Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire BL, constituent la première version d'un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2009.

1 Sujets donnés en option scientifique

Sujet S 1 - Exercice

Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i$. On considère la variable aléatoire T définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\mathrm{T} = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \ / \ \mathrm{S}_n \geqslant 1\}.$$

1) Question de cours : Densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

2) On admet dans cette question que : $\mathbb{P}([\mathrm{S}_n < 1]) = \dfrac{1}{n!}$ pour $n \geqslant 2$.

a) Que vaut $\mathbb{P}([\mathrm{T} = 1])$?

b) Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'événement $[\mathrm{T} = n]$ en fonction des événements $[\mathrm{S}_n \geqslant 1]$ et $[\mathrm{S}_{n-1} < 1]$.

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la valeur de $\mathbb{P}([\mathrm{T} = n])$.

d) Établir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(\mathrm{T})$; calculer $\mathbb{E}(\mathrm{T})$.

3) a) Déterminer une densité de la variable aléatoire S_2.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité f_{S_n} de la variable aléatoire S_n est donnée par :

$$f_{\mathrm{S}_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} (x-j)^{n-1} & \text{si} \quad x \in [k-1, k], (1 \leqslant k \leqslant n) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, n] \end{cases}$$

c) En déduire que $\mathbb{P}([\mathrm{S}_n < 1]) = \dfrac{1}{n!}$.

Sujet S 1 - Exercice sans préparation

Soit $(\mathrm{E}, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

1) Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).

2) Montrer que :

$$\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g.$$

Sujet S 2 - Exercice

1) Question de cours : Existence des moments d'une variable aléatoire discrète.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 2(1-x)^2 \ln(1-x)}{12x^2}$$

a) Étudier les variations de f.

b) Montrer que, lorsque x tend vers 0^+, $f(x) \sim \dfrac{x}{18}$.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, strictement positives, indépendantes et de même loi.

On pose : $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$, $Y_1 = \dfrac{X_1}{U}$, $Y_2 = \dfrac{X_2}{U}$.

3) a) Montrer que Y_1 et Y_2 suivent la même loi et admettent des moments de tous ordres. Calculer $\mathbb{E}(Y_1)$ et $\mathbb{E}(Y_2)$.

b) En déduire que $\dfrac{T}{U}$ admet des moments de tous ordres. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{T}{U}\right)$.

c) Montrer que $\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2) = -\mathbb{V}(Y_1)$. En déduire une formule reliant $\mathbb{V}\left(\dfrac{T}{U}\right)$ et $\mathbb{V}(Y_1)$.

4) On suppose que X_1 et X_2 suivent la loi géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$). On pose $q = 1 - p$. On admet le résultat suivant : $\mathbb{V}(Y_1) = f(q)$.

À l'aide des résultats précédents, établir l'encadrement suivant :

$$0 < \mathbb{V}\left(\frac{T}{U}\right) < \frac{1}{3}$$

Sujet S 2 - Exercice sans préparation

1- Montrer que pour $z > 0$, l'intégrale

$$J(z) = \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

est convergente.

2- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{e^{-z}}{z}$.

Sujet S 3 - Exercice

1) Question de cours : Donner la définition et les principales propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On admettra que si f est convexe sur I et $(x, y, z) \in I^3$, alors

$$f(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z) \leqslant \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z).$$

2) Soient a, b et c trois réels strictement positifs, montrer que :

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

En déduire que :

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \geqslant \frac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}$$

en posant $(a', b', c') = (1/a, 1/b, 1/c)$,

3) Soient a_0, b_0 et c_0 trois réels strictement positifs. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ par les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \\[2ex] b_{n+1} = (a_n b_n c_n)^{\frac{1}{3}} \\[2ex] c_{n+1} = \dfrac{3}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{c_n}} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les réels a_n, b_n et c_n sont bien définis et $0 < c_n \leqslant b_n \leqslant a_n$.

b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ sont monotones et que les trois suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes. On note λ, μ et ν leurs limites respectives.

