}}\ln(1 - \frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_n^2}) \sim -\frac{1}{2^{n+2}} \times \frac{1}{s_n} < 0$$
   car la suite (s_n) tend vers $+\infty$, donc $1/s_n^2$ est négligeable devant $1/s_n$.

   (c) Par croissance de la fonction logarithme
$$u_n = \frac{\ln s_n}{2^{n+1}} \geqslant \ln(r) = \frac{\ln 2}{3}$$
   Par passage à la limite $\ell \geqslant \dfrac{\ln 2}{3}$.

Sujet n° 66

1. (a) Étudier et représenter l'allure de la courbe de la fonction S d'une variable réelle définie par

$$S : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

   (b) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = 1$.

   (c) Justifier que S est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser, et expliciter la bijection réciproque A.

   (d) Justifier que A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et calculer sa dérivée de deux façons.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$S(a) + S(a+x) + S(a+2x) + S(a+3x) = 0$$

3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+x') = f(x)\, e^{x'} + f(x')\, e^{-x}$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{S(nx)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   Lorsqu'elle converge, on note $F(x)$ sa somme : $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

   (b) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers 0.

Solution du sujet n° 66

1. (a) La fonction $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et est impaire. Pour tout x réel, $S'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} > 0$. La fonction S est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x/2 \to +\infty$, d'où le graphe usuel. $T_{2p} = H_{2p}(1) \underset{p\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} H_{2p}(0) \times \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p}}}{2}$.

   (b) On a $S(x) = 1$ si et seulement si $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 1 = 0$ si et seulement si $\mathrm{e}^x = 1 + \sqrt{2}$ car $\mathrm{e}^x > 0$, d'où $x = \ln\big(1 + \sqrt{2}\big)$.

   (c) D'après l'étude de la première question, S est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De même, comme $\mathrm{e}^x > 0$,
$$S(x) = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = y + \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow x = \ln\big(y + \sqrt{y^2+1}\big) = A(y)$$

   (d) La fonction $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est bijective et $S' > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc, par le cours, $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$A'(y) = \frac{1}{S'\big[A(y)\big]} = \frac{2}{\mathrm{e}^{A(y)} + \mathrm{e}^{-A(y)}} = \frac{2}{y + \sqrt{y^2+1} + \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$
   On obtient le même résultat (sic) en utilisant la définition de A.

2. L'équation proposée équivaut à (puisque le crochet de gauche est non nul)
$$\mathrm{e}^a \left[1 + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}\right] = \mathrm{e}^{-a}\left[1 + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-3x}\right] \Longleftrightarrow \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{e}^{-3x} \Longleftrightarrow x = -\frac{2a}{3}$$

3. Pour tous x, x' réels non nuls,
$$f(x)\,\mathrm{e}^{x'} + f(x')\,\mathrm{e}^{-x} = f(x+x') = f(x'+x) = f(x')\,\mathrm{e}^x + f(x)\,\mathrm{e}^{-x'} \Rightarrow \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{f(x')}{S(x')}$$
   donc f/S constante. Réciproquement, on vérifie que les fonctions $\alpha\, S$, $\alpha \in \mathbb{R}$, conviennent.

4. (a) La suite $u_n(x)$ est définie si et seulement si $x \neq 0$. Pour $x > 0$, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-nx} > 0$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Donc $\sum u_n(x)$ converge (absolument) pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (par imparité).

   (b) Pour $x > 0$, $t \mapsto 1/S(tx)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par comparaison série-intégrale,
$$J(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{S(tx)} \leqslant F(x) \leqslant J(x) + \frac{1}{S(x)}$$
   puis par changement de variable $u = \mathrm{e}^{tx}$ de classe C^1 bijectif,
$$J(x) = \frac{2}{x}\int_{\mathrm{e}^x}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \frac{1}{x}\ln\left[\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right] \underset{0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$$

CHAPITRE

3

PROBABILITÉS

Sujet n° 3

On fixe un entier $n \geqslant 1$. On se donne une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et une suite de variables aléatoires $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui suivent chacune la loi uniforme sur $[\![0,n-1]\!]$. On suppose que les variables aléatoires $X_0, U_0, \ldots, U_m, \ldots$ sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qu'elles sont mutuellement indépendantes.

On définit par récurrence la suite de variables aléatoires $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X_{m+1}(\omega) = \begin{cases} X_m(\omega) - 1 & \text{si } U_m(\omega) < X_m(\omega) \\ X_m(\omega) + 1 & \text{si } U_m(\omega) \geqslant X_m(\omega) \end{cases}$$

1. Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{(X_m=j)}(X_{m+1}=i)$.
2. On note $Y_m = \begin{pmatrix} P(X_m=0) \\ \vdots \\ P(X_m=n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 & \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

   Pour tout $m \in \mathbb{N}$, montrer que : $Y_{m+1} = \dfrac{1}{n} A_n Y_m$.
3. **Dans cette question seulement**, on suppose que X_0 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(n, \dfrac{1}{2}\Big)$. Montrer que toutes les variables aléatoires X_m suivent cette même loi. En déduire une valeur propre de A_n.
4. Soit f l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = nXP + (1-X^2)P'$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Déterminer la matrice de f dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.
   (b) Pour $j \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_j = (1-X)^{n-j}(1+X)^j$. Calculer $f(P_j)$.
   En déduire que la matrice A_n est diagonalisable.
   (c) La valeur de Y_0 étant supposée connue, comment pourrait-on faire pour trouver la loi de X_m pour tout m entier naturel non nul (*on expliquera juste la démarche sans faire de calculs*).
5. Dans la suite de l'exercice, on suppose que $n \geqslant 2$ et que la variable X_0 est constante, égale à $a \in [\![0,n]\!]$.
   (a) Trouver une relation entre $\mathbb{E}(X_{m+1})$ et $\mathbb{E}(X_m)$.
   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathbb{E}(X_m)$.

Solution du sujet n° 3

1. • Si $|i-j| \neq 1$, il est clair que $\mathbb{P}_{[X_m=j]}(X_{m+1}=i)=0$.
   • Si $j=0$, on a $P_{[X_m=0]}(X_{m+1}=-1)=0$.
   Et comme la somme des probabilités vaut 1, on a $P_{[X_m=0]}(X_{m+1}=1)=1$.

   • Si $j=n$, on a de même $P_{[X_m=n]}(X_{m+1}=n+1)=0$ et $P_{[X_m=n]}(X_{m+1}=n-1)=1$.
   • Si $1 \leqslant j \leqslant n-1$:
   $P_{[X_m=j]}(X_{m+1}=j-1)=P_{[X_m=j]}((X_m=j)\cap(U_m<j))=P(0\leqslant U_m\leqslant j-1)=\dfrac{j}{n}$,
   par indépendance de X_m (fonction de $U_0,\dots,U_{m-1}$) et U_m. Et : $P_{[X_m=j]}(X_{m+1}=j+1)=\dfrac{n-j}{n}$.
2. La f. des probabilités totales donne : $P(X_{m+1}=i)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}P_{[X_m=j]}(X_{m+1}=i)\cdot P(X_m=j)=\frac{1}{n}A_nY_m$
   en posant $A_n=\big(nP_{[X_m=j]}(X_{m+1}=i)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, d'où le résultat d'après la question 1.
3. Par récurrence sur $m\geqslant 0$. Initialisation immédiate. Si c'est vrai pour m, alors :
$$Y_{m+1}=\frac{1}{n}A_n\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{i}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}=\frac{1}{n2^n}\begin{pmatrix}\binom{n}{1}\\ \vdots\\ (n+1-i)\binom{n}{i-1}+(i+1)\binom{n}{i+1}\\ \vdots\\ \binom{n}{n-1}\end{pmatrix},$$
   d'où le résultat puisque pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$, on a :$(n+1-i)\binom{n}{i-1}+(i+1)\binom{n}{i+1}=n\binom{n}{i}$.
   D'où $n\in\mathrm{Sp}\,(A_n)$.
4. (a) On a $f(1)=nX+(1-X^2)0=nX$.
   Pour $j\in[\![1,n]\!]$, il vient $f(X^j)=nX^{j+1}+(1-X^2)jX^{j-1}=(n-j)X^{j+1}+jX^{j-1}$.
   Cela montre que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A_n dans la base canonique.
   (b) Chaque polynôme P_j est dans $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $j\in[\![0,n]\!]$:
$$\begin{aligned}f(P_j)&=nX(1-X)^{n-j}(1+X)^j+(1-X^2)[j(1-X)^{n-j}(1+X)^{j-1}-(n-j)(1-X)^{n-j-1}(1+X)^j]\\&=(1-X)^{n-j-1}(1+X)^{j-1}\left[nX(1-X)(1+X)+j(1-X^2)(1-X)-(n-j)(1-X^2)(1+X)\right]\\&=(1-X)^{n-j}(1+X)^j\,[nX+j(1-X)-(n-j)(1+X)]\\&=(2j-n)(1-X)^{n-j}(1+X)^j=(2j-n)P_j\end{aligned}$$
   Les polynômes P_j étant non nuls, ce sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $2j-n$. On obtient ainsi $n+1$ valeurs propres de f (et donc de A_n). Il n'y en a pas d'autres puisque $A_n\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et A_n est diagonalisable.
   (c) Calculer $Y_m=\left(\frac{1}{n}\right)^m A_n^mY_0$, où A_n^m se calcule en diagonalisant A_n et où Y_0 est de même loi que X_0.
5. On remarque que la définition de l'espérance s'écrit :
$$\mathbb{E}(X_{m+1})=\begin{pmatrix}0&1&\dots&n\end{pmatrix}Y_{m+1}=\begin{pmatrix}0&1&\dots&n\end{pmatrix}\frac{1}{n}A_nY_m.$$
   Or $\begin{pmatrix}0&1&\dots&n\end{pmatrix}A_n=\begin{pmatrix}n&\cdots&i(i-1)+(n-i)(i+1)&\cdots&n(n-1)\end{pmatrix}=\big(i(n-2)+n\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$.
   D'où : $\mathbb{E}(X_{m+1})=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(i(n-2)+n)P(X_m=i)=\frac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_m)+1$.
6. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Après calculs, on obtient : $\mathbb{E}(X_m)=\dfrac{n}{2}+\Big[a-\dfrac{n}{2}\Big]\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^m$.
   D'où $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\mathbb{E}(X_m)=\frac{n}{2}$ puisque, pour $n\geqslant 2$, on a $\dfrac{n-2}{n}\in]-1;1[$.

Sujet n° 5

Soit λ un réel strictement positif. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

L'espérance d'une variable aléatoire X, lorsqu'elle existe, est notée $\mathbb{E}(X)$.

1. Quelle est la loi de λS_n ? En déduire que pour $n \geqslant 1$, une densité $f_{n,\lambda}$ de S_n est donnée par :

$$f_{n,\lambda}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \exp(-\lambda t) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ possédant une espérance et **uniformément bornée** c'est-à-dire vérifiant :

$$\exists A > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |Y_n| \leqslant A$$

Montrer que si la suite (Y_n) converge en probabilité vers 0, alors on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|Y_n|) = 0$.

Dans la suite de cet exercice, f désigne une fonction à valeurs réelles, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $x > 0$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-xt) f(t)\, dt$ est convergente. On la note $g(x)$.

On admet que la fonction g ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad g^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (-t)^k \exp(-xt) f(t)\, dt$$

4. Pour tout $x > 0$ fixé, trouver une valeur de λ telle que la suite $\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine qui vaut $f(x)$.

5. En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^n}{(n-1)!\, x^n} g^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right)$$

Solution du sujet n° 5

1. On sait que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Longrightarrow \lambda X \hookrightarrow \gamma_1$. Le théorème de stabilité pour la loi γ donne : $\lambda S_n \hookrightarrow \gamma_n$.
À partir d'une densité de la loi γ_n (censée être connue), on obtient aisément le résultat.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, la formule de l'espérance totale avec le système $(|Y_n| > \varepsilon), (|Y_n| \leqslant \varepsilon)$ donne :
$$\mathbb{E}(|Y_n|) = \mathbb{E}\big(|Y_n| \big| |Y_n| > \varepsilon\big)\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) + \mathbb{E}\big(|Y_n| \big| |Y_n| \leqslant \varepsilon\big)\mathbb{P}(|Y_n| \leqslant \varepsilon) \leqslant A \times \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) + \varepsilon \times 1.$$
Or, par définition de la limite, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{A}$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\mathbb{E}(|Y_n|) \leqslant 2\varepsilon$. Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|Y_n|) = 0$.
3. L'application $t \mapsto \exp(-xt)f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; en $+\infty$ on utilise un théorème de comparaison :
$$|\exp(-xt)f(t)| \leqslant A\exp(-xt) \text{ (si } |f| \leqslant A) \quad \text{avec} \quad \int_0^{+\infty} A\exp(-xt)\, \mathrm{d}t \text{ convergente.}$$
4. On choisit $\lambda = \dfrac{1}{x}$. D'après la loi faible des grands nombres, on a : $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{P} E(X_1) = x$.
Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f(\dfrac{S_n}{n}) \xrightarrow{P} f(x)$.
5. D'après la question 4, on a $f\left(\dfrac{S_n}{n}\right) - f(x) \xrightarrow{P} 0$, donc, d'après 2, on a : $\mathbb{E}(|f\left(\dfrac{S_n}{n}\right) - f(x)|) \longrightarrow 0$.
Comme $\left|\mathbb{E}\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right) - \mathbb{E}(f(x))\right| \leqslant \mathbb{E}(|f\left(\dfrac{S_n}{n}\right) - f(x)|)$, on déduit :
$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \longrightarrow \mathbb{E}(f(x)) = f(x)$$
.
Par ailleurs, avec $\lambda = \dfrac{1}{x}$, il vient :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) &= \int_0^{+\infty} f(t/n) f_{n,\lambda}(t)\, dt \\
&= n\int_0^{+\infty} f(t)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}(nt)^{n-1}\exp(-\lambda nt)\, dt \\
&= \frac{n^n}{(n-1)!x^n}\int_0^{+\infty} t^{n-1}\exp\left(-\frac{nt}{x}\right) f(t)\, dt \\
&= \frac{(-1)^{n-1}n^n}{(n-1)!x^n} g^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right).
\end{aligned}$$
D'où le résultat voulu.

Sujet n° 9

Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère une urne contenant $n-1$ boules blanches et une boule noire. On vide entièrement cette urne en effectuant des tirages successifs d'une boule. Les tirages de rang impair (premier tirage, troisième tirage,...) se font sans remise tandis que les tirages de rang pair se font avec remise.

Pour tous les tirages, chaque boule de l'urne a la même probabilité d'être tirée.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire réelle égale au rang du premier (respectivement dernier) tirage de la boule noire. Les variables aléatoires X et Y sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) Déterminer des bornes pour $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

   (b) Établir que $P(X=1)=P(X=2)$ et que $P(X=2n-1)=0$.

   (c) Montrer que pour tout entier $j \in [\![2, n]\!]$, on a :
   $$P(X=2j-1)=\frac{n-j}{n(n-1)}$$
   Vérifier que cette formule reste vraie pour $j=1$

   (d) Montrer que pour tout entier $j \in [\![2, n]\!]$, on a : $P(X=2j-1)=P(X=2j)$.

   (e) Établir
   $$E(X)=\sum_{j=1}^{n-1}(4j-1)\frac{n-j}{n(n-1)}$$
   Dans la suite de l'exercice on admet que $E(X)=\dfrac{1}{6}(4n+1)$.

2. Déterminer la loi de Y et son espérance.

   Si nécessaire, on pourra utiliser la formule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

3. On note Z la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages de la boule noire à la fin des tirages. Justifier que $Z \leqslant Y-X+1$ et montrer que pour tout $n \geqslant 5$:
   $$P(Z \geqslant n) \leqslant \frac{1}{2}$$

Solution du sujet n° 9

1. (a) Une boule part au premier tirage puis une boule part tous les 2 tirages, donc en tout, $1+2(n-1) = 2n-1$ tirages sont nécessaires pour vider l'urne. Ainsi $X(\Omega) = [\![1, 2n-2]\!]$ (la dernière boule tirée l'est 2 fois de suite) et $Y(\Omega) \subset [\![1, 2n-2]\!]$.

   (b) On a $P(X=1) = \dfrac{1}{n}$. L'événement $(X=2)$ peut se décrire BN d'où $P(X=2) = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}$.
   Pour tirer la boule noire au tirage $2n-1$ il faut commencer par tirer $2n-2 = 1+2(n-2)+1$ boules blanches. Pour cela on enlève nécessairement de l'urne $1+(n-1) = n$ boules blanches, ce qui est impossible, car elle n'en contient que $n-1$. Ainsi $P(X = 2n-1) = 0$.

   (c) Soit j tel que $3 \leqslant j \leqslant n$. L'événement $[X = 2j-1]$ se décompose :
   $$\begin{array}{cccccc} 1 & 2\ 3 & \cdots & 2j-4 \qquad\qquad 2j-3 & 2j-2 & 2j-1 \\ \underbrace{B}_{\frac{n-1}{n}} & \underbrace{B\ B}_{(\frac{n-2}{n-1})^2} & \cdots & \underbrace{B \qquad\qquad\qquad B}_{(\frac{n-j+1}{n-j})^2} & \underbrace{B}_{\frac{n-j}{n-j+1}} & \underbrace{N}_{\frac{1}{n-j+1}} \end{array}$$
   Par la formule des probabilités composées on obtient :
   $$P(X = 2j-1) = \frac{n-1}{n} \times \prod_{k=2}^{j-1} (\frac{n-k}{n-k+1})^2 \quad \times \frac{n-j}{n-j+1} \times \frac{1}{n-j+1} = \frac{n-j}{n(n-1)}$$
   Pour $j = 1$, on retrouve la valeur obtenue précédemment et la formule reste vraie.

