



## MATHEMATIQUES

### Options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Sur chacune des 4 sessions de 3 jours, ces épreuves ont mobilisé 4 à 5 jurys par demi-journée.

#### 1. Procédure d'interrogation

Le sujet proposé aux candidats comprend deux parties (les questions de *Scilab* peuvent intervenir dans l'une ou l'autre des deux parties):

- un *exercice principal* préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme : *algèbre, probabilités et analyse*. De plus, une *question de cours* en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal.
- un *exercice sans préparation* portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

#### 2. Résultats statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:

- *option scientifique* (414 candidats): 11,80
- *option économique* (202 candidats): 10,12
- *option technologique* (38 candidats): 08,97
- *option littéraire B/L* (15 candidats): 10,87

#### 3. Commentaires

A l'issue des épreuves orales de mathématiques, on peut tirer un certain nombre d'enseignements.

Les rapports de jury des concours précédents ainsi que les échanges dans la commission de mathématiques lors de la journée des classes préparatoires, sont manifestement répercutés auprès des admissibles : ainsi, les prestations d'une majorité de candidats sont essentiellement orales et le tableau n'est utilisé que comme support de l'exposé.

La « règle du jeu » est de mieux en mieux respectée : les candidats passent les questions non traitées ou inachevées et poursuivent l'exposé.

### **Option scientifique**

Le niveau général est bon, comparable à celui du concours 2016 : les notes s'étendent entre 3 et 20 et l'écart-type de 3,53 permet de classer correctement les admissibles.

Il y a quelques candidats excellents dont les exposés très clairs, concis et exhaustifs s'appuient sur une argumentation pertinente qui leur permet de prouver les résultats attendus.

L'ensemble des examinateurs a constaté que l'abstraction des sujets d'algèbre n'est plus un handicap insurmontable comme ce fut le cas durant de nombreuses années : les exposés sont rigoureusement argumentés.

En revanche, beaucoup de candidats éprouvent de grandes difficultés à résoudre les sujets d'analyse « pure », même les plus simples. Les notions les plus élémentaires - étude de fonctions, représentations graphiques, théorèmes classiques (accroissements finis, valeurs intermédiaires, etc.) – ne sont pas du tout maîtrisées.

Quant au niveau des connaissances en probabilités, il reste assez stable (les théorèmes fondamentaux du cours sont bien maîtrisés) même si l'analyse combinatoire la plus élémentaire pose de gros problèmes à certains candidats. Il est vrai que cette partie du cours a été réduite dans le programme en vigueur depuis 2015.

### **Option économique**

Le niveau des candidats de cette option reste assez stable par rapport aux concours passés récents et on peut même noter la présence de très bons candidats. L'écart-type de 3,87 témoigne d'une disparité non négligeable entre les candidats.

Cependant, les observations relevées l'an passé restent d'actualité même si tous les points négatifs ne se sont pas renforcés.

Pour une grande partie des candidats, les concepts fondamentaux sont peu maîtrisés et font parfois l'objet de graves confusions ( « dimension » d'une application linéaire), le cours n'est pas bien assimilé (définition de la convergence d'une intégrale généralisée), les explications utilisent un langage mathématique très approximatif qui nuit à la rigueur de l'exposé, les techniques de calculs élémentaires font souvent défaut ( limites de fonctions, développements limités ) : on retrouve les lacunes non comblées héritées du secondaire.

La présence de quantificateurs dans un sujet revêt souvent pour les candidats, un caractère purement « décoratif » tant ils sont mal utilisés voire ignorés.

On note enfin dans l'attitude d'un certain nombre de candidats un degré de maturité assez faible qui se traduit par une difficulté à se concentrer et à établir des liens entre les questions d'un exercice et par une prise d'initiative très « timide ».

### **Option technologique**

Les niveaux des candidats sont très contrastés avec une moyenne significativement inférieure à celle du concours 2016 et un écart-type de 4,06.

Les questions de *Scilab* ont souvent été très mal traitées voire ignorées par une très large majorité de candidats : ces « impasses » ont été assez lourdement sanctionnées.

Toutefois, les examinateurs ont pu interroger quelques (trop) rares candidats ayant un très bon niveau mathématique.



### **Option littéraire B/L**

On note un écart-type très élevé de 5,28.

Les interrogateurs ont pu assister à de brillantes prestations de quelques candidats qui cernent les pistes à explorer pour répondre aux questions posées, même si parfois, les techniques mises en œuvre restent assez fragiles.

En revanche, cet écart-type le révèle bien, trop de candidats manifestent une impréparation à cet oral de mathématiques.

Il est fort probable que le choix de l'épreuve à option de l'écrit (sciences sociales ou mathématiques) constitue l'explication majeure de cette dispersion des notes.

### **4. Remarques**

Le jury recommande aux futurs candidats d'éviter de réciter à l'oral des recettes mécaniques qu'ils ne maîtrisent pas toujours: même si elles peuvent parfois faire illusion dans un problème d'écrit où la part d'initiative personnelle est réduite, ces phrases ou ces formules apprises par cœur et qui tiennent lieu de « prêt-à penser », passent difficilement le filtre de l'épreuve orale.



**ORAL HEC 2017**

**MATHÉMATIQUES**

**EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES**

**Option scientifique**



## EXERCICE PRINCIPAL S 162

1. Question de cours : condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2,  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$  et  $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  définie par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, c_{i,i+1} = 1; \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, c_{n,j} = -a_j; \quad c_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}^n$  de matrice  $C$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ .

2.a) Déterminer le rang de la matrice  $C$ . Préciser le noyau de l'endomorphisme  $f$ .

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice  $C$  soit inversible.

Sous cette condition, expliciter la matrice  $C^{-1}$ .

3.a) Montrer qu'un réel  $\lambda$  est valeur propre de  $C$  si et seulement si il est racine d'un polynôme qu'on explicitera en fonction des réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$

b) Montrer que la matrice  $C$  est diagonalisable si et seulement si elle admet  $n$  valeurs propres distinctes.

4. Soit  $M$  la matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$  définie par :  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

a) Déterminer les valeurs propres de  $M$ .

b) Étudier la diagonalisabilité de  $M$  (on remarquera que 1 est valeur propre de  $M$ ).

## EXERCICE SANS PRÉPARATION S 162

Soit  $(X_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et soit  $(p_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$  une suite de réels de  $]0, 1[$  telle que pour tout  $i \in \mathbf{N}^*$ , la variable aléatoire  $X_i$  suit la loi géométrique de paramètre  $p_i$ . On pose pour tout  $i \in \mathbf{N}^*$  :  $q_i = 1 - p_i$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :  $Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

1. Calculer pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ , la probabilité  $P(Z_n \geq k)$ . Quelle est la loi de  $Z_n$  ?

2. On suppose que pour tout  $i \in \mathbf{N}^*$ , on a :  $p_i = \frac{1}{(i+1)^2}$ .

Montrer que la suite de variables aléatoires  $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

## CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 162

1.  $\forall i \in \mathbf{N}^*$ ,  $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i)$ , donc  $X_i(\Omega) = \mathbf{N}^*$  et  $\forall k \in \mathbf{N}^*$ ,  $P(X_i \geq k) = q_i^{k-1}$  ( $q_i = 1 - p_i$ ).

La variable aléatoire  $Z_n$  prend ses valeurs dans  $\mathbf{N}^*$  et  $\forall k \in \mathbf{N}^*$ , on a par indépendance mutuelle des  $X_i$ ,

$$P(Z_n \geq k) = \prod_{i=1}^n q_i^{k-1}, \text{ d'où } P(Z_n = k) = \prod_{i=1}^n q_i^{k-1} - \prod_{i=1}^n q_i^k = \left(1 - \prod_{i=1}^n q_i\right) \prod_{i=1}^n q_i^{k-1}.$$

Puisque  $q_i \in ]0, 1[$ , on a  $\prod_{i=1}^n q_i \in ]0, 1[$  et  $Z_n \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - \prod_{i=1}^n q_i\right)$ .

2. On a :  $\prod_{i=1}^n q_i = \prod_{i=1}^n \frac{i(i+2)}{(i+1)(i+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$  après réduction et télescopes. D'où :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n q_i = 1/2$ .

Donc, la suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la loi géométrique  $\mathcal{G}(1/2)$ .

# CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 162

1. Cours.

2.a) On résout  $CX = 0 \iff x_2 = 0, x_3 = 0, \dots, x_n = 0$  et  $-\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \iff x_2 = 0, \dots, x_n = 0, a_1 x_1 = 0$ .

• Si  $a_1 \neq 0$ ,  $X = 0$ ,  $\text{rg } C = n$  et  $\text{Ker } f = \{0\}$ .

• Si  $a_1 = 0$ ,  $\text{Ker } f = \text{Vect}(1, 0, \dots, 0)$  de dimension 1, donc,  $\text{rg } C = n - 1$ .

b) La matrice  $C$  est inversible  $\iff a_1 \neq 0$ . On résout  $CX = Y$ , ce qui équivaut à :

$$x_2 = y_1, \dots, x_n = y_{n-1} \text{ et } -\sum_{i=1}^n a_i x_i = y_n \iff x_2 = y_1, \dots, x_n = y_{n-1} \text{ et } x_1 = -\frac{1}{a_1} \left( \sum_{i=2}^n (a_i x_i) + y_n \right).$$

La matrice  $C^{-1}$  présente une sous-diagonale principale formée de 1, sa première ligne étant constituée par les coefficients  $-\frac{a_2}{a_1}, -\frac{a_3}{a_1}, \dots, -\frac{a_n}{a_1}, -\frac{1}{a_1}$  et tous les autres coefficients étant nuls.

3.a) La résolution du système  $CX = \lambda X \iff x_2 = \lambda x_1, \dots, x_n = \lambda x_{n-1}$  et  $-\sum_{i=1}^n a_i x_i = \lambda x_n$ , ce qui équivaut à :  $x_2 = \lambda x_1, \dots, x_n = \lambda x_{n-1}$  et  $-\sum_{i=1}^n a_i \lambda^{i-1} x_1 = \lambda^n x_1 \implies \lambda$  est racine de  $P(X) = X^n + \sum_{i=1}^n a_i X^{i-1}$ .

Réciproquement, si  $\lambda$  est une racine de  $P$ , les vecteurs de coordonnées  $x_1(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})$  vérifient le système précédent, donc sont des vecteurs propres associés à  $\lambda$ .

b) D'après le système ci-dessus, le sous-espace propre associé à toute valeur propre  $\lambda$  est de dimension 1 ; la matrice  $C$  est donc diagonalisable si et seulement si elle admet  $n$  valeurs propres distinctes.

4.a) Les valeurs propres sont les racines de  $P(X) = X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 14X - 8 = (X - 1)^2(X + 2)(X - 4)$ .

b) La matrice  $M$  admet 3 valeurs propres, donc elle n'est pas diagonalisable.

## EXERCICE PRINCIPAL S 164

1. Question de cours : définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Pour tout entier  $n \in \mathbf{N}^*$ , on considère une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes telles que pour chaque épreuve, la probabilité de succès est égale à  $\frac{1}{n}$ .

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au rang du premier succès et  $Y_n$ , la variable aléatoire égale au rang du deuxième succès.

On pose :  $U_n = \frac{X_n}{n}$  et  $W_n = \frac{Y_n}{n}$ .

2. Dans cette question, l'entier  $n$  est fixé.

a) Déterminer la loi de  $X_n$ .

b) Déterminer la fonction de répartition de  $U_n$ .

3. Montrer que la suite de variables aléatoires  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire à densité  $U$  dont on déterminera une densité.

4. Écrire un programme en *Scilab* simulant la variable aléatoire  $U_n$ .

5.a) Déterminer la loi de  $Y_n$ .

b) Déterminer la fonction de répartition de  $W_n$ .

c) Soit  $q$  un réel vérifiant  $0 < q < 1$  et  $N \in \mathbf{N}^*$ . Établir la relation :  $\sum_{j=1}^N j q^{j-1} = \frac{1 - N(1-q)q^N - q^N}{(1-q)^2}$ .

d) Montrer que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire à densité  $W$  dont on déterminera une densité.

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 164

1. Cours.

2.a)  $X_n$  suit une loi géométrique de paramètre  $1/n$ .

b)  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,  $P(U_n \leq t) = P(X_n \leq nt)$  et si  $t \leq 0$ ,  $P(U_n \leq t) = 0$ .

Si  $t > \frac{1}{n}$ ,  $P(U_n \leq t) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor nt \rfloor}$ .

3. Si  $t < 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \leq t) = 0$  et si  $t > 0$ ,  $P(U_n \leq t) = 1 - \exp(\lfloor nt \rfloor \ln(1 - 1/n))$ . Or,

$\lfloor nt \rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nt \implies \lfloor nt \rfloor \ln(1 - 1/n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -t \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor nt \rfloor \ln(1 - 1/n) = -t \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \leq t) = 1 - e^{-t}$ .

Bilan : la suite  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge en loi vers une variable suivant la loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ .

4. `n=input('n='); k=1; p=1/n; while rand()>p; then k=k+1 end; U=k/n`

5.a) Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . On a :  $Y_n(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$  et pour  $k \geq 2$ ,  $P(Y_n = k) = (k-1) \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-2}$ .

b) Si  $t \leq 0$ ,  $P(W_n \leq t) = 0$  et si  $t > 0$ ,  $P(W_n \leq t) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} P(Y_n = k) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{k=2}^{\lfloor nt \rfloor} (k-1) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-2}$ , d'où :

$P(W_n \leq t) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor - 1} j \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}$  si  $t > 0$ .



c) On pose :  $S_N(q) = \sum_{j=0}^N q^j = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \implies S'_N(q) = \sum_{j=1}^N j q^{j-1} = \frac{1 - N(1 - q)q^N - q^N}{(1 - q)^2}$ .

d) Si  $t < 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \leq t) = 0$ . Pour  $t \geq 0$ , posons :  $N = [nt] - 1$  et  $q = 1 - 1/n$ .

On a :  $P(W_n \leq t) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{j=1}^{[nt]-1} j \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} = 1 - \frac{1}{n}([nt] - 1) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{[nt]-1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{[nt]-1}$ . Par suite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \leq t) = \begin{cases} 1 - t e^{-t} - e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}. \text{ On vérifie que cette fonction limite est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbf{R},$$

donc  $W$  est une variable aléatoire à densité et une densité  $g$  de  $W$  est donnée par :  $g(t) = \begin{cases} t e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ .

### EXERCICE SANS PRÉPARATION S 164

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$ .

On note  $\mathcal{P}$  la propriété suivante :  $\forall (x, y) \in S^2$  avec  $x \neq y$ ,  $\forall t \in ]0, 1[, tx + (1 - t)y \notin S$ .

1. Illustrer graphiquement la propriété  $\mathcal{P}$  lorsque  $E = \mathbf{R}^2$  muni du produit scalaire canonique.

2. Établir la propriété  $\mathcal{P}$  dans le cas général.

(on utilisera la fonction polynomiale  $P$  telle que :  $\forall t \in \mathbf{R}, P(t) = \|tx + (1 - t)y\|^2$ )

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 164

1. Sur un cercle de centre  $O$  de rayon 1, on place  $x$  et  $y$  ainsi que la corde qui joint  $x$  et  $y$ . Tous les points  $z$  de cette corde sont de la forme  $tx + (1 - t)y$  et vérifient  $\|z\| < 1$ , donc n'appartiennent pas à  $S$ .

2. On a  $\|tx + (1 - t)y\|^2 = \|x\|^2 t^2 + 2t(1 - t)\langle x, y \rangle + \|y\|^2(1 - t)^2 = 2(1 - \langle x, y \rangle)t^2 + 2(\langle x, y \rangle - 1)t + 1 = P(t)$ .

$P(t)$  est un trinôme en  $t$  qui prend la valeur 1 en  $t = 0$  et en  $t = 1$  et donc, est différent de 1 si  $t \notin \{0, 1\}$ .

De plus,  $t \mapsto P(t)$  n'est pas le polynôme constant égal à 1 car  $\langle x, y \rangle \neq 1$  par Cauchy-Schwarz.

En effet, si  $\langle x, y \rangle = 1 = \|x\| \cdot \|y\|$ , alors, il existe  $k \in \mathbf{R}_+$  tel que  $y = kx$ , d'où en passant aux normes,  $k = 1$  et  $x = y$  exclus...

## EXERCICE PRINCIPAL S 198

1. Question de cours : énoncer la formule du rang pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels (sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ) de dimension finie.

Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $\mathbf{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Soit  $f_n$  l'application définie sur  $\mathbf{R}_n[X]$  telle que :  $\forall P \in \mathbf{R}_n[X], f_n(P)(X) = \frac{(X^2 - 1)}{2} P''(X) + X P'(X) - P(X)$ .

2. Montrer que  $f_n$  est un endomorphisme de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

3. On suppose dans cette question que  $n = 3$ .

a) Déterminer la matrice  $M_3$  de  $f_3$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}_3[X]$ .

b) Déterminer une base de  $\text{Ker } f_3$  et une base de  $\text{Im } f_3$ . Ces espaces sont-ils supplémentaires dans  $\mathbf{R}_3[X]$  ?

c) La matrice  $M_3$  est-elle diagonalisable ?

4. Pour tout  $(P, Q) \in (\mathbf{R}_n[X])^2$ , on pose :  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ .

a) Vérifier qu'on définit ainsi un produit scalaire sur  $\mathbf{R}_n[X]$ .

b) Montrer que :  $\forall (P, Q) \in (\mathbf{R}_n[X])^2, \langle f_n(P), Q \rangle = \langle P, f_n(Q) \rangle$ . Qu'en déduit-on ?

5. Dans cette question,  $\mathbf{R}_n[X]$  est toujours muni du produit scalaire défini à la question 4.

Si  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $P \in \mathbf{R}_n[X]$ , on note  $p_k(P)$  la projection orthogonale de  $P$  sur  $\mathbf{R}_k[X]$ .

Soit  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  la famille définie par :  $T_0 = 1$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, T_k = X^k - p_{k-1}(X^k)$ .

a) Montrer que  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

b) Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, T_k$  est vecteur propre de  $f_n$  et préciser la valeur propre associée.

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 198

1. Cours.

2. La linéarité est claire (linéarité de la dérivation). De même,  $\mathbf{R}_n[X]$  est stable par  $f_n$  car  $\deg f_n(P) \leq \deg P$ .

3.a)b)c)  $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ . Une base de  $\text{Ker } f_3$  est  $(X)$  et une base de  $\text{Im } f_3$  est  $(1, 2X^2 - 1, 5X^3 - 3X)$ .

Ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans  $\mathbf{R}_3[X]$  car  $\text{Ker } f_3 \cap \text{Im } f_3 = \{0\}$  et que, d'après la formule du rang, la somme de leurs dimensions vaut  $4 = \dim \mathbf{R}_3[X]$ .

La matrice  $M_3$  est triangulaire : elle admet les 4 valeurs propres distinctes  $-1, 0, 2, 5 \implies M_3$  est diagonalisable.

4.a) L'application  $\langle, \rangle$  est clairement bilinéaire et symétrique.

D'autre part,  $\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P^2(t) dt \geq 0$ . Si  $\langle P, P \rangle = 0$ , vu que  $P^2$  est positive et continue sur  $[-1, 1]$ , on a :  $\forall t \in [-1, 1], P(t) = 0$ , donc le polynôme  $P$  est nul car il possède une infinité de racines.

b)  $\langle f_n(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 \left( \frac{t^2 - 1}{2} P''(t) + t P'(t) - P(t) \right) Q(t) dt$ . Or,  $\frac{t^2 - 1}{2} P''(t) + t P'(t) = \left( \frac{t^2 - 1}{2} P'(t) \right)'$ .

Une I.P.P. montre que  $\langle f_n(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 \left( -\frac{(t^2 - 1)}{2} P'(t)Q'(t) - P(t)Q(t) \right) dt$ , expression dans laquelle  $P$

et  $Q$  jouent des rôles symétriques, donc,  $\langle f_n(P), Q \rangle = \langle P, f_n(Q) \rangle$  : l'endomorphisme  $f_n$  est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée.

5.a)  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\deg T_k = k$  puisque  $p_{k-1}(X^k) \in \mathbf{R}_{k-1}[X]$ ; donc,  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .  
D'autre part,  $T_k \in \mathbf{R}_{k-1}[X]^\perp = \text{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_n)^\perp$ ; donc,  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  est une famille orthogonale.

b)  $f_n(T_k) \in \mathbf{R}_k[X] = \text{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_k)$ , donc  $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbf{R}^{k+1}$  tel que  $f_n(T_k) = \sum_{i=0}^k \alpha_i T_i$ .

Si  $0 \leq j \leq k-1$ , on a :  $\langle f_n(T_k), T_j \rangle = \sum_{i=0}^k \alpha_i \langle T_i, T_j \rangle = \alpha_j \|T_j\|^2$  et d'autre part,  $\langle f_n(T_k), T_j \rangle = \langle T_k, f_n(T_j) \rangle = 0$

car  $f_n(T_j) \in \mathbf{R}_j[X] = \text{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_j)$ . Ainsi,  $\forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $\alpha_j = 0$ , donc  $f_n(T_k) = \alpha_k T_k$ .