c) Montrer que $\lambda = \mu = \nu$.

d) On cherche maintenant à montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est toujours monotone.

i) Soient x, y et z trois réels, tels que $0 < x < y < z$. On note :

$$\begin{cases} s = x + y + z \\ d = xy + xz + yz \\ p = xyz \end{cases}$$

Montrer que $ps^3 - d^3$ est du signe de $xz - y^2$.
(on pourra remarquer que $ps^3 - d^3 = -(yz - x^2)(zx - y^2)(xy - z^2)$).

ii) En appliquant le résultat précédent à a_1, b_1 et c_1, montrer que $b_3 - b_2$ est du signe de $b_2 - b_1$. Conclure.

Sujet S 3 - Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, indépendantes et de même loi .
On définit la variable aléatoire :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i.$$

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'espérance $\mathbb{E}(e^{x\mathrm{S}_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([\mathrm{S}_n \geqslant a]) \leqslant e^{-ax}\,\mathbb{E}(e^{x\mathrm{S}_n})$.

2) Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par :

$$\mathbb{P}([\mathrm{X}_i = 1]) = p, \quad \mathbb{P}([\mathrm{X}_i = -1]) = 1 - p.$$

Sujet S 4 - Exercice

Si $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, on pose $\mathrm{M}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$.

On note F le sous-ensemble de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices $\mathrm{M}(a)$ quand a parcourt $\mathbb{R}^4$.

On note $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

a) Question de cours : Rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E. Dans quel cas la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est-elle une base de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$?

b) Soient E_1 de base $(x_1, \dots, x_p)$ et E_2 de base $(y_1, \dots, y_q)$ deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ est libre. Qu'en déduit-on sur $p + q$?

2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.

3) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Pour $i \in [\![1, 4]\!]$, on pose $M_i = M(e_i)$. Montrer que $\forall\, i \in [\![1, 4]\!]$, la matrice $M_i + J$ est inversible et que la famille $(M_i + J)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ est libre.

4) Soit $a \in \mathbb{R}^4$. Montrer que si pour tout réel θ non nul, la matrice $M(a) + \theta J$ est non inversible, alors $a = (0, 0, 0, 0)$.

5) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui ne contient aucune matrice inversible et tel que $J \in G$.

a) Déterminer $G \cap F$ et en déduire que la dimension de G est inférieure ou égale à 12.

b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J ?

Sujet S 4 - Exercice sans préparation

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$.

1) Montrer que pour $a > 0$ fixé, $\mathbb{P}([X_n \leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) Montrer que si $b > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right]\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \min(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $\mathbb{P}\big(\big[|X_n - np| \leqslant nb\big]\big)$ quand n tend vers $+\infty$?

Sujet S 5 - Exercice

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p ($p \in]0, 1[$).

On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

1) Question de cours : Définition et propriétés de la loi géométrique.

2) Déterminer la loi de U.

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[U = n]$.

b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_1 / U = n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_1)$.

4) Déterminer la loi de T.

5) a) Calculer $\mathbf{Cov}(U, T)$.

b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Sujet S 5 - Exercice sans préparation

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1) On pose $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, -1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1, 0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$.

2) Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.

3) Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4) Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

Sujet S 6 - Exercice

1) Question de cours : Définition de la convergence absolue d'une série numérique. Lien entre convergence et convergence absolue.

2) **a)** Justifier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p}dt$.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{I}_{k,p} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p}dt$$

b) Calculer $\mathrm{I}_{k,0}$ en fonction de k (on pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{2kt}$, après l'avoir justifié).

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_{n,1}$

3) **a)** Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ en fonction de $\mathrm{I}_{2n+3,1}$ et $\mathrm{I}_{1,1}$.

b) En déduire que la série de terme général $u_j = \dfrac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ est convergente. Exprimer sa somme S en fonction de $\mathrm{I}_{1,1}$.

4) Montrer que : $0 < \mathrm{S} < 1$.