   (d) soit j tel que $2 \leqslant j \leqslant n$. L'événement $[X = 2j]$ se décompose de la même manière, seule la fin diffère : $\begin{array}{ccccc} 1 & 2\ 3 & \cdots & 2j-2 \qquad\qquad 2j-1 & 2j \\ \underbrace{B}_{\frac{n-1}{n}} & \underbrace{B\ B}_{(\frac{n-2}{n-1})^2} & \cdots & \underbrace{B \qquad\qquad\qquad B}_{(\frac{n-j}{n-j+1})^2} & \underbrace{N}_{\frac{1}{n-j}} \end{array}$. Par la formule des probabilités composées on obtient :
   $$P(X = 2j) = \frac{n-1}{n} \times \prod_{k=2}^{j} (\frac{n-k}{n-k+1})^2 \quad \times \frac{1}{n-j} = \frac{n-j}{n(n-1)} = P(X = 2j-1)$$

   (e) En regroupant les termes de même probabilité : $P(X = 2j-1) = P(X = 2j)$, il vient :
   $$E(X) = \sum_{k=1}^{2n-2} kP(X=k) = \sum_{j=1}^{n-1} (2j-1+2j)P(X = 2j-1) = \sum_{j=1}^{n-1} (4j-1)\frac{n-j}{n(n-1)} = \frac{1}{6}(4n+1)$$

2. La boule noire apparaît pour la dernière fois lorsqu'elle est retirée de l'urne donc pour un tirage de rang impair ; la variable aléatoire Y peut prendre toutes les valeurs impaires comprises entre 1 et $2n-1$. On a $P(Y=1) = \dfrac{1}{n}$. L'événement $[Y=3]$ est de la forme (BXN), d'où $P(Y=3) = \dfrac{n-1}{n} \times 1 \times \dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}$.
   Pour le cas général : $(Y = 2j-1)$ $\begin{array}{cccccc} 1 & 2\ 3 & \cdots & 2j-4 \qquad\qquad 2j-3 & 2j-2\ 2j-1 \\ \underbrace{B}_{\frac{n-1}{n}} & \underbrace{?\ B}_{1.\frac{n-2}{n-1}} & \cdots & \underbrace{? \qquad\qquad\qquad B}_{\frac{n-j+1}{n-j+2}} & \underbrace{? \qquad\qquad\qquad B}_{1 \times \frac{1}{n-j+1}} \end{array}$
   Par télescopage, $P(Y = 2j-1) = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant 2n-1$: Y suit une loi uniforme.
   Ainsi $E(Y) = \dfrac{1}{n}[1+3+5+\cdots(2n-1)] = \frac{n^2}{n} = n$.

3. La boule noire n'apparaît qu'entre les tirages de rangs X et Y d'où : $Z \leqslant Y - X + 1$.
   Par linéarité : $E(Z) \leqslant E(Y) - E(X) + 1 = n - \frac{1}{6}(4n+1) + 1 = \frac{1}{6}(2n+5) \leqslant \frac{3n}{6}$ dés que $n \geqslant 5$.
   Par l'inégalité de Markov : $P(Z \geqslant n) \leqslant \frac{E(Z)}{n} \leqslant \frac{3n}{6n} = \frac{1}{2}$.

Sujet n° 10

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer un équivalent de $\dbinom{n}{k}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ converge pour tout $x \in]-1,1[$.

   On note $f_k(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.
3. En utilisant la formule du triangle de Pascal, montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,
$$f_{k+1}(x) = x f_k(x) + x f_{k+1}(x)$$
4. En déduire, pour tout $x \in]-1,1[$, l'expression de $f_k(x)$ en fonction de k.
5. Soit $p \in]0,1[$; on pose $q = 1-p$. On effectue une suite de lancers avec une pièce truquée qui donne "pile" avec la probabilité p et "face" avec la probabilité q.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de ne jamais obtenir k "pile".
   Pour tout $n \in [\![k, +\infty[\![$ on s'intéressera à l'évènement A_n « obtenir le k-ième "pile" au bout de n lancers exactement ».

Solution du sujet n° 10

1. On sait que $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$.
2. Ainsi $\binom{n}{k}x^n \sim \frac{1}{k!}n^k x^n$. Or pour $|x|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 n^k x^n = 0$. La série $\sum\limits_{n\geqslant k}\binom{n}{k}x^n$ est donc absolument convergente.
3. On rappelle que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Donc

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty}\binom{n}{k+1}x^n = \sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m+1}{k+1}x^{m+1} = x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty}\binom{m+1}{k+1}x^{m+1} \\ &= x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty}\left(\binom{m}{k+1} + \binom{m}{k}\right)x^{m+1} = \left(x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty}\binom{m}{k}x^{m+1}\right) + \sum_{m=k+1}^{+\infty}\binom{m}{k+1}x^{m+1} \\ &= xf_k(x) + xf_{k+1}(x) \end{aligned}$$

4. Comme $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$, par récurrence (ou en reconnaissant une suite géométrique), et la relation précédente, il vient $f_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
5. Si le dernier "pile" est obtenu au lancer $n \geqslant k$, alors on a obtenu $(k-1)$ "pile" lors des $(n-1)$ lancers précédents. Donc : $P(A_n) = \binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}$.
   Donc, par union disjointe, la probabilité d'obtenir au moins une fois k "pile" est égale à :

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k} = \frac{p^k}{q^k}\sum_{n=k-1}^{+\infty}\binom{n}{k-1}q^{n+1} = \frac{p^k}{q^{k-1}}f_{k-1}(q) = \frac{p^k}{q^{k-1}} \times \frac{q^{k-1}}{p^k} = 1,$$

   où la sommation est effectuée grâce à la question 4.
   La probabilité de ne jamais obtenir k "pile" est donc nulle.

Sujet n° 15

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une variable aléatoire X, de fonction de répartition F, de densité f continue sur un intervalle $I =]a, b[$, $a < b$, où a et b peuvent être infinis. On suppose la densité f nulle en dehors de I.
On note U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$, indépendante de X et g une fonction continue sur I, à valeurs dans $[0,1]$. On définit enfin une fonction ψ sur I par : $\forall x \in I, \psi(x) = P([X \leqslant x] \cap [U \leqslant g(X)])$.

1. On fixe un réel x appartenant à I.
   (a) Justifier que pour tout $y \in I$, g admet un maximum sur $[\min(x,y), \max(x,y)]$, que l'on notera $M(x,y)$.
   (b) Montrer que
   $$\lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} M(x,y) = g(x)$$
   On admet que, de même, on a :
   $$\lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} M(x,y) = g(x)$$

   En notant $m(x,y)$ le minimum de f sur $[\min(x,y), \max(x,y)]$, on montrerait de même que
   $$\lim_{y \to x} m(x,y) = g(x)$$

2. Soit $(x,y) \in I^2$ avec $x < y$.
   (a) Écrire $\psi(y) - \psi(x)$ à l'aide de $[x < X \leqslant y]$ et $[U \leqslant g(X)]$.
   (b) En déduire : $\psi(y) - \psi(x) \leqslant (F(y) - F(x))\, M(x,y)$.
   (c) Montrer que : $(F(y) - F(x))\, m(x,y) \leqslant \psi(y) - \psi(x)$.
3. En déduire que ψ est dérivable sur I, et que $\psi' = f \times g$.
4. Montrer que : $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = P(U \leqslant g(X))$.

Solution du sujet n° 15

1. (a) La fonction g est continue sur le segment $[\min(x,y),\max(x,y)]$, donc elle y admet un maximum.
   (b) Pour x fixé dans I et $y > x$, on a $[\min(x,y),\max(x,y)] = [x,y]$. On note u_y un réel de $[x,y]$ tel que $g(u_y) = M(x,y)$. On a alors, pour tout $y \in]x,b[$, $x \leqslant u_y \leqslant y$, et donc par encadrement :

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} u_y = x \quad \text{d'où} \quad \lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} g(u_y) = g(x) \quad (\text{continuité de } g)$$

2. (a) $\psi(y)-\psi(x) = P([X \leqslant y]\cap[U \leqslant g(X)]) - P([X \leqslant x]\cap[U \leqslant g(X)]) = P([x < X \leqslant y]\cap[U \leqslant g(X)])$
   (b) Par définition de $M(x,y)$, on a : $[x < X \leqslant y]\cap[U \leqslant g(X)] \subset [x < X \leqslant y]\cap[U \leqslant M(x,y)]$.

$$\begin{aligned}\text{d'où } \psi(y)-\psi(x) &= P([x < X \leqslant y]\cap[U \leqslant g(X)])\\ &\leqslant P([x < X \leqslant y]\cap[U \leqslant M(x,y)]) \text{ (croissance de } P)\\ &= P(x < X \leqslant y)P(U \leqslant M(x,y)) \ \ (U \text{ et } X \text{ indépentantes})\\ &= (F(y)-F(x))\times M(x,y) \ \ (\text{loi de } U \text{ puisque } M(x,y)\in[0,1]).\end{aligned}$$

   (c) De même, $[x < X \leqslant y]\cap[U \leqslant m(x,y)] \subset [x < X \leqslant y]\cap[U \leqslant g(X)]$.
   Donc, par croissance de P et par indépendance de X et U, on a :

$$\psi(y)-\psi(x) \geqslant P[x < X \leqslant y]P[U \leqslant m(x,y)]) = (F(y)-F(x))\, m(x,y).$$

3. Pour $y > x$, on en déduit l'encadrement suivant :

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x}m(x,y) \leqslant \frac{\psi(y)-\psi(x)}{y-x} \leqslant \frac{F(y)-F(x)}{y-x}M(x,y)$$

   et, en échangeant x et y dans les questions précédentes, cela reste vrai si $y < x$. Or :

$$\lim_{y\to x}\frac{F(y)-F(x)}{y-x}m(x,y) = \lim_{y\to x}\frac{F(y)-F(x)}{y-x}M(x,y) = f(x)g(x).$$

   Ainsi, par théorème d'encadrement, on a : $\displaystyle\lim_{y\to x}\frac{\psi(y)-\psi(x)}{y-x} = f(x)g(x)$.
   Ainsi ψ est dérivable en x et $\psi'(x) = f(x)g(x)$ (vrai pour tout $x \in I$).

4.
   - Pour tout $(x,y)\in I^2$, $\displaystyle\int_x^y f(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_x^y \psi'(t)\mathrm{d}t = [\psi(t)]_x^y = \psi(y)-\psi(x)$.
   - Par ailleurs, pour tout $x \in I$, $0 \leqslant P([X \leqslant x]\cap[U \leqslant g(X)]) \leqslant P(X \leqslant x) = F(x)$, et $F(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement, $P([X \leqslant x]\cap[U \leqslant g(X)]) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire : $\psi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
   - On remarque que $P(U \leqslant g(X)) = P([X \leqslant y]\cap[U \leqslant g(X)]) + P([X > y]\cap[U \leqslant g(X)]$,
   donc $\psi(y) = P(U \leqslant g(X)) - P([X > y]\cap[U \leqslant g(X)]$.
   Or, $0 \leqslant P([X > y]\cap[U \leqslant g(X)]) \leqslant P(X > y)$ et $P(X > y) = 1 - F(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} 0$
   donc, par encadrement, $P([X > y]\cap[U \leqslant g(X)]) \underset{y\to b}{\longrightarrow} 0$, ainsi :

$$\lim_{y\to b}\psi(y) = P(U \leqslant g(X)), \quad \text{c'est-à-dire} \quad P(U \leqslant g(X)) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Sujet n$^{\text{o}}$ 17

On rappelle que pour tout $\alpha > 1$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ est convergente. On note alors $S(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

On admet que $S(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer des réels a, b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)^2} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{(n+1)^2}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)^2}$.

   Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$P((X = n) \cap (Y = k)) = \frac{\lambda}{(n+1)^{k+3}}$$

3. (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P(X = n)$. En déduire la valeur de λ.
   (b) Calculer $E(X)$ et montrer que X n'admet pas de variance.
   (c) Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k)$ à l'aide de la fonction S.
   (d) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (S(k) - 1) = 1$.

4. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x = 1$.
   (b) En déduire un équivalent de $P(Y = k)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

SOLUTION DU SUJET N° 17

1. Par calcul, $a = 1, b = -1$ et $c = -1$.
2. Pour tout $N > 0$,
$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2}$$
Soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2}$. En prenant la limite, lorsque N tend vers $+\infty$:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$
3. (a) On a :
$$P(X=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=n)\cap(Y=k)) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k+3}} = \frac{\lambda}{(n+1)^3} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \frac{\lambda}{n(n+1)^2}$$
Donc $\lambda = \dfrac{1}{2-\pi^2/6} = \dfrac{1}{2-S(2)}$.
(b) On a $E(X) = \lambda \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \lambda\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$. Par contre $E(X^2)$ n'existe pas car $\dfrac{n^2}{n(n+1)^2} \sim \dfrac{1}{n}$.
(c) De la même manière,
$$P(Y=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((X=n)\cap(Y=k)) = \lambda \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+3}} = \lambda(S(k+3)-1)$$
(d) Ainsi,
$$1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) = \frac{1}{2-S(2)} \sum_{k=0}^{+\infty} (S(k+3)-1) \Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} (S(k)-1) = 1$$
Ceci montre également qu'au voisinage de $+\infty$, $S(k) \sim 1$ car $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \big(S(k)-1\big) = 0$.
4. (a) On a vu que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} S(k) = 1$. D'autre part, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^x}{n^x} = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^x}{n^x}$.
Utilisons une comparaison série/intégrale. La fonction $t \to \left(\dfrac{2}{t}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln(2/t)}$ est positive, décroissante sur $[2, +\infty[$ et tend vers 0. La méthode de comparaison série/intégrale donne
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x \leqslant \int_3^{+\infty} \mathrm{e}^{x\ln(2/t)} dt \leqslant \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x$$
Or
$$\int_3^{+\infty} \mathrm{e}^{x\ln(2/t)} dt = \mathrm{e}^{x\ln 2} \int_3^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\ln t} dt = \mathrm{e}^{x\ln 2} \times \frac{1}{x} \int_{x\ln 3}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u(1-1/x)} du = \frac{\mathrm{e}^{x\ln 2} \times \mathrm{e}^{-(x-1)\ln 3}}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
(b) Finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2^x(S(x)-1) = 1$ et $S(x) - 1 \sim \dfrac{1}{2^x}$ et $P(Y=k) \sim \dfrac{\lambda}{2^{k+3}}$.

Sujet n° 19

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$.

On considère une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , \quad \mathbb{P}(R_k = -1) = \mathbb{P}(R_k = 1) = \frac{1}{2}$$

et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} R_k$.

1. (a) Justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t .$$

On admet que sa valeur est $\pi/2$.

(b) En déduire, pour tout x réel, la valeur de l'intégrale :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x\,u)}{u^2} \mathrm{d}u$$

On note $F(x)$ cette intégrale.

2. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
3. Soit S et T deux variables aléatoires réelles indépendantes, telles que T et $-T$ aient la même loi. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big[\cos(S + T)\big] = \mathbb{E}\big[\cos(S)\big]\,\mathbb{E}\big[\cos(T)\big]$$

4. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}\big[\cos(S_n\,t)\big] = (\cos t)^n$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{E}\big(|S_n|\big) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} \mathrm{d}t$$

On pourra utiliser l'expression trouvée en 1.b).

Solution du sujet n° 19

1. (a) $f : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, tend vers $1/2$ en 0 et vérifie $f(t) = O(1/t^2)$ en $+\infty$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

   (b) Pour $x = 0$, on a $F(0) = 0$. Sinon, le changement de variable $u \mapsto |x|\, u = t$ donne :

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\,|x|\, I = |x|$$

2. Par linéarité, $\mathbb{E}(S_n) = 0$, et par indépendance, $\mathbb{V}(S_n) = n$.
3. T et $-T$ ayant même loi, on a $\mathbb{E}(\sin T) = 0$; puis par linéarité et lemme des coalitions,

$$\mathbb{E}\big[\cos(S+T)\big] = \mathbb{E}\big[\cos(S)\big]\,\mathbb{E}\big[\cos(T)\big]$$

4. Par récurrence, lemme des coalitions, théorème de transfert et 3. on a :

$$\mathbb{E}\big[\cos(S_{n+1}t)\big] = \mathbb{E}\big[\cos(S_n t)\big]\,\mathbb{E}\big[\cos(R_{n+1}t)\big] = \mathbb{E}\big[\cos(S_n t)\big]\left[\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(-t)\right] = (\cos t)^{n+1}$$

5. Par théorème de transfert, permutation de somme finie d'intégrales convergentes et 4. on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(|S_n|\big) &= E(F(S_n)) \qquad \text{(cf. 1.b)}\\
&= \sum_{s\in S_n(\Omega)} \left[\mathbb{P}(S_n = s)\,\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{t^2}\Big(1 - \sum_{s\in S_n(\Omega)} \mathbb{P}(S_n = s)\,\cos(st)\Big)\right]\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{t^2}\Big(1 - \mathbb{E}\big(\cos(S_n\,t)\big)\right]\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Sujet n° 23

Un boulanger vend du pain chaque jour.

- La quantité de pain produite chaque jour est une quantité fixée Q choisie par le boulanger, Q étant exprimée en kilogramme.
- La demande de pain de la part des clients est une variable aléatoire X strictement positive, toujours exprimée en kilogramme.
- On suppose que la variable X admet une densité f strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$ et on note F la fonction de répartition de X.
- Le coût de fabrication par kilogramme est c euros et le prix de vente est v euros par kilogramme.
- On note B la variable aléatoire égale au bénéfice quotidien.
- La variable indicatrice d'un événement A est notée $\mathbb{1}_A$.
- On suppose que $0 < c < v$.

Si la demande de pain X est inférieure à l'offre Q, le boulanger ne vend que la quantité X (le pain invendu un jour donné n'est pas remis en vente le lendemain !) ; si la demande est supérieure à l'offre, il ne vend que la quantité Q.

Dans ces conditions, on cherche la quantité optimale à produire, c'est-à-dire la quantité Q_0 qui maximise l'espérance de B.

1. Établir la relation suivante :
$$B = v\big[Q + (X - Q)\mathbb{1}_{[X<Q]}\big] - cQ$$
2. Montrer que la variable $X\mathbb{1}_{[X<Q]}$ admet une espérance et donner son expression sous forme d'intégrale.
3. En déduire l'égalité suivante :
$$\mathbb{E}(B) = (v - c)Q + v\left[\int_0^Q tf(t)\mathrm{d}t - QF(Q)\right]$$
4. Exprimer Q_0 à l'aide de F, de v et de c.
   Le boulanger cherche à prévoir sa demande journalière. La demande aléatoire X_n qui va s'exprimer le jour n n'est pas connu à l'avance mais le boulanger fait l'hypothèse que la demande ne variera pas beaucoup d'un jour à l'autre et que :
$$X_{n+1} = X_n + U_{n+1}$$
   où :
   - X_0 est une constante strictement positive fixée.
   - Les U_k sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance nulle et de variance σ^2 non nulle.
5. (a) Exprimer X_n en fonction des U_i et de X_0.
   (b) Montrer que la suite $\left(\dfrac{X_0}{n}\right)$ converge en probabilité vers 0.
   (c) Montrer que si deux suites de variables aléatoires (A_n) et (B_n) convergent en probabilité respectivement vers des variables aléatoires a et b, alors la suite $(A_n + B_n)$ converge en probabilité vers $a + b$.
   (d) En déduire que $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers une variable que l'on précisera.
   (e) Montrer que la suite $\left(\dfrac{X_0}{n}\right)$ converge en loi vers 0.
   (f) Montrer que la suite $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$ converge en loi et préciser la loi limite.