Finalement,  $T_k$  est un vecteur propre de  $f_n$ .

D'une part, le coefficient de  $X^k$  dans  $f_n(T_k)$  est  $\alpha_k$  et d'autre part,  $\frac{1}{2}k(k-1) + k - 1 = \frac{(k-1)(k+2)}{2}$ , donc  $T_k$  est vecteur propre de  $f_n$  associé à la valeur propre  $\frac{(k-1)(k+2)}{2}$ .

### EXERCICE SANS PRÉPARATION S 198

On coupe un morceau de bois de longueur 1 en deux positions  $U$  et  $V$  indépendantes, suivant chacune une loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

1. Donner un exemple dans lequel il n'est pas possible de former un triangle.

2. On écrit le script suivant en *Scilab* :

```
N=100000 ;
p=0 ;
for i=1:N
    C=rand(2,1) ;
    L1=min(C) ; L2=max(C)-min(C) ; L3=1-max(C) ;
    if (L1<=L2+L3)&(L2<=L1+L3)&(L3<=L1+L2) then
        p=p+1 ;
    end
end
disp(p/N)
```

Quelle valeur (approximative) ce script va-t-il retourner ?

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 198

1. Si les trois morceaux de bois sont de longueur  $2/3$ ,  $1/6$  et  $1/6$  par exemple, on ne peut former un triangle.

2. On se convainc facilement que les trois conditions sont équivalentes au fait que les trois morceaux sont de longueur inférieure ou égale à  $1/2$ . D'où :  $p = 2P([U \leq V] \cap [U \leq 1/2] \cap [V - U \leq 1/2] \cap [V \geq 1/2])$ .

Le domaine correspondant de  $[0, 1]^2$  est en fait le triangle rectangle de sommets  $(0, 1/2)$ ,  $(1/2, 1/2)$  et  $(1/2, 1)$ .

La probabilité cherchée est donc égale à 0.25 et le script renverra une valeur voisine de 0.25.



## EXERCICE PRINCIPAL S 199

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $p_1, p_2, \dots, p_n$  où pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $0 < p_i < 1$ . On pose :  $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$  et  $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$ .

1. Question de cours : énoncer le théorème de stabilité de la loi de Poisson pour la somme.
2. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose :  $q_i = 1 - (1 - p_i)e^{p_i}$ . Soit  $U_1, U_2, \dots, U_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs  $q_1, q_2, \dots, q_n$  et indépendantes de  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose :  $Z_i = \begin{cases} 0 & \text{si l'événement } [U_i = Y_i = 0] \text{ est réalisé} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ . On pose :  $Z = \sum_{i=1}^n Z_i$ .

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- a) Vérifier que  $0 \leq q_i \leq 1$  et déterminer la loi de  $Z_i$ .
- b) Calculer  $P(Z_i \neq Y_i)$ .

c) En déduire que  $P(Z_i \neq Y_i) \leq p_i^2$  et que  $P(Z \neq Y) \leq \sum_{i=1}^n p_i^2$ .

3.a) Montrer que pour toute partie  $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :  $P(Z \in A) \leq P(Z \neq Y) + P(Y \in A)$ .

b) En déduire pour toute partie  $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'inégalité :  $\left| P(Z \in A) - \sum_{i \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \right| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2$ .

4.a) Établir l'inégalité  $\sum_{i=1}^n p_i^2 \geq \frac{\lambda^2}{n}$  avec égalité si et seulement si  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p = \frac{\lambda}{n}$ .

b) Déterminer un majorant de l'erreur commise par l'approximation de la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  par la loi de Poisson  $\mathcal{P}(np)$ .

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 199

1. Cours.

2.a) On a déjà  $q_i \leq 1$ . D'autre part, la convexité de la fonction exponentielle  $\implies e^{-p_i} \geq 1 - p_i \implies q_i \geq 0$ .  $P(Z_i = 0) = P([U_i = 0] \cap [Y_i = 0]) = P(U_i = 0)P(Y_i = 0) = e^{-p_i}(1 - q_i) = 1 - p_i$  par indépendance de  $U_i$  et  $Y_i$ . Donc,  $Z_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p_i$ .

b)  $[Z_i = Y_i] = ([Z_i = 0] \cap [Y_i = 0]) \cup ([Z_i = 1] \cap [Y_i = 1])$ , les deux événements dont on prend l'union étant incompatibles. Or,  $[Z_i = 0] = ([U_i = 0] \cap [Y_i = 0]) \implies [Z_i = 0] \subset [Y_i = 0] \implies [Z_i = 0] \cap [Y_i = 0] = [Z_i = 0]$ .

D'autre part,  $[Z_i = 1] = [U_i = 1] \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Y_i = k] \implies [Y_i = 1] \subset [Z_i = 1] \implies [Z_i = 1] \cap [Y_i = 1] = [Y_i = 1]$ .

Finalement,  $[Z_i = Y_i] = [Z_i = 0] \cup [Y_i = 1] \implies P(Z_i = Y_i) = P(Z_i = 0) + P(Y_i = 1) = 1 - p_i + p_i e^{-p_i}$ , d'où

$$P(Z_i \neq Y_i) = p_i - p_i e^{-p_i} = p_i(1 - e^{-p_i}).$$

c) On sait que  $e^{-p_i} \geq 1 - p_i \implies 1 - e^{-p_i} \leq p_i \implies P(Z_i \neq Y_i) \leq p_i^2$ .

On remarque que  $[Z \neq Y] \subset \bigcup_{i=1}^n [Z_i \neq Y_i]$ . Par suite,  $P(Z \neq Y) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n [Z_i \neq Y_i]\right) \leq \sum_{i=1}^n P(Z_i \neq Y_i) \leq \sum_{i=1}^n p_i^2$ .

3. D'après le théorème de stabilité de la loi de Poisson, on a  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  et  $P(Y \in A) = \sum_{i \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ .

On a :  $P(Z \in A) = P([Z \in A] \cap [Z \neq Y]) + P([Z \in A] \cap [Z = Y]) = P([Z \in A] \cap [Z \neq Y]) + P([Y \in A] \cap [Z = Y])$ .  
D'où,  $P(Z \in A) \leq P(Z \neq Y) + P(Y \in A) \implies P(Z \in A) - P(Y \in A) \leq P(Z \neq Y)$ .

En inversant les rôles de  $Y$  et  $Z$ , on obtient :  $P(Y \in A) - P(Z \in A) \leq P(Z \neq Y)$ , d'où finalement :

$$|P(Z \in A) - P(Y \in A)| \leq P(Z \neq Y).$$

4.a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$\left( \sum_{i=1}^n 1 \times p_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n 1^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n p_i^2 \right), \text{ c'est-à-dire, } \lambda^2 \leq n \sum_{i=1}^n p_i^2 \text{ soit encore } \sum_{i=1}^n p_i^2 \geq \frac{\lambda^2}{n}.$$

L'égalité est satisfaite si et seulement si tous les  $p_i$  sont égaux, de valeur commune  $p$ , telle que  $p = \frac{\lambda}{n}$ .

b) En prenant le cas des  $p_i$  tous égaux et donc égaux à  $p = \frac{\lambda}{n}$ , la variable aléatoire  $Z$  suit la loi binomiale de paramètres  $(n, p = \lambda/n)$  qui est approchée, lorsque  $n$  est grand et donc  $p$  petit devant  $n$ , par une loi de Poisson de paramètre  $np = \lambda$ . D'après la question 3, l'erreur commise est majorée par  $\sum_{i=1}^n p_i^2 = np^2 = \frac{\lambda^2}{n}$ .

### EXERCICE SANS PRÉPARATION S 199

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $q$  un projecteur de  $E$ .

Montrer que  $F$  est stable par  $q$  si et seulement si  $F = (F \cap \text{Ker}(q)) \oplus (F \cap \text{Im}(q))$ .

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 199

On a :  $E = \text{Ker}(q) \oplus \text{Im}(q)$ .

On suppose que  $F$  est stable par  $q$ .

Il est évident que  $(F \cap \text{Ker}(q)) \cap (F \cap \text{Im}(q)) = \{0\}$ .

Soit  $y = v + w$  un élément de  $F$  avec  $v \in \text{Ker}(q)$  et  $w \in \text{Im}(q)$ . Alors,  $q(y) = w$  et  $w \in F$ , donc  $w \in F \cap \text{Im}(q)$  et comme  $v = y - w$ , on a aussi  $v \in F \cap \text{Ker}(q)$ . Par suite,  $F = (F \cap \text{Ker}(q)) \oplus (F \cap \text{Im}(q))$ .

Supposons que  $F = (F \cap \text{Ker}(q)) \oplus (F \cap \text{Im}(q))$ .

Soit  $y = v + w \in F$  avec  $v \in (F \cap \text{Ker}(q))$  et  $w \in (F \cap \text{Im}(q))$ .

Alors,  $q(y) = q(w) = w$  et donc,  $q(w) \in F$  et  $F$  est stable par  $q$ .

## EXERCICE PRINCIPAL S 203

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes, de même loi, admettant une densité  $f$  sur  $\mathbf{R}$  et dont on note  $F$  la fonction de répartition.

Soit  $A$  l'événement défini par :  $A = \{\omega \in \Omega / \exists k \geq 2, X_k(\omega) > X_1(\omega)\}$ .

1. Question de cours : formule des probabilités totales.

2. On suppose **dans cette question uniquement** que les variables aléatoires  $X_i$  suivent la loi uniforme sur le segment  $[0, 1]$ . Pour tout entier  $k \geq 2$ , on pose :  $M_k = -\max(X_2, X_3, \dots, X_k)$ .

a) Déterminer une densité  $h_k$  de  $M_k$ .

b) Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note  $g_n$  une densité de la variable aléatoire  $X_1 + M_n$ .

Montrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on a :  $g_n(x) = \begin{cases} 1 - (-x)^{n-1} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ (1-x)^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

c) Calculer  $P\left(\bigcap_{k=2}^n [X_1 \geq X_k]\right)$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

d) En déduire la valeur de  $P(A)$ .

3. On suppose dans cette question que  $f$  est strictement positive sur  $\mathbf{R}$ .

a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$  et pour tout réel  $t$ , on a :  $P\left(\bigcap_{k=2}^n [X_1 \geq X_k]\right) \leq (F(t))^{n-1} + (1 - F(t))$ .

b) Justifier que pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , il existe un unique réel  $t$  vérifiant  $F(t) = 1 - \varepsilon$ .

c) Calculer  $P(A)$ .

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 203

1. Cours.

2.a)  $\forall x \in \mathbf{R}, P(M_k \leq x) = P(-\max(X_2, X_3, \dots, X_k) \leq x) = 1 - P(\max(X_2, X_3, \dots, X_k) \leq -x)$ , soit par

indépendance et similitude de loi :  $P(M_k \leq x) = 1 - (P(X_2 \leq -x))^{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - (-x)^{k-1} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ .

Par suite,  $h_k(x) = (-1)^k(k-1)x^{k-2} \mathbf{1}_{[-1,0]}(x)$ .

b) D'après le théorème de convolution, on a :  $g_n(x) = \int_0^1 h_n(x-t) dt$  et  $-1 \leq x-t \leq 0 \iff x \leq t \leq x+1$ .

1er cas :  $x \in [-1, 0]$ . Alors,  $g_n(x) = \int_0^{x+1} (-1)^n(n-1)(x-t)^{n-2} dt = \int_0^{x+1} (n-1)(t-x)^{n-2} dt = 1 - (-x)^{n-1}$ .

2ème cas :  $x \in [0, 1]$ . Alors,  $g_n(x) = \int_x^1 (-1)^n(n-1)(x-t)^{n-2} dt = \int_x^1 (n-1)(t-x)^{n-2} dt = (1-x)^{n-1}$ .

Bilan :  $g_n(x) = \begin{cases} 1 - (-x)^{n-1} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ (1-x)^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .



$$c) P\left(\bigcap_{k=2}^n [X_1 \geq X_k]\right) = P(X_1 \geq \max(X_2, X_3, \dots, X_n)) = P(X_1 + M_n \geq 0) = \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 (1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{n}.$$

Résultat prévisible par symétrie.

$$d) A = \bigcup_{k=2}^{+\infty} [X_k > X_1] \implies \bar{A} = \bigcap_{k=2}^{+\infty} [X_k \leq X_1]. \text{ Par la propriété de limite monotone, on a :}$$

$$P(\bar{A}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} [X_k \leq X_1]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \implies P(A) = 1.$$

3.a) La famille  $((X_1 \leq t), (X_1 > t))$  forme un système complet d'événements et la formule des probabilités

$$\text{totales} \implies P\left(\bigcap_{k=2}^n [X_k \leq X_1]\right) = P\left(\bigcap_{k=2}^n [X_k \leq X_1] \cap [X_1 \leq t]\right) + P\left(\bigcap_{k=2}^n [X_k \leq X_1] \cap [X_1 > t]\right), \text{ d'où,}$$

$$P\left(\bigcap_{k=2}^n [X_k \leq X_1]\right) \leq P\left(\bigcap_{k=2}^n [X_k \leq t]\right) + P([X_1 > t]) = (F(t))^{n-1} + (1 - F(t)).$$

b) Puisque  $f$  est strictement positive sur  $\mathbf{R}$ , la fonction  $F$  réalise une bijection de  $\mathbf{R}$  sur  $]0, 1[$ .

Il existe donc un unique réel  $t$  tel que  $F(t) = 1 - \varepsilon \in ]0, 1[$ .

c) Le même raisonnement que celui de la question 2.d) conduit, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , à :

$$\forall \varepsilon > 0, P(\bar{A}) \leq \varepsilon, \text{ puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \varepsilon)^{n-1} = 0. \text{ Conclusion : } P(A) = 1.$$

### EXERCICE SANS PRÉPARATION S 203

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  diagonalisable. On note  $P$  un polynôme non constant de  $\mathbf{C}[X]$ .

Établir l'existence d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  telle que  $P(M) = A$ .

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 203

Posons  $A = QDQ^{-1}$  avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  (certains  $\lambda_i$  pouvant être égaux). D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme  $P(X) - \lambda_i$  admet au moins une racine  $\mu_i \in \mathbf{C}$ .

Dans ces conditions, la matrice  $M = Q \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) Q^{-1}$  convient.

## EXERCICE PRINCIPAL S 209

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles à densité, indépendantes et de même loi, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et dont une densité  $f$  est de classe  $C^1$  et à valeurs strictement positives sur  $\mathbf{R}$ . On note  $F$  la fonction de répartition de  $X_1$ . Pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$  et pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , on pose :  $U_k(t) = \mathbf{1}_{[X_k \leq t]}$ .

1. Question de cours : énoncer le théorème de Slutsky.
2. Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 1 et  $t$  réel, on définit les variables aléatoires  $F_n(t)$  et  $f_n(t)$  par :

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k(t) \quad \text{et} \quad f_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{2} \left( F_n\left(t + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - F_n\left(t - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

- a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire  $nF_n(t)$ . En déduire  $E(F_n(t))$  et  $V(F_n(t))$ .
- b) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires  $(\sqrt{n}(F_n(t) - F(t)))_{n \geq 1}$ .

3.a) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , on pose :  $Y_k(t) = U_k\left(t + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - U_k\left(t - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ .

Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Y_k(t)$  et en déduire pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , la loi de la variable aléatoire  $2\sqrt{n}f_n(t)$ .

- b) Déterminer pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f_n(t))$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} V(f_n(t))$ .

On admet alors que la suite  $(n^{\frac{1}{4}}(f_n(t) - E(f_n(t))))_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale  $\mathcal{N}\left(0, \frac{f(t)}{2}\right)$ .

4. À l'aide de la question 3, déterminer la limite en loi de la suite de variables aléatoires  $(n^{\frac{1}{4}}(f_n(t) - f(t)))_{n \geq 1}$ .

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 209

1. Cours.

2.a) Les  $X_k$  sont indépendantes, donc les variables aléatoires de Bernoulli  $U_k(t)$ , pour  $t$  donné, sont indépendantes, d'où :  $nF_n(t) = \sum_{k=1}^n U_k(t) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F(t))$ ,  $E(F_n(t)) = F(t)$  et  $V(F_n(t)) = \frac{1}{n}F(t)(1 - F(t))$ .

b) Les conditions d'application du théorème limite central sont réunies, donc la suite  $\left( \frac{F_n(t) - E(F_n(t))}{\sqrt{V(F_n(t))}} \right)_{n \geq 1}$ ,

c'est-à-dire la suite  $\left( \sqrt{n} \frac{F_n(t) - F(t)}{\sqrt{F(t)(1 - F(t))}} \right)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $A \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

Donc, la suite  $(\sqrt{n}(F_n(t) - F(t)))_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $B \hookrightarrow \mathcal{N}(0, F(t)(1 - F(t)))$ .

3.a) La définition de  $Y_k(t)$  montre que  $(Y_k(t))(\Omega) = \{0, 1\}$  et que  $P(Y_k(t) = 1) = P\left(t - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq X_k \leq t + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ .

Donc,  $Y_k(t)$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p_n(t) = F\left(t + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - F\left(t - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ . D'autre part,

$$2\sqrt{n}f_n(t) = n\left(F_n\left(t + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - F_n\left(t - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sum_{k=1}^n Y_k(t) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n(t)) \text{ par indépendance des } Y_k(t).$$

b) Par linéarité de l'espérance, on a :  $E(f_n(t)) = \frac{n}{2\sqrt{n}} p_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{2} \left( F\left(t + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - F\left(t - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$ .

Puisque  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}$ , la fonction  $F$  est de classe au moins  $C^1$  sur  $\mathbf{R}$ . Un développement limité à l'ordre 1 donne :  $E(f_n(t)) = \frac{\sqrt{n}}{2} \left( F(t) + \frac{1}{\sqrt{n}} f(t) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - F(t) + \frac{1}{\sqrt{n}} f(t) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) = f(t) + o(1)$ .

Par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f_n(t)) = f(t)$ . De même, avec le même développement limité, on obtient,

$$4nV(f_n(t)) = np_n(t)(1-p_n(t)) = 2\sqrt{n}f(t) + o(\sqrt{n}) \Rightarrow \sqrt{n}V(f_n(t)) = \frac{f(t)}{2} + o(1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}V(f_n(t)) = \frac{f(t)}{2}.$$

$$4. \text{ On a : } n^{\frac{1}{4}}(f_n(t) - f(t)) = n^{\frac{1}{4}}(f_n(t) - E(f_n(t))) + n^{\frac{1}{4}}(E(f_n(t)) - f(t)).$$

$$\text{Posons : } Z_n = n^{\frac{1}{4}}(f_n(t) - f(t)), Q_n = n^{\frac{1}{4}}(f_n(t) - E(f_n(t))) \text{ et } u_n = n^{\frac{1}{4}}(E(f_n(t)) - f(t)) \Rightarrow Z_n = Q_n + u_n.$$

La fonction  $f$  admet une dérivée  $f'$  continue sur  $\mathbf{R}$ , donc bornée sur tout segment. Un développement limité à l'ordre 2 montre alors que :  $E(f_n(t)) = f(t) + \frac{1}{2\sqrt{n}} f'(t) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow u_n = \frac{1}{2n^{\frac{1}{4}}} f'(t) + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)$  qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Donc,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$ . On peut supposer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires certaines ; ainsi,  $[|u_n| \leq \varepsilon] = \Omega \Rightarrow \exists N, n \geq N \Rightarrow P(|u_n| \geq \varepsilon) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|u_n| \geq \varepsilon) = 0$ .

La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers 0. Le théorème de Slutsky nous apprend alors que la suite

$$(Z_n)_{n \geq 1} = (Q_n + u_n)_{n \geq 1} \text{ converge en loi vers } Z = Q + 0 = Q, \text{ où } Q \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{f(t)}{2}\right).$$

$$\text{Bilan : la suite } (Z_n = n^{\frac{1}{4}}(f_n(t) - f(t)))_{n \geq 1} \text{ converge en loi vers } Z \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{f(t)}{2}\right).$$

## EXERCICE SANS PRÉPARATION S 209

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . On considère l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de sa norme associée  $\|\cdot\|$ . Soit  $f$  un endomorphisme symétrique de  $\mathbf{R}^n$ . On pose :  $\rho = \max \{|\lambda|, \lambda \in \text{Spectre}(f)\}$ .

Montrer que  $\rho = \sup \left\{ \frac{|\langle f(x), x \rangle|}{\|x\|^2}, x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0_{\mathbf{R}^n} \right\}$ .

## CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 209

Puisque l'endomorphisme  $f$  est symétrique, il est diagonalisable dans une base orthonormée  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  où  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

$$\text{Soit } x \in \mathbf{R}^n. \text{ On a } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow \langle f(x), x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \rho \sum_{i=1}^n x_i^2 = \rho \|x\|^2.$$

$$\text{Par suite, } \sup \left\{ \frac{|\langle f(x), x \rangle|}{\|x\|^2}, x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0_{\mathbf{R}^n} \right\} \leq \rho.$$

Soit  $k$  l'indice pour lequel on a  $\rho = \lambda_k$ . Pour  $x = e_k$ , on a :  $|\langle f(x), x \rangle| = |\langle \lambda_k e_k, e_k \rangle| = \lambda_k = \rho$ .

$$\text{Finalement, on a bien : } \rho = \sup \left\{ \frac{|\langle f(x), x \rangle|}{\|x\|^2}, x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0_{\mathbf{R}^n} \right\}.$$



## EXERCICE PRINCIPAL S 212

1. Question de cours : polynômes annulateurs d'endomorphisme ; définition et propriétés.

Soit  $E = \mathbf{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $E_n = \mathbf{R}_n[X]$  le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On note  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $E_n$ . Soit  $s$  un réel fixé.

2. Soit  $P$  un polynôme de  $E$ . On pose :  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $\widehat{P}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-s} \int_s^x P(t) dt & \text{si } x \neq s \\ P(s) & \text{si } x = s \end{cases}$ .

a) Montrer que  $x \mapsto \widehat{P}(x)$  est continue sur  $\mathbf{R}$  et que  $\widehat{P}$  est un polynôme.

b) Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $E$  par :  $\varphi(P) = \widehat{P}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $E_n$  est stable par  $\varphi$ .

c) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $\varphi_n$  la restriction de  $\varphi$  à  $E_n$ . Montrer que  $\varphi_n$  est un automorphisme de  $E_n$ .

Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on pose  $T_0(x) = 1$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$  et tout  $x \in \mathbf{R}$ , on pose :  $T_k(x) = (x-s)^k$ .

3.a) Montrer que  $(T_0, T_1, T_2, T_3)$  est une base de  $E_3$  formée de vecteurs propres de  $\varphi_3$ .

b) Décomposer le polynôme  $e_3$  sur cette base.

4. On note  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les quatre valeurs propres de  $\varphi_3$ , avec  $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ .

On pose :  $L(x) = (x-\lambda_0)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ . On définit les fonctions polynômiales  $L_0, L_1, L_2$  et  $L_3$  par :

$$L_0(x) = \frac{4L(x)}{x-\lambda_0}, \quad L_1(x) = \frac{-48L(x)}{x-\lambda_1}, \quad L_2(x) = \frac{108L(x)}{x-\lambda_2} \quad \text{et} \quad L_3(x) = \frac{-64L(x)}{x-\lambda_3}.$$

a) Calculer  $L_0 + L_1 + L_2 + L_3$  et  $L_0 + \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{3}L_2 + \frac{1}{4}L_3$ .

b) On définit les endomorphismes :  $\ell = L(\varphi_3)$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ ,  $\ell_k = L_k(\varphi_3)$ .

(i) Déterminer  $\ell$ . (ii) Pour tout  $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , déterminer  $\ell_k^2 - \ell_k$ . (iii) Pour tout  $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , expliciter  $\text{Im } \ell_k$ .

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 212

1. Cours.

2.a) Soit  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  un polynôme de  $E$ . La fonction  $x \mapsto \widehat{P}(x)$  est clairement continue pour  $x \neq s$ .

D'autre part, pour  $x \neq s$ , on a  $\widehat{P}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} \frac{x^{k+1} - s^{k+1}}{x-s} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} \sum_{j=0}^k s^j x^{k-j}$  et  $\lim_{x \rightarrow s} \widehat{P}(x) = P(s)$ .

Donc,  $x \mapsto \widehat{P}(x)$  est continue sur  $\mathbf{R}$  et  $\widehat{P}$  est un polynôme de  $E$ .

b) De plus,  $\deg \widehat{P} = \deg P$ , donc  $E_n$  est stable par  $\varphi$ .

c) On remarque que  $\varphi$  est linéaire par linéarité de l'intégration et à valeurs dans  $E_n$  d'après la question b).

L'image de la base  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  est une famille libre de  $(n+1)$  polynômes de degrés respectifs  $0, 1, \dots, n$ , donc libre dans  $E_n$ . Donc,  $\varphi_n$  est bijective de  $E_n$  dans  $E_n$ .

3.a) Soit  $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ . On a :  $\widehat{T}_k(x) = \frac{1}{x-s} \int_s^x (t-s)^k dt = \frac{1}{k+1} (x-s)^k$ . Donc,  $T_k$  est un vecteur propre de  $\varphi_3$  associé à la valeur propre  $\frac{1}{k+1}$ . Ces valeurs propres  $(1, 1/2, 1/3, 1/4)$  étant deux à deux distinctes, la famille  $(T_0, T_1, T_2, T_3)$  forme une famille libre de  $E$  constituée de quatre vecteurs propres de  $\varphi_3$  : c'est une base de  $E_3$ .

b) On applique la formule de Taylor à  $f(x) = x^3$  à l'ordre 3 au point  $s$ . On obtient :

$$x^3 = f(s) + f'(s)(x-s) + \frac{f''(s)}{2}(x-s)^2 + \frac{f^{(3)}(s)}{6}(x-s)^3 \implies x^3 = s^3T_0 + 3s^2T_1 + 3sT_2 + T_3.$$

4.a) On pose :  $Q = L_0 + L_1 + L_2 + L_3 \implies Q(1) = L_0(1) = 1, Q(1/2) = 1, Q(1/3) = 1$  et  $Q(1/4) = 1$ .

Or,  $Q$  est de degré 4  $\implies Q(x) - 1 = \alpha L(x)$ . Une comparaison des coefficients constants  $\implies 1 + \alpha/24 = 1 \implies \alpha = 0$  et  $Q = 1$ . On aurait pu trouver ce résultat plus rapidement en remarquant que deux polynômes de  $\mathbf{R}_3[X]$  prenant la même valeur en quatre points distincts sont égaux (\*).

On pose :  $R = L_0 + \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{3}L_2 + \frac{1}{4}L_3$ . On trouve par un calcul analogue au précédent que  $R(x)$  prend les valeurs respectives 1, 1/2, 1/3, 1/4 aux points 1, 1/2, 1/3, 1/4. Grâce à la remarque (\*), on en déduit que  $R$  est le polynôme  $e_1$  ( $R(x) = x$ ).

b) (i)  $\ell = 0$  car  $\varphi_3$  diagonalisable est associé à une matrice du type  $D = \text{diag}(1, 1/2, 1/3, 1/4)$  telle que  $L(D) = 0$ .

(ii)  $\ell_0 = L_0(\varphi_3) = 4(\varphi_3 - 1/2 \text{id}) \circ (\varphi_3 - 1/3 \text{id}) \circ (\varphi_3 - 1/4 \text{id}) \implies (\varphi_3 - \text{id}) \circ \ell_0 = 4\ell = 0 \implies \varphi_3 \circ \ell_0 = \ell_0$ .

De plus,  $(\varphi_3 - 1/4 \text{id}) \circ \ell_0 = 3/4 \ell_0$  et  $(\varphi_3 - 1/3 \text{id}) \circ 3/4 \ell_0 = 3/4 \ell_0 - 1/4 \ell_0 = 1/2 \ell_0$ .

Enfin,  $4(\varphi_3 - 1/2 \text{id}) \circ 1/2 \ell_0 = 2(\ell_0 - 1/2 \ell_0) = \ell_0$ , ce qui donne en définitive,  $\ell_0^2 = \ell_0$  : donc,  $\ell_0$  est un projecteur et il en est de même pour tous les  $\ell_k$ .

(iii)  $(\varphi_3 - \text{id}) \circ \ell_0 = 0 \implies \text{Im}(\ell_0) \subset \text{Ker}(\varphi_3 - \text{id})$ . Or, 1 étant valeur propre de  $\varphi_3$  et  $\varphi_3$  ayant quatre valeurs propres distinctes en dimension 4,  $\text{Ker}(\varphi_3 - \text{id})$  est de dimension 1. D'autre part,  $\ell_0$  n'est pas nul sinon ce serait un polynôme annulateur de  $\varphi_3$  et il n'a que trois racines. Donc,  $\text{Im}(\ell_0) = \text{Ker}(\varphi_3 - \text{id})$ .

Résultats identiques *mutatis mutandis* avec les autres  $\ell_k$ .

## EXERCICE SANS PRÉPARATION S 212

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Dans cet exercice,  $X$  est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

1. Soit  $N$  la variable aléatoire prenant pour valeur le plus petit entier  $n$  tel que  $[X \leq n]$  est réalisé, c'est-à-dire que :  $\forall \omega \in \Omega, N(\omega) = \min\{n \in \mathbf{N}, X(\omega) \leq n\}$ . Déterminer la loi de  $N$ .

2. Soit  $M$  la variable aléatoire prenant pour valeur le plus grand entier  $n$  tel que  $[X \geq n]$  est réalisé. Montrer que  $N$  et  $M + 1$  sont de même loi.

3. Donner une simulation en *Scilab* de la variable aléatoire  $M$  pour une valeur de  $\lambda$  entrée par l'utilisateur.

## CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 212

1.  $N(\Omega) = \mathbf{N}^*$  et  $\forall n \in \mathbf{N}^*, [N = n] = [n - 1 < X \leq n] \implies P(N = n) = e^{-\lambda(n-1)}(1 - e^{-\lambda})$ .

2.  $\forall n \in \mathbf{N}, [M = n] = [n \leq X < n + 1] \implies P(M = n) = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}) \implies P(M + 1 = n) = P(M = n - 1)$  c'est-à-dire que  $P(M + 1 = n) = P(N = n)$ .

3. On peut proposer :

```
lambda=input('entrez la valeur de lambda :')
```

```
M=grand(1,1,'geom',1-exp(-lambda))+1
```



## EXERCICE PRINCIPAL S 213

1. Question de cours : stabilité de la loi  $\gamma$  pour la somme.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans l'exercice sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Soit  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre 1. On pose  $T_0 = 0$ .

Une puce se déplace sur un axe orienté infini. Au temps 0, elle se trouve à l'origine (point d'abscisse 0). Au bout du temps  $T_1$ , la puce se déplace d'une unité vers la droite : elle atteint alors le point d'abscisse 1.

De façon générale, si la puce arrive à l'instant  $t$  ( $t \in \mathbb{N}^*$ ) au point d'abscisse  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), elle se déplace d'une unité

vers la droite au bout d'un temps  $T_n$ . Ainsi, elle sera au point d'abscisse  $(n+1)$  au temps  $(t+T_n)$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au temps que met la puce pour atteindre le point d'abscisse  $n$ .

2.a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $X_n$  en fonction de  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . Préciser la loi de  $X_n$ .

b) Soit  $\lambda$  un réel positif et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour quelles valeurs de  $\lambda$  la variable aléatoire  $e^{\lambda T_n}$  admet-elle une espérance ? Calculer cette espérance lorsqu'elle existe.

c) En déduire l'espérance de  $e^{\lambda X_n}$  lorsqu'elle existe.

3. Soit  $\alpha$  un réel strictement supérieur à  $\frac{1}{2}$ . Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose :  $u_n = e^{-\sqrt{n}} \times \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\right)^n$ .

a) À l'aide de l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire  $\exp\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)$ , montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,

on a :  $P([X_n \geq n + n^\alpha]) \leq u_n \times \exp(-n^{\alpha-\frac{1}{2}})$ .

b) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$ .

c) En déduire l'existence d'un réel  $K$  indépendant de  $n$  tel que :  $\forall n \geq 2, P([X_n \geq n + n^\alpha]) \leq K \times \exp(-n^{\alpha-\frac{1}{2}})$ .

d) Quelle est la nature de la série de terme général  $\exp(-n^{\alpha-\frac{1}{2}})$  ?

4. On admet la proposition qui suit. Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'événements de  $\mathcal{A}$ . Si la somme  $\sum_n P(A_n)$  est finie, alors la probabilité qu'une infinité d'événements  $A_n$  se réalisent simultanément est nulle.

En déduire qu'à partir d'un certain rang, l'événement  $[X_n < n + n^\alpha]$  est réalisé presque sûrement.

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 213

1. Cours.

2.a) On a :  $X_n = \sum_{k=1}^n T_k$  et les  $T_k$  sont indépendantes et de même loi  $\gamma(1) \implies X_n$  suit la loi  $\gamma(n)$  par stabilité de la loi  $\gamma$  pour la somme.

b) Sous réserve d'existence, on a d'après le théorème de transfert,  $E(e^{\lambda T_n}) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} e^{-t} dt$  et cette intégrale est convergente si et seulement si  $\lambda < 1$ . Dans ce cas,  $E(e^{\lambda T_n}) = \frac{1}{1-\lambda}$ .

c) On a :  $e^{\lambda X_n} = \prod_{k=1}^n e^{\lambda T_k}$  et puisque les variables aléatoires  $T_k$  sont indépendantes, il en est de même des variables aléatoires  $e^{\lambda T_k}$  (lemme des coalitions). D'où : pour  $\lambda < 1$ ,  $E(e^{\lambda X_n}) = \prod_{k=1}^n E(e^{\lambda T_k}) = \frac{1}{(1-\lambda)^n}$ .



3.a) On a :  $[X_n \geq n + n^\alpha] = \left[ \frac{X_n}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} + n^{\alpha-\frac{1}{2}} \right] = \left[ \exp\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right) \geq \exp(\sqrt{n} + n^{\alpha-\frac{1}{2}}) \right]$ .

On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire  $\exp\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)$  dont l'espérance existe d'après la question précédente, puisque  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}} < 1$ , et vaut  $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\right)^n$ .

Il vient :  $P\left[\exp\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right) \geq \exp(\sqrt{n} + n^{\alpha-\frac{1}{2}})\right] = P([X_n \geq n + n^\alpha]) \leq u_n \times \exp(-n^{\alpha-\frac{1}{2}})$ .

b) On a :  $u_n = \exp\left(-\sqrt{n} - n \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$  et  $\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Par suite,  $u_n = \exp(-1 + o(1))$ , donc, la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  converge vers  $e^{-1}$ .

c) La suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  est convergente donc bornée. En effet,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n > n_0 \implies e^{-1} - \varepsilon < u_n < e^{-1} + \varepsilon$ .

Soit  $m = \inf\{u_2, u_3, \dots, u_{n_0}, e^{-1} - \varepsilon\}$  et  $M = \sup\{u_2, u_3, \dots, u_{n_0}, e^{-1} + \varepsilon\}$ . Alors,  $\forall n \geq 2, m \leq u_n \leq M$ .

Soit  $K$  un majorant de  $(u_n)_{n \geq 2}$ . On a bien :  $\forall n \geq 2, P([X_n \geq n + n^\alpha]) \leq K \times \exp(-n^{\alpha-\frac{1}{2}})$ .

d) On a :  $\exp(-n^{\alpha-\frac{1}{2}}) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  par exemple, donc la série de terme général  $\exp(-n^{\alpha-\frac{1}{2}})$  converge.

4. Soit  $A_n = [X_n \geq n + n^\alpha]$ . Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général  $P(A_n)$  converge. D'après le résultat admis (lemme de Borel-Cantelli), la probabilité que seulement un nombre fini des  $A_n$  se réalisent est égal à 1. Cela signifie qu'il existe  $n_0$  tel que pour  $n > n_0$ , on a  $P(A_n) = 0$ , c'est-à-dire que pour  $n > n_0$ , on a  $P([X_n < n + n^\alpha]) = 1$ .

### EXERCICE SANS PRÉPARATION S 213

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$ ,  $p$  un projecteur de  $E$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

Montrer que  $p$  et  $u$  commutent si et seulement si  $\text{Ker}(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont stables par  $u$ .

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 213

On sait que  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ .

On suppose que  $p \circ u = u \circ p$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(p)$ , alors  $p \circ u(x) = u \circ p(x) = 0$ , donc  $u(x) \in \text{Ker}(p)$  et  $\text{Ker}(p)$  est stable par  $u$ .

Soit  $y \in \text{Im}(p)$ , alors  $p \circ u(y) = u \circ p(y) = u(y)$ , donc  $p(u(y)) = u(y) \in \text{Im}(p)$  et  $\text{Im}(p)$  est stable par  $u$ .

Bilan :  $\text{Ker}(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont stables par  $u$ .

On suppose que  $\text{Ker}(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont stables par  $u$ .

Pour tout vecteur  $z = x + y \in E$ , avec  $x \in \text{Ker}(p)$  et  $y \in \text{Im}(p)$ , on a :

$$p \circ u(z) = p \circ u(x) + p \circ u(y) = u(y) \text{ et } u \circ p(z) = u \circ p(x) + u \circ p(y) = u(y).$$

Bilan :  $p \circ u = u \circ p$ .

## EXERCICE PRINCIPAL S 215

1. Question de cours : définition et propriétés d'un produit scalaire.

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 1$  muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Dans tout l'exercice, on considère un endomorphisme  $\varphi$  de  $E$  antisymétrique.

On dit qu'un endomorphisme  $\varphi$  est antisymétrique si :  $\forall (x, y) \in E \times E$ , on a :  $\langle x, \varphi(y) \rangle = -\langle \varphi(x), y \rangle$ .

2. Établir les propriétés suivantes :

a) Pour tout  $x \in E$ , on a :  $\langle x, \varphi(x) \rangle = 0$ .

b)  $\text{Im}(\varphi) = (\text{Ker}(\varphi))^\perp$ .

c) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que si  $F$  est stable par  $\varphi$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $\varphi$ .

d)  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi^2)$ , où  $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ .

e) Le spectre de  $\varphi$  est soit vide soit réduit à  $\{0\}$ .

3. Montrer que toutes les valeurs propres de  $\varphi^2$  sont négatives ou nulles.

4. Soit :

- $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p \geq 2$  ;
- $\alpha$  un réel strictement positif ;
- $u$  un endomorphisme antisymétrique de  $F$  tel que  $u^2 = -\alpha^2 \text{id}_F$ , où  $\text{id}_F$  est l'endomorphisme identité de  $F$ .

a) On suppose que  $p = 2$ . Établir l'existence d'une base orthonormale de  $F$  dans laquelle la matrice  $A_\alpha$  de  $u$

est donnée par :  $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ .

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur  $p$ , montrer qu'il existe une base de  $F$  dans laquelle la

matrice  $B_\alpha$  de  $u$  est de la forme :  $B_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & (0) & & \\ (0) & A_\alpha & & \vdots \\ & (0) & \ddots & (0) \\ & & (0) & A_\alpha \end{pmatrix}$ .

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 215

1. Cours.

2.a) Soit  $x \in E$ . On a :  $\langle x, \varphi(x) \rangle = -\langle \varphi(x), x \rangle = 0$ .

b) Soit  $x \in \text{Im}(\varphi)$ . Alors, il existe  $y \in E$  tel que  $x = \varphi(y)$ . Soit  $z \in \text{Ker}(\varphi)$ , d'où  $\varphi(z) = 0$ .

On a :  $\langle x, z \rangle = \langle \varphi(y), z \rangle = -\langle y, \varphi(z) \rangle = 0$ . Donc,  $x \perp z$  et  $\text{Im}(\varphi) \subset (\text{Ker}(\varphi))^\perp$ .

De plus,  $\dim(\text{Ker}(\varphi)^\perp) = n - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(\text{Im}(\varphi))$ , d'où l'égalité.

c) Soit  $F$  stable par  $\varphi$ . Soit  $x \in F$  et  $z \in F^\perp$ . Alors,  $\langle \varphi(x), z \rangle = 0$  car  $\varphi(x) \in F$ . Or,  $\langle \varphi(x), z \rangle = -\langle x, \varphi(z) \rangle$ , donc,  $\varphi(z) \in F^\perp$  et par suite,  $F^\perp$  est stable par  $\varphi$ .

d) On a déjà  $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\varphi^2)$ . Soit  $x \in \text{Ker}(\varphi^2)$ . On a :  $\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = -\langle x, \varphi^2(x) \rangle = 0$ .

D'où,  $\|\varphi(x)\| = 0$  et  $x \in \text{Ker}(\varphi)$ .

e) Si le spectre de  $\varphi$  n'est pas vide, soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé.

On a :  $\langle x, \varphi(x) \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$ . Mais,  $\langle x, \varphi(x) \rangle = -\langle \varphi(x), x \rangle = -\lambda \langle x, x \rangle = -\lambda \|x\|^2$

En conséquence,  $\lambda \|x\|^2 = 0$  et comme  $x \neq 0$ , on a  $\lambda = 0$ .

3. Il est clair que  $\varphi^2$  est symétrique réel et admet donc des valeurs propres réelles.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi^2$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé.

On a :  $\langle x, \varphi^2(x) \rangle = \lambda \|x\|^2 = -\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = -\|\varphi(x)\|^2 \Rightarrow \lambda = -\frac{\|\varphi(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0$ .