Sujet S 6 - Exercice sans préparation

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit $n \geqslant 1$ et $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$ un n-échantillon indépendant, identiquement distribué de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose λ inconnu et on cherche à l'estimer par un intervalle de confiance.

On pose :

$$\overline{\mathrm{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_i \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \sqrt{n}\frac{\overline{\mathrm{X}}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

A l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Sujet S 7 - Exercice

1) Question de cours : Diagonalisabilité d'une matrice, d'un endomorphisme.
Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ (en posant degré$(0) = -\infty$).

2) On considère la matrice :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calculer son rang, en déduire une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé. Donner une base de ce sous-espace propre.

3) On pose $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^2 - 1$, $\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1$ et $\mathrm{P}_3 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$. Montrer que $\mathscr{V} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ est une base de E.

On note $\mathrm{V}_1 = \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_1)$, $\mathrm{V}_2 = \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$

4) On considère $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ de matrice M dans la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de E.

Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$. En déduire que f^3 est nulle, puis préciser l'ensemble des valeurs propres de f.

5) Montrer que V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par f.

6) On veut trouver les sous-espaces vectoriels F stables par f c'est à dire tels que $f(F) \subset F$.

a) Montrer que E et $\{0\}$ sont stables par F.

b) Soit D une droite vectorielle stable par f et $u \in D$ un vecteur non nul. Montrer que u est un vecteur propre de f. En déduire que $D = V_1$.

c) Soit F un plan stable par f et $v = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$ un élément de F. Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une famille liée. En déduire que $\gamma = 0$ puis que $F = V_2$.

Sujet S 7 - Exercice sans préparation

Un enfant a dans chacune des deux poches de son blouson, un paquet contenant N bonbons. A chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité p, sa poche de gauche pour un prendre un.

1) Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?

3) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$

Sujet S 8 - Exercice

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1) Question de cours : Rappeler la définition de la convergence en probabilité. Démontrer qu'une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, suivant des lois de Poisson de paramètres θ_n, tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$, converge en probabilité vers 0.

2) On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) On note f la fonction dérivée de F et, pour tout nombre réel θ, f_θ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\theta(x) = f(x-\theta) \quad .$$

Vérifier que f_θ est une densité de probabilité.

c) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, admettant f_θ pour densité. Montrer que X possède une espérance et une variance et les calculer.

3) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi, admettant pour densité f_θ.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $U_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $V_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Exprimer, à l'aide de F, θ et n, les fonctions de répartition de U_n et V_n.
b) Justifier, pour tout $\epsilon \in]0,1[$, l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left([-1+\theta \leqslant U_n < -1+\theta+2\epsilon] \cap [1+\theta-2\epsilon < V_n \leqslant 1+\theta]\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right| < \epsilon\right]\right).$$

c) En déduire que $\dfrac{U_n+V_n}{2}$ est un estimateur convergent de θ.
d) Est-il sans biais ?

Sujet S 8 - Exercice sans préparation

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$.
1) Etudier la monotonie et la limite éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^2 = 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$.
3) En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
On pourra admettre que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

2 Sujets donnés en option économique

Sujet E 9 - Exercice

On étudie la vente d'un certain type de produit sur internet sur trois sites A, B, C et on fait les constatations suivantes :
- si un client choisit le site A pour un achat, il choisit indifféremment A, B ou C pour l'achat suivant,
- si un client fait un achat auprès du site B, il fait l'achat suivant sur le même site B,
- si un client fait un achat sur le site C, il choisira pour l'achat suivant le site A avec une probabilité $1/12$, le site B avec une probabilité $7/12$ et le site C avec une probabilité $1/3$.