Solution du sujet n° 23

1. La quantité de pain vendue chaque jour est : $Z = (X - Q)\mathbb{1}_{[X<Q]} + Q$.
   La vente rapporte donc $v\Big[(X-Q)\mathbb{1}_{[X<Q]} + Q\Big]$ et le bénéfice est $B = v\big[Q + (X-Q)\mathbb{1}_{[X<Q]}\big] - cQ$.
2. On a $X\mathbb{1}_{[X<Q]} \leqslant Q\mathbb{1}_{[X<Q]}$.
   Or $\mathbb{1}_{[X<Q]}$ est une variable indicatrice (ou de Bernoulli) qui admet une espérance.
   On en déduit, par domination que $X\mathbb{1}_{[X<Q]}$ admet une espérance.
   D'autre part, le théorème de transfert donne : $\mathbb{E}\big(X\mathbb{1}_{[X<Q]}\big) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathbb{1}_{[t<Q]}f(t)dt = \int_0^Q tf(t)dt$.
3. Par linéarité : $\mathbb{E}(B) = v\mathbb{E}\Big((X-Q)\mathbb{1}_{[X<Q]}\Big) + (v-c)Q = v\mathbb{E}\Big(X\mathbb{1}_{[X<Q]}\Big) - vQ\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{[X<Q]}\Big) + (v-c)Q$.
   Or : $\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{[X<Q]}\Big) = P(X<Q) = \displaystyle\int_0^Q f(t)dt = F(Q)$ et $\mathbb{E}\big(X\mathbb{1}_{[X<Q]}\big) = \displaystyle\int_0^Q tf(t)dt$.
   En remplaçant et en arrangeant : $\mathbb{E}(B) = (v-c)Q + v\left[\displaystyle\int_0^Q tf(t)\mathrm{d}t - QF(Q)\right]$.
4. Si on pose : $h(Q) = (v-c)Q + v\left[\displaystyle\int_0^Q tf(t)\mathrm{d}t - QF(Q)\right]$, on cherche la valeur Q_0 qui maximise cette fonction.
   On a : $h'(Q) = v - c + v[Qf(Q) - F(Q) - Qf(Q)] = v - c - vF(Q)$, d'où $h'(Q) = 0 \Longleftrightarrow F(Q) = 1 - \dfrac{c}{v}$.
   On a bien $0 \leqslant 1 - \dfrac{c}{v} < 1$ et comme F est continue et strictement croissante, elle réalise une bijection, d'où : $Q_0 = F^{-1}\left(1 - \dfrac{c}{v}\right)$.
5. (a) On a : $X_{k+1} - X_k = U_{k+1}$, d'où $X_n = X_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$, par télescopage.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. On a : $\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ P\big(\dfrac{X_0}{n} > \varepsilon\big) = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\big(\dfrac{X_0}{n} > \varepsilon\big) = 0$

   (c) On considère un réel $\varepsilon > 0$. On a : $|(A_n + B_n) - (a+b)| \leqslant |A_n - a| + |B_n - b|$.
   On en déduit : $\Big[|(A_n+B_n) - (a+b)| \geqslant \varepsilon\Big] \subset \Big[|A_n - a| + |B_n - b| \geqslant \varepsilon\Big]$.
   Or : $\Big[|A_n - a| + |B_n - b| \geqslant \varepsilon\Big] \subset \Big[|A_n - a| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\Big] \bigcup \Big[|B_n - b| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\Big]$.
   On utilise alors la croissance de la probabilité et le fait que $P(A\cup B) \leqslant P(A) + P(B)$ et on obtient :
   $$0 \leqslant P\Big(|A_n - a| + |B_n - b| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant P\Big(|A_n - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big) + P\Big(|B_n - b| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$
   Comme $A_n \xrightarrow{P} a$ et $B_n \xrightarrow{P} b$, on en déduit bien que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\Big(|(A_n+B_n) - (a+b)| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$.

   (d) $\left(\dfrac{X_0}{n}\right) \xrightarrow{P} 0$ et, d'après la loi faible des grands nombres, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k \xrightarrow{P} \mathbb{E}(U_k) = 0$.
   En appliquant le résultat précédent, on en déduit que $(\dfrac{X_n}{n})$ converge en probabilité vers 0.

   (e) Soit Z_n la « variable aléatoire »définie par $Z_n = \dfrac{X_0}{n}$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$,
   qui est la fonction de répartition de la variable certaine nulle.

   (f) On a donc : $\dfrac{X_n}{n} = \dfrac{X_0}{n} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$ avec $\dfrac{X_0}{n} \xrightarrow{L} 0$ et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k \xrightarrow{P} 0$.
   D'après le théorème de Slutsky, $(\dfrac{X_n}{n})$, converge en loi vers 0.

Sujet n° 25

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout événement A, on note $\mathbb{1}_A$ sa variable aléatoire indicatrice.

Soit q, r deux réels de $]0,1[$. Deux joueurs jouent à lancer chacun une pièce qui peut faire Pile (P) ou Face (F). Le joueur G joue avec une pièce avec laquelle la probabilité de faire Pile est $1-q$; le joueur R joue avec une pièce avec laquelle la probabilité de faire Pile est $1-r$. Ils lancent simultanément chacun leur pièce (de façon indépendante), et répètent l'expérience (de façon indépendante).

On note T_G (respectivement T_R) la variable aléatoire égale au rang du premier lancer où G (respectivement R) fait Pile ; on considère les événements :

$$A_1 = \big(T_G < T_R\big), \quad A_2 = \big(T_R < T_G\big), \quad A = \big(T_G \neq T_R\big).$$

On note T la variable aléatoire égale au rang du premier lancer où apparaît au moins un Pile et J la variable aléatoire $J = \mathbb{1}_{A_1} + 2 \times \mathbb{1}_{A_2}$.

1. (a) Préciser les lois de T_G et T_R, puis calculer la probabilité $p = \mathbb{P}\big(A_1\big)$.
   (b) Que vaut p si $q = r$? si $q = r = 1/2$?
2. (a) Déterminer la loi conditionnelle de T_G sachant A_1.
   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}_{A_1}\big[(T_G > k)\big]$.

   On suppose dans la suite que $q = r$. On note $\mathbb{P}_A$ la probabilité conditionnelle sachant A. Soit $k \in \mathbb{N}$.
3. (a) Que représente la variable aléatoire J ?
   (b) Calculer $\mathbb{P}\big[A \cap (J=1) \cap (T > k)\big]$.
   (c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}_A\big[(J=1) \cap (T > k)\big]$.
   (d) Que vaut $\mathbb{P}_A(J=1)$?
   (e) Comparer $\mathbb{P}_A\big[(J=1) \cap (T > k)\big]$ et $\mathbb{P}_A\big[(J=2) \cap (T > k)\big]$, et en déduire la valeur de $\mathbb{P}_A(T > k)$.
   (f) Montrer que les variables aléatoires T et J sont indépendantes pour la probabilité $\mathbb{P}_A$.

Solution du sujet n° 25

1. (a) Comme loi du temps d'attente du premier succès dans un schéma de Bernoulli, $T_G \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q)$ et $T_R \hookrightarrow \mathcal{G}(1-r)$. Par σ-additivité et indépendance,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_G < T_R) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\mathbb{P}(T_G = n)\sum_{m=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(T_R = m)\right] = (1-q)(1-r)\sum_{n=1}^{+\infty}\left[q^{n-1}\sum_{m=n+1}^{+\infty} r^{m-1}\right] \\ &= (1-q)(1-r)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{n-1}r^n}{1-r}, \text{ soit } p = \frac{(1-q)r}{1-qr}\end{aligned}$$

(b) Si $q = r$, on a $p = \dfrac{q}{1+q}$ et si $q = r = \dfrac{1}{2}$, alors $p = \dfrac{1}{3}$.

2. (a) $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, par indépendance de T_G et T_R et reste de série géométrique, on a :

$$\mathbb{P}_{A_1}\big[(T_G = k)\big] = \frac{\mathbb{P}(T_G = k)\mathbb{P}(T_R > k)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{(1-q)q^{k-1}r^k}{(1-q)r/(1-qr)} = (qr)^{k-1}(1-qr)$$

Ainsi la loi conditionnelle de T_G sachant A_1 est la loi $\mathcal{G}(1-qr)$.

(b) D'où $\mathbb{P}_{A_1}\big[(T_G > k)\big] = (qr)^k$.

3. (a) J vaut 1 (resp. 2) si le premier joueur G (resp. le second joueur R) fait Pile en premier, et vaut 0 si les deux joueurs font Pile pour la première fois en même temps (ou jamais).

(b) $(J = 1) = A_1 \subset A$, et $T = \min(T_G, T_R)$ vaut T_G sur A_1, donc pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big[A \cap (J=1) \cap (T > k)\big] = \mathbb{P}\big[A_1 \cap (T_G > k)\big] = \mathbb{P}_{A_1}\big[(T_G > k)\big]\mathbb{P}(A_1) = \frac{q^{2k+1}}{1+q}$$

(c) Par symétrie, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$; donc $\mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(A_1)$. Alors

$$\mathbb{P}_A\big[(J=1) \cap (T > k)\big] = \frac{\mathbb{P}\big[A \cap (J=1) \cap (T > k)\big]}{\mathbb{P}(A)} = \frac{q^{2k}}{2}$$

(d) $\mathbb{P}_A(J = 1) = \dfrac{\mathbb{P}\big[(J=1) \cap A\big]}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{1}{2}$.

(e) Par définition, $A \cap (J = 0) = \emptyset$; comme T_G et T_R suivent la même loi, ces probabilités sont égales. Alors

$$\mathbb{P}_A(T > k) = 2\,\mathbb{P}_A\big[(J=1) \cap (T > k)\big] = q^{2k}$$

(f) On a alors $\mathbb{P}_A(J = 1) = \mathbb{P}_A(J = 2) = 1/2$, $\mathbb{P}_A(J = 0) = 0$ et les calculs ci-dessus montrent que, pour tous $j \in \{0, 1, 2\}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_A\big[(J=j) \cap (T > k)\big] = \mathbb{P}_A(J = j) \times \mathbb{P}_A(T > k)$$

ce qui prouve que T et J sont indépendantes pour la probabilité $\mathbb{P}_A$.

Sujet n° 29

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

Dans la suite, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose :

$$Z_{n,1} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[1-\frac{1}{n}\leqslant X_i\leqslant 1]} \text{ et } Z_{n,2} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[1-\frac{2}{n}\leqslant X_i\leqslant 1-\frac{1}{n}[},$$

où, pour tout événement A, on a noté $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de cet événement.

1. Donner les lois de $Z_{n,1}$ et de $Z_{n,2}$.
2. On pose $T_n = Z_{n,1} + Z_{n,2}$.
   (a) Donner la loi de T_n.
   (b) En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}\big(Z_{n,1}, Z_{n,2}\big)$.
   Les variables aléatoires $Z_{n,1}$ et $Z_{n,2}$ sont-elles indépendantes ?
   (c) Étudier la convergence en loi de T_n.
3. Déterminer la loi du couple $(Z_{n,1}, Z_{n,2})$.
4. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction f_n par :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f_n(s,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} P([Z_{n,1} = i \cap Z_{n,2} = j])s^i t^j$$

   (a) Calculer explicitement $f_n(s,t)$ en fonction de n, de s et de t.
   (b) Calculer $\partial_{1,2} f_n(1,1)$ et retrouver la valeur de $\mathrm{Cov}\big(Z_{n,1}, Z_{n,2}\big)$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(s,t)$.

Solution du sujet n° 29

1. On note succès l'événement $[1 - \frac{1}{n} \leqslant X_i \leqslant 1]$ est réalisé. La variable $Z_{n,1}$ compte le nombre de succès dans une succession d'épreuves indépendantes dont la probabilité de succès est $\frac{1}{,}n$. Donc $Z_{n,1}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{n}\right)$. De même $Z_{n,2} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$.

2. (a) On constate que $Z_{n,1} + Z_{n,2}$ comptabilise le nombre de variables X_i qui sont comprises entre $1 - \dfrac{2}{n}$ et 1.
On en déduit que la variable $Z_{n,1} + Z_{n,2}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{2}{n}\right)$.
(b) On utilise alors la formule suivante : $\mathbb{V}(Z_{n,1} + Z_{n,2}) = \mathbb{V}(Z_{n,1}) + \mathbb{V}(Z_{n,2)} + 2\operatorname{Cov}(Z_{n,1}, Z_{n,2})$.
Or : $\mathbb{V}(Z_{n,1} + Z_{n,2}) = n \times \dfrac{2}{n}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$ et $\mathbb{V}(Z_{n,1}) = \mathbb{V}(Z_{n,2}) = n \times \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.
Après calcul : $\operatorname{Cov}(Z_{n,1}, Z_{n,2}) = -\dfrac{1}{n}$.
Comme la covariance n'est pas nulle, les variables ne sont pas indépendantes.
(c) La variable T_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{2}{n}\right)$, d'où T_n converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$.
Remarque : la formule des probabilités composées ne permet pas d'aboutir.

3. Soit i et j deux entiers naturels appartenant à $[\![0, n]\!]$ avec $j \leqslant n - i$.
On a alors : $P\big([Z_{n,1} = i] \cap [Z_{n,2} = j]\big) = \dbinom{n}{i}\left(\dfrac{1}{n}\right)^i \dbinom{n-i}{j}\left(\dfrac{1}{n}\right)^j \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{n-i-j}$.

4. (a) En remplaçant la loi conjointe par sa valeur :
$$\mathbb{E}\big(s^{Z_{n,1}} t^{Z_{n,2}}\big) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} s^i t^j \binom{n}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i \binom{n-i}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-i-j}$$
En arrangeant : $\mathbb{E}\big(s^{Z_{n,1}} t^{Z_{n,2}}\big) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\left(\frac{s}{n}\right)^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j}\left(\frac{t}{n}\right)^j \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-i-j}$. On reconnaît dans la seconde somme la formule du binôme de Newton et on obtient :
$$\mathbb{E}\big(s^{Z_{n,1}} t^{Z_{n,2}}\big) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\left(\frac{s}{n}\right)^i \left(\frac{t}{n} + 1 - \frac{2}{n}\right)^{n-i}$$
On reconnaît à nouveau une formule du binôme, d'où : $f_n(s,t) = \left(1 + \dfrac{s+t-2}{n}\right)^n$.
(b) En partant de la définition : $\partial_{1,2} f_n(s,t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} i s^{i-1} j t^{j-1} P\big([Z_{n,1} = i] \cap [Z_{n,2} = j]\big)$.
Donc : $\partial_{1,2} f_n(1,1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} ij P\big([Z_{n,1} = i] \cap [Z_{n,2} = j]\big) = \mathbb{E}\big(Z_{n,1} Z_{n,2}\big)$.
On calcule donc $\partial_{1,2} f_n(1,1)$ à partir de l'expression $f_n(s,t) = \left(1 + \dfrac{s+t-2}{n}\right)^n$.
On a : $\partial_{1,2} f_n(s,t) = \dfrac{n-1}{n}\left(1 + \dfrac{s+t-2}{n}\right)^{n-2} \Longrightarrow \partial_{1,2} f_n(1,1) = \dfrac{n-1}{n}$.
On en déduit que : $\mathbb{E}\big(Z_{n,1} Z_{n,2}\big) = \dfrac{n-1}{n}$. Or : $\operatorname{Cov}(Z_{n,1}, Z_{n,2}) = \mathbb{E}\big(Z_{n,1} Z_{n,2}\big) - \mathbb{E}\big(Z_{n,1}\big)\mathbb{E}\big(Z_{n,2}\big)$.
En remplaçant, on retrouve : $\mathbb{E}\big(Z_{n,1} Z_{n,2}\big) = \dfrac{n-1}{n}$.
(c) On obtient (classiquement) : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(s,t) = \mathrm{e}^{(s+t-2)}$.

Sujet n° 32

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$.
Soit U une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ $(\sigma > 0)$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
On suppose que les variables X et U sont indépendantes.
On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X et une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que U.
On suppose que, pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout $j \geqslant 1$, les variables aléatoires X_k etU_j sont indépendantes.
Soit a un paramètre réel non nul ; on note Y (resp. Y_i, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$) la variable aléatoire définie par $Y = aX + U$ (resp. $Y_i = aX_i + U_i$)

1. (a) Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de la fonction de répartition F_U de U, puis en fonction de Φ.

   (b) Vérifier que Y est à densité et donner une densité de Y.

2. (a) Calculer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(XY)$.
   On admet que XY possède une variance et qu'elle n'est pas nulle et on pose $\alpha = V(XY)$.

   (b) *On admet les résultats suivants : Si (A_n) et (B_n) sont deux suites de variables aléatoires qui convergent en probabilité respectivement vers les variables A et B et (ε_n) une suite réelle de limite nulle, alors la suite $(A_n + \varepsilon_n)$ converge en probabilité vers A et, si B et les B_n ne s'annulent pas, $\left(\dfrac{A_n}{B_n}\right)$ converge en probabilité vers $\dfrac{A}{B}$*
   On pose, pour tout entier naturel n non nul :
   $$\widehat{a}_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i X_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}}$$
   Montrer que la suite $(\widehat{a}_n)$ converge en probabilité vers a.

3. Montrer que la suite $\left(\sqrt{n}(\widehat{a}_n - a)\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{\sigma 2}{p}\right)$.

Solution du sujet n° 32

1. (a)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P([Y \leqslant y] \cap [X=0]) + P([Y \leqslant y] \cap [X=1]) \\ &= P([U \leqslant y] \cap [X=0]) + P([U \leqslant y-a] \cap [X=1]). \end{aligned}$$

   Par indépendance de U et X : $F_Y(y) = (1-p)F_U(y) + pF_U(y-a) = (1-p)F_U(y) + pF_U(y-a)$.
   En centrant et en réduisant : $F_Y(y) = (1-p)\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) + p\Phi\left(\frac{y-a}{\sigma}\right)$.