4.a) Soit  $e_1$  un vecteur unitaire de  $F$ . On pose :  $e_2 = \frac{1}{\alpha} u(e_1)$ . On a :  $\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle e_1, u(e_1) \rangle = 0$  (d'après 2.a).

Donc,  $e_1$  et  $e_2$  sont orthogonaux. De plus,  $\|e_2\|^2 = \langle e_2, e_2 \rangle = \frac{1}{\alpha^2} \langle u(e_1), u(e_1) \rangle = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} \langle e_1, e_1 \rangle = 1$ .

Bilan : la base  $(e_1, e_2)$  est orthonormée. Comme  $u(e_1) = \alpha e_2$  et  $u(e_2) = -\frac{1}{\alpha} u^2(e_1) = -\frac{1}{\alpha} \alpha^2 e_1 = -\alpha e_1$ , on obtient

la matrice  $A_\alpha$  demandée.

b) On suppose la proposition démontrée pour tout sous-espace de dimension inférieure ou égale à  $p-1$ .

Soit  $(e_1, e_2)$  une famille orthonormale de  $F$  définie comme dans le cas  $p=2$ .

Soit  $G = (\text{Vect}(e_1, e_2))^\perp$ . D'après 2.c),  $G$  est stable par  $u$  et de dimension  $p-2$ . On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une base orthonormale  $(e_3, e_4, \dots, e_p)$  de  $G$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme proposée. Sur la base  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ , on obtient le résultat cherché.

### EXERCICE SANS PRÉPARATION S 215

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires. On suppose que  $X$  et les  $X_n$  admettent une espérance et qu'il existe un réel  $K > 0$  tel que  $|X| \leq K$  et  $\forall n \in \mathbf{N}^*, |X_n| \leq K$ .

1. Dans cette question, on suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|) = 0$ . Montrer que la suite  $(X_n - X)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

2. On suppose que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $X$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|) = 0$ .

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 215

1. D'après l'inégalité de Markov, on a :  $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X_n - X|)}{\varepsilon} \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , ce qui prouve que la suite  $(X_n - X)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

2. Soit  $\varepsilon > 0$  et le système complet d'événements  $(|X_n - X| > \varepsilon, |X_n - X| \leq \varepsilon)$ . On a l'égalité :

$$|X_n - X| = |X_n - X| \times \mathbf{1}_{|X_n - X| > \varepsilon} + |X_n - X| \times \mathbf{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon}. \text{ Par suite,}$$

$$E(|X_n - X|) = E(|X_n - X| \times \mathbf{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}) + E(|X_n - X| \times \mathbf{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon}), \text{ d'où,}$$

$$E(|X_n - X|) \leq E(2K \mathbf{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}) + E(\varepsilon \mathbf{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon}) \leq 2K P(|X_n - X| > \varepsilon) + \varepsilon P(|X_n - X| \leq \varepsilon), \text{ soit encore,}$$

$$E(|X_n - X|) \leq 2K P(|X_n - X| > \varepsilon) + \varepsilon. \text{ Puisque la suite } (X_n)_{n \geq 1} \text{ converge en probabilité vers } X, \text{ il existe un entier } n_0 \text{ tel que pour tout entier } n \geq n_0, \text{ on a } 2K P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour  $n \geq n_0$ , on a  $E(|X_n - X|) \leq 2\varepsilon$  et comme  $\varepsilon > 0$  est quelconque, on a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|) = 0$ .



## EXERCICE PRINCIPAL S 216

On rappelle le résultat suivant :

Soit  $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$  une suite de réels positifs ou nuls, indexée par  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , qui vérifie les deux conditions :

- pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , la série  $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} a_{ij}$  est convergente de somme  $L_i = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij}$  ;
- la série  $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} L_i$  est convergente.

Alors, pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ , la série  $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} a_{ij}$  est convergente et la série de terme général  $C_j = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij}$  est convergente. De plus, on a  $\sum_{i=1}^{+\infty} L_i = \sum_{j=1}^{+\infty} C_j$ , c'est-à-dire  $\sum_{i=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij} \right)$ .

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et de même loi. Pour tout  $z \in [0, 1]$ , on pose :  $\Phi(z) = E(z^{X_1})$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$  et si  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_k$  l'événement :  $A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [T_n = k]$ .

1. Question de cours : espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites réelles bornées. Justifier pour tout réel  $z \in [0, 1]$ , la convergence des séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n z^n$ .

On admet l'équivalence :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = v_n) \iff (\forall z \in [0, 1], \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n z^n)$ .

3.a) Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $p_k = P(A_k)$ . Justifier la relation :  $p_k = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T_n = k)$ .

b) Si  $z \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n = k) z^k$  en fonction de  $\Phi(z)$ .

c) En déduire que pour tout  $z \in [0, 1]$ , on a :  $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k z^k = \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}$ .

4. Montrer que la suite  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est constante égale à  $c$  si et seulement si la loi des  $X_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) est géométrique. Quelle relation a-t-on alors entre  $c$  et  $E(X_n)$  ?

5. On suppose que la loi des  $X_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) est géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , soit  $1_{A_k}$  la variable aléatoire indicatrice de l'événement  $A_k$ . Préciser la loi des  $1_{A_k}$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) et montrer que ces variables aléatoires sont indépendantes.

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 216

1. Cours.

2. Par hypothèse, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée par  $M$ , donc,  $0 \leq |u_n z^n| \leq M|z|^n$ , ce qui assure l'absolue convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n z^n$  pour  $|z| < 1$ .

3.a) Si  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $A_k$  est la réunion disjointe des événements  $(T_n = k)$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) ; donc,  $p_k = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T_n = k)$ .

b) On a :  $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n = k) z^k = E(z^{T_n}) = E\left(\prod_{k=1}^n z^{X_k}\right) = (\Phi(z))^n$  (indépendance et similitude de loi des  $X_k$ ).

c) La suite  $(p_k)_k$  est bornée par 1, donc si  $z \in [0, 1[$ , la série  $\sum_k p_k z^k$  converge et d'après la question a), on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} P(T_n = k) z^k \right). \text{ Pour } z \in [0, 1[, \text{ on a } \Phi(z) < \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_n = k) = 1. \text{ Le résultat rappelé } \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k z^k = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n = k) z^k \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\Phi(z))^n = \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}.$$

4. Si  $(p_k)_k$  est une suite constante égale à  $c$ , on a nécessairement  $c > 0$  car  $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} A_k$  qui sont tous de

probabilité égale à  $c$ . Le résultat admis  $\Rightarrow (\forall k \in \mathbf{N}^*, p_k = c) \Leftrightarrow (\forall z \in [0, 1[, \sum_{k=1}^{+\infty} p_k z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} c z^k) \Leftrightarrow$

$(\forall z \in [0, 1[, \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} = \frac{cz}{1 - z}) \Leftrightarrow (\forall z \in [0, 1[, \Phi(z) = \frac{cz}{1 - (1 - c)z} = \sum_{k=1}^{+\infty} c(1 - c)^{k-1} z^k)$ , ce qui équivaut au

fait que  $X_n$  suit une loi géométrique de paramètre  $c$ . On a évidemment  $c \times E(X_n) = 1$ .

5. D'après 4, si  $X_n \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ , on a  $P(\mathbf{1}_{A_k} = 1) = P(A_k) = p$ , donc  $X_n$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Pour montrer l'indépendance des  $(\mathbf{1}_{A_k})_{k \in \mathbf{N}^*}$ , il suffit de montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , les événements  $[\mathbf{1}_{A_k} = 1]$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  sont indépendants.

Or,  $P([\mathbf{1}_{A_1} = 1] \cap \dots \cap [\mathbf{1}_{A_n} = 1]) = P([X_1 = 1] \cap \dots \cap [X_n = 1]) = p^n = \prod_{k=1}^n P([\mathbf{1}_{A_k} = 1])$ .

## EXERCICE SANS PRÉPARATION S 216

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels.

Soit  $A$  une matrice donnée de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On considère l'application  $\varphi_A$  qui à toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , associe la matrice  $\varphi_A(M) = AM$ .

1. Comparer les spectres de  $A$  et  $\varphi_A$ .

2. On suppose que  $A$  est diagonalisable. Montrer que  $\varphi_A$  est diagonalisable.

## CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 216

1.  $\varphi_A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Soit  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et  $v$  un vecteur propre associé.

Alors,  $Av = \lambda v$  et  $M_v = [v \ v \ \dots \ v]$  est une matrice  $\neq 0$  telle que  $\varphi_A(M_v) = [Av \ Av \ \dots \ Av] = \lambda[v \ v \ \dots \ v] = \lambda M_v$ .

S'il existe une matrice  $M = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n] \neq 0$  telle que  $AM = \varphi_A(M) = \mu M$ , alors, l'un des  $m_j$  est un vecteur non nul et vérifiant  $Am_j = \mu m_j$ .

2. On a :  $A = P^{-1}DP$  avec  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . On considère la base canonique  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Le système formé par les  $P^{-1}E_{i,j}$  est toujours une base et il vérifie :

$$\varphi_A(P^{-1}E_{i,j}) = AP^{-1}E_{i,j} = P^{-1}DE_{i,j} = d_i P^{-1}E_{i,j}.$$

Ce système est donc une base de vecteurs propres, ce qui prouve que  $\varphi$  est diagonalisable.

## EXERCICE PRINCIPAL S 218

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1. Question de cours : convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli  $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $Z_n = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} X_k$  et  $U_n = \frac{1}{2^n} Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}$ .

2.a) Déterminer les lois respectives de  $Z_1$  et  $Z_2$ .

b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $Z_{n+1} = 2Z_n + X_{n+1}$ . En déduire par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$ , la variable aléatoire  $Z_n$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ .

3.a) Montrer que pour tout  $\omega \in \Omega$ , la série de terme général  $\frac{X_k(\omega)}{2^k}$  converge.

Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose :  $U(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} Z_n(\omega)$  et  $U = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{2^k}$ .

On admet que  $U$  est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

b) Montrer que pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a :  $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k} \leq \frac{1}{2^n}$ , puis  $0 \leq U_n(\omega) \leq U(\omega) \leq U_n(\omega) + \frac{1}{2^n} \leq 1$ .

c) Soit  $x \in [0, 1]$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\left[ U_n + \frac{1}{2^n} \leq x \right] \subset [U \leq x] \subset [U_n \leq x]$ .

d) En déduire que  $U$  suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

4. Montrer que la suite de variables aléatoires  $(U_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $U$ .

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 218

1. Cours.

2.a) On a :  $Z_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$  ou encore  $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 1 \rrbracket)$ . D'autre part,  $Z_2 = 2X_1 + X_2$  et  $Z_2(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$ .

On a par exemple,  $[Z_2 = 3] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \Rightarrow P(Z_2 = 3) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$ . De même, on trouve sans difficulté,  $P(Z_2 = 0) = P(Z_2 = 1) = P(Z_2 = 2) = 1/4$ , d'où  $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 3 \rrbracket)$ .

b)  $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} X_k = 2 \sum_{k=1}^n 2^{n-k} X_k + X_{n+1} = 2Z_n + X_{n+1}$ . On note que  $2Z_n$  et  $X_{n+1}$  sont indépendantes.

Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $\mathcal{H}_n$  : " $Z_n$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ ".

•  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont vraies.

• Supposons  $\mathcal{H}_n$  vraie. Alors,  $2Z_n$  suit la loi uniforme sur  $\{2k \text{ tels que } k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket\} = \{0, 2, 4, \dots, 2^{n+1} - 2\}$ .

Comme  $X_{n+1}$  ne prend que les valeurs 0 et 1,  $Z_{n+1}$  prend les valeurs  $\{2k \text{ tels que } k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket\}$  quand  $X_{n+1} = 0$  et  $\{2k + 1 \text{ tels que } k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket\}$  quand  $X_{n+1} = 1$ . Pour  $k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ , on a :

$$\begin{cases} [Z_{n+1} = 2k] = [Z_n = 2k] \cap [X_{n+1} = 0] \Rightarrow P(Z_{n+1} = 2k) = 1/2^n \times 1/2 = 1/2^{n+1} \\ [Z_{n+1} = 2k + 1] = [Z_n = 2k] \cap [X_{n+1} = 1] \Rightarrow P(Z_{n+1} = 2k + 1) = 1/2^n \times 1/2 = 1/2^{n+1} \end{cases}$$

Bilan :  $Z_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 2^{n+1} - 1 \rrbracket)$ .

• Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{H}_n$  est vraie.



3.a) Pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ , on a :  $0 \leq \frac{X_k(\omega)}{2^k} \leq \frac{1}{2^k}$ , donc la série de terme général  $\frac{X_k(\omega)}{2^k}$  converge vers un réel positif, inférieur ou égal à  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ .

b) De même,  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$ . Comme  $U(\omega) = U_n(\omega) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k}$ , on a bien

$$0 \leq U_n(\omega) \leq U(\omega) \leq U_n(\omega) + \frac{1}{2^n} \leq 1.$$

c) D'après b),  $U_n(\omega) + \frac{1}{2^n} \leq x \implies U(\omega) \leq x \implies U_n(\omega) \leq x$ . Donc,  $\left[U_n + \frac{1}{2^n} \leq x\right] \subset [U \leq x] \subset [U_n \leq x]$ .

d) Par suite,  $P\left(U_n + \frac{1}{2^n} \leq x\right) \leq P(U \leq x) \leq P(U_n \leq x)$ . Or,  $P(U_n \leq x) = \sum_{k=0}^{\lfloor 2^n x \rfloor} P(Z_n = k) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor + 1}{2^n}$  et

$$P\left(U_n + \frac{1}{2^n} \leq x\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor 2^n x \rfloor - 1} P(Z_n = k) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}, \text{ d'où, } \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \leq P(U \leq x) \leq \frac{\lfloor 2^n x \rfloor + 1}{2^n}.$$

Comme  $2^n x - 1 < \lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x$ , on a :  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $x - \frac{1}{2^n} \leq P(U \leq x) \leq x + \frac{1}{2^n}$ .

Par passage à la limite, on en déduit que  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $P(U \leq x) = x$ , donc  $U$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

5. Soit  $x \in [0, 1]$ . D'après 4.d),  $F_{U_n}(x) - F_U(x) \geq 0$  ( $F_{U_n}$  et  $F_U$  : fonctions de répartition de  $U_n$  et  $U$ ). Or,

$$x \in [0, 1] \implies F_{U_n}(x) - F_U(x) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor + 1}{2^n} - x = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor - 2^n x + 1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \text{ car } -1 < \lfloor 2^n x \rfloor - 2^n x \leq 0.$$

Le théorème d'encadrement  $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |F_{U_n}(x) - F_U(x)| = 0$ , donc la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $U$ .

### EXERCICE SANS PRÉPARATION S 218

Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $f_k$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f_k(x) = x^k e^x$ .

On note  $\mathcal{F}_3$  le sous-espace vectoriel engendré par  $f_0, f_1, f_2, f_3$ .

1. Exhiber une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{F}_3$ .

Soit  $\Phi$  l'application qui à toute fonction  $f \in \mathcal{F}_3$ , associe  $\Phi(f) : x \in \mathbf{R} \mapsto \int_{\alpha}^x f(t) dt$ .

2. On suppose que  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $\Phi$  n'est pas un endomorphisme de  $\mathcal{F}_3$ .

3. On suppose que  $\alpha = -\infty$ .

a) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{F}_3$ .

b) Déterminer la matrice  $M$  de  $\Phi$  dans la base  $\mathcal{B}$  ainsi que son inverse  $M^{-1}$ .

# CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 218

On note  $f_0 = \exp$ .

1. On écrit une combinaison linéaire nulle :  $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ .

Si on avait  $\lambda_j \neq 0$  pour un certain  $j$ , alors, en notant  $m$  le plus grand  $j$  tel que  $\lambda_j \neq 0$ , le membre de gauche se comporterait en  $+\infty$  comme  $\lambda_m f_m$  et donc divergerait vers  $\pm\infty$ , ce qui contredirait l'égalité à 0.

Donc,  $\forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ ,  $\lambda_j = 0$  : la famille  $(f_0, f_1, f_2, f_3)$  est libre et c'est une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{F}_3$ .

(on peut aussi raisonner par des évaluations en  $x = 0$  et des dérivations successives)

2. L'application  $\Phi$  est linéaire. On a  $\Phi(f_0) : x \mapsto \int_{\alpha}^x \exp(t) dt = \exp(x) - \exp(\alpha) = f_0(x) - \exp(\alpha)$ .

Donc,  $\Phi(f_0) \in \mathcal{F}_3$  si et seulement si la fonction constante égale à 1 appartient à  $\mathcal{F}_3$ .

Mais, si on pouvait écrire  $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 1$  pour des réels  $\lambda_j$ , alors, selon le même raisonnement qu'à la question 1, on aurait  $\forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ ,  $\lambda_j = 0$ , ce qui aboutirait à une contradiction du type  $1 = 0$ .

3.a) On a clairement  $\Phi(f_0) = f_0$  et  $\forall j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , une intégration par parties donne  $\Phi(f_j) = f_j - j\Phi(f_{j-1})$ , ce qui prouve par une récurrence immédiate que  $\Phi(\mathcal{F}_3) \subset \mathcal{F}_3$ .

b) En exploitant les calculs précédents, on a :  $\Phi(f_0) = f_0$ ,  $\Phi(f_1) = f_1 - \Phi(f_0) = f_1 - f_0$ ,

$\Phi(f_2) = f_2 - 2\Phi(f_1) = f_2 - 2f_1 + 2f_0$  et  $\Phi(f_3) = f_3 - 3\Phi(f_2) = f_3 - 3f_2 + 6f_1 - 6f_0$ , soit la représentation

$$\text{matricielle suivante : } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $M$  est inversible (triangulaire sans 0 sur la diagonale principale) et l'inverse de  $\Phi$  est donnée sur  $\mathcal{F}_3$  par l'opérateur de dérivation :  $f'_0 = f_0$  et  $\forall j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ,  $f'_j = f_j + j f_{j-1}$ , soit,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## EXERCICE PRINCIPAL S 220

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1. Question de cours : donner la définition de la convergence en loi et de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires à densité, indépendantes, de même loi de fonction de répartition commune notée  $F$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose :  $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  et  $m_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

2. On suppose dans cette question l'existence de deux réels  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ) tels que :

$$(i) \forall x \in ]a, b[, \quad 0 < F(x) < 1, \quad (ii) \forall x \leq a, \quad F(x) = 0 \quad \text{et} \quad (iii) \forall x \geq b, \quad F(x) = 1.$$

a) Exprimer les fonctions de répartition respectives  $G_n$  et  $H_n$  des variables aléatoires  $M_n$  et  $m_n$  à l'aide de  $F$ .

b) Étudier la convergence en loi des suites de variables aléatoires  $(M_n)_{n \geq 1}$  et  $(m_n)_{n \geq 1}$ .

3. Dans cette question, on suppose que la loi commune des  $X_n$  est la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de  $G_n$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

a) Représenter dans ce repère les courbes  $\mathcal{C}_n$  et  $\mathcal{C}_{n+1}$ . Préciser la tangente à l'origine de  $\mathcal{C}_n$  et  $\mathcal{C}_{n+1}$  ainsi que le point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_n$ . Décrire le déplacement de  $\mathcal{C}_n$  en fonction de  $n$ .

b) La suite  $\left(\frac{M_n}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$  converge-t-elle en loi vers la variable certaine  $\frac{1}{\lambda}$  ?

c) Montrer que la suite de variables aléatoires  $\left(\frac{M_n}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$  converge en probabilité vers la variable certaine  $\frac{1}{\lambda}$ .

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 220

1. Cours.

2.a)  $\forall x \in \mathbf{R}, [M_n \leq x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x] \implies G_n(x) = (F(x))^n$ . De même,  $\forall x \in \mathbf{R}, H_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$ .

b)  $\forall x \leq a, \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = 0, \quad \forall x \in ]a, b[, \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = 0$  car  $0 < F(x) < 1$  et  $\forall x > b, \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = 1$ .

Bilan : la suite  $(M_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la variable certaine égale à  $b$ . De même,

$\forall x \leq a, \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x) = 0, \quad \forall x \in ]a, b[, \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x) = 1$  car  $0 < 1 - F(x) < 1$  et  $\forall x > b, \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x) = 1$ .

Bilan : la suite  $(m_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la variable certaine égale à  $a$ .

3.a) Soit  $x > 0$ . On a  $G_n(x) = (1 - e^{-\lambda x})^n$  et  $G_{n+1}(x) = G_n(x)(1 - e^{-\lambda x})$ , donc  $G_{n+1}(x) < G_n(x)$  : la courbe  $\mathcal{C}_{n+1}$  est située au-dessous de la courbe  $\mathcal{C}_n$ . La droite  $y = 1$  est asymptote à chacune de ces deux courbes.

$G'_n(x) = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$ , donc  $G'_n(0) = 0$  : la courbe  $\mathcal{C}_n$  a une tangente à l'origine horizontale.