Au départ le client choisit au hasard l'un des trois sites.
On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités pour que, au n-ième achat, le client se fournisse respectivement auprès de A, B et C.
1) Question de cours : Énoncer la formule des probabilités totales.
2) Quelles sont les valeurs de p_1, q_1 et r_1 ?
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre p_n, q_n et r_n.
4) Exprimer p_{n+1}, respectivement q_{n+1} et r_{n+1}, en fonction des trois réels p_n, q_n et r_n.
5) Pour $n \geqslant 2$, exprimer p_n en fonction de r_n et r_{n-1}.
6) Prouver que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire. Donner l'expression de r_n, puis p_n et q_n en fonction de n.
7) Étudier la convergence des trois suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Sujet E 9 - Exercice sans préparation

Donner un exemple de matrice M non nulle telle que $\left(I, M, {}^tM\right)$ soit une famille liée.
Dans quel cas de telles matrices sont-elles diagonalisables ?

Sujet E 10 - Exercice

1) Question de cours : Loi géométrique, espérance et variance.

2) Soit x un réel de $]0,1[$.

a) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}*$, l'égalité :

$$\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0.$

c) En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ ainsi que l'égalité : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

3) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi géométrique de paramètre p $(0 < p < 1)$.
On pose : $\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{X}}$.

a) Déterminer $\mathrm{Y}(\Omega)$ et la loi de probabilité de Y.

b) Etablir, pour tout entier m de $\mathbb{N}^*$, l'existence du moment d'ordre m, $\mathbb{E}(\mathrm{Y}^m)$, de Y.

c) Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ en fonction de p.

Sujet E 10 - Exercice sans préparation

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Existe-t-il $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_3$?

2) Existe-t-il $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{CA} = \mathrm{I}_2$?

Sujet E 11 - Exercice

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3,\ u_1 = 29/9 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 9 - \frac{26}{u_{n+1}} + \frac{24}{u_n u_{n+1}} \quad (1).$$

1) Question de cours : Enoncer les résultats concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

2) Ecrire une fonction en Pascal permettant de calculer la valeur du terme u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ entré par l'utilisateur.

3) Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 24a_n \ (2) \end{cases}$$

4) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n + 3^n + 4^n$ (3).

5) Expliciter u_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Sujet E 11 - Exercice sans préparation

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de loi géométrique de paramètres p_1 et p_2 respectivement ($p_i \in]0,1[$, $i = 1,2$).
On pose $\mathrm{U} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ et $\mathrm{T} = \mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2$.

1) On suppose que $p_1 \neq p_2$. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

2) On suppose que $p_1 = p_2 = p$. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Sujet E 12 - Exercice

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $N = A - I$ et $M = N^2 - N$ (où I désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soient u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés canoniquement aux matrices N et M.

1) Question de cours : Matrices semblables, définition et propriétés.

2) Etudier la diagonalisabilité de A.

3) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I et de M.

4) On suppose dans cette question que le rang de u est égal à 2.

a) Montrer l'existence d'un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathscr{B} = (u^2(x), u(x), x)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

En déduire que N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Exprimer la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$ et en déduire que M et N sont semblables.

c) Conclure que A et A^{-1} sont aussi semblables.

Sujet E 12 - Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On désigne l'espérance par $\mathbb{E}$.

1) Établir l'existence de $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

2) Montrer que $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right) \leqslant \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda}\right)$.

Sujet E 13 - Exercice

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont b pour les blanches, n pour les noires et r pour les rouges ($b+n+r=1$).

On effectue dans cette urne des tirages successifs indépendants avec remise. Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1) Loi d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes. Lois marginales.

2) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si une boule blanche est tirée au k-ième tirage, -1 si une boule noire est tirée au k-ième tirage et 0 si une boule rouge est tirée au k-ième tirage. On note $S_k = Z_1 + \cdots + Z_k$.

a) Trouver la loi de probabilité de S_1. Calculer son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de S_k.

b) Pour tout réel t strictement positif et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $g_k(t) = \mathbb{E}(t^{S_k})$.
Expliciter $g_k(t)$ en fonction de t et de k.

c) Montrer que $g_k'(1) = \mathbb{E}(S_k)$ et retrouver le résultat de la question (a).