   (b) La fonction Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc Y est bien à densité et $f_Y(y)\frac{1-p}{\sigma}\varphi\left(\frac{y}{\sigma}\right) + \frac{p}{\sigma}\varphi\left(\frac{y-a}{\sigma}\right)$.

2. (a) On a $\mathbb{E}(X^2) = p$ et $\mathbb{E}(XY) = a\mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(U) = ap$.

   (b) On écrit $\widehat{a}_n = \dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i X_i}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}}$.

   On applique alors la loi faible des grands nombres : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i \xrightarrow{P} ap$ et $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} p$.

   Comme la suite $(\frac{1}{n^2})$ tend vers 0, on obtient : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{P} p$, puis $\widehat{a}_n \xrightarrow{P} a$.

3. On a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i = \sum_{i=1}^{n}(aX_i + U_i)X_i = a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} U_i X_i$. D'où

$$\sqrt{n}(\widehat{a}_n - a) = \sqrt{n}\left(\frac{a\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}} - a + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} U_i X_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}}\right) = -\frac{\frac{a}{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{n}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} U_i X_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}}$$

- Pour le deuxième terme : $\sqrt{n}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} U_i X_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{n}\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} U_i X_i}{\sigma\sqrt{p}} \times \dfrac{\sigma\sqrt{p}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}}$.

D'après le théorème limite central : $\sqrt{n}\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} U_i X_i}{\sigma\sqrt{p}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$

- D'autre par : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{P} p$ d'où : $\dfrac{\sigma\sqrt{p}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{P} \dfrac{\sigma}{\sqrt{p}}$. Ainsi avec Slutsky :

$$\sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} U_i X_i}{\sigma\sqrt{p}} \times \frac{\sigma\sqrt{p}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{p}\right)$$

- Pour le premier terme, en utilisant les résultats précédents, on a : $-\dfrac{\frac{a}{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{P} 0$.

En utilisant à nouveau le théorème de Slutsky $\sqrt{n}(\widehat{a}_n - a) \xrightarrow{L} \mathcal{N}\left(0, \dfrac{\sigma^2}{p}\right)$.

Sujet n° 35

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un $n-$échantillon de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ inconnu.
On cherche dans cet exercice à estimer $e^{-\lambda}$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Y_k la fonction indicatrice de l'événement $[X_k = 0]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. (a) Déterminer la loi de Y_k.
   (b) Montrer que $\overline{Y_n}$ est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.
   (c) $\overline{Y_n}$ est-il un estimateur convergent de $e^{-\lambda}$?
2. Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi(j) = P_{[S_n=j]}(X_1 = 0)$. Calculer $\varphi(j)$.
3. On pose à présent $T_n = \varphi(S_n)$.
   (a) Montrer que T_n est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.
   (b) T_n est-il un estimateur convergent de $e^{-\lambda}$?
4. Comparer les risques quadratiques des deux estimateurs T_n et $\overline{Y}_n$.

Solution du sujet n° 35

1. (a) La variable aléatoire Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre :
$$P(X_k = 0) = P(Y_k = 1) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}.$$
   (b) Chaque Y_k suit la loi Bernoulli de paramètre $e^{-\lambda}$. Donc $E\left(\overline{Y_n}\right) = e^{-\lambda}$ et $\overline{Y_n}$ est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.
   (c) Puisque les X_k sont mutuellement indépendantes, il en est de même des Y_k. Et donc
$$V\left(\overline{Y_n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right) = \frac{e^{-\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   Et donc en particulier, $\overline{Y_n}$ est un estimateur convergent de $e^{-\lambda}$.
2. Par définition, on a $\varphi(j) = \dfrac{P([X_1=0]\cap[S_n=j])}{P(S_n=j)}$.
   Mais $[X_1=0]\cap[S_n=j] = [X_1=0]\cap\left[\sum_{k=2}^{n} X_k = j\right]$.
   Par stabilité des lois de Poisson, $\sum_{k=2}^{n} X_k$ suit la loi de Poisson de paramètre $(n-1)\lambda$ et par le lemme des coalitions, est indépendante de X_1. Par conséquent,
$$\begin{aligned} P([X_1=0]\cap[S_n=j]) =& P\left([X=1=0]\cap\left[\sum_{k=2}^{n} X_k = j\right]\right) = P(X_1=0)\,P\left(\sum_{k=2}^{n} X_k = j\right) \\ &= e^{-\lambda}e^{-(n-1)\lambda}\frac{((n-1)\lambda)^j}{j!} \end{aligned}$$
   D'autre part, S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ et donc $P(S_n=j) = e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^j}{j!}$. Ainsi
$$\varphi(j) = \frac{e^{-\lambda}e^{-(n-1)\lambda}\frac{((n-1)\lambda)^j}{j!}}{e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^j}{j!}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j$$
3. (a) Utilisons le théorème de transfert pour calculer $E(T_n)$. On a, en utilisant la définition de $\varphi(j)$
$$E(T_n) = \sum_{j=0}^{+\infty}\varphi(j)P(S_n=j) = \sum_{j=0}^{+\infty}P([X_1=0]\cap[S_n=j]) = P(X_1=0) = e^{-\lambda}$$
   Donc T_n est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.
   (b) D'après la formule de Huygens, on a $V(T_n) = E(T_n^2) - e^{-2\lambda}$. Par le théorème de transfert :
$$E(T_n^2) = \sum_{j=0}^{+\infty}\varphi(j)^2P(S_n=j) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2j}\mathrm{e}^{-n\lambda\frac{(n\lambda)^j}{j!}} = \mathrm{e}^{\frac{-2n+1}{n}\lambda}$$
   Donc $V(T_n) = \mathrm{e}^{-2\lambda}(e^{\frac{\lambda}{n}}-1) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et T_n est un estimateur convergent de $e^{-\lambda}$.
4. Puisque $\overline{Y_n}$ et T_n sont des estimateurs sans biais de $e^{-\lambda}$, leurs risques quadratiques sont égaux à leurs variances. On a alors $\dfrac{V\left(\overline{Y_n}\right)}{V(T_n)} = \dfrac{e^{-\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)\frac{1}{n}}{e^{-2\lambda}\left(e^{\lambda/n}-1\right)} = \dfrac{e^{\lambda}-1}{n(e^{\lambda/n}-1)} \leqslant 1$,
   d'après la convexité de exp qui donne : $\exp(\frac{1}{n}\times\lambda + (1-\frac{1}{n})\times 0) \leqslant \frac{1}{n}\exp(\lambda) + (1-\frac{1}{n})\exp(0)$.
   On en déduit que T_n est un meilleur estimateur que $\overline{Y_n}$ (variance plus petite).

SUJET N° 37

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\lambda_n = \dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n^2}$.

1. (a) Déterminer un équivalent de $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que la série de terme général λ_n converge.

   Dans la suite de l'exercice, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur cet espace, indépendantes et telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de POISSON de paramètre λ_n.

2. (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} P(X_n \neq 0)$ converge.
   (b) Soit $(E_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\lim\limits_{N\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{n\geqslant N} [X_n \neq 0]\right) = 0$.
   (d) En déduire que $P\left(\bigcup\limits_{N\geqslant 1} \big(\bigcap\limits_{n\geqslant N} [X_n = 0]\big)\right) = 1$
   (e) On note $B = \left\{\omega \in \Omega \mid \sum\limits_{n\geqslant 1} X_n(\omega) \text{ converge}\right\}$.
   Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n$ converge presque sûrement, c'est-à-dire que $P(B) = 1$.

On suppose désormais que $B = \Omega$.
Ainsi la fonction $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} X_k$ est définie sur Ω. On admet que c'est une variable aléatoire.

3. Déterminer la limite en loi de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
4. Déterminer la limite en probabilité de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution du sujet n° 37

1. (a) Par définition pour tout x réel, $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x <$. Ainsi $\lfloor x \rfloor \sim x$. Donc $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \sim \sqrt{n}$.
   (b) On a $0 \leqslant \lambda_n \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$; donc $\sum \lambda_n$ converge par comparaison avec une série de Riemann convergente.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(X_n \neq 0) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - e^{-\lambda_n}$ qui est équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ à λ_n car $\lambda_n \to 0$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n$ converge, il est en de même pour $\sum\limits_{n\geqslant 1} P(X_n \neq 0)$.
   (b) C'est quasiment du cours. Se démontre par récurrence.
   (c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$P(\bigcup_{n=N}^{N+p} [X_n \neq 0]) \leqslant \sum_{n=N}^{N+p} P(X_n \neq 0) \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} P(X_n \neq 0)$$

   En faisant tendre p vers $+\infty$, le théorème de la limite monotone donne :

$$0 \leqslant P(\bigcup_{n=N}^{+\infty} [X_n \neq 0]) \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} P(X_n \neq 0)$$

   Enfin, on fait tendre N vers $+\infty$, le reste de la série convergente de terme général $P(X_n \neq 0)$ tend vers 0 et par suite, $P(\bigcup\limits_{n=N}^{+\infty} [X_n \neq 0])$ aussi.
   (d) Pour tout N de $\mathbb{N}^*$, on pose $A_N = \bigcup\limits_{n\geqslant N} [X_n \neq 0]$. La suite (A_N) est une suite décroissante d'événements, donc

$$0 = \lim_{N\to+\infty} P(A_N) = P(\bigcap_{N=0}^{+\infty} A_N) = P(\bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n\geqslant N} [X_n \neq 0])$$

   (e) En passant au complémentaire, on a : $P(\bigcup\limits_{N=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{n\geqslant N} [X_n = 0]) = 1$; ceci signifie que presque sûrement il existe un rang à partir duquel la suite (X_n) est nulle et donc que presque sûrement, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} X_n$ converge.

3. Par indépendance, on sait que S_n suit la loi de Poisson de paramètre $\mu_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = \mu.$$

   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, et par continuité : $P(S_n = k) = \mathrm{e}^{-\mu_n} \frac{\mu_n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$, ce qui montre que S_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre μ
4. On a, par indépendance, pour $N > n$,

$$V(S_N - S_n) = \sum_{k=n+1}^{N} V(X_k) = \sum_{k=n+1}^{N} \lambda_k \to \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k$$

   On utilise l'inégalité de Tchebicheff.

$$P(|S_n - S| > \varepsilon) \leqslant \frac{V(S - S_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k}{\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Sujet n° 42

Toutes les variables aléatoires réelles considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tout réel $t \in I$, où I est un intervalle à déterminer, on pose $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

1. Montrer que $[-1, 1]$ est inclus dans I.
2. Déterminer G_X lorsque X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer I.
3. Montrer que si X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$$

4. (a) Pour tout $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, établir l'encadrement : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)t^{k-n} \leqslant t\, P(X > n)$.

   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_X(t) \underset{t \to 0}{=} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k \right) + o(t^n)$.

   (b) En déduire que si X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, possèdent la même fonction génératrice alors elles suivent la même loi.

Soit $p \in]0, 1[$; on note $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_k et telle que $P(N = k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On définit les variables aléatoires $S_0 = 0$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $S(\omega) = S_{N(\omega)}$. On admet que S ainsi définie est une variable aléatoire.

5. (a) On note $E_{(N=n)}(\cdot)$ l'espérance conditionnelle sachant $(N = n)$.
   Montrer que : $\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$, $E_{(N=n)}(t^S) = (pt + q)^n$.
   En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $G_S(t) = G_N(pt + q)$.

   (b) Justifier que pour tout $t \in [0, 1]$, $G_{N-S}(t) = G_N(qt + p)$.

On suppose désormais que S et $N - S$ sont indépendantes et que G_N est dérivable en 1.
On pose pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = \ln(G_N(1 - t))$.

6. (a) Montrer que $f(0) = 0$ et que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = f(pt) + f(qt)$.

   (b) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(p^k q^{n-k} t)$.

7. Soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in [0, \alpha]$, $|f(x) - f'(0)x| \leqslant \varepsilon x$.

   (b) On fixe $t \in [0, 1]$. En déduire que si n est assez grand :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], |f(p^k q^{n-k} t) - f'(0)p^k q^{n-k} t| \leqslant \varepsilon p^k q^{n-k}$$

   Conclure que $f(t) = f'(0)t$.

   (c) En déduire que N suit une loi de Poisson.

Solution du sujet n° 42

1. Si $|t| \leqslant 1$, $|P(X=n)t^n| \leqslant P(X=n)$, ce qui montre que G_X est au moins définie sur $[-1,1]$.
2. Si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on a $\forall t \in [0;1]\,, G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$ et $I=\mathbb{R}$.
3. $\forall t \in [0;1]\,, G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = G_X(t)G_Y(t)$ par indépendance de X et Y (et donc de t^X et t^Y par le lemme des coalitions).
4. (a) On a : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} P([X=k])t^{k-n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k)t = tP(X>n)$ car $k-n \geqslant 1$ et $t \in [0,1]$.

   Donc : $G_X(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k P(X=k) = t^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^{k-n}P(X=k) = o(t^n)$, car $P(X>n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (b) Si X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, possèdent la même fonction génératrice, alors par unicité du DL, elles suivent la même loi.
5. (a) La loi conditionnelle de S conditionné par $[N=n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Par le théorème de transfert
$$\mathbb{E}_{[N=n]}(t^S) = \sum_{k=0}^{n} t^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pt)^k q^{n-k} = (pt+q)^n$$
   On a alors par la formule de l'espérance totale pour $t \in [0,1]$,
$$G_S(t) = E(t^s) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_{[N=n]}(t^S)P(N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(pt+q)^n P(N=n) = G_N(pt+q)$$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, 1-X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(q)$. On applique alors l'égalité précédente à $N-S$ en inversant les rôles de p et de q.
6. (a) On a $f(0) = \ln(G_N(1)) = \ln(1) = 0$. Et $\forall t \in [0;1]\,, f(t) = \ln(G_{N-S}(1-t)G_S(1-t))$ d'après la question 1.b car $N-S$ et S sont indépendantes. D'où : $f(t) = \ln(G_N(q(1-t)+p)G_N(p(1-t)+q)) = \ln(G_N(1-qt)G_N(1-pt)) = f(qt)+f(pt)$.

   (b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en utilisant dans l'hérédité la question précédente.
7. (a) f est dérivable en 0 car G_N est dérivable en 1. Alors elle admet pour développement limité : $f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$ d'où puisque $f(0)=0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in [0,\alpha]$, $|f(x) - f'(0)x| \leqslant \varepsilon x$.

   (b) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et $t \in [0,1]$, $p^k q^{n-k} t \leqslant (\max(p,q))^n$, or $(\max p,q))^n$ tend vers 0, donc à partir d'un certain rang, $\forall k \in \{0,...,n\}$ et $\forall t \in [0,1]$, $p^k q^{n-k} t \in [0;\alpha]$.

   On a alors : $|f(p^kq^{n-k}t) - f'(0)p^kq^{n-k}t| \leqslant \varepsilon p^k q^{n-k} t \leqslant \varepsilon p^k q^{n-k}$ car $t \in [0;1]$. Alors, à partir d'un certain rang :
$$|f(t)-f'(0)t| = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(p^kq^{n-k}t) - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}f'(0)t\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|f(p^kq^{n-k}t)-f'(0)p^kq^{n-k}t|$$
   d'où $|f(t)-f'(0)t| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon p^kq^{n-k} = \varepsilon$ et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a : $f(t) - f'(0)t = 0$.

   (c) On a donc : $\forall t \in [0;1]\,, f(t) = f'(0)t = \ln(G_N(1-t)) \Leftrightarrow G_N(1-t) = e^{f'(0)t} \Leftrightarrow G_N(x) = e^{f'(0)(1-x)}$ avec $x = 1-t$. D'où : $G_N(x) = e^{-f'(0)(x-1)}$. D'après les questions 1a et 1d, $N \rightsquigarrow \mathcal{P}(-f'(0))$. On a bien $-f'(0) > 0$.

Sujet n° 45

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à densité, indépendantes et de même loi, de densité f et de fonction de répartition F nulle sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On suppose que les variables X_k admettent une espérance m $(m > 0)$.
On note a un réel strictement positif et N l'application de Ω dans $\mathbb{N}$ définie par, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$N(\omega) = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est le plus petit entier tel que } X_k(\omega) > a \\ 0 & \text{si un tel événement ne se produit jamais} \end{cases}$$

1. (a) Vérifier que N est une variable aléatoire.
   (b) Calculer $P([N = 0])$.
   (c) Donner la loi de N et la valeur de $\mathbb{E}(N)$.
2. On définit l'application Y de Ω dans $\mathbb{R}$ par : $\forall\omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = X_{N(\omega)}\big(\omega\big)$.
   On admet que Y est une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   (b) Vérifier que Y est à densité et donner une densité de Y.
3. Un joueur effectue des parties successives d'un jeu de telle sorte qu'à l'issu de la k-ième partie $(k \in \mathbb{N}^*)$ le total de ses gains est égal à X_k, où les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifient les hypothèses du début de l'énoncé.
   À chacun des tours du jeu, il doit miser une somme fixe c pour participer $(0 < c < m)$.
   Il décide de s'arrêter quand, pour la première fois, la variable X_k dépasse un seuil a $(a > 0)$ qu'il s'est fixé à l'avance.
   On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   (a) Vérifier que G admet une espérance et que :
   $$\mathbb{E}(G) = \frac{1}{1 - F(a)}\left[-c + \int_a^{+\infty} tf(t)dt\right]$$
   (b) On note K la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
   $$\forall a > 0, \quad K(a) = \int_a^{+\infty} tf(t)dt - a[1 - F(a)]$$
   Étudier les variations de K, en précisant les limites aux bornes.
   (c) En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (qu'on ne cherchera pas à calculer) pour laquelle $\mathbb{E}(G)$ est maximal.