$G''_n(x) = n\lambda^2 e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-2}(-1 + ne^{-\lambda x}) \implies \mathcal{C}_n$  admet un point d'inflexion en  $\frac{\ln n}{\lambda}$  et ce point d'inflexion s'éloigne indéfiniment lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

b) Soit  $S_n$  la fonction de répartition de  $\frac{M_n}{\ln n}$ . On a :  $S_n(x) = \begin{cases} G_n(x \ln n) = (1 - \exp(-\lambda x \ln n))^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Or, pour  $x > 0, (1 - \exp(-\lambda x \ln n))^n = (1 - n^{-\lambda x})^n = \exp(n \ln(1 - n^{-\lambda x}))$  et  $n \ln(1 - n^{-\lambda x}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{\lambda x - 1}}$ .

1er cas :  $\lambda x - 1 > 0 \iff x > 1/\lambda \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^{\lambda x - 1}} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 1$ .



2ème cas :  $\lambda x - 1 < 0 \iff x < 1/\lambda \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^{\lambda x - 1}} = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 0$ .

3ème cas :  $\lambda x - 1 = 0 \iff x = 1/\lambda \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^{\lambda x - 1}} = -1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 1/e$ .

On pose :  $S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/\lambda \\ 1 & \text{si } x \geq 1/\lambda \end{cases}$ . La fonction  $S$  est la fonction de répartition de la variable certaine  $\frac{1}{\lambda}$ .

La fonction  $S$  est continue sur  $\mathbf{R} \setminus \{1/\lambda\}$  et  $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1/\lambda\}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = S(x)$ .

Bilan : la suite  $\left(\frac{M_n}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$  converge en loi vers la variable certaine  $\frac{1}{\lambda}$ .

c) Soit  $\varepsilon > 0$ . On pose  $p_n = P\left(\left|\frac{M_n}{\ln n} - \frac{1}{\lambda}\right| \leq \varepsilon\right)$  et on veut montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$ .

$p_n = P\left((-\varepsilon + 1/\lambda) \ln n \leq M_n \leq (\varepsilon + 1/\lambda) \ln n\right) = G_n\left((\varepsilon + 1/\lambda) \ln n\right) - G_n\left((-\varepsilon + 1/\lambda) \ln n\right)$ , soit encore,

$p_n = \left(1 - \exp(-\lambda(\varepsilon + 1/\lambda) \ln n)\right)^n - \left(1 - \exp(-\lambda(-\varepsilon + 1/\lambda) \ln n)\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right)^n$ .

Or,  $\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right)\right)$  et  $n \ln\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}} = -\frac{1}{n^{\lambda\varepsilon}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ .

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right)\right) = 1$ . De même,

$\left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right)\right)$  et  $n \ln\left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}} = -\frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -\infty$ .

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right)\right) = 0$ .

Finalement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$  et la suite  $\left(\frac{M_n}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$  converge en probabilité vers la variable certaine  $\frac{1}{\lambda}$ .

## EXERCICE SANS PRÉPARATION S 220

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles.

1. L'ensemble  $\mathcal{S}$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}[X]$  ?
2. Montrer que si  $P \in \mathcal{S}$  et n'est pas constant, alors  $P' \in \mathcal{S}$ .

## CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 220

1. L'ensemble  $\mathcal{S}$  n'est pas un sous-espace vectoriel car  $X^2$  et 1 appartiennent à  $\mathcal{S}$  mais  $X^2 + 1 \notin \mathcal{S}$ .

2. Si  $P$  est à racines simples  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  ( $n = \deg P$ ), alors par le théorème de Rolle,  $P'$  s'annule au moins une fois sur chaque intervalle  $]x_i, x_{i+1}[$ . Le polynôme  $P'$  est de degré  $(n-1)$  et possède  $(n-1)$  racines réelles distinctes, donc il appartient à  $\mathcal{S}$ .

Si  $P$  n'est pas à racines simples, soit  $x_1, x_2, \dots, x_p$  ses racines avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_p$  et soit  $k_1, k_2, \dots, k_p$  leurs ordres de multiplicité respectifs. Alors, comme précédemment,  $P'$  s'annule au moins une fois sur chaque intervalle  $]x_i, x_{i+1}[$ , ce qui donne  $(p-1)$  racines de  $P'$ . Par ailleurs, toute racine d'ordre  $k_i$  de  $P$  est racine d'ordre  $(k_i - 1)$  de  $P'$ . La somme des ordres de multiplicité des racines indiquées est donc égale à :

$$(p-1) + \sum_{i=1}^p (k_i - 1) = \left(\sum_{i=1}^p k_i\right) - 1 = \deg P - 1 = \deg P'.$$

Donc,  $P' \in \mathcal{S}$ .

## EXERCICE PRINCIPAL S 227

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Soit  $a \in ]0, 1[$  et  $X$  une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{si } x \in [0, a] \\ \frac{1}{2(1-a)} & \text{si } x \in ]a, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour  $n$  entier de  $\mathbf{N}^*$ , soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même

loi que  $X$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose :  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

On suppose que  $a$  est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

1. Question de cours : énoncer le théorème de Slutsky.

2.a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

b) Tracer le courbe représentative de  $F$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

3.a) Calculer  $E(X)$ . On donne  $V(X) = \frac{4 + (2a - 1)^2}{48}$ .

b) Construire à partir de  $\bar{X}_n$  un estimateur  $T_n$  sans biais et convergent du paramètre  $a$ .

4. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose  $U_n = \frac{T_n - a}{\sqrt{V(T_n)}}$  et  $Z_n = \frac{2\sqrt{3n}(T_n - a)}{\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2}}$ .

a) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ .

b) En déduire que la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

c) Construire un intervalle de confiance asymptotique pour  $a$  au niveau de confiance  $1 - \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 227

1. Cours.

$$2.a) \text{ On trouve : } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{2a} & \text{si } x \in [0, a] \\ \frac{1}{2} + \frac{x-a}{2(1-a)} & \text{si } x \in ]a, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

b) Le dessin doit montrer la non dérivabilité de  $F$  en 0,  $a$  et 1.

$$3.a) E(X) = \int_0^a \frac{x}{2a} dx + \int_a^1 \frac{x}{2(1-a)} dx = \frac{a^2}{4a} + \frac{1-a^2}{4(1-a)} = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}.$$

b) On a  $E(\bar{X}_n) = \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow T_n = 2\bar{X}_n - \frac{1}{2}$  est un estimateur sans biais de  $a$  (on peut remarquer que  $T_n$  est un estimateur car c'est une fonction de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  indépendante de  $a$ ).

Par indépendance des  $X_n$ , on a :  $V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} V(X) = \frac{4 + (2a - 1)^2}{48n} \Rightarrow V(T_n) = 4V(\bar{X}_n) = \frac{4 + (2a - 1)^2}{12n}$ ,  
et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n) = 0$ , l'estimateur  $T_n$  est convergent.

4.a) On pose :  $S_n = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}$ . Le théorème limite central permet d'affirmer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge

en loi vers une variable aléatoire suivant  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Or, on trouve sans difficulté que  $S_n = \frac{T_n - a}{\sqrt{V(T_n)}} = U_n$ .

Par conséquent, la suite  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire suivant  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

b) On sait que la suite  $(\bar{X}_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $E(X) = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$ . La fonction  $f : x \mapsto 2x - \frac{1}{2}$  est continue sur  $\mathbf{R}$  et  $f(\bar{X}_n) = T_n$ . D'après le cours, la suite  $(T_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $a$ .

De même, par continuité de la fonction  $x \mapsto \sqrt{4 + (2x - 1)^2}$ , on peut dire que la suite  $(\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2})_{n \geq 1}$

converge en probabilité vers  $\sqrt{4 + (2a - 1)^2}$ . Par conséquent, en posant  $R_n = \frac{\sqrt{4 + (2a - 1)^2}}{\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2}}$ , la suite  $(R_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers la constante égale à 1.

De plus, compte tenu des définitions des suites en jeu et des résultats précédents, il est facile de montrer que  $\forall n \geq 1$ , on a  $Z_n = U_n \times R_n$ . Or la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ , la suite  $(R_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers la constante 1. Le théorème de Slutsky permet alors d'affirmer que la suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $1 \times U = U \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

c) On note  $\Phi$  la fonction de répartition de  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $t_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ . On a alors :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(-t_\alpha \leq Z_n \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$ , soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(-t_\alpha \leq \frac{2\sqrt{3n}(T_n - a)}{\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2}} \leq t_\alpha\right) = 1 - \alpha$ , et finalement :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(T_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{3n}}\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2} \leq a \leq T_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{3n}}\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2}\right).$

## EXERCICE SANS PRÉPARATION S 227

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1 et  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  de dimension  $3n$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  de rang  $2n$  et  $g$  la restriction de  $f$  au sous-espace vectoriel  $\text{Im} f$ .

1. Montrer que  $\text{Im} g = \text{Im} f^2$  et  $\text{Ker} g = \text{Ker} f \cap \text{Im} f$ .

2. On note  $\text{rg}(f^2)$  le rang de  $f^2$ . Dédurre de la question précédente que  $\text{rg}(f^2) \geq n$ .

## CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 227

1. Montrons que  $\text{Im} g = \text{Im} f^2$ .

- Soit  $y \in \text{Im} g$ . Il existe  $x \in \text{Im} f$  tel que  $y = g(x)$ . Donc,  $\exists u \in E$ ,  $x = f(u) \implies y = f^2(u) \in \text{Im} f^2$ .
- Soit  $y \in \text{Im} f^2$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $y = f^2(x)$ . Or,  $f(x) \in \text{Im} f \implies y = g(f(x)) \in \text{Im} g$ .

Bilan :  $\text{Im} g = \text{Im} f^2$ .

Montrons que  $\text{Ker} g = \text{Ker} f \cap \text{Im} f$ .

- Soit  $x \in \text{Ker} g$ . D'après la définition de  $g$ , on a  $x \in \text{Im} f$  et  $g(x) = f(x) = 0_E$ . Donc,  $x \in \text{Ker} f \cap \text{Im} f$ .
- Soit  $x \in \text{Ker} f \cap \text{Im} f$ . Alors,  $f(x) = 0_E$ . Or,  $x \in \text{Im} f$ , donc  $g(x) = f(x)$  et  $x \in \text{Ker} g$ .

Bilan :  $\text{Ker} g = \text{Ker} f \cap \text{Im} f$ .

2. D'après la question 1, on a  $\text{Ker} g \subset \text{Ker} f$  et puisque  $\dim \text{Ker} f = n$  (théorème du rang), on a :  $\dim \text{Ker} g \leq n$ .

D'autre part, d'après le théorème du rang, on a :

$\dim \text{Ker} g + \text{rg}(g) = \dim \text{Im} f \implies \text{rg}(f^2) = 2n - \dim \text{Ker} g \geq n$ , donc,  $\text{rg}(f^2) \geq n$ .



## EXERCICE PRINCIPAL S 225

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  
Sous réserve d'existence, on note  $E(X)$  et  $V(X)$  l'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $X$ .

1. Question de cours : énoncer des conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

Dans tout l'exercice, on considère trois variables aléatoires réelles  $X_1, X_2$  et  $X_3$  centrées et admettant un moment d'ordre 2.

Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  telle que :  $\forall (i,j) \in [1,3]^2, m_{i,j} = E(X_i X_j)$ .

2. Justifier que la matrice  $M$  est diagonalisable.

3. Montrer que les valeurs propres de  $M$  sont positives ou nulles.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que  $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

4. Montrer que les vecteurs  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres de  $M$ .

Quel est le spectre de  $M$  ?

5. Soit  $Z$  une variable aléatoire centrée. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}^3$  à valeurs réelles telle que :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3, \varphi(x_1, x_2, x_3) = E((Z - x_1 X_1 - x_2 X_2 - x_3 X_3)^2).$$

a) Déterminer la matrice hessienne  $\nabla^2(\varphi)(x_1, x_2, x_3)$  de  $\varphi$  en  $(x_1, x_2, x_3)$ .

b) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi$  admette un minimum en  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  est :

$$M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(ZX_1) \\ E(ZX_2) \\ E(ZX_3) \end{pmatrix}.$$

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $Z$  pour que la fonction  $\varphi$  admette un minimum.

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 225

1. Cours.

2. La matrice  $M$  est symétrique réelle, donc diagonalisable;

3. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$  et  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  un vecteur propre associé. On a :

$${}^t_x M x = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i m_{i,j} x_j = E \left( \sum_{i=1}^3 (x_i X_i)^2 + 2 \sum_{i \neq j} (x_i X_i)(x_j X_j) \right) = E \left( \left( \sum_{i=1}^3 x_i X_i \right)^2 \right) \geq 0.$$

D'autre part,  ${}^t_x M x = \lambda {}^t_x x = \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$  avec  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$ , donc  $\lambda \geq 0$ .

4. On trouve :  $Mv_1 = 0$ ,  $Mv_2 = 3v_2$  et  $Mv_3 = 3v_3$ . De plus,  $v_2$  et  $v_3$  ne sont pas colinéaires. Les réels 0 et 3 sont valeurs propres de  $M$  et il n'y en a pas d'autre car, en notant  $E_0$  et  $E_3$  les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 3, on a  $\dim E_0 + \dim E_3 = 3$ . Donc,  $\text{Sp}(M) = \{0, 3\}$ .

5.a)  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = E(Z^2) - 2 \sum_{i=1}^3 x_i E(ZX_i) + \sum_{i=1}^3 x_i^2 E(X_i^2) + 2 \sum_{i \neq j} x_i x_j E(X_i X_j)$ . Par suite :

$$\partial_i(\varphi)(x_1, x_2, x_3) = -2E(ZX_i) + 2 \sum_{j=1}^3 x_j E(X_i X_j) \text{ et } \partial_{i,j}^2(\varphi)(x_1, x_2, x_3) = 2E(X_i X_j) \Rightarrow \nabla^2(\varphi)(x_1, x_2, x_3) = 2M.$$



b) Déterminons les points critiques de  $\varphi$ . On pose :  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . On obtient :

$$\begin{cases} \partial_1(\varphi)(x) = 2x_1E(X_1^2) + 2x_2E(X_1X_2) + 2x_3E(X_1X_3) - 2E(ZX_1) \\ \partial_2(\varphi)(x) = 2x_1E(X_1X_2) + 2x_2E(X_2^2) + 2x_3E(X_2X_3) - 2E(ZX_2) \\ \partial_3(\varphi)(x) = 2x_1E(X_1X_3) + 2x_2E(X_2X_3) + 2x_3E(X_3^2) - 2E(ZX_3) \end{cases} .$$

L'équation  $\nabla(\varphi)(x) = 0 \iff Mx = \begin{pmatrix} E(ZX_1) \\ E(ZX_2) \\ E(ZX_3) \end{pmatrix}$  (1). La condition (1) est nécessaire. La forme quadratique

associée à  $M$  ayant des valeurs propres positives est elle-même positive. La condition (1) est suffisante.

c) L'application  $\varphi$  admet un minimum si et seulement s'il existe  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  tel que  $Mx = \begin{pmatrix} E(ZX_1) \\ E(ZX_2) \\ E(ZX_3) \end{pmatrix}$ .

L'endomorphisme  $u$  canoniquement associé à  $M$  est de rang 2 et son image est engendrée par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ D'où } \text{Im}(u) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ -\lambda \\ -\mu \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Puisque les deux sous-espaces propres de  $M$  sont orthogonaux (et supplémentaires), la condition  $x \in \text{Im}(u)$  se traduit par  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ .

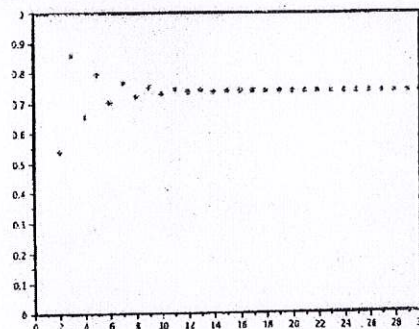
La condition nécessaire et suffisante demandée pour  $Z$  est :  $E(Z(X_1 + X_2 + X_3)) = 0$ .

### EXERCICE SANS PRÉPARATION S 225

On exécute le programme *Scilab* suivant qui retourne la courbe ci-dessous :

```
nmax=30 ;
U=zeros(nmax,1) ;
U(1)=0 ;
for i=1:nmax
    U(i+1)=cos(U(i))
end
plot(0:nmax,U,'*')
```

Justifier le résultat obtenu.



### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 225

La courbe trace les 31 premiers termes de la suite  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \cos(u_n)$ . Sur  $[0, 1]$ , la fonction  $x \mapsto \cos(x)$  est stable et contractante :  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$  et  $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(x) - f(y)| \leq \sin(1)|x - y|$ , avec le théorème des accroissements finis par exemple. Elle possède un unique point fixe  $\ell$  tel que  $\cos(\ell) = \ell$  avec  $\ell \simeq 0.739028$ . On a donc :  $|u_n - \ell| \leq (\sin(1))^n |u_0 - \ell| \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

On peut ensuite remarquer que  $f(x) > \ell$  si  $x < \ell$  et réciproquement pour justifier le caractère alterné des signes de  $(u_n - \ell)$ . La croissance des termes pairs se montre facilement par récurrence (on vérifie que  $\cos(\cos(0)) > 0$ ).



**ORAL HEC 2017**

**MATHÉMATIQUES**

**EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES**

**Option économique**



## SUJET E 42

Sujet E 42

### EXERCICE PRINCIPAL

Dans cet exercice,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. Question de cours

Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?

Soit  $\mathbf{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ , et  $f$  l'application qui à tout polynôme  $P \in \mathbf{R}_n[X]$ , fait correspondre le polynôme  $f(P)$  défini par :

$$f(P)(X) = nXP(X) + X(1 - X)P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne la dérivée du polynôme } P.$$

2. a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbf{R}_n[X]$  et écrire sa matrice dans la base canonique de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

b) L'endomorphisme  $f$  est-il bijectif ? Quel est son rang ?

c) L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

3. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $H_k$  le polynôme de  $\mathbf{R}_n[X]$  défini par :  $H_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}$ .

a) Calculer pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f(H_k)(X)$ .

b) Montrer que  $\mathcal{B} = (H_0, H_1, \dots, H_n)$  est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

c) Trouver les coordonnées du polynôme  $(X + 1)^n$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère une urne contenant  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges.

1. La fonction *Scilab* suivante permet de simuler des tirages dans cette urne.

```
function y=X(b,r)
V=%F // le booléen "faux"
for k=1:3
V=V|grand(1,1,'uin',1,b+r)<=b;
end;
if V then y=1; else y=2;
end;
endfunction
```

Que retourne la fonction  $X$  et quelle loi simule-t-elle ?

2. De quelle valeur théorique la valeur affichée après l'exécution des instructions suivantes fournit-elle une approximation ?

```
R=[];
for k=1:10000
R=[R,X(5,5)];
end;
disp((mean(R))
```

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours

Remarque : la convention  $\deg 0 = -\infty$  est au programme.

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad f(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X).$$

2. a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbf{R}_n[X]$  et écrire sa matrice dans la base canonique de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

La linéarité de  $f$  est immédiate et la stabilité de  $\mathbf{R}_n[X]$  par  $f$  provient du fait que le degré de  $f(P)$  est au plus égal à  $\deg(P) + 1$  et que si  $P$  est de degré  $n$ , alors le terme de degré  $n + 1$  de  $f(P)$  a pour coefficient  $n - n$  et en fait,  $f(P)$  est de degré  $n$ . Donc,  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

On a :  $f(1) = nX$ ,  $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $f(X^k) = (n-k)X^{k+1} + kX^k$  et  $f(X^n) = nX^n$ .

La matrice  $M$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}_n[X]$  est triangulaire inférieure : les éléments diagonaux sont, dans cet ordre,  $0, 1, \dots, n$  et les éléments de la sous-diagonale sont, dans cet ordre,  $n, n-1, \dots, 1$ . Les autres coefficients de la matrice  $M$  sont nuls.

- b) L'endomorphisme  $f$  est-il bijectif ? Quel est son rang ?

L'endomorphisme  $f$  n'est pas bijectif et son rang est égal à  $n$ .

- c) L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

Le spectre de  $f$  est lisible sur la diagonale de  $M$  puisque  $M$  est triangulaire. Comme l'endomorphisme  $f$  admet  $n + 1$  valeurs propres distinctes, il est diagonalisable.

3. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $H_k$  le polynôme de  $\mathbf{R}_n[X]$  défini par :  $H_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$ .