3) a) On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de X_1. Calculer son espérance et sa variance.

b) Sachant que $X_1 = k$, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge à chacun des $k-1$ premiers tirages ?

c) On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $X_1 = k$?

d) En déduire la loi de W (sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer).

4) On note Y_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, l), la probabilité de l'événement $\{X_1 = k\ ,\ Y_1 = l\}$ (On pourra distinguer selon que $k > l$, $k = l$ ou $k < l$). Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont elles indépendantes ?

b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $r = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1.

Sujet E 13 - Exercice sans préparation

Soit n un entier $\geqslant 2$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0, \dots, 0)\}$.

On pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, puis $B = {}^t X X$ et $A = X\, {}^t X$.

1) Écrire la matrice B.

2) Déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A.

3 Sujets donnés en option technologique

Sujet T 14 - Exercice

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

1) Question de cours : Suites géométriques, convergence, somme.

2) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

b) En déduire la nature (convergence ou divergence) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Montrer que l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue x admet deux solutions réelles a et b que l'on déterminera $(a > b)$.

4) a) Montrer que $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$.

Établir l'encadrement suivant : $1 < a < 2$.

b) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n - b^n\right)$.

c) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{a^n}$.

Sujet T 14 - Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi uniforme sur $[-1, 3/2]$.

1) Déterminer la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X.

2) On considère la variable aléatoire $Y = X^2$. Quel est l'ensemble des valeurs prises par Y ? Déterminer la fonction de répartition de Y. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Sujet T 15 - Exercice

Soit f la fonction définie pour tout x réel par :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est un réel donné.

1) Question de cours : Rappeler les définitions et les principales propriétés d'une densité et d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

2) Montrer que pour $a = 3/2$, on peut considérer f comme une densité d'une variable aléatoire réelle X.

3) **a)** Déterminer la fonction de répartition F de cette variable aléatoire X.

b) Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthogonal du plan.

c) Résoudre successivement les trois équations : $F(x) = 1/4$, $F(x) = 1/2$, $F(x) = 3/4$.

4) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Sujet T 15 - Exercice sans préparation

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer J^2, puis J^n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

2) Calculer A^{2009}.

4 Sujets donnés en option BL

Sujet BL 16 - Exercice

1) Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

Soit p un nombre réel de $]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit λ et μ deux réels strictement positifs. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} q\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ p\mu e^{\mu x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2) Verifier que f est une densité de probabilité.

Soit X *une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*, dont* f *est une densité.*

3) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

4) **a)** Déterminer p, λ et μ tels que X vérifie :
pour tout $x \geqslant 0$, $\quad \mathbb{P}([X > x]) = \mathbb{P}([X < -x])$.

b) On pose $Y = |X|$. Déterminer la loi de Y.

c) A-t-on, pour tout réel s, pour tout réel t tel que $t \geqslant s$,

$$\mathbb{P}_{[Y>s]}([Y > t]) = \mathbb{P}([Y > t - s])?$$

Sujet BL 16 - Exercice sans préparation

1) Montrer que l'équation : $x^n + nx = 1$ admet, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une unique solution strictement positive, que l'on note x_n.

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

3) Donner un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Sujet BL 17 - Exercice

Soit x un nombre réel et $M(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 1-x & 0 \\ -x & x & 1-2x \end{pmatrix}.$$

On note $E = \{M(x) / x \in \mathbb{R}\}$.

1) Question de cours : Définition et propriétés des matrices inversibles.
2) L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
3) L'ensemble E est-il stable par :
- la multiplication par un scalaire ?
- l'addition des matrices ?
- la multiplication des matrices ?

4) Les éléments de E sont-ils inversibles ? Si oui, leur inverse appartient-il à E ?
5) Les éléments de E sont-ils diagonalisables ?
6) Exprimer $[M(1)]^n$ en fonction de l'entier naturel n.

Sujet BL 17 - Exercice sans préparation

Une urne contient n boules numérotées $1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 3)$. On tire les boules une à une sans remise. Quelle est la probabilité que les boules numérotées 1, 2, 3 sortent dans cet ordre ?