Solution du sujet n° 45

1. (a) N est bien une application et, si k non nul : $[N = k] = [X_1 \leqslant a] \cap \dots [X_{k-1} \leqslant a] \cap [X_k > a]$ qui est bien un événement comme intersection fini d'événements. De plus $[N = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$.
$[N = 0]$ est donc un événement comme intersection dénombrable d'événements.
   (b) On a donc : $P([N = 0]) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right)$ et d'après le corollaire du théorème de la limite monotone : $P([N = 0]) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\right)$.
Or les variables X_k sont indépendantes donc $P([N = 0]) = \big(F(a)\big)^n$. Comme F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $0 \leqslant F(a) < 1$. On en déduit $P([N = 0]) = 0$.
   (c) Pour $k = 1$, on a $[N = 1] = [X_1 > a]$ d'où : $P([N = 1]) = P([X_1 > a]) = 1 - F(a)$.
Pour $k \geqslant 2$: $[N = k] = [X_1 \leqslant a] \cap \dots [X_{k-1} \leqslant a] \cap [X_k > a]$ et par indépendance :
$P([N = k]) = \big(F(a)\big)^{k-1}\big(1 - F(a)\big)$. N suit la loi géométrique $\mathcal{G}(1 - F(a))$ et $\mathbb{E}(N) = \dfrac{1}{1 - F(a)}$.
2. (a) Comme N est le premier indice k où $X_k > a$, on a $Y(\Omega) = [a, +\infty[$.
Pour $y \geqslant a$, on utilise le système complet d'événements $\{[N = n]\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et la formule des probabilités totales.
On a donc, pour $y \geqslant a$: $F_Y(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([Y \leqslant y] \cap [N = n]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([X_N \leqslant y] \cap [N = n]\big)$.
D'où $F_Y(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([X_n \leqslant y] \cap [N = n]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([X_1 \leqslant a] \cap \dots \cap [X_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant y]\big)$.
Par indépendance, on a donc finalement : $F_Y(y) = \dfrac{F(y) - F(a)}{1 - F(a)} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}$.
   (b) On vérifie facilement que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en a.
On trouve une densité en dérivant sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$ et ajoutant une valeur arbitraire en a.
On obtient par exemple comme densité $f_Y(y) = \dfrac{f(y)}{1 - F(a)} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}$.
3. (a) On a : $G = X_N - cN$ avec $\mathbb{E}(X_N) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)dt = \int_a^{+\infty} t f(t)dt$
La variable G admet donc une espérance et, par linéarité : $\mathbb{E}(G) = \mathbb{E}(X_N)) - c\mathbb{E}(N)$. En remplaçant, on trouve bien : $\mathbb{E}(G) = \dfrac{1}{1 - F(a)} \left[-c + \int_a^{+\infty} t f(t)dt\right]$.
   (b) On trouve $K'(a) = -[1 - F(a)]$ qui est négatif.
De plus : $\lim_{a\to0^+} K(a) = m$ et $a(1 - F(a)) = a \int_a^{+\infty} f(t)dt$. Or : $0 \leqslant a \int_a^{+\infty} f(t)dt \leqslant \int_a^{+\infty} t f(t)dt$.
Comme $\int_a^{+\infty} t f(t)dt$ est un reste d'intégrale convergente, on a donc $\lim_{a\to+\infty} a(1 - F(a) = 0$.
Conclusion : $\lim_{a\to+\infty} K(a) = 0$.
   (c) On a donc $\mathbb{E}(G) = H(a)$ avec : $H(a) = \dfrac{1}{1 - F(a)} \left[-c + \int_a^{+\infty} t f(t)dt\right]$.
On trouve, après calcul : $H'(a) = \dfrac{f(a)}{(1 - F(a))^2} \left[-c + \int_a^{+\infty} t f(t)dt - a(1 - F(a)\right] = \dfrac{f(a)}{(1 - F(a))^2} [-c + K(a)]$.
$H'(a)$ est donc du signe de $-c + K(a)$. Le tableau de variation de H montre alors qu'il existe un maximum atteint en un point a_0.

Sujet n$^{\text{o}}$ 47

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la variable X_k suit une loi gamma de paramètre ν_k ($\nu_k > 0$).

1. Donner l'espérance et la variance de X_k.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_1 \times \cdots \times X_n$. Déterminer $Y_n(\Omega)$. Déterminer $E(Y_n)$ et de $E(Y_n^2)$.
3. (a) Soit ε un réel strictement positif. Justifier l'inégalité

$$P\left(Y_n \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\nu_1 \times \cdots \times \nu_n}{\varepsilon}.$$

   (b) On suppose que les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(\nu_k)$ tendent vers $-\infty$, quand $n \to +\infty$.
   Qu'en déduit-on pour la suite (Y_n) ?

4. Dans cette question on suppose que la série de terme général $\dfrac{1}{1+\nu_k}$ est convergente.
   On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possèdent des moments d'ordre 2, alors la variable XY admet une espérance et :

$$|E(XY)| \leqslant \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}.$$

   (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $\nu_1 \times \cdots \times \nu_n \geqslant \nu_1 \times \cdots \times \nu_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$ (dans un premier temps on pourra étudier la convergence de la suite (ν_n)). On pose $r = \dfrac{1}{2}(\nu_1 \times \cdots \times \nu_{n_0})$.

   (b) Montrer que $Y_n \leqslant \dfrac{1}{2}E(Y_n) + Y_n \mathbb{1}_{[Y_n \geqslant r]}$ pour tout $n \geqslant n_0$ (où, pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, on a noté $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon).
   En déduire que pour $n \geqslant n_0$ on a

$$P(Y_n \geqslant r) \geqslant \frac{1}{4}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{1+\nu_k}\right).$$

   (c) On note u_n le membre de droite de l'inégalité précédente. Montrer que la suite $(\ln(u_n))$ est convergente.

   (d) Déduire de ce qui précède que la suite (Y_n) ne converge pas en probabilité vers 0.

Solution du sujet n° 47

1. D'après le cours, on a $E(X_k) = V(X_k) = \nu_k$, et par la formule de Huygens $E(X_k^2) = \nu_k + \nu_k^2$.
2. Les variables X_k étant positives, il est clair que Y_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (support). Comme les variables $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, il vient $E(Y_n) = E(X_1) \times \cdots \times E(X_n) = \nu_1 \times \cdots \times \nu_n$.
Avec le lemme des coalitions et la formule de Huygens, on obtient

$$E(Y_n^2) = E(X_1^2) \times \cdots \times E(X_n^2) = \prod_{k=1}^{n} (V(X_k) + E(X_k)^2) = \prod_{k=1}^{n} (\nu_k + \nu_k^2).$$

3. (a) Comme Y_n est positive et admet une espérance, en appliquant l'inégalité de Markov, on obtient

$$P(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(Y_n)}{\varepsilon} = \frac{\nu_1 \times \cdots \times \nu_n}{\varepsilon}.$$

(b) D'après la question précédente et l'hypothèse, on a $P(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(\nu_k)\right) \longrightarrow 0.$

On en déduit que la suite de variables aléatoires positives (Y_n) converge en probabilité vers 0.

4. (a) Comme la série de terme général $\dfrac{1}{1+\nu_k}$ est convergente, la suite $\dfrac{1}{1+\nu_k}$ converge nécessairement vers 0^+, et par conséquent la suite (ν_k) tend vers $+\infty$. Il existe donc un entier n_0 a partir duquel $\nu_n \geqslant 1$. On voit donc que cet entier n_0 convient pour satisfaire l'inégalité exigée pour tout $n \geqslant n_0$.

(b) Compte tenu de la définition de r, pour $n \geqslant n_0$ nous avons

$$Y_n = Y_n \mathbb{1}_{[Y_n < r]} + Y_n \mathbb{1}_{[Y_n \geqslant r]} \leqslant \frac{1}{2} E(Y_n) + Y_n \mathbb{1}_{[Y_n \geqslant r]}.$$

Comme l'espérance est croissante, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance qui nous a été donnée, pour $n \geqslant n_0$ on obtient

$$0 \leqslant \frac{1}{2} E(Y_n) \leqslant E\left(Y_n \mathbb{1}_{[Y_n \geqslant r]}\right) \leqslant \sqrt{E\left(Y_n^2\right)} \sqrt{E\left(\mathbb{1}_{[Y_n \geqslant r]}\right)} = \sqrt{E\left(Y_n^2\right)} \sqrt{P(Y_n \geqslant r)}.$$

Ce qui conduit à

$$P(Y_n \geqslant r) \geqslant \frac{1}{4} \prod_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{1+\nu_k} = \frac{1}{4} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{1+\nu_k}\right)$$

(c) On a $\ln(u_n) = -2\ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 - (1+\nu_k)^{-1})$. On voit que $\ln(1 - (1+\nu_k)^{-1})$ est toujours négatif et est équivalent à $-(1+\nu_k)^{-1}$ qui est le terme général d'une série convergente. Le cours nous permet alors de conclure que la suite $(\ln(u_n))$ tend vers un réel ℓ.

(d) Des questions précédentes, on déduit que la suite (Y_n) ne converge pas en probabilité vers 0 puisque $r > 0$ et que la suite (u_n) converge vers $e^\ell > 0$. Comme la suite (u_n) est décroissante, on pouvait aussi dire que pour $n \geqslant n_0$

$$P(Y_n \geqslant r) \geqslant u_n \geqslant e^\ell > 0.$$

SUJET N° 50

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ qui sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X_n suit la loi uniforme sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^n}\right]$. Pour $n \geqslant 1$, on considère les variables aléatoires

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2, \qquad T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - X_j)^2 \text{ et } U_n = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |X_i - X_j|\,.$$

1. Donner l'espérance et la variance de X_n.
2. Justifier chacune des inégalités suivantes :
$$|Y_n| \leqslant 1, Z_n \leqslant \frac{1}{3} \text{ et } U_n \leqslant 1.$$
3. Exprimer la variable aléatoire T_n en fonction des variables aléatoires Y_n et Z_n.
4. Soit M un réel. On considère une suite croissante de variables aléatoires $(V_n)_{n\geqslant 1}$ telles que $V_n(\omega) \leqslant M$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n \geqslant 1$.
   (a) Soit $\omega \in \Omega$. Justifier la convergence de la suite $(V_n(\omega))_{n\geqslant 1}$. On notera $V(\omega)$ la limite de cette suite.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit l'événement E_n en posant $E_n = [V_n \leqslant x]$. Prouver que $[V \leqslant x] = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$.
   En déduire que V est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (c) Montrer que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers V.
5. En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ (respectivement $(U_n)_{n\geqslant 1}$) converge en loi vers une variable aléatoire Z (respectivement U).
6. *Soit* $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ *($n \geqslant 2$). On admet l'inégalité suivante :*
$$\max_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} |x_k - x_\ell|^2 \leqslant \frac{2}{n}\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}(x_k - x_\ell)^2.$$
   (a) En déduire que $U^2 \leqslant 2Z$.
   (b) Montrer l'existence d'une suite réelle $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergeant vers 0 et telle que pour tout $\omega \in \Omega$,
$$Z_n(\omega) \leqslant Z(\omega) \leqslant Z_n(\omega) + v_n$$
   Justifier l'existence de l'espérance de Z et la déterminer.
   (c) Montrer que :
$$P\left(U > \frac{2}{3}\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Solution du sujet n° 50

1. Comme X_n suit une loi uniforme sur $\left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right]$, il vient $E(X_n) = 0$ et $V(X_n) = \frac{1}{12 \times 4^{n-1}} = \frac{1}{3 \times 4^n}$.
2. On a successivement : $|Y_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |X_n| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, $0 \leqslant Z_n \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$ et $U_n \leqslant \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{2^{i \wedge j - 1}} = 1$.
3. On voit que $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X_i^2 + X_j^2 - 2X_iX_j) = \frac{1}{n}\left[nZ_n + nZ_n - 2Y_n^2\right] = 2Z_n - \frac{2}{n}Y_n^2$.
4. (a) Soit $\omega \in \Omega$, la suite $(V_n(\omega))_{n \geqslant 1}$ est croissante et majorée, elle est donc convergente.

   (b) La croissance de la suite $(V_n)_{n \geqslant 1}$ implique l'inclusion $[V \leqslant x] \subseteq E_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, d'où $[V \leqslant x] \subseteq \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$. Si ω appartient à cette intersection, on a $V_n(\omega) \leqslant x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et par passage à la limite $V(\omega) \leqslant x$. On a donc l'inclusion inverse et finalement l'égalité. Comme chaque $E_n \in \mathcal{A}$ puisque V_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on voit que $[V \leqslant x] \in \mathcal{A}$ comme intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. Il en résulte que V est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (c) La suite $(E_n)_{n \geqslant 1}$ est clairement décroissante. La question précédente et le théorème de la limite monotone donnent $F_V(x) = P([V \leqslant x]) = \lim_{n \to +\infty} P(E_n) = \lim_{n \to +\infty} F_{V_n}(x)$. La suite $(V_n)_{n \geqslant 1}$ converge donc en loi vers V.
5. En 2, on a montré que les variables aléatoires Z_n et U_n étaient bornées, de plus, les suites $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ et $(U_n)_{n \geqslant 1}$ sont croissantes. La question précédente nous assure qu'elles convergent en loi respectivement vers deux variables aléatoires Z et U.
6. (a) Avec l'inégalité donnée, on voit que $U_n(\omega)^2 \leqslant T_n(\omega) = 2Z_n(\omega) - \frac{2}{n}Y_n(\omega)^2$ (cf. la question 3). D'après la question 2, on a $Y_n(\omega)^2 \leqslant 1$, il suffit donc de passer à la limite pour obtenir l'inégalité souhaitée.

   (b) Par croissance, on a $Z_n \leqslant Z$ et comme $|X_n(\omega)| \leqslant \frac{1}{2^n}$, on peut prendre $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3 \times 4^n}$. On voit que $E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$. Comme Z_n est positive, on remarque au passage que ceci implique que l'espérance de Z existe par domination. Par croissance de l'espérance, on obtient $E(Z_n) \leqslant E(Z) \leqslant E(Z_n) + v_n$ et par passage à la limite on trouve $E(Z) = \frac{1}{9}$.

   (c) En utilisant la question 6.(a), la positivité de U et l'inégalité de Markov, il vient :

$$P\left(U > \frac{2}{3}\right) = 1 - P\left(U \leqslant \frac{2}{3}\right) = 1 - P\left(U^2 \leqslant \frac{4}{9}\right) \geqslant 1 - \frac{9E(U^2)}{4} \geqslant 1 - \frac{9E(Z)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Sujet n° 53

Dans tout l'exercice les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit $p \in]0,1[$. On notera $q = 1-p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient X_n et Y_n des variables aléatoires telles que X_n suit

la loi binomiale de paramètres (n, p) et $Y_n = n - X_n$.
On considère également une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, N est indépendante de X_n.
On considère enfin les variables aléatoires $X_N : \omega \mapsto X_{N(\omega)}(\omega)$ et $Y_N : \omega \mapsto Y_{N(\omega)}(\omega)$.

1. Quelle est la loi de Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$?
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $$P(X_N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X_n = k)P(N = n).$$
3. Soit $\lambda > 0$. On suppose, **dans cette question uniquement**, que N suit la loi de Poisson de paramètre λ.
   (a) Déterminer les lois de X_N et Y_N.
   (b) Montrer que X_N et Y_N sont indépendantes.
4. Dans cette question, on suppose **uniquement** que X_N et Y_N sont indépendantes.
   (a) montrer qu'il existe deux suites de réels (u_k) et (v_j) telles que :
   $$\forall (k, j) \in \mathbb{N}^2 \quad P(N = k + j) = \frac{u_k v_j}{(k + j)!}.$$
   Indication : on pourra considérer $P\left((X_N = k) \cap (Y_N = j)\right)$, *pour* $j, k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que la suite $(k!P(N = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
   (c) En déduire que N suit une loi de Poisson.

SOLUTION DU SUJET N° 53

1. On a $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et, pour tout $k \in Y_n(\Omega)$:
$$P(Y_n = k) = P(X_n = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^k = \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^k.$$
donc Y_n suit la loi binomiale de paramètres (n, q).
2. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[N = n], n \in \mathbb{N}\}$, donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$P(X_N = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left([X_N = k] \cap [N = n]\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left([X_n = k] \cap [N = n]\right) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X_n = k)P(N = n)$$
par indépendance de N avec chaque variable X_n.
3. (a) D'après l'écriture de la question précédente on a, par indépendance,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X_n = k)P(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$
$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^j}{j!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \text{ en posant } j = n - k$$
Par conséquent, X_N suit la loi de POISSON de paramètre λp.
De même, Y_N suit la loi de POISSON de paramètre λq.

   (b) D'une part $X_N + Y_N = N$ et d'autre part, N est indépendante de chaque X_i. Par conséquent, pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, on a :
$$P([X_N = k] \cap [Y_N = j]) = P([N = k + j] \cap [X_{k+j} = k]) = P(N = k + j)P(X_{k+j} = k)$$
$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \times \frac{(k+j)!}{k!\, j!} p^k q^j = e^{-\lambda(p+q)} \frac{\lambda^k p^k}{k!} \times \frac{\lambda^j q^j}{j!}$$
$$= P(X_N = k)P(Y_N = j)$$
Les variables X_N et Y_N sont indépendantes.
4. (a) Pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, on a :
$$P([X_N = k] \cap [Y_N = j]) = P(N = k + j)P(X_{k+j} = k) = P(N = k + j) \frac{(k+j)!}{k!j!} p^k q^j.$$
En utilisant l'indépendance de X_N et Y_N, on obtient :
$$P(X_N = k)P(Y_N = j) = P(N = k + j) \frac{(k+j)!}{k!j!} p^k q^j.$$
On pose alors $u_k = \dfrac{P(X_N = k)k!}{p^k}$ et $v_j = \dfrac{P(Y_N = j)j!}{q^j}$, on obtient l'égalité demandée.

   (b) On remarque tout d'abord que $v_0 \neq 0$.
En effet, si on suppose que $v_0 = 0$, alors d'après le résultat précédent, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$k!\, P(N = k) = u_k v_0 = 0$, ce qui est impossible.
On en déduit alors, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\quad (k+1)!P(N = k + 1) = v_1 u_k = \dfrac{v_1}{v_0} \times k!P(N = k)$.
La suite $(k!P(N = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\lambda = \dfrac{v_1}{v_0}$.

   (c) Il existe alors C telle que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(N = k) = C \dfrac{\lambda^k}{k!}$.
Comme la somme de toutes les probabilités donne 1, on obtient $C = e^{-\lambda}$ et donc N suit la loi de POISSON $\mathcal{P}(\lambda)$.

Sujet n° 57

On dispose de trois pièces de monnaie : une pièce numérotée 0 pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir « face » vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1 donnant « face » à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2 donnant « pile » à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier « pile » et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier « face ». On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais « pile » et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais « face ».