- a) Calculer pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f(H_k)(X)$ .

$$f(H_k) = nX(X^k(1-X)^{n-k} + X(1-X)kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}), \text{ soit :}$$

$$f(H_k) = kX^k(1-X)^{n-k} = kH_k.$$

- b) Montrer que  $\mathcal{B} = (H_0, H_1, \dots, H_n)$  est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

Les vecteurs  $H_0, H_1, \dots, H_n$  qui sont non nuls sont vecteurs propres de  $f$ , associés à  $n + 1$  valeurs propres distinctes : la famille  $(H_0, H_1, \dots, H_n)$  est donc libre. Comme elle contient  $n + 1$  polynômes, c'est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

- c) Trouver les coordonnées du polynôme  $(X + 1)^n$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Par la formule du binôme :

$$(X + 1)^n = (2X + (1 - X))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k X^k (1 - X)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k H_k(X)$$



## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère une urne contenant  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges.

1. La fonction *Scilab* suivante permet de simuler des tirages dans cette urne.

```
function y=X(b,r)
V=%F // le booléen "faux"
for k=1:3
V=V|grand(1,1,'uin',1,b+r)<=b; // "|" signifie "ou"
end;
if V then y=1; else y=2;
end;
endfunction
```

Que retourne la fonction  $X$  et quelle loi simule-t-elle ?

La fonction retourne 1 si au moins une boule blanche a été tirée au cours de trois tirages avec remise dans l'urne et 2 sinon.

La fonction  $X$  simule une variable aléatoire prenant les valeurs 1 et 2 avec les probabilités respectives  $\left(\frac{r}{b+r}\right)^3$  et  $1 - \left(\frac{r}{b+r}\right)^3$ .

2. De quelle valeur théorique la valeur affichée après l'exécution des instructions suivantes fournit-elle une approximation ?

```
R=[ ];
for k=1:10000
R=[R,X(40,10)];
end;
disp((mean(R)))
```

La valeur affichée sera proche de l'espérance d'une variable aléatoire  $Y = 1 + B$  où  $B$  suit la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}((0,2)^3)$  dont le paramètre est égal à la probabilité de ne tirer aucune boule blanche en trois tirages :

$$E(Y) = 1 + (0.2)^3 = 1.008$$

## SUJET E 81

### EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

- a) Définition et propriétés de la loi géométrique.
- b) Compléter la ligne de code *Scilab* contenant des points d'interrogation pour que la fonction « geo » suivante fournisse une simulation de la loi géométrique dont le paramètre est égal à l'argument  $p$  de la fonction.

```
function x=geo(p)
    x=1;
    while rand() ???
        x=x+1;
    end;
endfunction
```

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

- a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire  $Y - 1$ .
- b) Déterminer l'espérance  $E(Y)$  et la variance  $V(Y)$  de la variable aléatoire  $Y$ .

3. On note  $Z$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

- a) Soit deux entiers  $k \geq 2$  et  $\ell \geq 3$ .

Calculer  $P([Y = k] \cap [Z = \ell])$  selon les valeurs de  $k$  et  $\ell$ .

- b) En déduire que, pour tout entier  $\ell \geq 3$ , on a :  $P([Z = \ell]) = \frac{2}{3} \left( \frac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}} \right)$ .

- c) Calculer  $E(Z)$ .

4. D'une manière plus générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ  $n$  jetons, numérotés de 1 à  $n$ .

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère les quatre matrices  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Ces quatre matrices forment-elles une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ?

2. Soit  $B_1, B_2, B_3, B_4$  quatre matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les matrices  $B_1, B_2, B_3, B_4$  pour qu'il existe un endomorphisme  $f$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\begin{cases} f(A_1) = B_1 \\ f(A_2) = B_2 \\ f(A_3) = B_3 \\ f(A_4) = B_4 \end{cases}.$$

b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les matrices  $B_1, B_2, B_3, B_4$  pour qu'il existe un automorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vérifiant les mêmes égalités.



## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours

a) Définition et propriétés de la loi géométrique.

La loi géométrique est la loi du rang d'apparition du premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire.

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, P([X = n]) = p(1-p)^{n-1}.$$

- $E(X) = 1/p$
- $V(X) = (1-p)/p^2$

b) Compléter la ligne de code *Scilab* fourni.

```
function x=geo(p)
    x=1;
    while rand()>p
        x=x+1;
    end;
endfunction
```

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire  $Y - 1$ .

La variable aléatoire  $Y - 1$  prend ses valeurs dans  $\llbracket 1, +\infty \rrbracket$  et pour tout  $k \geq 1$ , l'événement  $[Y - 1 = k]$  est réalisé si et seulement si les tirages du rang 2 au rang  $k$  (s'il en existe) amènent le même résultat que le premier tirage (ce qui se produit avec la probabilité  $(1/3)^{k-1}$ ), le  $k+1$ -ième tirage amenant un résultat différent (ce qui se produit avec la probabilité  $2/3$ ). Par suite,

$$\forall k \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket, P([Y - 1 = k]) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} \right)^{k-1}.$$

La variable aléatoire  $Y - 1$  suit donc la loi géométrique  $\mathcal{G}(2/3)$ .

b) Déterminer l'espérance  $E(Y)$  et la variance  $V(Y)$  de la variable aléatoire  $Y$ .

- $E(Y) = 1 + E(Y - 1) = 5/2$
- $V(Y) = V(Y - 1) = 3/4$ .

3. On note  $Z$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

- a) Soit deux entiers  $k \geq 2$  et  $\ell \geq 3$ .  
Calculer  $P([Y = k] \cap [Z = \ell])$  selon les valeurs de  $k$  et  $\ell$ .

Comme  $P([Y = k]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$  et  $P_{[Y=k]}([Z = \ell]) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} & \text{si } k < \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , on obtient :

$$P([Y = k] \cap [Z = \ell]) = \begin{cases} \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}} & \text{si } k < \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- b) En déduire que, pour tout entier  $\ell \geq 3$ , on a :  $P([Z = \ell]) = \frac{2}{3} \left(\frac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}}\right)$ .

Soit  $\ell \geq 3$ .

$$P([Z = \ell]) = \sum_{k=2}^{\ell-1} \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}} = \frac{2^{\ell-1} - 2}{3^{\ell-1}} = \frac{2}{3} \left(\frac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}}\right)$$

- c) Calculer  $E(Z)$ .

$$E(Z) = \frac{2}{3} \sum_{\ell=3}^{+\infty} \ell \left(\frac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}}\right) = 1 + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{2^{i-1} - 1}{3^{i-1}}\right) = 1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{(1 - 2/3)^2} - \frac{1}{(1 - 1/3)^2}\right) = \frac{11}{2}.$$

4. D'une manière plus générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ  $n$  jetons, numérotés de 1 à  $n$ .

Soit  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros. En utilisant les temps d'attente successifs d'un nouveau numéro, on obtient :

$$E(T) = 1 + \frac{1}{(n-1)/n} + \frac{1}{(n-2)/n} + \cdots + \frac{1}{1/n} = n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère les quatre matrices  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Ces quatre matrices forment-elles une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ?

Non !

Le sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  engendré par les quatre matrices est un plan puisque  $A_1$  et  $A_3$  sont linéairement indépendantes et que :

$$\begin{cases} A_2 = A_1 - A_3 \\ A_4 = A_1 + A_3 \end{cases}.$$

2. Soit  $B_1, B_2, B_3, B_4$  quatre matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur ces matrices pour qu'il existe un endomorphisme  $f$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vérifiant

a) 
$$\begin{cases} f(A_1) = B_1 \\ f(A_2) = B_2 \\ f(A_3) = B_3 \\ f(A_4) = B_4 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} B_2 = B_1 - B_3 \\ B_4 = B_1 + B_3 \end{cases}.$$

- b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur ces matrices pour qu'il existe un automorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vérifiant les mêmes égalités.

$$\begin{cases} (B_1, B_3) \text{ famille libre} \\ B_2 = B_1 - B_3 \\ B_4 = B_1 + B_3 \end{cases}.$$



## SUJET E 91

Sujet E 91

### EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : définition d'un estimateur sans biais d'un paramètre inconnu.

Soit  $N$  un entier supérieur ou égal à 2.

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , et suivant chacune la loi uniforme discrète sur  $\llbracket 1, N \rrbracket$ .

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $s_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$ .

- a) Montrer que la suite  $(s_n(N))_{n \geq 1}$  est strictement monotone et convergente.
- b) Trouver sa limite.

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $T_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

- a) Calculer pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $P(T_n = k)$ .
- b) Montrer que  $E(T_n) = N - s_n(N)$ .

4.
  - a) Justifier que  $P(|T_n - N| \geq 1)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.
  - b) En déduire, pour tout  $\varepsilon > 0$ , la limite de  $P(|T_n - N| \geq \varepsilon)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

5. On suppose dans cette question que  $N$  est un paramètre inconnu.

- a) Expliquer pourquoi on ne peut pas dire que  $T_n + s_n(N)$  est un estimateur sans biais de  $N$ .
- b) Trouver une suite convergente et asymptotiquement sans biais d'estimateurs de  $N$ .

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $f$  la fonction de deux variables définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1 .$$

1.     a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de  $f$  au voisinage de  $(0, 0)$ .  
       b) En déduire que  $(0, 0)$  est un point-col de  $f$ .
2.     a) Montrer que  $f$  admet un extremum local.  
       b) Cet extremum est-il global ?

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : définition d'un estimateur sans biais d'un paramètre inconnu.

Soit  $N$  un entier supérieur ou égal à 2.

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , et suivant chacune la loi uniforme discrète sur  $\llbracket 1, N \rrbracket$ .

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $s_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$ .

- a) Montrer que la suite  $(s_n(N))_{n \geq 1}$  est strictement monotone et convergente.

$$s_{n+1}(N) - s_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N^{n+1}} \sum_{k=1}^{N-1} k^n (k - N) < 0$$

La suite  $(s_n(N))_{n \geq 1}$  est (strictement) décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle est convergente.

- b) Trouver sa limite.

On a :  $s_n(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^n + \left(\frac{2}{N}\right)^n + \dots + \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$  si  $0 < q < 1$ , d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(N) = 0.$$

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $T_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

- a) Calculer pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $P(T_n = k)$ .

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(T_n \leq k) = (P(X_1 \leq k))^n = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

D'autre part,  $[T_n \leq k] = [T_n = k] \cup [T_n \leq k-1]$ , d'où par incompatibilité :

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(T_n = k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

- b) Montrer que  $E(T_n) = N - s_n(N)$ .

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^N k P(T_n = k) = \sum_{k=1}^N \left( k \left(\frac{k}{N}\right)^n - k \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \right)$$

d'où, par "télescopage" :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^N \left( k \left(\frac{k}{N}\right)^n - (k-1) \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \right) - \sum_{k=1}^N \left(\frac{k-1}{N}\right)^n = N - s_n(N).$$



4. a) Justifier que  $P(|T_n - N| \geq 1)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

$$P(|T_n - N| \geq 1) = P(T_n \leq N - 1) = s_n(N)$$

qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, comme il a été démontré en 2°b.

- b) En déduire, pour tout  $\varepsilon > 0$ , la limite de  $P(|T_n - N| \geq \varepsilon)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

Comme  $T_n - N$  ne prend que des valeurs entières, on a, pour tout réel  $\varepsilon > 0$  :

$$P(|T_n - N| \geq \varepsilon) \leq P(|T_n - N| \geq 1)$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - N| \geq \varepsilon) = 0$ .

5. On suppose dans cette question que  $N$  est un paramètre inconnu.

- a) Expliquer pourquoi on ne peut pas dire que  $T_n + s_n(N)$  est un estimateur sans biais de  $N$ .

Bien que  $E(T_n + s_n(N)) = N$ ,  $T_n + s_n(N)$  n'est pas un estimateur sans biais de  $N$ , parce qu'il dépend du paramètre à estimer (ce n'est pas un estimateur).

- b) Trouver une suite convergente et asymptotiquement sans biais d'estimateurs de  $N$ .

La suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , quant à elle, est bien une suite convergente et asymptotiquement sans biais d'estimateurs de  $N$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $f$  la fonction de deux variables définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1.$$

1. a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de  $f$  au voisinage de  $(0, 0)$ .

La formule de Taylor à l'ordre deux pour les fonctions de deux variables n'est pas exigible en section E, mais elle n'est nullement nécessaire pour répondre à cette question.

On obtient directement, en ordonnant les monômes par degré croissant :

$$f(h, k) = 1 - 9hk + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k).$$

- b) En déduire que  $(0, 0)$  est un point-col de  $f$ .

- $\partial_1(f)(x, y) = 3x^2 - 9y$
- $\partial_2(f)(x, y) = -9x + 3y^2$

Les deux dérivées partielles premières de  $f$  s'annulent en  $(0, 0)$  et le signe de

$$f(h, k) - f(0, 0) = -9hk + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$

change au voisinage de  $(0, 0)$ . Il en résulte que  $(0, 0)$  est un point-col de  $f$ .

2. a) Montrer que  $f$  admet un extremum local.

Les points critiques de  $f$  sont les solutions du système 
$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ -9x + 3y^2 = 0 \end{cases}.$$

Outre l'origine déjà mentionnée, on trouve comme unique point critique de  $f$  le point  $I = (3, 3)$ .

Pour en connaître la nature, on étudie la matrice hessienne de  $f$  en ce point.

- $\partial_{1,1}^2(f)(x, y) = 6x$
- $\partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_{2,1}^2(f)(x, y) = -9$
- $\partial_{2,2}^2(f)(x, y) = 6y$

Au point  $I = (3, 3)$ , la matrice hessienne est donc  $\nabla^2(f)(I) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$ , dont les valeurs propres, 9 et 27, sont strictement positives.

Il en résulte que  $f$  admet un minimum local en  $I$ .

- b) Cet extremum est-il global ?

Non, puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = -\infty$ .

SUJET E 94  
EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

- a) Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
- b) Donner un programme *Scilab* permettant de représenter la fonction partie entière sur l'intervalle  $[-5/2, +5/2]$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_n$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  dont une densité  $f_n$  est donnée par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} e^{-\frac{t}{n}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Reconnaître la loi de  $X_n$ , puis en donner l'espérance et la variance.

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $u_n = P(|X_n - E(X_n)| < 1)$ .

- a) Montrer que  $u_n = (e^{2/n} - 1) e^{-(n+1)/n}$ .
- b) Déterminer un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , de la forme  $\frac{\alpha}{n}$  où  $\alpha$  est un réel que l'on déterminera.

4. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on considère l'événement  $A_k = \left[ k + \frac{1}{2} < X_n < k + 1 \right]$ .

- a) Exprimer l'événement  $B_n = \left[ X_n - \lfloor X_n \rfloor > \frac{1}{2} \right]$  en fonction des événements  $A_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).
- b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $v_n = P(B_n)$ . Calculer  $v_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

5. On suppose désormais que les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  sont indépendantes et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

- a) Déterminer la loi de  $M_n$ .
- b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $w_n = P(|M_n - E(M_n)| < 1)$ . Calculer  $w_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .



## EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère les deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $\mathbb{R}^3$  définis par :

$$\begin{cases} F = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\} \\ G = \text{Vect}\{(1, -1, 0), (0, 2, 1)\} \end{cases}.$$

1. Trouver un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont l'image est  $F$  et le noyau  $G$ .
2. Peut-on le choisir diagonalisable ?

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours :

a) Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.

b) Donner un programme *Scilab* permettant de représenter la fonction partie entière sur l'intervalle  $[-5/2, +5/2]$ .

```
x=linspace(-2.5,2.5,100);
y=floor(x);
plot(x,y)
```

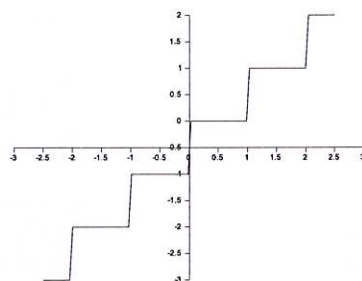


FIGURE 1 – Fonction partie entière

2. Reconnaître la loi de  $X_n$ , puis en donner l'espérance et la variance.

$X_n$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{n}$  et  $E(X_n) = n$  et  $V(X_n) = n^2$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose :  $u_n = P(|X_n - E(X_n)| < 1)$ .

a) Montrer que  $u_n = (e^{2/n} - 1)e^{-(n+1)/n}$ .

$$u_n = P(|X_n - n| < 1) = P(n-1 < X_n < n+1) = F_{X_n}(n+1) - F_{X_n}(n-1) = 1 - e^{-\frac{n+1}{n}} - \left(1 - e^{-\frac{n-1}{n}}\right)$$

d'où

$$u_n = e^{-\frac{n-1}{n}} - e^{-\frac{n+1}{n}} = (e^{2/n} - 1)e^{-(n+1)/n}.$$

b) Déterminer un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , de la forme  $\frac{\alpha}{n}$  où  $\alpha$  est un réel que l'on déterminera.

$$e^{\frac{2}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n} \text{ et } e^{-\frac{n+1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-1}, \text{ d'où : } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2e^{-1}}{n}.$$

4. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on considère l'événement  $A_k = \left[ k + \frac{1}{2} < X_n < k + 1 \right]$ .

a) Exprimer l'événement  $B_n = \left[ X_n - \lfloor X_n \rfloor > \frac{1}{2} \right]$  en fonction des événements  $A_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

L'événement  $B_n$  est la réunion disjointe des événements  $A_k$  pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k .$$

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $v_n = P(B_n)$ .  
Calculer  $v_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

$$P(A_k) = \exp\left(-\frac{1}{n}(k+1/2)\right) - \exp\left(-\frac{1}{n}(k+1)\right) = \left(\exp(1/2n) - 1\right) \times \left(\exp(-1/n)\right)^{k+1} .$$

Comme les événements  $A_k$  sont deux à deux incompatibles, on en déduit :

$$v_n = P(B_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = \left(\exp(1/2n) - 1\right) \times \frac{\exp(-1/n)}{1 - \exp(-1/n)}$$

d'où

$$v_n = P(B_n) = \frac{\exp(1/2n) - 1}{\exp(1/n) - 1} .$$

Comme  $e^t - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ , on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2} .$$

5. On suppose désormais que les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  sont indépendantes et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) .$$

a) Déterminer la loi de  $M_n$ .

$M_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$  et, classiquement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, P(M_n > x) = \prod_{k=1}^n e^{-x/k} = \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)x\right) .$$

Par suite, la variable aléatoire  $M_n$  suit la loi exponentielle de paramètre  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $w_n = P(|M_n - E(M_n)| < 1)$ .  
Calculer  $w_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .

Comme  $P([M_n > x]) = \exp(-\frac{x}{E(M_n)})$  pour tout  $x > 0$  et comme  $E(M_n) < 1$ , on a

$$w_n = P([-1 + E(M_n) < M_n < 1 + E(M_n)]) = 1 - \exp\left(-1 - \frac{1}{E(M_n)}\right)$$

qui tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini, puisque  $E(M_n)$  tend vers 0, par divergence de la série harmonique.



## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère les deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $\mathbb{R}^3$  définis par :

$$\begin{cases} F = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\} \\ G = \text{Vect}\{(1, -1, 0), (0, 2, 1)\} \end{cases}.$$

1. Trouver un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont l'image est  $F$  et le noyau  $G$ .

Il suffit d'imposer que la restriction de l'endomorphisme à  $G$  soit nulle, puis de choisir un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  n'appartenant pas à  $G$  et de prendre  $(1, 1, 1)$  pour image de ce vecteur.

2. Peut-on le choisir diagonalisable ?

On ne peut pas choisir l'endomorphisme diagonalisable parce que, si un endomorphisme  $f$  admet pour image  $F$  et pour noyau  $G$ ,  $f \circ f$  est l'endomorphisme nul (puisque  $F$  est inclus dans  $G$ ). Dès lors, 0 est la seule valeur propre possible de  $f$  (puisque  $X^2$  est un polynôme annulateur de  $f$ ), ce qui exclut que  $f$  soit diagonalisable, puisque ce n'est pas l'endomorphisme nul.

## SUJET ECO 102

Sujet E 102

### EXERCICE PRINCIPAL

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par :  $\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ .

1. a) Question de cours

Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

- b) Montrer que  $f$  se prolonge de manière unique en une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Justifier, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3}.$$

3. a) Établir, pour tout  $t > 0$ , l'inégalité :  $\frac{t^2}{e^t - 1} \leq t$ .

- b) Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt$ .

- c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt = 0$ .

4. a) Établir, pour tout  $t > 0$ , l'égalité :  $f(t) = t^2 \sum_{k=1}^n e^{-kt} + f(t) e^{-nt}$ .

- b) En déduire l'égalité :  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ .

5. a) Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'inégalité  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leq \frac{1}{n^2}$ .

- b) Compléter les lignes 3 et 5 du script *Scilab* suivant, pour que la fonction « approx » affiche une valeur approchée de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ , avec une précision « epsilon » entrée en argument.

```
function I = approx(epsilon)
    I = 0 ;
    n = ??? ;
    for i = 1:n
        I = I + ??? ;
    end ;
    disp(I,'integrale = ') ;
endfunction
```

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , suivant chacune la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

1.
  - a) Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la probabilité  $P(\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor)$ .
  - b) En déduire la probabilité  $P(U = V)$ .
2. Soit  $A$  la matrice aléatoire  $\begin{pmatrix} U & 1 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ .
  - a) Quelle est la probabilité que  $A$  soit inversible ?
  - b) Quelle est la probabilité que  $A$  soit diagonalisable ?



## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par :  $\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ .

1. a) Question de cours

b) Montrer que  $f$  admet un unique prolongement par continuité à  $\mathbb{R}^+$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ , l'unique prolongement par continuité de la fonction  $f$  à  $\mathbb{R}_+$  est obtenu en posant  $f(0) = 0$ .

Justifier, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'égalité :

2. 
$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3}.$$

La fonction  $\Gamma$  n'étant pas au programme (E), on obtient le résultat en intégrant par parties (sur un segment  $[0, x]$  puis en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ ).

3. a) Établir, pour tout  $t > 0$ , l'inégalité :  $\frac{t^2}{e^t - 1} \leq t$ .

Par convexité de la fonction exponentielle,  $e^t \geq 1 + t$ , d'où l'inégalité demandée.

b) Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt$ .

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  est convergente parce que  $f$  admet un prolongement continue à  $\mathbb{R}_+$  et parce que  $f(t) = o(1/t^2)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

La convergence des intégrales  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt$  pour  $n \geq 1$  en résulte par domination (mais on peut aussi la prouver en utilisant l'inégalité prouvée en a).

c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt = 0$ .

Grâce à l'inégalité prouvée en a, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt \leq \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}$$

d'où le résultat par encadrement.

4. a) Établir, pour tout  $t > 0$ , l'égalité :  $f(t) = t^2 \sum_{k=1}^n e^{-kt} + f(t) e^{-nt}$ .

$$t^2 \sum_{k=1}^n e^{-kt} = t^2 e^{-t} \left( \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-t}} \right) = t^2 \left( \frac{1 - e^{-nt}}{e^t - 1} \right) = f(t) - f(t) e^{-nt}.$$

- b) En déduire l'égalité :  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$

Par intégration de 0 à  $+\infty$ , on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt$$

qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, d'où le résultat.

5. a) Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'inégalité  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leq \frac{1}{n^2}.$

Par la méthode des rectangles :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{2}{t^3} dt = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{n^2}.$$

b)

```
function I=approx(epsilon)
    I=0;
    n=floor(1/sqrt(epsilon));
    for i= 1:n
        I=I+2/i^3;
    end
    disp(I,'integrale = ');
endfunction
```

Pour information : une valeur approchée à  $10^{-6}$  près de  $I = \int_0^{+\infty} f(t) dt$  est 2,404114 .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

1. a) Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la probabilité  $P([nU] = [nV])$ .

$$P([nU] = [nV]) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} [nU] = [nV] = k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\left[\frac{k}{n} \leq U < \frac{k+1}{n}\right] \cap \left[\frac{k}{n} \leq V < \frac{k+1}{n}\right]\right) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

- b) En déduire la probabilité  $P([U = V])$ .

Comme l'événement  $[U = V]$  est inclus dans chacun des événements  $[nU] = [nV]$ , sa probabilité est majorée par  $1/n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Il en résulte que la probabilité  $P([U = V])$  est nulle.

Remarque : le produit de convolution n'est pas au programme de la section E (on ne peut donc pas utiliser la variable  $U - V$ , comme le ferait spontanément un candidat fiché S).

2. Soit  $A$  la matrice aléatoire  $\begin{pmatrix} U & 1 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ .

- a) Quelle est la probabilité que  $A$  soit inversible?

C'est la probabilité de l'événement  $[U = 0] \cup [V = 0]$ . Elle est nulle.

- b) Quelle est la probabilité que  $A$  soit diagonalisable?

C'est la probabilité de l'événement  $[U \neq V]$ . Elle est égale à 1 d'après 1b.

## SUJET E 106

Sujet E 106

### EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  désigne un espace probabilisé, et toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur cet espace probabilisé et  $X$  désigne une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

1. a) Question de cours : rappeler la formule de Koenig-Huygens.  
b) Démontrer que, si  $X$  admet un moment d'ordre deux, alors on a :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad V(X) \leq E((X - c)^2) .$$

2. Dans cette question,  $n$  est un entier strictement positif et  $X$  une variable aléatoire telle que :

$$X(\Omega) \subset \llbracket 0, 2n \rrbracket .$$

- a) En utilisant une des inégalités prouvées en 1.b, démontrer que la variance de  $X$  est inférieure ou égale à  $n^2$ .  
b) Démontrer que, si  $E(X) = n$ , alors la variance de  $X$  est égale à  $n^2$  si, et seulement si,  $P([X = 0]) = P([X = 2n]) = \frac{1}{2}$ .  
c) Quelle est la plus petite valeur possible de  $V(X)$  lorsque  $E(X) = n$  ?

Dans toute la suite de l'exercice,  $c$  désigne un nombre réel positif qui n'est pas entier et  $\lfloor c \rfloor$  sa partie entière.

3. Soit  $X_0$  une variable aléatoire vérifiant : 
$$\begin{cases} X_0(\Omega) = \{\lfloor c \rfloor, \lfloor c \rfloor + 1\} \\ E(X_0) = c \end{cases} .$$

- a) Vérifier que :  $P([X_0 = \lfloor c \rfloor]) = \lfloor c \rfloor + 1 - c$ .  
b) En déduire que la variance de  $X_0$  est égale à  $(c - \lfloor c \rfloor)(\lfloor c \rfloor + 1 - c)$ .

4. Dans cette question et la suivante,  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  qui admet une espérance et une variance, et vérifie :  $E(X) = c$ .

On note  $A = [X \leq c]$  et  $p = P(A)$ .

- a) Justifier que  $p$  est strictement compris entre 0 et 1.

- b) Justifier la convergence de la série  $\sum_{k \geq 0} k P_{\bar{A}}([X = k])$ , où  $\bar{A}$  désigne le complémentaire de l'événement  $A$ .

5. On note :  $c_0 = \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} k P_A([X = k])$  et  $c_1 = \sum_{k=\lfloor c \rfloor+1}^{+\infty} k P_{\bar{A}}([X = k])$ .

Soit  $Y$  une variable aléatoire telle que  $P([Y = c_0]) = p$  et  $P([Y = c_1]) = 1 - p$ .



- a) Vérifier que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ont la même espérance.
- b) Prouver l'égalité :  $V(Y) = (c - c_0)(c_1 - c)$ .
- c) Démontrer l'inégalité :
$$V(X) \geq V(Y) .$$
- d) En déduire que  $V(X_0)$  est la plus petite valeur possible de  $V(X)$ .

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Quelle est la limite quand  $t$  tend vers 0 de  $\frac{e^t - 1}{t}$  ?
2. Justifier la convergence de l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{e^t - 1}{\sqrt{t^3}} \right) e^{-2t} dt$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : rappeler la formule de Koenig-Huygens.

Sous réserve que  $X$  ait un moment d'ordre 2, elle possède une espérance et une variance, qui vérifient :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

- b) Démontrer que, si  $X$  admet un moment d'ordre deux, alors on a :
- $$\forall c \in \mathbb{R}, \quad V(X) \leq E((X - c)^2).$$

Par application de la formule de Koenig-Huygens à la variable aléatoire  $X - c$  :

$$V(X) = V(X - c) = E((X - c)^2) - (E(X - c))^2 \leq E((X - c)^2).$$

2. Dans cette question,  $n$  est un entier strictement positif et  $X$  une variable aléatoire telle que :

$$X(\Omega) \subset \llbracket 0, 2n \rrbracket.$$

- a) En utilisant une des inégalités prouvées en 1.b, démontrer que la variance de  $X$  est inférieure ou égale à  $n^2$ .

Comme  $X(\Omega) \subset \llbracket 0, 2n \rrbracket$ , on a  $(X(\omega) - n)^2 \leq n^2$  pour tout  $\omega \in \Omega$  et donc, par application de l'inégalité  $V(X) \leq E((X - c)^2)$  à  $c = n$  :

$$V(X) \leq E((X - n)^2) \leq n^2.$$

- b) Démontrer que, si  $E(X) = n$ , alors la variance de  $X$  est égale à  $n^2$  si, et seulement si,  $P([X = 0]) = P([X = 2n]) = \frac{1}{2}$ .

• Condition suffisante

Si  $P([X = 0]) = P([X = 2n]) = \frac{1}{2}$ , alors  $\frac{X}{2n}$  suit la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$  dont la variance est égale à  $\frac{1}{4}$ .

• Condition nécessaire

Si  $V(X) = n^2$ , alors  $E(n^2 - (X - n)^2) = 0$ , ce qui entraîne que la probabilité  $P([1 \leq X \leq 2n - 1])$  est nulle.

Dès lors, comme  $E(X) = n$ , on a nécessairement  $P([X = 0]) = P([X = 2n]) = \frac{1}{2}$ .

- c) Quelle est la plus petite valeur possible de  $V(X)$  lorsque  $E(X) = n$  ?

Lorsque  $E(X) = n$ , la plus petite valeur possible de  $V(X)$  est 0, obtenue lorsque  $P([X = n]) = 1$ .

3. Soit  $X_0$  une variable aléatoire vérifiant : 
$$\begin{cases} X_0(\Omega) = \{[c], [c] + 1\} \\ E(X_0) = c \end{cases} .$$

a) Vérifier que :  $P([X_0 = [c]]) = [c] + 1 - c$  .

Soit  $\eta = P([X_0 = [c]])$ .

$$c = E(X_0) = \eta [c] + (1 - \eta) ([c] + 1) = [c] + (1 - \eta)$$

d'où  $\eta = [c] + 1 - c$  .

b) En déduire que la variance de  $X_0$  est égale à  $(c - [c])([c] + 1 - c)$  .

$$V(X) = \eta ([c] - c)^2 + (1 - \eta) ([c] + 1 - c)^2 = ([c] + 1 - c) ([c] - c)^2 + (c - [c]) ([c] + 1 - c)^2 = (c - [c])([c] + 1 - c) .$$

4. Dans cette question et la suivante,  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  qui admet une espérance et une variance, et vérifie :  $E(X) = c$  .

On note  $A = [X \leq c]$  et  $p = P(A)$ .

a) Justifier que  $p$  est strictement compris entre 0 et 1.

Si  $p$  était nul, l'espérance de  $X$  serait strictement supérieure à  $c$ .

Si  $p$  était égal à 1, l'espérance de  $X$  serait strictement inférieure à  $c$  ou  $X$  presque certainement égale à  $c$ , ce qui est exclu puisque  $c$  n'est pas un nombre entier.

b) Justifier la convergence de la série  $\sum_{k \geq 0} k P_{\bar{A}}([X = k])$ .

Comme  $k P_{\bar{A}}([X = k]) = \frac{k P([X = k] \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \leq \frac{k P([X = k])}{P(\bar{A})}$  et comme  $X$  admet une espérance,

la série  $\sum_{k \geq 0} k P_{\bar{A}}([X = k])$  est convergente par comparaison de séries à termes positifs.

5. On note :  $c_0 = \sum_{k=0}^{[c]} k P_A([X = k])$  et  $c_1 = \sum_{k=[c]+1}^{+\infty} k P_{\bar{A}}([X = k])$  .

Soit  $Y$  une variable aléatoire telle que  $P([Y = c_0]) = p$  et  $P([Y = c_1]) = 1 - p$  .

a) Vérifier que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ont la même espérance.

Grâce à la formule des probabilités totales,

$$P([X = k]) = P(A) P_A([X = k]) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}([X = k]) = \begin{cases} P(A) P_A([X = k]) & \text{si } k \leq [c] \\ P(\bar{A}) P_{\bar{A}}([X = k]) & \text{si } k > [c] \end{cases}$$

d'où :

$$E(X) = P(A) \sum_{k=0}^{[c]} k P_A([X = k]) + P(\bar{A}) \sum_{k=[c]+1}^{+\infty} k P_{\bar{A}}([X = k]) = p c_0 + (1 - p) c_1 = E(Y) .$$



b) Prouver l'égalité :  $V(Y) = (c - c_0)(c_1 - c)$ .

Comme  $p = \frac{c_1 - c}{c_1 - c_0}$  et  $1 - p = \frac{c - c_0}{c_1 - c_0}$ , on a :

$$V(Y) = E((Y - c)^2) = \frac{c_1 - c}{c_1 - c_0} (c_0 - c)^2 + \frac{c - c_0}{c_1 - c_0} (c_1 - c)^2 = (c - c_0)(c_1 - c) .$$

c) Démontrer l'inégalité :  $V(X) \geq V(Y)$  .

$$V(X) = p \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} (k - c)^2 P_A([X = k]) + (1 - p) \sum_{k=\lfloor c \rfloor + 1}^{+\infty} (k - c)^2 P_{\bar{A}}([X = k])$$

d'où, grâce à la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) \geq p \left( \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} k P_A([X = k]) - c \right)^2 + (1 - p) \left( \sum_{k=\lfloor c \rfloor + 1}^{+\infty} k P_{\bar{A}}([X = k]) - c \right)^2$$

et finalement :

$$V(X) \geq p (c_0 - c)^2 + (1 - p) (c_1 - c)^2 = V(Y) .$$

d) En déduire que  $V(X_0)$  est la plus petite valeur possible de  $V(X)$ .

Comme  $c \geq \lfloor c \rfloor \geq c_0$  et  $c \leq 1 + \lfloor c \rfloor \leq c_0$ , on a aussi :

$$V(Y) = (c - c_0)(c_1 - c) \geq (c - \lfloor c \rfloor)(\lfloor c \rfloor + 1 - c) = V(X_0) .$$

Il en résulte que  $V(X_0)$  est la plus petite valeur possible de  $V(X)$ , sous la contrainte  $E(X) = n$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Quelle est la limite quand  $t$  tend vers 0 de  $\frac{e^t - 1}{t}$  ?

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 .$$

2. Justifier la convergence de l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{e^t - 1}{\sqrt{t^3}} \right) e^{-2t} dt$  .

- L'intégrande  $f : t \mapsto \left( \frac{e^t - 1}{\sqrt{t^3}} \right) e^{-2t}$  est une fonction continue sur  $]0, +\infty[$
- $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$  quand  $t$  tend vers 0
- $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$

## SUJET ECO 108

Sujet E 108

### EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2 et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices réelles à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  ${}^tM$  la transposée de  $M$ .

1.
  - a) Question de cours : théorème du rang.
  - b) Justifier que l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. Soit  $\varphi$  l'application qui à toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , associe la matrice  $\varphi(M) = M + {}^tM$ .  
Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que  $n = 2$ .  
Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2$ , on note  $E_{i,j}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les éléments sont nuls excepté celui de la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ième colonne qui vaut 1.  
On rappelle que la famille  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
  - a) Écrire la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ .
  - b) Préciser le rang de  $\varphi$ .
  - c) Donner une base du noyau de  $\varphi$ .
4. On suppose désormais  $n \geq 3$ .
  - a) Déterminer  $\varphi(\varphi(M))$ , pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme  $\varphi$ ?
  - b) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable?

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Pour tout réel  $c > 0$ , on note  $f_c$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_c(x) = \begin{cases} \frac{c}{x(x+1)(x+2)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Justifier l'existence d'une unique valeur  $c_o$  de  $c$  pour laquelle  $f_{c_o}$  est une densité de probabilité.
2. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f_{c_o}$ .  
Trouver la limite et un équivalent de  $P([X \geq n])$  quand  $n$  tend vers l'infini.



## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : théorème du rang.

- b) Justifier que l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

Soit  $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont la somme des coefficients est nulle.

Soit  $s$  l'application linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  qui associe à toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la somme de tous ses coefficients.

- $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$  est le noyau de  $s$ , donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- L'application  $s$  est surjective.
- Par le théorème du rang, la dimension de  $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$  est égale à  $n^2 - 1$ .

Remarque : les notions d'hyperplan et de forme linéaire ne figurent pas au programme de la section E.

2. Soit  $\varphi$  l'application qui à toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , associe la matrice  $\varphi(M) = M + {}^tM$ .

Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

L'application  $\varphi$  est linéaire et l'image par  $\varphi$  de toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que  $n = 2$ .

- a) Écrire la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Préciser le rang de  $\varphi$ .

Le rang de  $\varphi$  est celui de la matrice  $A$ , c'est-à-dire 3.

- c) Donner une base du noyau de  $\varphi$ .

La matrice  $E_{1,2} - E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  constitue à elle seule une base de  $\ker \varphi$ .

4. On suppose désormais  $n \geq 3$ .

- a) Déterminer  $\varphi(\varphi(M))$ , pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme  $\varphi$ ?

$$\varphi(\varphi(M)) = \varphi(M + {}^tM) = \varphi(M) + \varphi({}^tM) = M + {}^tM + {}^tM + M = 2(M + {}^tM) = 2\varphi(M)$$

Il en résulte que le polynôme  $X^2 - 2X$  est annulateur de  $\varphi$ , ce qui entraîne que les seules valeurs possibles de  $\varphi$  sont 0 et 2.

- b) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable?

- Toutes les matrices symétriques sont des vecteurs propres de  $\varphi$  (associées à la valeur propre 2) et constituent un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .
- Toutes les matrices « anti-symétriques » sont des vecteurs propres de  $\varphi$  (associées à la valeur propre 0) et constituent un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

La somme des dimensions des sous-espaces propres de  $\varphi$  étant égale à la dimension  $n^2$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable.

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Pour tout réel  $c > 0$ , on note  $f_c$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_c(x) = \begin{cases} \frac{c}{x(x+1)(x+2)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Justifier l'existence d'une unique valeur  $c_0$  de  $c$  pour laquelle  $f_{c_0}$  est une densité de probabilité.

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$  est convergente parce que l'intégrande est une fonction continue sur  $[1, +\infty[$  et parce que cette fonction positive est équivalente en  $+\infty$  à la fonction de référence  $x \mapsto 1/x^3$  dont l'intégrale est convergente au voisinage de l'infini.

Il en résulte que pour

$$c_0 = \frac{1}{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}}$$

la fonction  $f_{c_0}$  est une densité de probabilité, parce pour cette valeur de  $c$  et seulement pour cette valeur, l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  de  $f_c$  est égale à 1.

2. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f_{c_0}$ .

Trouver la limite et un équivalent de  $P([X \geq n])$  quand  $n$  tend vers l'infini.

Par propriété de limite monotone, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([X \geq n]) = 0.$$

Pour trouver un équivalent de  $P([X \geq n])$  quand  $n$  tend vers l'infini, il suffit d'encadrer l'intégrale correspondante

$$c_0 \int_n^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^3} \leq P([X \geq n]) \leq c_0 \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$$

d'où :

$$P([X \geq n]) \sim \frac{c_0}{2n^2}.$$



**ORAL HEC 2017**

**MATHÉMATIQUES**

**EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES**

**Option technologique**



## SUJET T 05

Sujet T 05

### EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : formule de Koenig-Huygens.

2. Soit  $g$  la fonction réelle définie par :  $g(x) = \frac{x}{x^2 - 3}$ .

a) Donner l'ensemble de définition de  $g$  et préciser la parité de la fonction  $g$ .

b) Calculer la fonction dérivée de  $g$ .

c) Donner une représentation graphique de  $g$ , en indiquant ses asymptotes.

d) Justifier l'égalité :

$$\int_2^3 g(x) dx = \ln \sqrt{6}.$$

3. Pour tout nombre entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on note  $f_n$  la fonction définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2nx}{(x^2 - 3)^{n+1}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}.$$

a) Démontrer que  $f_n$  est une densité de probabilité.

b) Soit  $X_n$  une variable aléatoire de densité  $f_n$ .

i) Démontrer que la variable aléatoire  $X_n^2$  admet une espérance, donnée par la formule :

$$E(X_n^2) = 3 + \frac{n}{n-1}.$$

ii) Trouver la limite de  $E(X_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Calculer les puissances successives de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ .
2. On considère les instructions *Scilab* suivantes :

```
M=eye(2,2)/2;  
N=M;  
N(1,2)=1;  
M=N;  
c=1;  
while N(1,1)>0.01  
    N=M*N;  
    c=c+1;  
end;
```

Quelles sont les valeurs des variables  $c$  et  $N(1,2)$  après l'exécution des instructions précédentes ?

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : formule de Koenig-Huygens.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

2. Soit  $g$  la fonction réelle définie par :  $g(x) = \frac{x}{x^2 - 3}$ .

- a) Donner l'ensemble de définition de  $g$  et préciser la parité de la fonction  $g$ .

La fonction  $g$  est impaire et définie sur  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}$ .

- b) Calculer la fonction dérivée de  $g$ .

$$\forall x \in D_g, \quad g'(x) = -\frac{(x^2 + 3)}{(x^2 - 3)^2}.$$

- c) Donner une représentation graphique de  $g$ , en indiquant ses asymptotes.