On suppose que l'expérience est modélisée avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1,1,'uin',0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).

   On décide de coder « pile » par 1 et « face » par 0.

   Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece=grand(1,1, 'uin', ---, ---)
x=1
if piece==0
        lancer=grand(1,1, 'uin', ---, ---)
        while lancer==0
           lancer=---
           x=---
        end
elseif piece==1 then x=---
end
disp(x)
```

   Justifier aussi pourquoi le programme ne comporte pas de ligne : `elsif piece==2 then - - -`.

2. (a) Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

   (b) Justifier sans calcul que Y suit la même loi que X.

3. Covariance de X et Y.

   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire XY.

   (b) Établir que XY possède une espérance, donner sa valeur, puis vérifier que $\text{Cov}\,(X, Y) = 0$.

4. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Déterminer la loi de $|X - Y|$.

Solution du sujet n° 57

1. L'égalité piece==0 signifie que l'on joue avec la pièce équilibrée et piece==1 signifie que l'on joue avec la pièce donnant "face" à coup sûr, donc X prendra la valeur 0. Par suite :

```
piece=grand(1,1,'uin',0,2)
x=1
if piece==0
        lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
        while lancer==0
           lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
           x=x+1
        end
elseif piece==1 then x=0
end
disp(x)
```

   Si l'on joue avec la pièce 2, il est certain que X prend la valeur 1 mais comme la variable informatique x a été initialisée à 1, il n'y a rien à ajouter.

2. (a) On utilise la formule des probabilités totales ou on explique... Dans les deux cas, on trouve : $\forall n \geqslant 2, P(X=n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, P(X=1) = \dfrac{1}{2}$ et avec la somme des probabilités, on a finalement $P(X=0) = \dfrac{1}{3}$. Un calcul fait avec prudence à cause des deux premiers termes donne $E(X) = 1$.

   (b) X et Y suivent la même loi : symétrie des pièces truquées et équilibre de la pièce numéro 0.

3. (a) Remarquons tout d'abord que, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $(XY)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
   $(XY = 0) = (X = 0) \cup (Y = 0)$, donc XY peut prendre la valeur 0 .
   On a $([X = 1] \cap [Y = 1]) = \varnothing$, ce qui montre que XY ne peut pas prendre la valeur 1.
   D'autre part, XY peut prendre toutes les autres valeurs entières donc $(XY)(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{1\}$.
   On a vu que $(XY = 0) = (X = 0) \cup (Y = 0)$ donc, par incompatibilité : $P(XY = 0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.
   $([X = 1], [Y = 1])$ est un système complet d'événements et la formule des probabilités totales donne :
   $\forall n \geqslant 2, P(XY = n) = P([XY = n] \cap [X = 1]) + P([XY = n] \cap [Y = 1])$.
   On en déduit : $\forall n \geqslant 2, P(XY = n) = P([Y = n] \cap [X = 1]) + P([X = n] \cap [Y = 1])$. Comme n est supérieur ou égal à 2, on a : $(Y = n) \subset (X = 1)$ et $(X = n) \subset (Y = 1)$.
   On obtient donc : $\forall n \geqslant 2, P(XY = n) = P(Y = n) + P(X = n) = 2P(X = n) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   (b) On a : $\forall n \geqslant 2, nP(XY = n) = \dfrac{2}{3}n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2}n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{3}n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
   La série de terme général $nP(XY = n)$ est donc absolument convergente et XY possède une espérance. Après calculs, on obtient : $E(XY) = 1$. Donc $\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe et vaut $1 - 1 \times 1 = 0$.

4. $P([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$ et $P(X = 1)P(Y = 1) = \dfrac{1}{4}$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

5. $|X - Y|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :
   $$(|X - Y| = n) = ([X = 1] \cap [Y = n + 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n + 1])$$
   $$\cup ([X = 1] \cap [Y = -n + 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = -n + 1]).$$
   Si $n = 1$, on a : $P(|X - Y| = 1) = P(Y = 2) + P(Y = 0) + P(X = 2) + P(X = 0) = \dfrac{5}{6}$.
   Si n est supérieur ou égal à 2, il reste : $P(|X - Y| = n) = P(Y = n + 1) + P(X = n + 1) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Sujet n° 59

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telle que $\big(\mathbb{P}(X_n = k)\big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est proportionnelle à $(k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

1. Déterminer la loi de X_n et calculer son espérance et sa variance.
2. Expliciter la fonction génératrice G_n de X_n définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \qquad G_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \Big[\mathbb{P}(X_n = k)\, t^k\Big]$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = \exp\big(X_n/n\big)$.

3. Exprimer $\mathbb{E}(Y_n)$ à l'aide de G_n et déterminer sa limite quand $n \longrightarrow +\infty$.
4. On donne $\ln(2) \approx 0,69$. Comparer

$$L = \lim_{n \to +\infty} \Big[\mathbb{E}\big(\exp(X_n/n)\big)\Big] \quad \text{et} \quad L' = \lim_{n \to +\infty} \Big[\exp\Big(\mathbb{E}\big(X_n/n\big)\Big)\Big]\,.$$

5. (a) Justifier que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

   (b) Retrouver ainsi la comparaison précédente.

SOLUTION DU SUJET N° 59

1. Si $\big(\mathbb{P}(X_n = k)\big) = \alpha(k)$, on a :
$$1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha\, k \implies \alpha = \frac{2}{n\,(n+1)}$$
d'où,
$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2}{n\,(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$$
$$\mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^3}{n\,(n+1)} = \frac{n\,(n+1)}{2} \quad \text{d'où} \quad \mathbb{V}(X_n) = \frac{n^2+n-2}{18}$$
2. Par dérivation de $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} t^k$, pour $t \neq 1$, on a :
$$G_n(t) = \frac{2}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, t^k = \frac{2\,t}{n\,(n+1)} \, \frac{n\,t^{n+1} - (n+1)\,t^n + 1}{(1-t)^2}$$
Et par ailleurs $G_n(1) = 1$.
3. Par théorème de transfert,
$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \Big[\mathrm{e}^{k/n}\, \mathbb{P}(X_n = k)\Big] = G_n\big(\mathrm{e}^{1/n}\big)$$
puis par développement limité,
$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{2\,\mathrm{e}^{1/n}}{n\,(n+1)} \, \frac{n\,\mathrm{e}^{1+1/n} - (n+1)\,\mathrm{e} + 1}{(1-\mathrm{e}^{1/n})^2} = 2\,\mathrm{e}^{1/n} \, \frac{n\,\mathrm{e}\,(\mathrm{e}^{1/n}-1) + 1 - \mathrm{e}}{n\,(n+1)\,(1-\mathrm{e}^{1/n})^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$
4. $$\mathbb{E}\left(\exp\Big(\frac{X_n}{n}\Big)\right) = \mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow[n\,\infty]{} 2 \quad \text{et} \quad \exp\left[\mathbb{E}\Big(\frac{X_n}{n}\Big)\right] = \exp\left[\frac{2n+1}{3n}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\Big(\frac{2}{3}\Big) < 2$$
car $\ln(2) \approx 0,69 > 2/3$; donc $L' < L$.
5. (a) Car $(\exp)'' = \exp > 0$.
   (b) Par convexité, par récurrence sur $n \geqslant 1$, on en déduit que, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:
$$\left(\forall k,\ p_k \in [0,1] \text{ et } \sum_{k=1}^{n} p_k = 1\right) \Longrightarrow \exp\left[\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[p_k \exp(x_k)\right].$$
   Avec $x_k = k/n$ et $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, on obtient :
$$\exp\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\, p_k\right] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[p_k \exp\Big(\frac{k}{n}\Big)\right]$$
   d'où l'inégalité large à la limite : $L' \leqslant L$.

Sujet n° 61

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour toute variable aléatoire X, on note φ_X l'application définie pour tout réel t tel que la série converge, par

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$$

1. Montrer que φ_X est définie au moins sur le segment $[-1, 1]$.
2. Un exemple. On suppose dans cette question que $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1/2$. Calculer φ_X ainsi que son domaine de définition I.
3. Montrer que φ_X admet un développement limité en 0 à tout ordre et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k + o(t^n)$$

4. Dans cette question, la variable aléatoire Y vérifie $\varphi_Y(t) = 2 - \sqrt{2 - t}$.
   (a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre n de $t \to (1 + t)^{1/2}$.
   (b) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre n de φ_Y.
   (c) Déterminer la loi de Y.
5. On suppose maintenant que les deux variables aléatoires précédentes X (définie dans la question 2) et Y sont indépendantes. On note $S = X + Y$. Déterminer la loi de S.

Solution du sujet n° 61

1. Pour tout $t \in [-1,1]$, on a $|P(X=n)t^n| \leqslant P(X=n)$. La série numérique $\sum_n P(X=n)$ étant convergente, φ_X est définie sur un intervalle I contenant $[-1,1]$, donc 0.

2. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X=k) = P(X+1=k+1) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$. Ainsi $\varphi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-t/2} = \frac{1}{2-t}$.
   Ce calcul est valable pour $|t| < 2$ (série géométrique de raison $t/2$.)

3. On peut écrire $\varphi_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)t^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)t^k = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)t^k + R_n(t)$.

   On a $R_n(t) = t^{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n+1-k} t^{n+1-k} = o(t^n)$ au voisinage de 0. En effet pour $|t| < 1$

   $$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n+1-k} t^{n+1-k} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |t|^{n+1-k} = \frac{1}{1-|t|}$$

   Donc φ_X admet un développement limité en 0 à tout ordre et par unicité du DL, $\dfrac{\varphi_Y^{(n)}(0)}{n!} = P(X=n)$.

   (a) Le développement limité en 0 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ étant au programme, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et x au voisinage de 0,

   $$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

   Ici pour $\alpha = 1/2$, il vient $(1+t)^{1/2} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{(2k+1)(k!)^2 4^k} t^k + o(t^n)$.

   (b) On remarque que la fonction φ_Y est égale à $2 - \sqrt{2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)^{1/2}$. Grâce à la question précédente (en remplaçant t par $-t/2$), on obtient

   $$\varphi_Y(0) = 2 - \sqrt{2}, \text{ et } a_n = \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)8^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

   (c) Par unicité du DL et la dernière question, $P(Y=n) = \dfrac{\sqrt{2}}{(2n-1)8^n} \binom{2n}{n}$.

4. on remarque de $\varphi_X(t) = E(t^X)$. Par le lemme des coalitions et l'indépendance de X et Y :

   $$\varphi_S(t) = \varphi_{X+Y}(t) = E(t^X)E(t^Y) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \frac{1}{1-t/2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{-1/2}$$

   Un calcul analogue au calcul précédent donne

   $$\left(1 - \frac{t}{2}\right)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{8^n} \binom{2n}{n} t^n, \text{ pour } |t| < 1$$

   et

   $$\varphi_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{8^n} \binom{2n}{n} \right) t^n, \text{ pour } |t| < 1$$

   Finalement $P(S=n) = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{8^n} \dbinom{2n}{n}$.

Sujet n$^{\text{o}}$ 64

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs positives définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant toutes une espérance. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_k = \mathbb{E}(X_k)$. On suppose que la série $\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k$ converge et on note μ sa somme.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et $\mu_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que chaque X_k suit une loi de Poisson de paramètre λ_k et que les (X_k) sont indépendantes. Montrer $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on déterminera.

Dans la suite, on note $A = \{\omega \in \Omega / \sum_{k\geqslant 1} X_k(\omega) \text{ converge}\}$. On admet que A est un événement.

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note A_N l'événement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [S_n < N]$.
   (a) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_N) \geqslant 1 - \dfrac{\mu}{N}$ (on pourra utiliser l'inégalité de Markov).
   (b) Justifier que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $A_N \subset A$. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $A = \Omega$, c'est à dire que la série $\sum_{k\geqslant 1} X_k(\omega)$ converge pour tout $\omega \in \Omega$.

On définit alors la variable aléatoire S par, pour tout $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega)$.

3. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant n$, on a : $\mathbb{P}\left([S_k - S_n > \varepsilon]\right) \leqslant \dfrac{\mu_k - \mu_n}{\varepsilon}$.
   (b) Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([S - S_n > \varepsilon]) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} [S_k - S_n > \varepsilon]\right)$.
   (c) En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers S.
4. En remarquant que $(S_n - S)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0, en déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers S.

Solution du sujet n° 64

1. D'après le cours, S_n suit la loi de Poisson de paramètre $\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, d'où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([S_n = k]) = \frac{\mu_n^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu_n}$. Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{\mu_n^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu_n} \to \frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}$ ce qui prouve que (S_n) tend en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$.

2. (a) D'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}([S_n \geqslant N]) \leqslant \frac{\mathbb{E}(S_n)}{N}$ i.e. $\mathbb{P}([S_n < N]) \geqslant 1 - \frac{\mu_n}{N}$ (1).

   Par ailleurs, étant donné que les X_k sont à valeurs positives, $[S_{n+1} < N] \subset [S_n < N]$. On est en présence d'une suite décroissante d'événements d'où, par le théorème de convergence monotone, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [S_n < N]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([S_n < N]\right)$. Par passage à la limite dans (1), $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [S_n < N]\right) \geqslant 1 - \frac{\mu}{N}$ *i.e* $\mathbb{P}(A_N) \geqslant 1 - \frac{\mu}{N}$.

   (b) Soit $\omega \in A_N$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\omega) \leqslant N$. Les sommes partielles de la série à termes positifs sont bornées et la série $\sum_{k\geqslant 1} X_k(\omega)$ converge d'où $\omega \in A$, donc $A_N \subset A$.

   Ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_N) \leqslant \mathbb{P}(A)$. Or $\mathbb{P}(A_N) \to 1$ quand $N \to +\infty$. Par passage à la limite, $1 \leqslant \mathbb{P}(A)$ d'où $\mathbb{P}(A) = 1$.

3. (a) C'est encore Markov, sans difficulté.

   (b) On remarque que $S - S_n \geqslant 0$. Soit $\omega \in [S - S_n > \varepsilon]$. On a $S(\omega) - S_n(\omega) = \lim_{k\to+\infty} S_k(\omega) - S_n(\omega)$.

   De plus l'intervalle $]\varepsilon, +\infty[$ contient la limite de la suite de $(S_k(\omega) - S_n(\omega))_{k\geqslant n}$, donc tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à ε pour k assez grand. D'où $[|S-S_n| > \varepsilon] \subset \cup_{k\geqslant n}[S_k - S_n > \varepsilon]$ et réciproquement. On a alors l'égalité demandée.

   (c) La suite d'événements $([S_k - S_n > \varepsilon])_{k\geqslant n}$ est une suite croissante d'événements (voir ci-dessus), d'où

   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} [S_k - S_n > \varepsilon]\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left([S_k - S_n > \varepsilon]\right)$$

   D'après la question précédente, cette limite est majoré par $\frac{\mu - \mu_n}{\varepsilon}$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([|S_n - S| > \varepsilon]) \leqslant \frac{\mu - \mu_n}{\varepsilon}$; on conclut alors sans difficulté.

4. On applique le théorème de Slutsky. On sait que $S_n - S$ converge en probabilité vers la variable certaine 0 quand n tend vers $+\infty$. La suite constante de terme général S converge en loi vers S, d'où $S_n - S + S$, *i.e* S_n converge en loi vers S.

CHAPITRE

4

OPTION B/L

Sujet n° 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La transposée d'une matrice M sera notée ${}^tM$. Dans cet exercice, on confondra $\mathbb{R}^n$ et l'espace des matrices colonnes réelles $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle qu'alors, le produit scalaire est défini par :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \langle X, Y\rangle = {}^tXY$$

On étudie les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété (P) suivante :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, {}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tA = A$. Une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite anti-symétrique si ${}^tB = -B$.

1. Vérifier que $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, {}^tYAX$ est un nombre réel.
2. Montrer que si A est symétrique ou anti-symétrique, alors A vérifie la propriété (P).
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que pour tout $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tZAZ = 0$.
   (a) Établir que pour tout $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, ${}^tYAX = -{}^tXAY$.
   (b) En déduire que A est anti-symétrique.

   On suppose dans toute la suite de l'exercice que A vérifie la propriété (P) et n'est pas anti-symétrique.

4. (a) Montrer qu'alors ${}^tA$ vérifie (P).
   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $(\mathrm{Vect}(AX))^\perp = (\mathrm{Vect}({}^tAX))^\perp$ puis que $\mathrm{Vect}(AX) = \mathrm{Vect}({}^tAX)$.
   (c) En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha_X \in \mathbb{R}$ tel que ${}^tAX = \alpha_X AX$.
   (d) En conclure que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = \alpha_X\, {}^tXAX$.
5. Montrer qu'il existe Y telle que ${}^tYAY \neq 0$ et qu'on a alors ${}^tAY = AY$.
6. Soit Y telle que ${}^tYAY \neq 0$.
   (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que AX est non nulle et colinéaire à AY. Montrer que ${}^tAX = AX$.
   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que AX est non colinéaire à AY. En considérant ${}^tA(X+Y)$, montrer que ${}^tAX = AX$.
   (c) En conclure que A est symétrique.

Solution du sujet n° 1

1. ${}^tYAX$ est le produit scalaire de Y et AX.
2. Soient X et Y deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors : ${}^t({}^tXAY) = {}^tY({}^tAX) = {}^tYAX$, donc ${}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$. De même si $A \in A_n(\mathbb{R})$: ${}^t({}^tXAY) = {}^tY({}^tAX) = -{}^tYAX$, donc ${}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$.
3. (a) Soient X et Y deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $Z = X + Y$. On a alors : ${}^tZAZ = 0 \Leftrightarrow {}^t(X + Y)A(X + Y) = 0 \Leftrightarrow {}^tYAX = -{}^tXAY$.
   (b) On a d'une part ${}^tYAX = \langle {}^tAY, X\rangle$ et d'autre part ${}^tXAY = \langle X, AY\rangle$, d'où d'après 2.a), il vient : $\langle {}^tAY + AY, X\rangle = 0$ pour tout X, soit ${}^tAY + AY = 0$ donc ${}^tA = -A$.
4. (a) Soient X et Y deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a alors : ${}^tX{}^tAY = \langle AX, Y\rangle = \langle Y, AX\rangle = {}^tYAX$. D'où : ${}^tX{}^tAY = 0 \Rightarrow {}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$ car A vérifie (P). Or ${}^tXAY = \langle X, AY\rangle = \langle AY, X\rangle = {}^tY{}^tAX$. D'où : ${}^tX{}^tAY = 0 \Rightarrow {}^tY{}^tAX = 0$. Ainsi ${}^tA$ vérifie (P).
   (b) $Y \in (\mathrm{Vect}(AX))^\perp \Leftrightarrow \langle Y, AX\rangle = 0 \Leftrightarrow {}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$ car A vérifie (P). Or ${}^tXAY = 0 \Leftrightarrow \langle {}^tAX, Y\rangle = 0$, d'où $Y \in (\mathrm{Vect}({}^tAX))^\perp$. On a donc : $(\mathrm{Vect}(AX))^\perp \subset (\mathrm{Vect}({}^tAX))^\perp$. Or puisque A vérifie (P), ${}^tA$ vérifie (P) d'après la question précédente. Et on a donc $(\mathrm{Vect}({}^tAX))^\perp \subset (\mathrm{Vect}({}^t({}^tA)X))^\perp = (\mathrm{Vect}(AX))^\perp$, d'où l'égalité d'espaces vectoriels. On a donc :
$$\left((\mathrm{Vect}({}^tAX))^\perp\right)^\perp = (\mathrm{Vect}({}^tAX)) = \left((\mathrm{Vect}(AX))^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(AX)$$
   (c) Puisque $\mathrm{Vect}(AX) = \mathrm{Vect}({}^tAX)$, il existe $\alpha_X \in \mathbb{R}$ tel que ${}^tAX = \alpha_X AX$.
   (d) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors : ${}^tX{}^tAX = \alpha_X\, {}^tXAX$. De plus ${}^t({}^tX{}^tAX) = {}^tXAX$, avec ${}^tXAX \in \mathbb{R}$, donc égal à sa transposée. Ainsi : ${}^tX{}^tAX ={}^t ({}^tX{}^tAX)$, et donc ${}^tXAX = \alpha_X\, {}^tXAX$.
5. D'après la question 3, comme A n'est pas anti-symétrique, alors $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tYAY \neq 0$. Or d'après la question 3d, on a : ${}^tYAY = \alpha_Y\, {}^tYAY$ donc $\alpha_Y = 1$ et ${}^tAY = AY$.
6. (a) ${}^tYAX = {}^t({}^tAY)X = {}^t(AY)X$ d'après la question 5, donc ${}^tYAX = {}^tY{}^tAX = {}^tY\alpha_X AX = \alpha_X\, {}^tYAX$. Or $\exists\lambda \in \mathbb{R}, AX = \lambda AY$. D'où : ${}^tYAX = \lambda\, {}^tYAY \neq 0$. D'où $\alpha_X = 1$ et ${}^tAX = AX$.
   (b) ${}^tA(X+Y) = \alpha_{X+Y}A(X+Y) = \alpha_{X+Y}AX+\alpha_{X+Y}AY$. Or ${}^tA(X+Y) = {}^tAX+{}^tAY = \alpha_X AX+AY$. (AX, AY) étant une famille libre, on obtient : $\alpha_{X+Y} = \alpha_X$ et $\alpha_{X+Y} = 1$. D'où $\alpha_X = 1$ et ${}^tAX = AX$.
   (c) On a donc montré que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tAX = AX$, d'où ${}^tA = A$, donc A est symétrique.

Sujet n$^{\text{o}}$ 2

Soient $b, r \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard dans cette urne ; après chaque tirage on remet la boule tirée dans l'urne et l'on y rajoute une deuxième boule de la même couleur que celle qui a été tirée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire indicatrice de l'événement « la n-ième boule tirée est blanche »— c'est-à dire que X_n vaut 1 si la n-ième boule tirée est blanche, et 0 sinon. On note S_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du n-ème tirage.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{E(S_n)}{b + r + n}$.
4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la variable X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

Désormais on suppose que $b = r = 1$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(S_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$ et calculer $P(S_n = n + 1)$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

   En déduire que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Solution du sujet n° 2

1. Comme $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X_1 = 1) = \frac{b}{b+r}$.
2. De même X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X_2 = 1)$, soit, avec le SCE $(X_1 = 0), (X_1 = 1)$:
$$\begin{aligned}P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) \quad \text{(form. probas totales)}\\ &= \frac{r}{b+r}\frac{b}{b+r+1} + \frac{b}{b+r}\frac{b+1}{b+r+1} = \frac{b(r+b+1)}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{b}{b+r}.\end{aligned}$$
3. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = k)_{b\leqslant k\leqslant b+n}$, donne :
$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k)P_{[S_n=k]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{r+b+n}\sum_{k=b}^{b+n} kP(S_n = k) = \frac{E(S_n)}{r+b+n}.$$
4. Montrons par récurrence forte sur $n \geqslant 1$ que : $P(X_{n+1} = 1) = \frac{b}{b+r}$; (cela suffit car $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$).
   - **Initialisation :** d'après la question 1.
   - **Hérédité :** si c'est vrai pour jusqu'à n, comme $S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$, par linéarité de l'espérance :
   $$E(S_n) = b + \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = b + n \times \frac{b}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}.$$
   D'où, d'après Q3 : $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{E(S_n)}{r+b+n} = \dfrac{b(b+r+n)}{b+r}\dfrac{1}{r+b+n} = \dfrac{b}{b+r}$.
5. Comme $(S_n = 1) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{X_k}_{\geqslant 0} = 0\Big) = \bigcap_{k=1}^{n}(X_k = 0)$, la formule des probabilités composées donne :
$$P(S_n = 1) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0)\times\cdots\times P_{(X_1=0)\cap\cdots\cap(X_{n-1}=0)}(X_n = 0) = \frac{1}{2}\times\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1+k}{2+k} = \frac{1}{n+1}.$$
En inversant les rôles des boules blanches et rouges, on obtient de même $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.
6. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = \ell)_{1\leqslant \ell\leqslant n+1}$, donne :
$$\begin{aligned}P(S_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} P\big((S_{n+1} = k) \cap (S_n = \ell)\big)\\ &= P\big((S_{n+1} = k) \cap (S_n = k-1)\big) + P\big((S_{n+1} = k) \cap (S_n = k)\big)\\ &\qquad \text{car } (S_{n+1} = k) \cap (S_n = \ell) = \emptyset \text{ si } \ell \notin \{k-1, k\}, \text{ puisque } S_{n+1} = S_n + X_{n+1}\\ &= P_{(S_n=k-1)}(X_{n+1} = 1) \times P(S_n = k-1) + P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 0) \times P(S_n = k)\\ &= \frac{k-1}{n+2}P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}P(S_n = k).\end{aligned}$$
On en déduit par récurrence sur $n \geqslant 1$ que : $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(S_n = k) = \frac{1}{n+1}$.
   - **Initialisation :** $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2) = \mathcal{U}([\![0, 1]\!])$ d'après Q1 avec $r = b = 1$.
   Donc $S_1 = 1 + X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$.
   - **Hérédité :** Si c'est vrai pour n, d'après Q5, on a $P(S_{n+1} = 1) = P(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$ et, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, d'après la question précédente, on a :
   $$\begin{aligned}P(S_{n+1} = k) &= \frac{k-1}{n+2}P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}P(S_n = k)\\ &= \frac{k-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \quad \text{(d'après } HR_n)\\ &= \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

Sujet n° 3

Soit F donnée par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1} dt$

1. (a) Préciser le domaine de définition D de F.
   (b) Déterminer les limites de F aux bornes de D.
   (c) Montrer que F est décroissante sur D.
   On admet que F est continue sur D.
2. (a) Montrer que F vérifie : $\forall x \in D \quad F(x) + F(x+1) = \dfrac{1}{x}$
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} xF(x) = 1$.
   (c) Représenter graphiquement la fonction F.
3. (a) Soit $x \in D$ fixé. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a : $\dfrac{t^{x-1}}{t+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{x+k-1} + R_n(t)$ où R_n est une fonction à préciser.
   (b) En déduire l'expression de F sous forme de série.
4. Retrouver cette expression à l'aide de la question 2.

SOLUTION DU SUJET N° 3

1. (a) Posons $f_x(t) = \dfrac{t^{x-1}}{t+1}$; alors $f_x \in C^0(]0,1], \mathbb{R}^+)$. Sur $]0,1]$, on a $0 \leqslant \frac{1}{2}t^{x-1} \leqslant f_x(t) \leqslant t^{x-1}$.
   Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}$ converge si et seulement si $1 - x < 1$ (intégrale de RIEMANN). Donc, par comparaison, on a : $D =]0; +\infty[$.
   (b) Sur $[0,1]$
   $$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{t+1} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{x-1}dt \leqslant F(x) \leqslant \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$$
   d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$
   (c) La fonction F est décroissante car $x \to \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est positive et décroissante.
2. (a) $\forall x > 0 \;\; F(x) + F(x+1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^x}{t+1}dt = \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$.
   (b) Comme F et continue en 1, on a : $F(x+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F(1)$.
   Donc $xF(x) = 1 - xF(x+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
3. (a) $\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}$
   $\Rightarrow \;\; f_x(t) = \dfrac{t^{x-1}}{t+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{x+k-1} + (-1)^{n+1}\frac{t^{x+n}}{1+t}$ d'où $R_n = (-1)^{n+1}\dfrac{t^{x+n}}{1+t}$
   (b) $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{x+k-1}dt + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(1)^k}{x+k} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t}dt$
   Or $|(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t}dt| \leqslant \int_0^1 t^{x+n}dt = \frac{1}{x+n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
   D'où $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$
4. $\left\{\begin{aligned} F(x) + F(x+1) &= \frac{1}{x} \\ F(x+1) + F(x+2) &= \frac{1}{x+1} \\ &\vdots \\ F(x+n) + F(x+n+1) &= \frac{1}{x} \end{aligned}\right.$ en multipliant la seconde par (-1), la troisième par $(-1)^2$, ..., la dernière par $(-1)^n$, puis en faisant la somme, on obtient : $F(x) + (-1)^n F(x+n+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k}$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x+n+1) = 0$ on obtient : $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$

Sujet n° 4

Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, de densités respectives f_1 et f_2 strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x^2 + y^2) = f_1(x)f_2(y)$.

1. **Dans cette question seulement**, on suppose que X_1 et X_2 suivent la loi normale centrée réduite. Déterminer $g(x)$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $y \in \mathbb{R}$
$$\frac{f_1'(x)}{2xf_1(x)} = \frac{g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$$
3. On pose $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)}$.
   (a) Montrer que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}^*$. On note cette constante a.
   (b) Soit $k(x) = f_1(x)\mathrm{e}^{-ax^2/2}$. En calculant $k'(x)$, montrer que k est constante sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire l'expression de $f_1(x)$.
4. (a) Montrer que $a < 0$.
   (b) En déduire la loi de X_1, puis la loi de X_2.

Solution du sujet n° 4

1. Pour $y = 0$, il vient $g(x^2) = f_1(x)f_2(0)$ et, comme g est défini sur $\mathbb{R}^+$

$$g(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-x/2}$$

2. Les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables. La fonction g également. On dérive par rapport à x. Il vient, pour tout y réel $f_1'(x)f_2(y) = 2xg'(x^2 + y^2)$. Donc pour $x \neq 0$, en divisant par $f_1(x)f_2(y)$

$$\frac{f_1'(x)}{2xf_1(x)} = \frac{g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)}$$

3. On pose $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)}$.
   (a) Soit $x_1 \neq x_2$. On a, pour tout y réel

$$h(x_1) = \frac{g'(x_1^2 + y^2)}{g(x_2^2 + y^2)} \text{ et } h(x_2) = \frac{g'(x_2^2 + y^2)}{g(x_2^2 + y^2)}$$

   Avec $y = x_2$ dans la première égalité et $y = x_1$ dans la seconde, on obtient $h(x_1) = h(x_2)$. On remarque que pour tout $x \neq 0$, $f_1'(x) = axf_1(x)$

   (b) Soit $k(x) = f_1(x)\mathrm{e}^{-ax^2/2}$. La fonction k est dérivable pour $x \neq 0$ et $k'(x) = \mathrm{e}^{-ax^2/2}(f_1'(x) - axf_1(x)) = 0$.

   (c) Il existe donc deux constantes C_1, C_2 telles que

$$f_1(x) = \begin{cases} C_1\mathrm{e}^{ax^2/2} & \text{si } x > 0 \\ C_2\mathrm{e}^{ax^2/2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Par continuité de f_1, il vient $C_1 = C_2$.

4. (a) La fonction f_1 étant une densité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = 1$ ce qui entraîne que $a < 0$.

   (b) En posant $\sigma = \sqrt{\frac{-1}{a}} > 0$, on obtient que f_1 est la densité d'une loi normale. La constante C est déterminée Par $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)dt = 1$. De même pour f_2. En fait X_1 et X_2 suivent la même loi normale car

$$f_1(1)f_2(0) = f_1(0)f_2(1) \Rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

Sujet n° 5

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (x \sin x)^n \, dx$ est bien définie. On la note alors I_n.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante et positive.
4. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$.
5. Montrer que :
$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 - x \sin x} \, dx - \int_0^1 \frac{(x \sin x)^{N+1}}{1 - x \sin x} \, dx$$
6. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} I_n$ converge et donner une expression de sa somme à l'aide d'une intégrale.

Solution du sujet n° 5

1. L'intégrale I_n existe car c'est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment (produit d'un polynôme et d'un polynôme trigonométrique).
2. $I_0 = 1$ et $I_1 = \sin(1) - \cos(1)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Remarquons que $0 \leqslant x \ \sin x < 1$ car $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, par croissance de la fonction sinus sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, d'où $0 \leqslant x \sin x \leqslant \sin x \leqslant 1$. Ensuite, la décroissance des puissances entières positives d'un réel de $[0, 1]$ donne :
$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant (x \sin x)^{n+1} \leqslant (x \sin x)^n \leqslant x^n,$$
en majorant de plus $\sin x$ par 1. Et enfin, on intègre sur $[0, 1]$. Ainsi, on obtient :
$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, donc la suite (I_n) est décroissante et positive.
4. L'inégalité obtenue à la question précédente donne par théorème d'encadrement que la suite (I_n) tend vers zéro.
5. On applique la formule de somme partielle de série géométrique de raison $q = x \ \sin x \in [0, 1[$:
$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$
puis on intègre, on applique la linéarité de l'intégration sur $[0, 1]$
On remarque que comme sur le segment $[0, 1]$, $1 - x \ \sin x$ reste strictement positif, la fonction sous la dernière intégrale écrite ci-dessous est bien continue sur le segment $[0, 1]$, et de même pour les deux intégrales suivantes, par quotient défini de fonctions continues sur $[0, 1]$. Ainsi, on a :
$$\sum_{n=0}^{N} I_n = \int_0^1 \frac{1 - (x \sin x)^{N+1}}{1 - x \sin x} \ dx = \int_0^1 \frac{1}{1 - x \sin x} \ dx - \int_0^1 \frac{(x \sin x)^{N+1}}{1 - x \sin x} \ dx$$
6. Posons $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(x \sin x)^n}{1 - x \sin x} \ dx$ et montrons que la suite (J_n) converge vers 0.
La fonction $x \mapsto x \sin x$ est croissante sur $[0, 1]$ comme produit de deux fonctions croissantes positives, et à valeurs dans $[0, 1[$, comme à la question 2.
Donc $g : x \mapsto \dfrac{1}{1 - x \sin x}$ est croissante sur $[0, 1]$, majorée par $M = g(1)$.
Ainsi, en majorant à nouveau $\sin x = |\sin x|$ par 1 et en appliquant la croissance de l'intégration sur $[0, 1]$, on a :
$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 M x^n \ dx = \frac{M}{n+1}.$$
Enfin, en appliquant le théorème d'encadrement, on obtient que J_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$
D'où la série de terme général I_n est convergente et a pour somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 - x \sin x} \ dx$$
Note : pour majorer g, on peut aussi appliquer le théorème concernant l'image continue d'un segment par une fonction strictement positive

Sujet n° 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2.$$

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n sur $\mathbb{R}$ et que a_n appartient à $]0, 1]$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\qquad f_{n+1}(a_n) > 0$.
   (b) En déduire l'éventuelle monotonie de la suite (a_n).
   (c) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

3. Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

4. On considère la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$.
   (a) Montrer que g est croissante sur $[a_2, 1]$.
   (b) On considère la suite $(x_k)_{k \geqslant 0}$ définie par $x_0 = 1$ et $x_{k+1} = g(x_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = a_2$.

SOLUTION DU SUJET N° 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction polynôme f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f_n est bijective de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $f_n(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x\to-\infty} f_n(x), \lim_{x\to+\infty} f_n(x) \right[= \mathbb{R}$
   Comme $0 \in f_n(\mathbb{R})$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution réelle a_n.
   On remarque de plus que $f_n(0) = -2 < 0$ et $f_n(1) = n^2 + n - 2 = (n-1)(n+2) \geqslant 0$ (étant donné $n \geqslant 1$).
   La stricte croissance de f_n^{-1} sur $\mathbb{R}$ donne alors : $a_n \in]0, 1]$.
2. (a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$f_{n+1}(a_n) = (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2 = \underbrace{(na_n^3 + n^2 a_n - 2)}_{=f_n(a_n)=0} + a_n^3 + (2n+1)a_n = a_n^3 + (2n+1)a_n > 0.$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1})$. Or f_{n+1}^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $a_{n+1} < a_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (c) La suite (a_n) est strictement décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel ℓ positif.
   On suppose alors que $\ell > 0$. Comme $f_n(a_n) = 0 = na_n^3 + n^2 a_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   on obtient $\lim_{n\to+\infty} f_n(a_n) = 0$ mais aussi $\lim_{n\to+\infty} f_n(a_n) = \lim_{n\to+\infty} (na_n^3 + n^2 a_n - 2) = +\infty$.
   On obtient une contradiction avec l'unicité de la limite. La suite (a_n) converge donc vers 0.
3. Comme on a : $n^2 a_n \leqslant n^2 a_n + na_n^3 = 2$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{2}{n^2}$.
   La série majorante est une série de RIEMANN de paramètre $2 > 1$ qui converge, donc la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge par critère de comparaison.
4. (a) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $g'(x) = \dfrac{6x(x^3 + 2x - 1)}{(3x^2 + 2)^2} = \dfrac{3xf_2(x)}{(3x^2 + 2)^2} \geqslant 0$ sur $[a_2, 1]$ car f_2 est croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en a_2. D'où le résultat demandé.
   (b) Comme $f_2(x_1) = 2\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\dfrac{3}{5}\right) - 2 > 0 = f_2(a_2)$, la croissance de g permet de montrer par récurrence que :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ a_2 \leqslant x_{k+1} \leqslant x_k \leqslant 1.$$
   La suite (x_k) étant décroissante et minorée, elle converge.
   Comme g est continue, sa limite est un point fixe de g.
   Or, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $g(x) - x = \dfrac{(2x^3 + 1) - x(3x^2 + 2)}{3x^2 + 2} = \dfrac{1 - 2x - x^3}{3x^2 + 2} = \dfrac{-f_2(x)}{2(3x^2 + 2)}$,
   qui ne s'annule qu'en a_2, donc le seul point fixe de g est a_2. Ainsi : $\lim_{k\to+\infty} x_k = a_2$.

Sujet n° 7

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \left(\ e_1, e_2, e_3 \ \right)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme u de E, qui a pour matrice A dans la base B.
Dans la suite, on confond $\mathbb{R}^3$ et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à 3 lignes.

On dit qu'un sous-espace F de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est stable par A, si pour tout $X \in F, AX \in F$.

1. (a) Vérifier que -1 et 5 sont valeurs propres de u et déterminer les sous-espaces propres associés E_{-1} et E_5.
   On admet désormais que ces deux valeurs sont les seules valeurs propres de u.
   (b) Les sous-espaces E_{-1} et E_5 sont-ils stables par A ?
   (c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Déterminer tous les sous-espaces de E de dimension 1 qui sont stables par A.
3. Soit P un sous-espace de dimension 2 stable par A.
   (a) Déterminer P si on suppose en plus que P contient E_5.
   (b) Vérifier qu'une solution est $P_1 = \text{Ker}(u - 5Id)^2$.
4. Soit P un sous-espace de dimension 2 stable par A. Que dire de $P \cap P_1$?
5. En déduire tous les sous-espaces vectoriels stables par A.

Solution du sujet n° 7

1. (a) Le calcul donne $(A-5I)X=0 \iff X=\lambda u_1$ avec $u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Ainsi $E_5=\mathrm{Vect}(u_1)$.

   De même $E_{-1}=\mathrm{Vect}(u_2)$ avec $u_2=\begin{pmatrix}10\\15\\4\end{pmatrix}$.

   Donc $\{-1,5\}\subset \mathrm{Sp}\,(u)$.

   (b) Tout sous-espace propre d'un endomorphisme est stable par cet endomorphisme.

   (c) Comme $\dim\ E_{-1}+\dim\ E_5\neq 3$, on voit que u n'est pas diagonalisable.

2. Une droite $D=\mathrm{Vect}(v)$ est stable par u si et seulement si $u(v)\in D$ si et seulement si (Av,v) sont liés si et seulement si v est un vecteur propre de A.

   Les seules droites stables par A sont E_{-1} et E_5

3. (a) Si P contient E_5 alors $P=Vect(u_1,v)$ avec $v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et (u,v) libres.

   $$A(P)\subset P \iff A(v)\in P \iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : A(v)=\alpha u_1+\beta v \text{ soit } \left\{\begin{array}{r}6a-6b+5c=\alpha+\beta a\\ -4a-b+10c=\alpha+\beta b\\ 7a-6b+4c=\alpha+\beta c\end{array}\right.$$

   (1)-(3) $\Rightarrow c-a=\beta(a-c)$

   cas 1 : $a\neq c\Rightarrow \beta=-1$ avec $\left\{\begin{array}{r}7a-6b+5c=\alpha\\ -4a+10c=\alpha\end{array}\right. \Rightarrow 11a-6b-5c=0$ vérifiée par u_2.

   d'où $P=E_{-1}\oplus E_5$

   cas 2 : $a=c\Rightarrow \left\{\begin{array}{r}(11-\beta)a-6b=\alpha\\ 6a-(1+\beta)b=\alpha\end{array}\right.$ puis $\beta=5$ et α calculable. $\Rightarrow P$ d'équation $a=c$.

   Les plans P contenant E_5 sont donc $P=E_{-1}\oplus E_5$ et P_1 d'équation $a=c$.

   (b) $(A-5Id)^2=\begin{pmatrix}60&0&-60\\90&0&-90\\24&0&-24\end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Ker}(u-5Id)^2$ a pour équation $a=c$.

   Ainsi $P_1=\mathrm{Ker}(u-5Id)^2$.

4. **Cas 1** : $P=P_1\Rightarrow P\cap P_1=P_1$
   Cas 2 : $P\neq P_1\Rightarrow P\cap P_1$ est une droite stable par A, donc $P\cap P_1=E_\lambda$.
   Comme $E_\lambda\subset \mathrm{Ker}(u-5Id)^2$, on a nécessairement $\lambda=5$. Et donc, d'après la question 3, on obtient $P=E_\lambda\oplus E_\mu$.

5. Les sous-espaces vectoriels stables par A sont $\{0\},E_{-1},E_5,E_{-1}\oplus E_5,\mathrm{Ker}(u-5Id)^2$ et E.

Sujet n° 8

Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

On désigne respectivement par M_f et par V_f les deux réels suivants :

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad V_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b \big(f(x) - M_f\big)^2\,\mathrm{d}x$$

1) Soient x et x_0 des réels de $[a, b]$. Prouver que :

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \int_a^b |f'(y)|\mathrm{d}y$$

(on pourra distinguer le cas $x \leqslant x_0$ du cas $x_0 < x$).

2.a) À l'aide du signe de la fonction $\lambda \longmapsto \displaystyle\int_a^b \big(|f'(y)| + \lambda\big)^2\,\mathrm{d}y$ définie sur $\mathbf{R}$, établir l'inégalité :

$$\Big(\int_a^b |f'(y)|\,\mathrm{d}y\Big)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b \big(f'(y)\big)^2\,\mathrm{d}y$$

b) En déduire que pour tout $(x, x_0) \in [a, b]^2$, on a :

$$\big(f(x) - f(x_0)\big)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b \big(f'(y)\big)^2\,\mathrm{d}y$$

3.a) Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$). Montrer qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que

$$g(x_0) = M_g$$

b) En utilisant entre autre le résultat précédent, établir l'inégalité suivante :

$$V_f \leqslant (b-a) \int_a^b \big(f'(y)\big)^2\,\mathrm{d}y$$

Solution du sujet n° 8

1) Pour $x_0 \leqslant x$:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} f'(y)\,\mathrm{d}y \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f'(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{a}^{b} |f'(y)|\,\mathrm{d}y.$$

(où l'on a utilisé le fait que $x_0 \leqslant x$ pour ordonner les bornes de l'intégrale dans la première inégalité).

Le cas $x < x_0$ est obtenu par un argument de symétrie sur x et x_0.

2.a La fonction est un trinôme du second degré en λ, positif pour tout λ (intégrale d'un carré), donc son discriminant est négatif, ce qui donne l'inégalité voulue.

NB : c'est la démonstration classique dans un cas particulier de l'inégalité de Cauchy Schwarz pour les intégrales (ce résultat n'est pas au programme BL).

b) D'après la question 1), on a :

$$\forall (x, x_0) \in [a, b]^2,\ (f(x) - f(x_0))^2 \leqslant \left(\int_a^b |f'(y)|\,\mathrm{d}y \right)^2 \tag{4.1}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au terme de droite, on obtient :

$$\left(\int_a^b |f'(y)|\,\mathrm{d}y \right)^2 \leqslant \left(\int_a^b 1\,\mathrm{d}y \right) \left(\int_a^b (f'(y))^2\,\mathrm{d}y \right) \leqslant (b-a) \int_a^b (f'(y))^2\,\mathrm{d}y. \tag{4.2}$$

Ce qui permet de conclure en mettant bout à bout les inégalités (4.1) et (4.2).

3.a) Comme g est continue sur $[a, b]$, on peut définir une primitive G de g sur $[a, b]$. La fonction G est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à G, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que

$$G(b) - G(a) = G'(x_0)(b - a)$$

On conclut donc que :

$$g(x_0) = G'(x_0) = \frac{G(b) - G(a)}{b - a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = M_g$$

b) En intégrant l'inégalité (1) par rapport à x sur l'intervalle $[a, b]$, il vient :

$$\forall (x, x_0) \in [a, b]^2,\ \int_a^b (f(x) - f(x_0))^2 \mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2 \int_a^b (f'(y))^2\,\mathrm{d}y$$

Comme $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on peut appliquer le résultat de la question 3.a). Il existe donc un $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = M_f$. En divisant les deux membres de l'inégalité précédente par $(b - a)$ et en choisissant $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = M_f$, on conclut que :

$$V_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - M_f)^2\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a) \int_a^b (f'(y))^2\,\mathrm{d}y$$

Sujet n° 9

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}$. Si N vaut n, on procède à une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = 1 - q \in]0, 1[$, et on note S et E respectivement les variables aléatoires égales au nombre de succès et d'échecs.

1. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Déterminer la loi de S sachant $[N = n]$, pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire la loi de S, puis la loi de E.
   (c) Les variables aléatoires S et E sont-elles indépendantes ?
2. On revient au cas général où on ne connaît pas la loi de N et on suppose que S et E sont indépendantes.
   (a) Exprimer pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(S = k)$ et $\mathbb{P}(E = j)$ à l'aide de séries.
   (b) Exprimer $\mathbb{P}([S = k] \cap [E = j])$.
   (c) En déduire qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
   $$\forall (k, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \big[(k + j)!\big]\, \mathbb{P}(N = k + j) = u_k\, v_j.$$
   (d) En déduire que N suit une loi de Poisson.

Solution du sujet n° 9

1. (a) On reconnaît que la loi conditionnelle $S \mid (N = n) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

   (b) En conditionnant selon N, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[\mathbb{P}_{[N=n]}\big((S = k)\big)\,\mathbb{P}(N = n)\Big] = \sum_{n=k}^{+\infty}\left[\binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}\, \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}\right]\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda\, p)^k}{k!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\, q)^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda\, p}\,\frac{(\lambda\, p)^k}{k!}\end{aligned}$$

   donc $S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\, p)$ et $E \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\, q)$.

   (c) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((S = k)\cap(E = j)\big) &= \mathbb{P}\big((S = k)\cap(N = k + j)\big) = \mathbb{P}_{[N=k+j]}\big((S = k)\big)\,\mathbb{P}(N = k + j)\\ &= \binom{k+j}{k} p^k\, q^j\, \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} = \mathrm{e}^{-\lambda\, p}\,\frac{(\lambda\, p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda\, q}\,\frac{(\lambda\, q)^j}{j!}\\ &= \mathbb{P}(S = k)\,\mathbb{P}(E = j)\end{aligned}$$

   d'où S et E indépendantes.

2. (a) Comme ci-dessus,

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=k}^{+\infty}\left[\binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}\,\mathbb{P}(N = n)\right] \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E = j) = \sum_{m=j}^{+\infty}\left[\binom{m}{j} p^{m-j}\, q^j\,\mathbb{P}(N = m)\right]$$

   (b) De même :

$$\mathbb{P}\big((S = k)\cap(E = j)\big) = \binom{k+j}{k} p^k\, q^j\,\mathbb{P}(N = k + j)$$

   (c) D 'où par indépendance :

$$\big[(k{+}j)!\big]\,\mathbb{P}(N = k{+}j) = \left(\sum_{n=k}^{+\infty}\left[\frac{n!}{(n-k)!}\, q^{n-k}\,\mathbb{P}(N = n)\right]\right)\left(\sum_{m=j}^{+\infty}\left[\frac{m!}{(m-j)!}\, p^{m-j}\,\mathbb{P}(N = m)\right]\right) = u_k\, v_j$$

   (d) Le produit $u_k\, v_j$ ne dépend donc que de la valeur de $k + j$; on a alors $\forall k$, $u_k\, v_1 = u_{k+1}\, v_0$ et, comme $v_0 \neq 0$ (somme de termes non tous nuls),

$$u_k = u_0\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^k \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{u_k\, v_0}{k!} = \frac{u_0\, v_0}{k!}\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^k$$

   et la somme des probabilités donne $u_0\, v_0 = \mathrm{e}^{-v_1/v_0}$; on a donc, puisque $v_1 \neq 0$ (sinon $N = 0$) $N \hookrightarrow \mathcal{P}\big(v_1/v_0\big)$.

Sujet n° 10

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x strictement supérieur à 1, on pose :

$$f_n(x) = \ln(x-1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue x, admet une seule solution α_n sur $]1, +\infty[$.

   (b) Calculer $f_{n+1}(\alpha_n)$. En déduire les variations de la suite (α_n), puis montrer qu'elle est convergente.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (b) Déterminer le signe de $f_n\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$.

   (c) En déduire la limite de la suite (α_n).

3. (a) Vérifier que la série de terme général $\dfrac{\alpha_n - 1}{n}$ est convergente.

   (b) Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n - 1}{n} \leqslant 1$.

4. (a) Étudier les variations de f'_{n+1} sur l'intervalle $\left]1, 1 + \dfrac{1}{n+1}\right[$.

   (b) En considérant $\displaystyle\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} f'_{n+1}(t)\mathrm{d}t$, en déduire, que : $\alpha_{n+1} - 1 \leqslant (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leqslant \alpha_n - 1$.

   (c) Donner alors la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(\alpha_n - \alpha_{n+1})$.

Solution du sujet n° 10

1. (a) On trouve $f_n'(x) = \dfrac{x^n}{x-1} > 0$, donc f_n est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
Comme de plus $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, f_n réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $]1, +\infty[$.

(b) On a $f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + \dfrac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} = \dfrac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} > 0$. On a donc $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ et comme f_{n+1} est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, on en déduit : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$. La suite (α_n) est décroissante.
De plus, la suite (α_n) est minorée (par 1) donc elle est convergente.

2. (a) On montre (IAF par exemple) que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$. Par sommation, on trouve :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

(b) $$f_n\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = -\ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^k}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 0.$$

(c) On a donc $f_n\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) > f_n(\alpha_n)$ et comme f_n est strictement croissante, on en déduit : $\alpha_n < 1 + \dfrac{1}{n+1}$. Comme $\alpha_n > 1$, on a par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_n = 1$.

3. (a) Comme $\alpha_n \in]1, 1+\dfrac{1}{n+1}[$, on a $0 < \dfrac{\alpha_n - 1}{n} < \dfrac{1}{n(n+1)}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente (série télescopique dont la somme vaut 1, ou terme général inférieur à celui de la série de Riemann de paramètre $2 > 1$), donc la série de terme général $\dfrac{\alpha_n - 1}{n}$ est également convergente.

(b) D'après ce qui précède, on a : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n - 1}{n} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$.
Par passage à la limite : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n - 1}{n} \leqslant 1$

4. (a) $f_{n+1}'(x) = \dfrac{x^{n+1}}{x-1}$ donc $f_{n+1}''(x) = \dfrac{(n+1)x^n(x-1) - x^{n+1}}{(x-1)^2} = \dfrac{x^n(nx-n-1)}{(x-1)^2}$.
Sur $\left]1, 1+\dfrac{1}{n+1}\right[$, on a $x \leqslant \dfrac{n+2}{n+1} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$ donc $f_{n+1}''(x) \leqslant 0$ et f_{n+1}' décroit sur $]1, 1+\dfrac{1}{n+1}[$.

(b) On a $\displaystyle\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} f_{n+1}'(t)\mathrm{d}t = f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}$, et d'après la question 3a), on a aussi :
$$(\alpha_n - \alpha_{n+1}) f_{n+1}'(\alpha_n) \leqslant \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} f_{n+1}'(t)\mathrm{d}t \leqslant (\alpha_n - \alpha_{n+1}) f_{n+1}'(\alpha_{n+1})$$
On en déduit, en remplaçant : $(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \dfrac{{\alpha_n}^{n+1}}{\alpha_n - 1} \leqslant \dfrac{{\alpha_n}^{n+1}}{n+1} \leqslant (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \dfrac{{\alpha_{n+1}}^{n+1}}{\alpha_{n+1} - 1}$
Par stricte décroissance et stricte positivité de (α_n), on obtient $(n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leqslant \alpha_n - 1$ pour l'inégalité de gauche, et $(n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \geqslant (\alpha_{n+1} - 1) \dfrac{\alpha_n^{n+1}}{\alpha_{n+1}^{n+1}} \geqslant \alpha_{n+1} - 1$ pour celle de droite.
Conclusion : $\alpha_{n+1} - 1 \leqslant (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leqslant \alpha_n - 1$.

(c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{n+1} = 1$, on a par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0$.

CHAPITRE

5

EXEMPLES DE QUESTIONS COURTES

Question sans préparation 1

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit (λ_n) une suite monotone strictement positive. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ_n . Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Question sans préparation 2

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction d'une variable réelle F définie par

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

2. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Question sans préparation 3

Soit X une variable aléatoire positive, qui admet une espérance, de densité f définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(X > t)\; dt.$

Question sans préparation 4

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que $A^2(A - I_n) = 0$ et $A(A - I_n) \neq 0$.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

Question sans préparation 5

Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, qui suivent toutes la même loi telle que $E(X_n) = V(X_n) = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Pour tout entier $n > t$, comparer les événements $(T_n < t)$ et $(|T_n - n| \geqslant n - t)$.
2. Calculer $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(T_n < t)\right)$.

Question sans préparation 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini , pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par : $\varphi(M) = {}^tM$.

Déterminer la trace d'une matrice représentative de φ.

Question sans préparation 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Trouver des solutions de l'équation $X^6 = A$, où $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A-t-on unicité de la solution lorsque celle ci existe ?

Question sans préparation 8

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n non nul, Z_n suit la loi $\gamma(n)$.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{Z_n - n}{\sqrt{Z_n}}\right)$ converge en loi et préciser la loi limite.

Question sans préparation 9

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''(t)\mathrm{d}t$ soient convergentes.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Question sans préparation 10

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$.

1. Expliciter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(u) = \int_0^1 \Big[\max(x, u)\Big]\, \mathrm{d}x$$

2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Comparer

$$J = \mathbb{E}\left(\int_0^1 \max(x, U)\, \mathrm{d}x\right) \quad \text{et} \quad I = \int_0^1 \mathbb{E}\big(\max(x, U)\big)\, \mathrm{d}x$$