- La fonction  $g$  est décroissante sur chacun des trois intervalles  $] -\infty, -\sqrt{3}[$ ,  $] -\sqrt{3}, +\sqrt{3}[$  et  $] +\sqrt{3}, +\infty[$ .
- Son graphe, symétrique par rapport à l'origine, admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale et les droites verticales d'équation  $x = -\sqrt{3}$  et  $x = +\sqrt{3}$  pour asymptotes verticales.

- d) Justifier l'égalité :

$$\int_2^3 g(x) dx = \ln \sqrt{6}.$$

$$\int_2^3 g(x) dx = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 3} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(x^2 - 3) \right]_2^3 = \frac{1}{2} (\ln 6 - \ln 1) = \ln \sqrt{6}.$$

3. Pour tout nombre entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on note  $f_n$  la fonction définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2nx}{(x^2 - 3)^{n+1}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}.$$

- a) Démontrer que  $f_n$  est une densité de probabilité.

- La fonction  $f_n$  est positive et continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .
- Son intégrale sur  $\mathbb{R}$  est égale à 1 puisque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{2nx}{(x^2 - 3)^{n+1}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{(x^2 - 3)^n} \right]_2^A = 1.$$

b) Soit  $X_n$  une variable aléatoire de densité  $f_n$ .

i) Démontrer que la variable aléatoire  $X_n^2$  admet une espérance, donnée par la formule :

$$E(X_n^2) = 3 + \frac{n}{n-1} .$$

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{2nx^3}{(x^2-3)^{n+1}} dx = \int_2^{+\infty} \frac{2nx(3+(x^2-3))}{(x^2-3)^{n+1}} dx \\ &= 3 \int_2^{+\infty} \frac{2nx}{(x^2-3)^{n+1}} dx + \frac{n}{n-1} \int_2^{+\infty} \frac{2(n-1)x}{(x^2-3)^{(n-1)+1}} dx = 3 + \frac{n}{n-1} . \end{aligned}$$

ii) Trouver la limite de  $E(X_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

La nullité de  $f_n$  sur l'intervalle  $] -\infty, 2[$  et la formule de Koenig-Huygens permettent d'obtenir l'encadrement

$$2 \leq E(X_n) \leq \sqrt{E(X_n^2)} = \sqrt{3 + \frac{n}{n-1}}$$

qui fournit par passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = 2 .$$



## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Calculer les puissances successives de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

2. On considère les instructions *Scilab* suivantes :

```
M=eye(2,2)/2;
N=M;
N(1,2)=1;
N=M;
c=1;
while N(1,1)>0.01
    N=M*N;
    c=c+1;
end;
```

Quelles sont les valeurs des variables  $c$  et  $N(1,2)$  après l'exécution des instructions précédentes ?

- $c = 7$
- $N(1,2) = \frac{7}{2^6} = \frac{7}{64} = 0.109375$

puisque le plus petit entier  $n$  pour lequel  $2^{-n} \leq 0.01$  est 7

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 0.015625 & 0.1875 \\ 0 & 0.015625 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 0.0078125 & 0.109375 \\ 0 & .0078125 \end{pmatrix}$$

## SUJET T 06

Sujet T 06

### EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : loi faible des grands nombres.
2. Pour tout nombre réel strictement positif  $a$ , on note  $f_a$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_a(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Pour quelle valeur de  $a$ , la fonction  $f_a$  est-elle une densité de probabilité ?

On note  $f$  cette densité et  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  pour densité.

3.
  - a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .
  - b) Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx$  et la calculer.
  - c) Vérifier l'égalité :  $E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx$  .

4. On pose :  $Y = \frac{X^2}{9}$  .

- a) Justifier que  $Y$  suit une loi uniforme.
- b) Quelle est la loi que permet de simuler l'instruction *Scilab* suivante ?

```
3*sqrt(rand())
```

- c) De quel nombre se rapproche la valeur fournie par l'instruction *Scilab* suivante lorsque  $n$  est grand ?

```
sum(sqrt(rand(n,1)))/n
```

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $M$  la matrice définie par  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  la matrice identité. On pose :  $J = M - I$ .

1. Pour tout entier  $p \geq 1$ , calculer  $J^p$  en fonction de  $J$ .
2. Donner pour tout entier  $n \geq 1$ , une expression de  $M^n$  en fonction de  $I$  et  $J$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : loi faible des grands nombres.
2. Pour tout nombre réel strictement positif  $a$ , on note  $f_a$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_a(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour quelle valeur de  $a$ , la fonction  $f_a$  est-elle une densité de probabilité ?

$$\boxed{a = \frac{2}{9}}.$$

On note  $f$  cette densité et  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  pour densité.

3. a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{9} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

- b) Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx$  et la calculer.

$$\int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx = \int_0^3 \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) dx = \boxed{2}.$$

- c) Vérifier l'égalité :  $E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{2}{9} \int_0^3 x^2 dx = \boxed{2}.$$

4. On pose :  $Y = \frac{X^2}{9}$ .

- a) Justifier que  $Y$  suit une loi uniforme.

La fonction de répartition  $G$  de  $Y$  est donnée par

$$G(x) = P([X^2 \leq 9x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(\sqrt{9x}) = x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

ce qui prouve que  $Y$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

- b) Quelle est la loi que permet de simuler l'instruction *Scilab* suivante ?



`3*sqrt(rand())`

Si une variable aléatoire  $U$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ ,  $3 * \sqrt{U}$  suit la même loi que  $X$ , puisque  $X = 3\sqrt{Y}$  et que  $Y$  et  $U$  suivent la même loi.

L'instruction *Scilab* précédente permet donc de simuler la loi de  $X$ .

c) De quel nombre se rapproche la valeur fournie par l'instruction *Scilab* suivante lorsque  $n$  est grand ?

`sum(sqrt(rand(n,1)))/n`

L'instruction *Scilab* "sqrt(rand(n,1))" génère une simulation d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X/3$ .

Grâce à la loi des grands nombres, on peut donc affirmer que, lorsque  $n$  est grand, l'instruction *Scilab* "sum(sqrt(rand(n,1)))/n" fournit une valeur approchée de

$$E\left(\frac{X}{3}\right) = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $M$  la matrice définie par  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  la matrice identité. On pose :  $J = M - I$ .

1. Pour tout entier  $p \geq 1$ , calculer  $J^p$  en fonction de  $J$ .

$$J^p = 2^{p-1} J$$

2. Donner pour tout entier  $n \geq 1$ , une expression de  $M^n$  en fonction de  $I$  et  $J$ .

Les matrices  $I$  et  $J$  commutent.

La formule du binôme donne

$$M^n = (I + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I^k J^{n-k} = I + \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-k-1} \right) J = I + 2^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) J$$

Comme  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , on obtient finalement

$$M^n = I + 2^{n-1} \left( \frac{3^n}{2^n} - \frac{1}{2^n} \right) J = \boxed{I + \frac{3^n - 1}{2} J}.$$



**ORAL HEC 2017**

**MATHÉMATIQUES**

**EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES**

**Option littéraire B/L**

## SUJET BL 18

sujet BL 18

### EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : formule de Taylor-Young.

Dans toute la suite de l'exercice,  $L$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L(x) = x e^x.$$

Pour tout nombre réel  $y$ , on dit que le nombre réel  $x$  est solution de l'équation de Lambert  $(l_y)$  si la valeur de  $L$  en  $x$  est égale à  $y$  :

$$L(x) = y \quad (l_y)$$

2. a) Justifier que la fonction  $L$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer ses dérivées successives.  
b) Donner le tableau de variation de  $L$  sur  $\mathbb{R}$  et en déduire pour quelles valeurs du nombre réel  $y$  l'équation de Lambert  $(l_y)$  admet une unique solution réelle.  
c) Donner l'allure d'une représentation graphique de la fonction  $L$ .

3. a) On pose  $I = [-e^{-1}, +\infty[$  et  $J = [-1, +\infty[$ .  
Justifier l'existence d'une unique application  $W$  de  $I$  dans  $J$  telle que pour tout  $y \in I$ ,  $W(y)$  soit solution de l'équation de Lambert  $(l_y)$ .

b) Justifier la dérivabilité de la fonction  $W$  sur  $] -e^{-1}, +\infty[$  et, pour tout élément  $y$  de cet intervalle ouvert, l'égalité :

$$W'(y) = \frac{1}{(1 + W(y)) e^{W(y)}}.$$

- c) En utilisant l'égalité des accroissements finis, démontrer que :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{W(y - e^{-1}) - W(-e^{-1})}{y} = +\infty.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de  $W$  ?

4. a) Justifier l'existence de deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que l'on puisse écrire quand  $y$  tend vers 0 :

$$W(y) = ay + by^2 + o(y^2).$$

b) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction  $x \mapsto ax e^x + bx^2 e^{2x}$  et en déduire les valeurs de  $a$  et  $b$ .

5. a) Justifier, pour tout  $y > 0$ , l'égalité :  $\ln(W(y)) + W(y) = \ln(y)$ .  
b) En déduire que  $W(y)$  est équivalent à  $\ln(y)$  quand  $y$  tend vers  $+\infty$ .  
c) Justifier l'équivalence quand  $y$  tend vers  $+\infty$  :

$$W(y) - \ln(y) \sim -\ln(\ln(y)).$$



## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 3. On considère  $n$  personnes qui jouent à "Pile" ou "Face" avec une pièce de monnaie équilibrée et de façon indépendante.

1. Soit  $A$  l'événement : "une seule personne exactement obtient un résultat différent des  $(n - 1)$  autres personnes".

Calculer la probabilité de  $A$ .

2. Un jeu consiste à répéter l'expérience précédente (appelée "partie") jusqu'à la réalisation de  $A$ . On note  $X$  la variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon.

Donner la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours.

2. La fonction  $L$ 

a) La fonction  $L$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de deux fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , la fonction polynomiale  $x \mapsto x$  et la fonction exponentielle.

Ses deux premières dérivées sont données, pour tout réel  $x$  par :

$$L'(x) = (x + 1)e^x$$

$$L''(x) = (x + 2)e^x.$$

En procédant par récurrence ou en utilisant la formule de Leibniz, on obtient l'expression de la dérivée  $n$ -ième de  $L$  en tout point  $x$  :

$$L^{(n)}(x) = (x + n)e^x.$$

b) La fonction  $L$  est strictement décroissante sur l'intervalle fermé  $]-\infty, -1]$  et strictement croissante sur l'intervalle fermé  $[-1, +\infty[$ . Son minimum, atteint en  $-1$ , est égal à  $-1/e$ . Elle tend vers 0 en  $-\infty$  et vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .

Il en résulte que l'équation de Lambert  $(l_y)$  admet une unique solution réelle si et seulement si

$$x \in \{-1/e\} \cup [0, +\infty[.$$

3. La fonction  $W$ 

a) D'après l'étude faite en 1.b, la restriction de la fonction  $L$  à l'intervalle  $J = [-1, +\infty[$  réalise une bijection de  $J$  sur l'intervalle  $I = [-e^{-1}, +\infty[$ .

La bijection réciproque  $W$  de cette bijection est l'unique application de  $I$  dans  $J$  telle que pour tout  $y \in I$ ,  $W(y)$  soit solution de l'équation de Lambert  $(l_y)$ .

b) La dérivée de la fonction  $L$  ne s'annulant pas sur l'intervalle ouvert  $] - 1, +\infty [$ , l'application  $W$  est dérivable en tout point de

$$L(] - 1, +\infty [) = ] - e^{-1}, +\infty [$$

et, pour tout élément  $y$  de cet intervalle ouvert, sa dérivée est donnée par la formule de dérivation d'une fonction réciproque :

$$W'(y) = \frac{1}{L'(W(y))} = \frac{1}{(1 + W(y))e^{W(y)}}.$$

c) Soit  $y > 0$ .

D'après l'égalité des accroissements finis, appliquée à la fonction  $W$  qui est continue sur le segment  $[-e^{-1}, y-e^{-1}]$  et dérivable sur  $] -e^{-1}, y-e^{-1}[$ , il existe un élément  $c(y)$  de  $] -e^{-1}, y-e^{-1}[$  tel que :

$$\frac{W(y-e^{-1})-W(-e^{-1})}{y} = W'(c(y)) = \frac{1}{(1+W(c(y)))e^{W(c(y))}}.$$

Quant  $y$  tend vers  $0_+$ ,  $c(y)$  tend vers  $-e^{-1}$  par valeurs supérieures,  $W(c(y))$  vers  $-1_+$  et finalement  $(1+W(c(y)))e^{W(c(y))}$  vers  $0_+$ .

Par conséquent :

$$\lim_{y \rightarrow 0_+} \frac{W(y-e^{-1})-W(-e^{-1})}{y} = +\infty.$$

Il en résulte que la courbe représentative de  $W$  a une **tangente verticale** au point  $(-e^{-1}, -1)$ .<sup>1</sup>

4. a) D'après le théorème de la bijection,  $W$  est continue sur  $I$ , ce qui entraîne par la formule de 2.b exprimant la dérivée  $W'$  à l'aide de  $W$ , que la fonction  $W$  est de classe  $C^1$  sur  $] -e^{-1}, +\infty[$  et permet ensuite d'affirmer que  $W$  est de classe  $C^2$  puisque sa dérivée est de classe  $C^1$ , par composition, à nouveau à partir de l'expression de  $W'$  en fonction de  $W$ .<sup>2</sup>

Comme  $W$  est de classe  $C^2$  au voisinage de 0, elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par la formule de Taylor-Young et, comme  $W(0) = 0$ , il existe donc deux nombres réels  $a = W'(0)$  et  $b = \frac{W''(0)}{2}$  tels que :

$$W(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} ay + by^2 + o(y^2).$$

b)  $\boxed{axe^x + bx^2e^{2x} = ax + (a+b)x^2 + x^2\epsilon(x)}$ , avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ .

Par substitution, puisque  $xe^x$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 :

$$W(xe^x) = ax + (a+b)x^2 + x^2\epsilon(x) + o(x^2e^{2x})$$

ce qui entraîne que  $W(xe^x) - ax - (a+b)x^2$  est négligeable devant  $x^2$  quand  $x$  tend vers 0.

Par unicité d'un développement limité et comme  $W(xe^x) = W(L(x)) = x$ , on en déduit :

$$\boxed{\begin{matrix} a = 1 \\ b = -1 \end{matrix}}.$$

5. a) Soit  $y > 0$ . Par définition de  $W$  en tant que bijection réciproque, on a

$$L(W(y)) = W(y)e^{W(y)} = y$$

d'où, en passant aux logarithmes, ce qui est possible parce que  $y$  et  $W(y)$  sont strictement positifs :

$$\boxed{\ln(W(y)) + W(y) = \ln(y)}.$$

1. Ceci correspond, par symétrie par rapport à la première bissectrice, au fait que le graphe de  $L$  admet une tangente horizontale au point  $(-1, -e^{-1})$ .

2. On démontrerait ainsi de proche en proche, par une récurrence immédiate, que  $W$  est en fait de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle ouvert  $] -e^{-1}, +\infty[$ .

b) Quand  $y$  tend vers  $+\infty$ ,  $W(y)$  tend vers  $+\infty$ , ce qui entraîne que  $\ln(W(y))$  est négligeable devant  $W(y)$ , donc que  $\ln(W(y)) + W(y)$  est équivalent à  $W(y)$ .

On en déduit à l'aide de l'égalité démontrée en a) que  $W(y)$  est équivalent à  $\ln(y)$  quand  $y$  tend vers  $+\infty$ .

c) Pour tout  $y > 1$ , on pose :  $h(y) = W(y) - \ln(y)$ , ce qui permet d'écrire  $W(y)$  sous la forme :

$$W(y) = \ln(y) - \ln(\ln(y) + h(y)) = \ln(y) - \ln(\ln(y)) - \ln\left(1 + \frac{h(y)}{\ln(y)}\right).$$

D'après l'équivalence précédente,  $h(y)$  est négligeable devant  $\ln(y)$  quand  $y$  tend vers l'infini, de sorte que

$$W(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(y) - \ln(\ln(y)) + o(1)$$

et on en déduit l'équivalence quand  $y$  tend vers  $+\infty$  :

$$\boxed{W(y) - \ln(y) \sim -\ln(\ln(y))}.$$



## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Les  $n$  personnes jettent chacune une pièce. L'univers est  $\Omega = \{P, F\}^n$  muni de l'équiprobabilité. Donc, chaque résultat a une probabilité égale à  $\frac{1}{2^n}$ .

Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose :  $X_i = 1$  si la  $i$ -ème personne obtient "Pile" et  $X_i = 0$  sinon. Les variables  $X_i$  sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ , donc

$$\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2) .$$

L'événement  $A$  est réalisé si à l'issue des  $n$  lancers, il y a 1 "Pile" et  $(n-1)$  "Face", ou l'inverse. Donc,

$$A = \left( \sum_{i=1}^n X_i = n-1 \right) \cup \left( \sum_{i=1}^n X_i = 1 \right)$$

et par incompatibilité,

$$P(A) = \binom{n}{1} \frac{1}{2^n} + \binom{n}{n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}} .$$

2. La variable aléatoire suit la loi géométrique  $\mathcal{G}\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)$ .

Donc,  $E(X) = \frac{2^{n-1}}{n}$  et  $V(X) = 2^{n-1} \frac{2^{n-1} - n}{n^2}$ .

## SUJET BL 21

sujet BL 21

### EXERCICE PRINCIPAL

1. Question : donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série géométrique soit convergente.

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels positifs ou nuls tels que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$

converge, et  $\mathcal{S}_1$  le sous-ensemble de  $\mathcal{S}$  des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$  telles que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$ .

2. Montrer que pour toute suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ , non identiquement nulle, il existe un unique réel  $\lambda > 0$  et une suite  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_1$  tels que  $v = \lambda u$  (c'est-à-dire  $v_n = \lambda u_n$ , pour tout  $n$ ).

3. a) On pose  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ .

Montrer que la suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_1$ .

- b) Soit  $a \in ]0, 1[$ . On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = a^n$ .

Montrer que la suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$  et trouver le réel  $\lambda$  et la suite  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définis dans la question 2.

4. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs réelles, deux fois dérivable, telle que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = k \in ]0, 1[$  et pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$  et  $f''(x) < 0$ .

On suppose que  $u_0 > 0$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- a) Montrer que  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ .

b) Soit  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_1$  une suite définie à partir de  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  comme dans la question 2.

On considère la variable aléatoire  $X_v$  définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(X_v = n) = v_n$ .

Montrer que  $X_v$  admet une espérance et une variance.

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^2 = f$ .

Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours.

2. Soit  $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ . On pose  $v_n = \frac{1}{U} u_n$ , alors  $v = \frac{1}{U} u$ .

3.a) On a :  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$ .

b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ , donc  $v = (1-a)u$ .

4.a) Soit  $x > 0$ . Alors  $f'$  est décroissante, donc  $f'(x) \leq k$ .  
Si  $y > 0$ , il existe  $x \in ]0, y[$  tel que

$$\frac{f(y)}{y} = \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = f'(x) \leq k.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(u_n)}{u_n} \leq k$ , donc,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq k^n u_0$ .

Par suite, la série de terme général  $u_n$  est convergente.

b) On a  $v_n = \lambda u_n$  avec  $\lambda > 0$ . Soit  $l \in ]k, 1[$ . On a  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\lambda u_{n+1}}{\lambda u_n} \leq k$ , donc, il existe un entier  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $\frac{(n+1)v_{n+1}}{n v_n} < l$ .

On en déduit que  $n v_n \leq l^{n-N} N v_N$ , terme général d'une série convergente.

Ceci montre l'existence de  $E(X_v) = \sum_{n=0}^{+\infty} n v_n$ .

On montrerait de même l'existence de la série  $\sum_{n \geq 0} n^2 v_n$  converge, c'est-à-dire l'existence de la variance de  $X_v$ .



## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^2 = f$ .

Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

Remarque : les projecteurs ne sont pas au programme B/L.

Si  $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ , alors  $f(x) = 0$  et  $\exists y \in E$  tel que  $x = f(y)$ . Par suite,  $x = f(y) \implies f(x) = f^2(y) = f(y) = x = 0$  et  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ .

Par analyse-synthèse, on a :

- Soit  $z \in E$  ; on suppose qu'il existe  $x \in \text{Ker } f$  et  $y \in \text{Im } f$  tels que  $z = x + y$ . Puisque  $y \in \text{Im } f$ ,  $\exists a \in E$  tel que  $y = f(a)$ . Par suite,  $f(z) = f(x) + f(y) = f(y) = f^2(a) = f(a) = y$ . Pour  $z$  donné, on choisit donc  $y = f(z)$  et  $x = z - y = z - f(z)$ .
- Soit  $z \in E$ . On propose  $x = z - f(z)$  et  $y = f(z)$ . On a bien :  $y \in \text{Im } f$  et  $f(x) = f(z) - f^2(z) = f(z) - f(z) = 0$ , donc  $x \in \text{Ker } f$ . Enfin, on vérifie bien que  $x + y = z - f(z) + f(z) = z \in E$ .

Bilan :  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .