**ORAL HEC Paris 2018**

**Mathématiques**

**Options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L**

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Sur chacune des 4 sessions de 3 jours, ces épreuves ont mobilisé 4 à 5 jurys par demi-journée.

L'objectif de l'oral de mathématiques consiste à mesurer un certain nombre de qualités qu'une épreuve écrite ne révèle pas nécessairement : qualité de l'expression, précision de l'argumentation, concision, fluidité, réactivité consécutive à un renseignement fourni par les examinateurs

## 1. Procédure d'interrogation

Le sujet proposé aux candidats comprend deux parties (les questions de *Scilab* peuvent intervenir dans l'une ou l'autre des deux parties):

- un *exercice principal* préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme: *algèbre*, *probabilités et analyse*. De plus, une *question de cours* en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal.
- un *exercice sans préparation* portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

## 2. Résultats statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:

- *option scientifique* (456 candidats): 10,69;
- *option économique* (207 candidats): 10,13;
- *option technologique* (18 candidats): 11,56;
- *option littéraire B/L* (19 candidats): 12,68.

Sur les 456 candidats interrogés en option scientifique, 15% obtiennent une note supérieure ou égale à 15 et 25% d'entre eux une note inférieure ou égale à 7.
En option économique, sur les 207 candidats interrogés, 20% obtiennent une note supérieure ou égale à 15 et 20% une note inférieure ou égale à 7.
Pour les options scientifique et économique, l'écart-type est sensiblement le même, de l'ordre de 3,7.

### 3. Commentaires

Les rapports de jury des concours précédents ainsi que les échanges dans la commission de mathématiques lors de la journée des classes préparatoires, sont manifestement répercutés auprès des admissibles : ainsi, les prestations d'une majorité de candidats sont essentiellement orales et le tableau n'est utilisé que comme support de l'exposé.
La « règle du jeu » est de mieux en mieux respectée : les candidats passent les questions non traitées ou inachevées et poursuivent l'exposé.

Par rapport aux résultats du concours 2017, on note une baisse de plus d'un point de la moyenne en option scientifique (11,80 en 2017) et une stabilité quasi-parfaite de la moyenne en option économique (10,12 en 2017).
Le niveau en mathématiques tend à s'uniformiser notamment en *voie scientifique*, cette tendance étant confirmée par l'ensemble des interrogateurs : on note beaucoup moins de très bons candidats que les années précédentes même si les prestations sont dans l'ensemble satisfaisantes. Il est possible que le filtre de l'écrit n'ait pas été parfait et qu'il ait laissé passer un certain nombre de candidats (456 candidats en 2018 contre 414 en 2017) dont les prestations orales ont fait chuter la moyenne générale !!!

On peut noter un certain nombre de *points positifs* dans les productions des candidats des options scientifique et économique :

- la question de cours est très souvent traitée correctement ;
- les questions de *Scilab* ne sont presque jamais ignorées et les candidats voient (devinent ?) à peu près ce qu'un programme réalise ;
- les candidats semblent moins « formatés » que lors des concours précédents même si ce phénomène reste toujours présent.

On relève toutefois des *points négatifs* se reproduisant de façon récurrente :

- les arguments et explications avancés sont souvent approximatifs, imprécis et parfois faux ;
- souvent, les candidats n'écoutent pas les suggestions des examinateurs et persistent dans leur démarche initiale ;
- les candidats ont souvent du mal à procéder à une analyse précise d'un programme *Scilab* ;
- l'interprétation des courbes et graphiques reste un point noir ;
- le vocabulaire géométrique de base de l'enseignement secondaire a souvent été égaré en chemin …

L’effectif de candidats admissibles de *l’option technologique* a été réduit de moitié entre les deux concours passés (18 en 2018 contre 38 en 2017) ; parallèlement, la note moyenne est passée de 8,97 en 2017 à 11,56 en 2018 : on peut penser que les épreuves écrites ont mieux joué leur rôle de filtre laissant « passer » moins de candidats mais de meilleur niveau. Ainsi, 20% des candidats de cette option ont obtenu une note supérieure ou égale à 15.

Sur les 19 candidats admissibles présents dans l’option B/L, la note moyenne de 12,68 est accompagnée d’un écart-type de 3,785, celui-ci étant nettement inférieur à celui du concours 2017 : on peut conjecturer une plus grande homogénéité de cette population de candidats même si un certain nombre de candidats produisent des prestations très moyennes voire médiocres en ayant « oublié » leurs connaissances en mathématiques. Toutefois, quelques candidats effectuent de brillantes prestations.

## 4. Recommandations aux futurs candidats

Le jury attend du candidat un exposé essentiellement oral d’une dizaine de minutes des résultats obtenus pendant la préparation de son exercice principal, puis l’aide éventuellement à compléter les autres questions dans le temps restant qui précède l’exercice sans préparation. Il est donc inutile de tout écrire au tableau, notamment de s’attarder sur la résolution des questions faciles, et donner ainsi au jury l’impression désagréable de chercher à gagner du temps pour éviter d’aborder les questions plus délicates : une grande passivité peut être très pénalisante.
Le jury apprécie particulièrement les exposés dans lesquels les candidats font preuve d’initiative et révèlent des qualités de précision, de concision et de réactivité.

Un certain nombre de candidats utilisent dans leurs argumentations, des concepts qui dépassent le cadre du programme mais sont dans l'incapacité de manipuler des notions simples. Il serait préférable de connaître les définitions de base plutôt que de tenter d'appliquer des recettes apprises par cœur.

Le jury recommande aux futurs candidats d’éviter de réciter à l’oral des recettes mécaniques qu’ils ne maîtrisent pas toujours: même si elles peuvent parfois faire illusion dans un problème d’écrit où la part d’initiative personnelle est réduite, ces phrases ou ces formules apprises par cœur et qui tiennent lieu de « prêt-à penser », passent difficilement le filtre de l’épreuve orale.

En résumé, le jury de mathématiques réitère aux futurs candidats les recommandations qu'il avait faites à l'issue des concours précédents : une très solide assimilation du cours, une préférence pour le raisonnement plutôt que pour la récitation de formules mal comprises et un exposé essentiellement oral

HEC
PARIS

ORAL HEC Paris 2018

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option scientifique

# EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, $X$ désigne une variable aléatoire à densité, possédant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$. Les autres variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que $X$.

1. a) Question de cours : inégalité de Markov.

   b) Soit $a \in \mathbb{R}_+$.
   i) Pour tout réel strictement positif $b$, justifier l'inégalité :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E\big((X - E(X) + b)^2\big)}{(a+b)^2} .$$

   ii) En appliquant le résultat précédent à $b = V(X)/a$, établir l'inégalité :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2} .$$

2. On appelle *médiane* de $X$ tout nombre réel $m$ tel que $P([X \leq m]) = \dfrac{1}{2}$.

   a) Justifier que $X$ admet au moins une médiane et que l'ensemble des médianes de $X$ est un segment de $\mathbb{R}$.

   b) Dans cette question, on note $m$ une médiane de $X$ et on suppose que $m$ est supérieure ou égale à $E(X)$. On note $\sigma(X)$ l'écart-type de $X$.
   Déduire de l'inégalité prouvée en 1.b.ii, appliquée à $a = m - E(X)$, que $m - E(X)$ est inférieur ou égal à $\sigma(X)$.

   c) Justifier que toute médiane $m$ de $X$ vérifie l'inégalité : $\dfrac{|m - E(X)|}{\sigma(X)} \leq 1$.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note $X_n$ une variable aléatoire admettant pour densité la fonction $f_n$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ n/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/\big(2(n-1)\big) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ (n-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

   a) Trouver l'unique médiane de $X_n$.

   b) Justifier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

   c) Quelle propriété du majorant trouvé en 2.c peut-on déduire des limites de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ quand $n$ tend vers l'infini ?

# Exercice sans préparation

Soit $n$ un nombre entier supérieur ou égal à 2.
On dit qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k$ est la matrice nulle.

1. a) Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) Démontrer que la seule matrice nilpotente et diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

2. On appelle *indice de nilpotence* d'une matrice nilpotente $M$ le plus petit entier strictement positif $k$ tel que $M^k$ est la matrice nulle.

   La fonction *Scilab* suivante, dont le code est incomplet, permet de calculer l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

```
function k=indnilp(A,n)// n=nombre de lignes et de colonnes de A
    k=1;
    B=A;
    while sum(abs(B))>0
            k=??;
            B=??;
    end;
endfunction
```

   a) Expliquer en détail la ligne de code « while sum(abs(B))>0 » .

   b) Compléter le code de la fonction « indnilp » .

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, $X$ désigne une variable aléatoire à densité, possédant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$. Les autres variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que $X$.

1. a) Question de cours : inégalité de Markov.

Si $X$ est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout réel $c$ strictement positif : $\boxed{P([X \geqslant c]) \leqslant \dfrac{E(X)}{c}}$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

i) Pour tout réel strictement positif $b$, justifier l'inégalité :

$$\boxed{P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E\big((X - E(X) + b)^2\big)}{(a + b)^2}}.$$

Soit $b > 0$.

$$P([X \geq E(X) + a]) = P([X - E(X) + b \geq a + b]) \leq P([(X - E(X) + b)^2 \geq (a + b)^2])$$

d'où, grâce à l'inégalité de Markov :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E\big((X - E(X) + b)^2\big)}{(a + b)^2}.$$

ii) En appliquant le résultat précédent à $b = V(X)/a$, établir l'inégalité :

$$\boxed{P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}}.$$

Pour $b = V(X)/a$, on obtient :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E\big((X - E(X) + V(X)/a)^2\big)}{(a + V(X)/a)^2} = \frac{V(X) + \big(V(X)\big)^2/a^2}{a^2(1 + V(X)/a^2)^2} = \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

2. On appelle *médiane* de $X$ tout nombre réel $m$ tel que $P([X \leq m]) = \dfrac{1}{2}$.

a) Justifier que $X$ admet au moins une médiane et que l'ensemble des médianes de $X$ est un segment de $\mathbb{R}$.

La fonction de répartition $F : x \longmapsto P([X \leq x])$ étant continue sur $\mathbb{R}$ (puisque $X$ est une variable aléatoire à densité), de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que, pour tout réel $y$ strictement compris entre 0 et 1, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

En particulier, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $P([X \leq m]) = \dfrac{1}{2}$.

Soit $I$ l'ensemble (non vide) des réels $x$ tels que $F(x) = \dfrac{1}{2}$.

• $I$ est un *intervalle*, parce que, quels que soient $(a, b) \in I^2$, tous les réels $x$ compris entre $a$ et $b$ appartiennent à $I$ (puisque la fonction croissante $F$ prend la même valeur en $a$ et en $b$).

• $I = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) = 1/2\}$ est une partie *fermée* de $\mathbb{R}$, puisque $F$ est continue.

• $I$ est une partie *bornée* de $\mathbb{R}$, puisque, par exemple, pour $q_1$ et $q_3$ choisis tels que $F(q_1) = 1/4$ et $F(q_3) = 3/4$, l'intervalle $I$ est inclus dans $]q_1, q_3[$, donc borné.

Par conséquent, $I$ est un *segment* (intervalle fermé borné) de $\mathbb{R}$.

b) Dans cette question, on note $m$ une médiane de $X$ et on suppose que $m$ est supérieure ou égale à $E(X)$. On note $\sigma(X)$ l'écart-type de $X$.

| |
|---|
| Déduire de l'inégalité prouvée en 1.b.ii, appliquée à $a = m - E(X)$, que $m - E(X)$ est inférieur ou égal à $\sigma(X)$. |

Par application de l'inégalité 1.b.ii, appliquée à $a = m - E(X)$, on obtient

$$\frac{1}{2} = P([X \geq m]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + \big(m - E(X)\big)^2}$$

d'où $V(X) + \big(m - E(X)\big)^2 \leq 2\,V(X)$, puis : $\boxed{m - E(X) \leq \sigma(X)}$.

c) Justifier que toute médiane $m$ de $X$ vérifie l'inégalité : $\dfrac{|m - E(X)|}{\sigma(X)} \leq 1$ .

D'après ce qui précède, l'inégalité demandée est vraie lorsque $m \geq E(X)$ ($\sigma(X)$ est strictement positif, puisque la variable aléatoire $X$ possède une densité).
Dans le cas où $m \leq E(X)$, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la variable aléatoire $-X$, dont $-m$ est une médiane, pour obtenir l'inégalité demandée.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note $X_n$ une variable aléatoire admettant pour densité la fonction $f_n$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ n/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/\big(2(n-1)\big) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ (n-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

a) Trouver l'unique médiane de $X_n$.

La fonction de répartition $F_n$ de $X_n$ est donnée par : [1]

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ (nx+1)/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/2 + x/\big(2(n-1)\big) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ 1 + (n-1)(x-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

L'unique médiane $m_n$ de $X_n$ est 0.

b) Justifier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Un dessin sera apprécié.

• Pour tout $x < 0$, $F_n(x)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, puisque, pour $n$ assez grand, on a $x < -1/n$ (d'où $F_n(x) = 0$).

• Pour tout $x \in [0, 1[$, $F_n(x)$ tend vers $1/2$ quand $n$ tend vers l'infini, puisque, pour $n$ assez grand, on a $0 \leq x < -1/n$ (d'où $F_n(x) = 1/2 + x/(2(n-1))$, qui tend vers $1/2$ quand $n$ tend vers l'infini).

• Pour tout $x \geq 1$, $F_n(x) = 1$.

En résumé, quand $n$ tend vers l'infini, $F_n(x) \longrightarrow G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers une (toute) variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. [2]

c) Quelle propriété du majorant trouvé en 2.c peut-on déduire des limites de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ quand $n$ tend vers l'infini ?

La limite en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ permet de faire la conjecture que $E(X_n)$ et $V(X_n)$ tendent respectivement vers $1/2$ et $1/4$ quand $n$ tend vers l'infini. Une fois établies ces convergences, on pourra affirmer

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{|m_n - E(X_n)|}{\sigma(X_n)} = 1}$$

ce qui prouvera que le majorant trouvé en 2.c est optimal.

Pour déterminer effectivement les limites des moments des $X_n$, une méthode efficace consiste à écrire la densité $f_n$ comme la moyenne pondérée de trois densités de lois uniformes, dont l'espérance et la variance sont connues :

$$f_n = \frac{1}{2}\, g_n + \frac{1}{2n}\, h_n + \frac{(n-1)}{2n}\, k_n$$

où $g_n$, $h_n$ et $k_n$ sont des densités respectives des lois uniformes sur $[-1/n, 0]$, $[0, 1-1/n]$ et $[1-1/n, 1]$.

On déduit de cette décomposition les expressions de $E(X_n)$ et $E({X_n}^2)$, et leurs limites.

$$E(X_n) = \frac{1}{2}\,(\frac{-1}{2n}) + \frac{1}{2n}\,(\frac{n-1}{2n}) + \frac{(n-1)}{2n}\,(\frac{2n-1}{2n})$$

tend vers $1/2$ quand $n$ tend vers l'infini.
De même, comme les espérances des carrés des trois lois uniformes de la décomposition tendent respectivement vers 0, $1/3$ et 1, leur moyenne pondérée par les coefficients $1/2$, $1/(2n)$ et $(n-1)/(2n)$, qui est égale à $E({X_n}^2)$, tend vers $1/2$ quand $n$ tend vers l'infini. On a donc bien :

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma(X_n) = \sqrt{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Finalement, la borne supérieure des quotients $\dfrac{|m - E(X)|}{\sigma(X)}$ pour les variables aléatoires $X$ à densité possédant un moment d'ordre deux est bien égale à 1. Il n'existe pas de majorant strictement plus petit de tous ces quotients.

2. L'étude de la convergence de la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $x = 0$ et $x = 1$ était en fait inutile puisque 0 et 1 sont les points de discontinuité de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(1/2)$.

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. a) Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Démontrer que la seule matrice nilpotente et diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

Soit $A$ une matrice nilpotente et diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme $A$ est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X^k$ est un polynôme annulateur de $A$. Dès lors, la seule valeur propre possible de $A$ est 0.
Comme $A$ est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle, donc nulle.

2. On appelle *indice de nilpotence* d'une matrice nilpotente $M$ le plus petit entier strictement positif $k$ tel que $M^k$ est la matrice nulle.
La fonction *Scilab* suivante, dont le code est incomplet, permet de calculer l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

```
function k=indnilp(A,n)// n=nombre de lignes et de colonnes de A
    k=1;
    B=A;
    while sum(abs(B))>0
            k=??;
            B=??;
    end;
endfunction
```

a) Expliquer en détail la ligne de code « while sum(abs(B))>0 » .

« abs(B) » est une matrice dont chaque coefficient est égal à la valeur absolue du coefficient correspondant de la matrice $B$.
La condition d'arrêt de la boucle « while » est donc que $B$ soit la matrice nulle.

b) Compléter le code de la fonction « indnilp » .

```
function k=indnilp(A,n)// n=nombre de lignes et de colonnes de A
    k=1;
    B=A;
    while sum(abs(B))<>0
            k=k+1;
            B=A*B;
    end;
endfunction
```

L'incrémentation du compteur $k$ cessera dès que la matrice $B = A^k$ est nulle, et la valeur finale de $k$, en sortie de boucle, sera égale à l'indice de nilpotence de $A$.

# EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.
Formule de Taylor avec reste intégral et cas particulier d'une fonction polynomiale.

Soit $n$ un nombre entier supérieur ou égal à 2.
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ainsi qu'une famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements attachés à cet espace.
On note $I$ l'ensemble des indices $i \in [\![1, n]\!]$ pour lesquels l'événement $A_i$ est réalisé et on désigne par $N$ le nombre, aléatoire, d'éléments de $I$.
Pour chaque $p \in [\![1, n]\!]$ on pose :

$$s_p = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} P\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_p}\big)$$

et l'on convient de poser $s_0 = 1$.
Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathbf{1}_{A_i}$ la variable indicatrice de l'événement $A_i$, c'est-à-dire l'application définie sur $\Omega$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

2. Exprimer $N$ à l'aide des variables indicatrices $\mathbf{1}_{A_i}$ et en déduire que $N$ est une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3. Soit $p$ un nombre entier compris entre 1 et $n$.

   a) Justifier l'égalité :

   $$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} \mathbf{1}_{A_{i_1}} \mathbf{1}_{A_{i_2}} \ldots \mathbf{1}_{A_{i_p}} = \frac{N(N-1)\cdots(N-p+1)}{p!} .$$

   b) En déduire que : $\quad s_p = \dfrac{E\big(N(N-1)\cdots(N-p+1)\big)}{p!}$ .

4. En utilisant une formule de Taylor, justifier l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} P([N=k])X^k = \sum_{p=0}^{n} s_p \ (X-1)^p .$$

5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ .

   a) Trouver une expression de $P([N=k])$ en fonction de $s_k, \ldots, s_n$.

   b) Démontrer l'égalité :

   $$P([N \geqslant k]) = \sum_{p=k}^{n} (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1} s_p.$$

   c) Quelle expression en déduit-on pour la probabilité de la réunion des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ?

# Exercice sans préparation

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Comparer leurs spectres, leurs traces, leurs rangs, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.
2. Sont-elles semblables ?

# Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.

$\boxed{\text{Formule de Taylor avec reste intégral et cas particulier d'une fonction polynomiale.}}$

Si une fonction $f$ est de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $I$, alors, pour tout couple $(a, x)$ de points distincts de $I$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n\,!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

Pour un polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n$, le reste intégral disparaît et on obtient l'égalité :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k \,.$$

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ainsi qu'une famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements attachés à cet espace.
On note $I$ l'ensemble des indices $i \in [\![1, n]\!]$ pour lesquels l'événement $A_i$ est réalisé et on désigne par $N$ le nombre, aléatoire, d'éléments de $I$.
Pour chaque $p \in [\![1, n]\!]$ on pose :

$$\boxed{s_p = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_p})}$$

et l'on convient de poser $s_0 = 1$.
Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathbf{1}_{A_i}$ la variable indicatrice de l'événement $A_i$, c'est-à-dire l'application définie sur $\Omega$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \,.$$

2. $\boxed{\text{Exprimer } N \text{ à l'aide des variables indicatrices } \mathbf{1}_{A_i} \text{ et en déduire que } N \text{ est une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé } (\Omega, \mathcal{A}, P).}$

$$\boxed{N = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}} \,.$$

Comme les $A_i$ sont des éléments de la tribu $\mathcal{A}$, les $\mathbf{1}_{A_i}$ sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et il en est de même de leur somme.

3. Soit $p$ un nombre entier compris entre 1 et $n$.

a) Justifier l'égalité :

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} \mathbf{1}_{A_{i_1}}\mathbf{1}_{A_{i_2}}\dots\mathbf{1}_{A_{i_p}} = \frac{N(N-1)\cdots(N-p+1)}{p!} .$$

Soit $\omega \in \Omega$.
Comme $\mathbf{1}_{A_{i_1}}(\omega)\dots\mathbf{1}_{A_{i_p}}(\omega)$ est égal à 1 si, et seulement si, $\omega$ appartient à chacun des événements $A_{i_1},\dots,A_{i_p}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\{i_1,i_2,\dots,i_p\}$ est une partie à $p$ éléments de l'ensemble $I(\omega)$, la somme

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} \mathbf{1}_{A_{i_1}}(\omega)\dots\mathbf{1}_{A_{i_p}}(\omega)$$

est donc égale au nombre de parties à $p$ éléments de l'ensemble $I(\omega)$, c'est-à-dire à :

$$\binom{N(\omega)}{p} = \frac{N(\omega)\big(N(\omega)-1\big)\cdots\big(N(\omega)-p+1\big)}{p!} .$$

Par conséquent :

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} \mathbf{1}_{A_{i_1}}\mathbf{1}_{A_{i_2}}\dots\mathbf{1}_{A_{i_p}} = \frac{N(N-1)\cdots(N-p+1)}{p!} .$$

b) En déduire que : $\quad s_p = \dfrac{E\big(N(N-1)\cdots(N-p+1)\big)}{p!}$ .

Comme $E(\mathbf{1}_{A_{i_1}}\mathbf{1}_{A_{i_2}}\dots\mathbf{1}_{A_{i_p}}) = P\big(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots\cap A_{i_p}\big)$, on obtient, par linéarité de l'espérance :

$$\frac{E\big(N(N-1)\cdots(N-p+1)\big)}{p!} = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} P\big(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots\cap A_{i_p}\big) = s_p .$$

4. En utilisant une formule de Taylor, justifier l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} P([N=k])X^k = \sum_{p=0}^{n} s_p\,(X-1)^p .$$

La formule de Taylor (voir question de cours), appliquée au polynôme $G = \sum_{k=0}^{n} P([N=k])X^k$ (au point 1 et à l'ordre $n$), s'écrit :

$$G = \sum_{p=0}^{n} \frac{G^{(p)}(1)}{p!}\,(X-1)^p .$$

Comme $G_N^{(0)}(1) = G_N(1) = 1 = s_0$ et comme, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$,

$$G_N^{(p)}(1) = \sum_{k=0}^{n} P([N=k])\; k(k-1)\cdots(k-p+1)\; 1^{k-p} = E\big(N(N-1)\cdots(N-p+1)\big) ,$$

l'égalité demandée en résulte directement.

5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ .

a) $\boxed{\text{Trouver une expression de } P([N = k]) \text{ en fonction de } s_k, \ldots, s_n.}$

Du résultat précédent, on déduit par la formule du binôme et par interversion des symboles de sommation, les égalités

$$G_N = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}s_p\ X^k = \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{p=k}^{n}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}s_p\Big)X^k$$

puis par identification du coefficient de $X^k$ dans le polynôme $G$

$$\boxed{P([N = k]) = \sum_{p=k}^{n}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}s_p}\ .$$

b) $\boxed{\text{Démontrer l'égalité : } \quad P([N \geqslant k]) = \sum_{p=k}^{n}(-1)^{p-k}\binom{p-1}{k-1}s_p.}$

$$P([N \geqslant k]) = \sum_{p=k}^{n} P([N = p]) = \sum_{p=k}^{n}\Big(\sum_{i=k}^{p}(-1)^{p-i}\binom{p}{i}\Big)s_p$$

d'où la formule demandée, par télescopage, grâce aux égalités pascaliennes

$$(-1)^{p-i}\binom{p}{i} = (-1)^{p-i}\binom{p-1}{i} - (-1)^{p-(i-1)}\binom{p-1}{i-1}\ .$$

c) $\boxed{\text{Quelle expression en déduit-on pour la probabilité de la réunion des événements } A_1, A_2, \ldots, A_n\ ?}$

$$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = P(N \geqslant 1) = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}s_p\ .$$

Il s'agit de la formule du crible, au programme pour $n = 2$ et $n = 3$.

# Corrigé de l'exercice sans préparation

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Comparer leurs spectres, leurs traces, leurs rangs, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.

   $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B) = \{0\}$
   $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 0$
   $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B) = 2$
   $\dim(\mathrm{E}_0)(A) = \dim(\mathrm{E}_0)(B) = 4 - 2 = 2$

2. Sont-elles semblables ?

   Non, puisque $A^2 \neq 0$ et $B^2 = 0$.

# EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, $n$ et $N$ désignent des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Question de cours.
   Donner la définition d'une forme linéaire. Quel lien existe-t-il entre formes linéaires et hyperplans ?

2. On note $H_n$ l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Justifier que $H_n$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
   b) Trouver un supplémentaire de $H_n$.

3. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $N$ et $f$ une forme linéaire sur $E$.
   a) Justifier que, pour toute forme linéaire $g$ sur $E$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   $$(1) \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ f = \lambda g \qquad\qquad (2) \quad \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f \quad .$$
   b) Démontrer par récurrence sur $p$ que, si $g_1, \ldots, g_p$ sont des formes linéaires sur $E$ telles que $\bigcap\limits_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} g_i \subset \operatorname{Ker} f$, alors : $\quad f \in \operatorname{Vect}\{g_1, \ldots, g_p\}$ .
   c) On suppose ici : $n < N$.
   En utilisant le théorème de la base incomplète, justifier que, si $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sont des formes linéaires sur $E$ linéairement indépendantes, alors :
   $$\dim\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} g_j\Big) = N - n \ .$$

# Exercice sans préparation

On note $\Phi$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant \sqrt{2\pi}\big(1 - \Phi(x)\big) \leqslant \left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} .$$

2. Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

   Trouver la limite de la probabilité conditionnelle $P_{[X \geq x]}\big([\, X \geq x + \dfrac{1}{x}\,]\big)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

# Corrigé de l'exercice principal

Dans tout l'exercice, $n$ et $N$ désignent des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Question de cours.
Donner la définition d'une forme linéaire. Quel lien existe-t-il entre les formes linéaires et les hyperplans ?

- On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ toute application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}$.
- Les hyperplans de $E$ sont les noyaux des formes linéaires non (identiquement) nulles sur $E$.

Remarque
Dans le programme des classes préparatoires commerciales, les hyperplans ne sont définis que pour les espaces vectoriels de dimension finie.

2. On note $H_n$ l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Justifier que $H_n$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

La trace étant une forme linéaire non (identiquement) nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son noyau $H_n$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\dim(H_n) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = \boxed{n^2 - 1}\ .$$

b) Trouver un supplémentaire de $H_n$.

L'ensemble $\mathrm{Vect}\{I_n\}$ des matrices scalaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un supplémentaire de $H_n$ :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H_n \oplus \mathrm{Vect}\{I_n\}$$

puisque $H_n \cap \mathrm{Vect}\{I_n\} = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ et que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose comme la somme d'une matrice de $H_n$ et d'une matrice scalaire :

$$M = \big(M - \mathrm{Tr}(M) I_n\big) + \mathrm{Tr}(M) I_n\ .$$

Remarque
Les supplémentaires de $H_n$ sont les droites vectorielles engendrées par une matrice de trace non nulle.

3. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $N$ et $f$ une forme linéaire sur $E$.

a) Justifier que, pour toute forme linéaire $g$ sur $E$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ f = \lambda\, g$ (2) $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$

- L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) est immédiate puisque si $f = \lambda\, g$ et $x \in \mathrm{Ker}\, g$, alors :

$$f(x) = \lambda g(x) = 0\ .$$

• Pour démontrer l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1), on suppose l'inclusion $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$ .

1) Si $f$ est (identiquement) nulle, on a $f = \lambda\, g$ pour $\lambda = 0$.

2) Sinon, il existe un vecteur $x_0$ tel que $g(x_0) \neq 0$, puisque $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f \neq E$.

Comme $\operatorname{Ker} g$ est un hyperplan de $E$ et $x_0 \notin \operatorname{Ker} g$, la droite $\operatorname{Vect}\{x_0\}$ est un supplémentaire de cet hyperplan :

$$E = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Vect}\{x_0\} \ .$$

Soit $x$ un vecteur de $E$ et $y + \alpha_x\, x_0$ son unique décomposition comme la somme d'un élément $y$ de $\operatorname{Ker} g$ et d'un élément de la droite $\operatorname{Vect}\{x_0\}$.

Comme $f(x) = f(y) + \alpha_x\, f(x_0) = \alpha_x\, f(x_0)$ et $g(x) = g(y) + \alpha_x\, g(x_0) = \alpha_x\, g(x_0)$ (puisque $f(y) = g(y) = 0$), on a :

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\, g(x) \ .$$

Par conséquent, $f = \lambda\, g$ pour $\lambda = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ .

b) | Démontrer par récurrence sur $p$ que, si $g_1, \ldots, g_p$ sont des formes linéaires sur $E$ telles que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} g_i \subset \operatorname{Ker} f$, alors : $f \in \operatorname{Vect}\{g_1, \ldots, g_p\}$ . |
|---|

La propriété est vraie pour $p = 1$, quels que soient l'espace vectoriel $E$ de dimension finie et la forme linéaire $f$ sur $E$, d'après le résultat de la question précédente, les cas où la dimension de $E$ serait égale à 0 ou à 1 étant immédiats.

On suppose que, sur tout espace vectoriel de dimension finie, la propriété est vraie pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$ (hypothèse de récurrence) et on considère $p+1$ formes linéaires $g_1, \ldots, g_{p+1}$ telles que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p+1} \operatorname{Ker} g_i \subset \operatorname{Ker} f$ .

On note $v_1, \ldots, v_p$ et $u$ les restrictions de $g_1, \ldots, g_p$ et $f$ à $\operatorname{Ker} g_{p+1}$.

$$\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} v_i = \bigcap_{i=1}^{p} \big(\operatorname{Ker} g_i \cap \operatorname{Ker} g_{p+1}\big) \subset \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g_{p+1} = \operatorname{Ker} u \ .$$

Par application de l'hypothèse de récurrence à des formes linéaires sur $\operatorname{Ker} g_{p+1}$, il existe $p$ nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que :

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \ .$$

Il en résulte que le noyau de la forme linéaire $f - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i$ contient $\operatorname{Ker} g_{p+1}$, et d'après le résultat de la question précédente, qu'il existe un réel $\lambda$ tel que :

$$f - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i = \lambda\, g_{p+1} \ .$$

Par conséquent : $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i + \lambda\, g_{p+1} \in \operatorname{Vect}\{g_1, \ldots, g_{p+1}\}$, ce qui clôt la récurrence.

c) On suppose ici : $n < N$.

En utilisant le théorème de la base incomplète, justifier que, si $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sont des formes linéaires sur $E$ linéairement indépendantes, alors :

$$\dim\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} g_j\Big) = N - n \,.$$

Comme la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $E$ est égale à $N$, le théorème de la base incomplète permet d'affirmer qu'il existe $N-n$ formes linéaires $g_{n+1}, \ldots, g_N$ sur $E$ pour lesquelles $g_1, g_2, \ldots, g_N$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
D'après la propriété démontrée en $b$, toutes les inclusions

$$\bigcap_{j=1}^{N} \operatorname{Ker} g_j \subset \bigcap_{j=1}^{N-1} \operatorname{Ker} g_j \subset \cdots \subset \bigcap_{j=1}^{2} \operatorname{Ker} g_j \subset \operatorname{Ker} g_1 \subset E$$

sont strictes, à cause de l'indépendance linéaire de $g_1, g_2, \ldots, g_N$, qui entraîne qu'aucune de ces formes linéaires ne peut être combinaison linéaire des précédentes.
Il en résulte que la suite, strictement croissante, des dimensions de ces $N+1$ sous-espaces vectoriels de $E$ reliés par inclusion ne peut être que la progression arithmétique $0, 1, 2, \ldots, N$.
Par conséquent :

$$\boxed{\dim\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} g_j\Big) = N - n} \,.$$

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On note $\Phi$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant \sqrt{2\pi}\big(1 - \Phi(x)\big) \leqslant \left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2}\,.$$

On considère les deux fonctions $u$ et $v$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall x > 0, \qquad \begin{cases} u(x) = \sqrt{2\pi}\big(1 - \Phi(x)\big) - \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} \\[2ex] v(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} - \sqrt{2\pi}\big(1 - \Phi(x)\big) \end{cases}.$$

Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on trouve :
$$\forall x > 0, \qquad \begin{cases} u'(x) = -\dfrac{3}{x^4}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} < 0 \\[2ex] v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} < 0 \end{cases}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$, on en déduit les deux fonctions $u$ et $v$ sont (strictement) positives sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui démontre l'encadrement demandé (avec en prime des inégalités strictes).

2. Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Trouver la limite de la probabilité conditionnelle $P_{[X\geq x]}\big([\,X \geq x + \frac{1}{x}\,]\big)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

$$P_{[X\geq x]}\Big(\big[\,X \geq x + \frac{1}{x}\,\big]\Big) = \frac{1 - \Phi\big(x + \frac{1}{x}\big)}{1 - \Phi(x)}$$

qui, d'après ce qui précède, est compris entre $m(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{(x+1/x)} - \dfrac{1}{(x+1/x)^3}\right)e^{-(x+1/x)^2/2}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2}}$

et $M(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{x+1/x}\right)e^{-(x+1/x)^2/2}}{\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = \mathrm{e}^{-1}$, on obtient par encadrement :
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} P_{[X\geq x]}\Big(\big[\,X \geq x + \frac{1}{x}\,\big]\Big) = \mathrm{e}^{-1}}\,.$$

# EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels, et $T$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui associe à toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa transposée ${}^tM$.

Pour tout espace vectoriel $E$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$.

Le but de l'exercice est l'étude de l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \Big\{ f \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big);\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f\big(T(M)\big) = T\big(f(M)\big) \Big\} .$$

1. a) Question de cours.
   Donner la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ lorsque $E$ est un espace de dimension finie et en déduire la dimension de $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.
   b) Pourquoi la trace $\mathrm{Tr}(M)$ de la matrice $M$ de $T$ dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne dépend-elle pas de cette base ? Quelle est cette trace ?

2. Trouver une application linéaire dont $\mathcal{C}$ est le noyau et en déduire que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

3. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tS = S\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tA = -A\}$.
   a) Établir que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   b) En déduire qu'un endomorphisme $f$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, les deux sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont stables par $f$.

4. a) Déterminer les dimensions respectives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   b) En déduire l'égalité :
   $$\dim(\mathcal{C}) = \frac{n^2(n^2+1)}{2} .$$

5. a) Démontrer que l'endomorphisme $T$ est diagonalisable.
   b) Justifier qu'il existe des éléments $f$ de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diagonalisables et en donner un exemple.

# EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $m_1$ et $m_2$ deux réels tels que $m_1 < m_2$ et $\sigma > 0$.

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ (*resp.* $(Y_k)_{k\geq 1}$) une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$ (*resp.* $\mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$)
Pour tout entier $n$ non nul on pose :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad \overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

1. À partir d'une étude graphique et sans démonstration, trouver un réel $a$ tel que :

$$P([X_1 \geq a]) = P([Y_1 \leq a]) \ .$$

2. Démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $a$ et un entier $n$, tels que :

$$P(\overline{X_n} \geq a) = P(\overline{Y_n} \leq a) \quad \text{et} \quad P(\overline{X_n} \geq a) < \epsilon \ .$$

# Corrigé de l'exercice principal

Dans tout l'exercice $n$ désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels, et $T$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui associe à toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa transposée ${}^tM$.

Pour tout espace vectoriel $E$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$.

Le but de l'exercice est l'étude de l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \Big\{f \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big);\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f\big(T(A)\big) = T\big(f(A)\big)\Big\} .$$

1. a) Question de cours.

> Donner la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ lorsque $E$ est un espace de dimension finie et en déduire la dimension de $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

$$\dim\big(\mathcal{L}(E)\big) = \big(\dim(E)\big)^2 \quad \text{et} \quad \dim\Big(\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)\Big) = n^4 .$$

b)

> Pourquoi la trace $\mathrm{Tr}(M)$ de la matrice $M$ de $T$ dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne dépend-elle pas de cette base ? Quelle est cette trace ?

Deux matrices semblables ayant la même trace, toutes les matrices représentatives d'un même endomorphisme ont la même trace.
En particulier, la trace de toutes les matrices représentatives de $T$ est la trace de sa matrice dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{n,n})$ des matrices élémentaires, c'est-à-dire $\boxed{n}$, puisque sur la diagonale de cette matrice $n^2 - n$ coefficients sont nuls et $n$ égaux à 1.

2.

> Trouver une application linéaire dont $\mathcal{C}$ est le noyau et en déduire que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

Pour tout $f \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$, on note :

$$\varphi(f) = T \circ f - f \circ T .$$

Sa linéarité étant flagrante, $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$, dont le noyau est $\mathcal{C}$, qui est par conséquent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

3. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tM = M\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tM = -M\}$.

a)

> Établir que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On raisonne classiquement par analyse-synthèse.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Supposons qu'il existe deux matrices $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = A + S$.
On a alors ${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$.

Il en résulte que nécessairement on a : $S = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$.
Réciproquement si $S = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$ alors ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$ et $M = S + A$ d'où le résultat voulu.

b) $\boxed{\text{En déduire qu'un endomorphisme } f \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ appartient à } \mathcal{C} \text{ si, et seulement si, les deux sous-espaces } \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ sont stables par } f.}$

• Condition suffisante

Soit $f$ un endomorphisme laissant stables les deux sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$.

$$f\big(T(M)\big) = f(S - A) = f(S) - f(A) = {}^tf(S) + {}^tf(A)$$

(puisque $f(S)$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f(A)$ à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$), donc :

$$f\big(T(M)\big) = T\big(f(S) + f(A)\big) = T\big(f(M)\big)$$

Par conséquent $f$ appartient à $\mathcal{C}$.

• Condition nécessaire

Soit $f \in \mathcal{C}$.
Si $S$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t\big(f(S)\big) = T\big(f(S)\big) = f\big(T(S)\big) = f(S)$ et donc :

$$f(S) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \ .$$

Si $A$ appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t\big(f(A)\big) = T\big(f(A)\big) = f\big(T(A)\big) = f(-A) = -f(A)$ et donc :

$$f(A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \ .$$

Par conséquent, les deux sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont stables par $f$.

4. a) $\boxed{\text{Déterminer les dimensions respectives de } \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$

Ces dimensions sont connues de la plupart des candidat(e)s, mais on en demandera une justification, plus ou moins détaillée, comme celle qui suit ou n'importe quelle variante.

Toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ vérifie :

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}\,(E_{i,j} - E_{j,i})$$

ce qui prouve que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ possède une famille génératrice de cardinal $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
Sa dimension est donc au plus égale à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
De même, toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie :

$$A = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,i}\,E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}\,(E_{i,j} + E_{j,i})$$

ce qui prouve que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ possède une famille génératrice de cardinal $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Sa dimension est donc au plus égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Il en résulte que :

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \geq \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 .$$

Comme $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \leq \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = n^2$, on en déduit que :

$$\boxed{\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2} .}$$

b) En déduire l'égalité : $\dim(\mathcal{C}) = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$ .

L'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \times \mathcal{L}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \\ & f & \longmapsto & (f_1, f_2) \end{array}$$

où $f_1$ (resp. $f_2$) désigne la restriction de $f$ à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) est bijective parce que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.
Les deux espaces vectoriels $\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \times \mathcal{L}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$ sont donc isomorphes, et leurs dimensions sont égales.

Il en résulte que la dimension de $\mathcal{C}$ est égale à

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2} .$$

5. a) Démontrer que l'endomorphisme $T$ est diagonalisable.

Comme toutes les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des vecteurs propres de $T$ (associés à la valeur propre 1) et celles de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des vecteurs propres de $T$ (associés à la valeur propre $-1$), l'endomorphisme $T$ est diagonalisable puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est au moins égale (donc égale) à $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

b) Justifier qu'il existe des éléments $f$ de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diagonalisables et en donner un exemple.

Comme la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est strictement supérieure à 1 (puisque $n \geq 2$), il existe des endomorphimes $g$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas diagonalisables, à partir desquels on obtient des endomorphismes $f$ de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diagonalisables en posant, par exemple :

$$f(M) = g\left(\frac{1}{2}({}^tM + M)\right) .$$

Plus spécifiquement l'endomorphisme $f$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui associe à la matrice élémentaire $E_{1,1}$ la matrice $E_{2,2}$ et à toutes les autres matrices élémentaires $E_{i,j}$ la matrice nulle appartient à $\mathcal{C}$ et n'est pas diagonalisable (il est nilpotent d'ordre 2).

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $m_1$ et $m_2$ deux réels tels que $m_1 < m_2$ et $\sigma > 0$.

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ (*resp.* $(Y_k)_{k\geq 1}$) une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé et suivant la loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$ (*resp.* $\mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$)
Pour tout entier $n$ non nul on pose :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad \overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

1. À partir d'une étude graphique et sans démonstration, trouver un réel $a$ tel que :

$$P([X_1 \geq a]) = P([Y_1 \leq a]) .$$

Par propriétés de stabilité des lois normales, on a :

$$\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \frac{\sigma^2}{n}) \quad \text{et} \quad \overline{Y_n} \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \frac{\sigma^2}{n})$$

Il en résulte que la courbe représentative de $f_{\overline{Y_n}}$ (densité de $\overline{Y_n}$) s'obtient par translation vers la droite de $m_2 - m_1$ à partir de la courbe représentative de $f_{\overline{X_n}}$.
Par symétrie des courbes il s'en suit que le réel $a$ recherché est le milieu du segment $[m_1, m_2]$ soit $\boxed{a = \frac{m_1 + m_2}{2}}$.

2. Démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $a$ et un entier $n$, tels que :

$$P(\overline{X_n} \geq a) = P(\overline{Y_n} \leq a) \quad \text{et} \quad P(\overline{X_n} \geq a) < \epsilon .$$

Remarque.
Une fois constaté que le même $a$ que précédemment convient, l'existence d'un tel entier $n$ se devine graphiquement en observant que lorsque $n$ augmente la courbe représentative de la densité de $\overline{X_n}$ devient de plus en plus "pointue" et sa queue de distribution de plus en plus fine...

Soit $\Phi$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 1 - \Phi(t) = \Phi(-t)$$

De plus :

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - m_1}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad \text{et} \quad \sqrt{n}\frac{\overline{Y_n} - m_2}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Il en résulte que :

$$P(\overline{X_n} \geq a) = P(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X_n} - m_1}{\sigma} \geq \sqrt{n}\,\frac{a - m_1}{\sigma}) = 1 - \Phi(\sqrt{n}\,\frac{a - m_1}{\sigma}) = \Phi(-\sqrt{n}\,\frac{\overline{a} - m_1}{\sigma})$$

et

$$P(\overline{Y_n} \leq a) = P(\sqrt{n}\,\frac{\overline{Y_n} - m_2}{\sigma} \leq \sqrt{n}\,\frac{a - m_2}{\sigma}) = \Phi(\sqrt{n}\,\frac{a - m_2}{\sigma})$$

On obtient :

$$P(\overline{X_n} \geq a) = P(\overline{Y_n} \leq a) \iff \Phi(-\sqrt{n}\,\frac{a - m_1}{\sigma}) = \Phi(\sqrt{n}\,\frac{a - m_2}{\sigma})$$

et la fonction $\Phi$ réalisant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$ :

$$-\sqrt{n}\,\frac{a - m_1}{\sigma} = \sqrt{n}\,\frac{a - m_2}{\sigma}$$

d'où :

$$-(a - m_1) = a - m_2$$

Bilan :

$$\boxed{a = \frac{m_1 + m_2}{2}}$$

Par ailleurs, $a > m_1$ et donc d'après la loi faible des grands nombres on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\overline{X_n} \geq a) = 0$.
L'existence d'un entier $n$ vérifiant $P(\overline{X_n} \geq a) < \epsilon$ en résulte.

Sujet S 247

# EXERCICE PRINCIPAL

Toutes les variables aléatoires introduites dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours.

   Définition et propriétés des lois $\gamma$ .

   Dans toute la suite de l'exercice, $\lambda$ désigne un nombre réel strictement positif.

2. Soit $U$ une variable aléatoire à valeurs dans $]0, +\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = U^{-1/\lambda}$ .

   a) Vérifier que la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$ est donnée par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} e^{-(x^{-\lambda})} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

   b) En déduire que $X$ est une variable aléatoire à densité.

   c) Proposer un script *Scilab* de simulation de la loi de $X$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   a) Démontrer que $X$ possède un moment d'ordre $k$ si, et seulement si, $k$ est strictement inférieur à $\lambda$, et que :

   $$\forall k < \lambda, \quad E(X^k) = \Gamma\Big(1 - \frac{k}{\lambda}\Big)$$

   b) En déduire que, pour tout réel $a > \frac{1}{2}$, on a l'inégalité stricte :

   $$\big(\Gamma(a)\big)^2 < \Gamma(2a - 1) .$$

4. Soit $Y$ une variable aléatoire positive, dont la fonction de répartition $F_Y$ vérifie :

   $$1 - F_Y(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{-\lambda} .$$

   On considère une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de $Y$.

   Enfin et pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

   $$Z_n = n^{-1/\lambda} \operatorname{Sup}(Y_1, \ldots, Y_n).$$

   Exprimer la fonction de répartition de $Z_n$ à l'aide de celle de $Y$ et en déduire que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable $X$ de la question 2.

# Exercice sans préparation

On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ :

$$M = \begin{pmatrix} e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} & 1 \\ e^{4i\pi/3} & 1 & e^{2i\pi/3} \\ 1 & e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} \end{pmatrix} .$$

1. Calculer la trace et le rang de $M$.
2. La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?
3. Justifier que $M$ est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} & 1 \\ e^{2i\pi/3} & 1 & e^{4i\pi/3} \\ 1 & e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} \end{pmatrix}$ .

# Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.

   Définition et propriétés des lois $\gamma$ .

   Outre une densité de la loi $\gamma(\nu)$, on attendait son espérance et sa variance, ainsi que la propriété de convolution des lois $\gamma$.

   Dans toute la suite de l'exercice, $\lambda$ désigne un nombre réel strictement positif.

2. Soit $U$ une variable aléatoire à valeurs dans $]0,+\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $\boxed{X = U^{-1/\lambda}}$ .

   a) Vérifier que la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$ est donnée par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} e^{-(x^{-\lambda})} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

   Comme $X(\Omega)$ est inclus dans $]0,+\infty[$, $F_X(x)$ est nul pour $x \leq 0$.
   Pour tout $x > 0$ :

   $$F_X(x) = P([U^{-1/\lambda} \leq x]) = P([U \geq x^{-\lambda}]) = e^{-(x^{-\lambda})} .$$

   b) En déduire que $X$ est une variable aléatoire à densité.

   La variable aléatoire $X$ admet une densité puisque $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$ (la continuité à droite en 0 doit être établie) et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 (mais en fait de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$).

   c) Proposer un script *Scilab* de simulation de la loi de $X$.

```
lambda=input('lambda=?')
u=grand(1,1,'exp',1);
x=u^(-1/lambda)
```

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   a) Démontrer que $X$ possède un moment d'ordre $k$ si, et seulement si, $k$ est strictement inférieur à $\lambda$, et que :

   $$\forall k < \lambda, \quad E(X^k) = \Gamma\Big(1 - \frac{k}{\lambda}\Big)$$

   Par la formule de transfert, on a, sous réserve de convergence,

   $$E(X^k) = \int_0^{+\infty} u^{-k/\lambda} e^{-u} \, du = \Gamma\Big(1 - \frac{k}{\lambda}\Big) .$$

Il en résulte que $X$ possède un moment d'ordre $k$ si, et seulement si, $1 - \dfrac{k}{\lambda} > 0$ et que ce moment est alors donné par la formule demandée.

b) En déduire que, pour tout réel $a > \dfrac{1}{2}$, on a l'inégalité stricte :

$$\left(\Gamma(a)\right)^2 < \Gamma(2a-1)\ .$$

Lorsque $\lambda > 2$, la formule de Koenig-Huygens fournit la variance de $X$ :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \Gamma\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\ .$$

Cette variance est strictement positive, puisque $X$ est une variable à densité, et par conséquent

$$\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) < \Gamma\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\left(\Gamma(a)\right)^2 < \Gamma(2a-1)}$$

en posant $a = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$ (qui est strictement supérieur à $1/2$ si, et seulement si $\lambda > 2$).

4. Soit $Y$ une variable aléatoire positive, dont la fonction de répartition $F_Y$ vérifie :

$$\boxed{1 - F_Y(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{-\lambda}}\ .$$

On considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de $Y$.
Enfin et pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\boxed{Z_n = n^{-1/\lambda}\,\mathrm{Sup}(Y_1, \dots, Y_n)}.$$

Exprimer la fonction de répartition de $Z_n$ à l'aide de celle de $Y$ et en déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable $X$ de la question 2.

On trouve classiquement :

$$F_{Z_n}(x) = P[\mathrm{Sup}(Y_1, \dots, Y_n) \leq n^{1/\lambda}x] = \left(F_Y(n^{1/\lambda}x)\right)^n.$$

Pour $x > 0$, l'équivalence $\ln u \sim u - 1$ quand $u$ tend vers 1 entraîne alors que, lorsque $n$ tend vers l'infini, on a :

$$\ln F_Y(n^{1/\lambda}x) \sim F_Y(n^{1/\lambda}x) - 1 \sim -\frac{x^{-\lambda}}{n}$$

Dès lors, $\ln F_{Z_n}(x)$ tend vers $-x^{-\lambda}$, ce qui entraîne que :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = F_X(x).$$

Comme de plus $F_{Z_n}(x) = F_X(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$, on en déduit que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X$.

# Corrigé de l'exercice sans préparation

On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ : $M = \begin{pmatrix} e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} & 1 \\ e^{4i\pi/3} & 1 & e^{2i\pi/3} \\ 1 & e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}$ .

1. Calculer la trace et le rang de $M$.

- La trace de $M$ est nulle puisque :

$$1 + e^{2i\pi/3} + e^{4i\pi/3} = 0 \ .$$

- Le rang de $M$ est égal à 1 parce que les colonnes (ou les lignes) de $M$ sont colinéaires.

2. La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

Comme le rang de $M$ est égal à 1, 0 est une valeur propre de $M$ et la dimension du sous-espace propre associé égale à 2.
La trace de $M$ étant nulle, 0 est la seule valeur propre de $M$.[1]
Il en résulte que $M$ n'est pas diagonalisable.

3. Justifier que $M$ est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} & 1 \\ e^{2i\pi/3} & 1 & e^{4i\pi/3} \\ 1 & e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} \end{pmatrix}$ .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = (e_3, e_2, e_1)$.

Alors :

- $f(e'1) = f(e_3) = e_1 + e^{2i\pi/3}e_2 + e^{4i\pi/3}e_3 = e^{4i\pi/3}e'1 + e^{2i\pi/3}e'_2 + e'3$
- $f(e'2) = f(e_2) = e^{4i\pi/3}e_1 + e_2 + e^{2i\pi/3}e_3 = e^{2i\pi/3}e'1 + e'_2 + e^{4i\pi/3}e'3$
- $f(e'3) = f(e_1) = e^{2i\pi/3}e_1 + e^{4i\pi/3}e_2 + e_3 = e'_1 + e^{4i\pi/3}e'1 + e'_2 + e^{2i\pi/3}e'3$

et par conséquent : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = M'$ .

Représentant le même endomorphisme dans les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, les deux matrices $M$ et $M'$ sont semblables.

1. Dans une base obtenue en complétant une base du noyau de $\mathbb{C}^3$ de l'endomorphisme $f$ canoniquement associé à $M$, la matrice de $f$ est triangulaire et de trace nulle.

# EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : égalité et inégalités des accroissements finis.
b) Justifier, pour tout $x \leq 0$, l'inégalité : $|e^x - 1| \leq |x|$ .

2. Justifier la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt$ .

On note $f$ la fonction définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\, dt$ .

3. a) Déterminer le domaine de définition $D_f$ de $f$ et justifier que $f$ est monotone.
b) Justifier, pour tout $x \in D_f$, l'égalité :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2) .$$

4. a) Établir, pour tout $(x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, l'inégalité :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \int_0^{\pi/2} |\ln(\sin t)|\, dt .$$

b) Démontrer que $f$ est continue.
c) Trouver la limite et un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to -1_+$ .

5. a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$f(n) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\pi}{2} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) .$$

b) En déduire la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers l'infini.

# EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère la fonction *Scilab* suivante :

```
function f=bn(N,n,p)
X=grand(N,n,'geom',p);
k=0;
for i=1: N
    Y=sum(X(i,:))
    if Y>=n/p then k=k+1;
        end
end
f=k/N
endfunction
```

1. De quel nombre réel bn$(N, 1, 0.4)$ fournit-il une valeur approchée lorsque $N$ est grand ?

2. Donner une valeur approximative de bn$(10000, 10000, 0.4)$.

# Corrigé de l'exercice principal

1. a) $\boxed{\text{Question de cours : égalité et inégalités des accroissements finis.}}$

• Si $f$ est continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

• Si $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ et si sa dérivée vérifie l'encadrement $m \leq f' \leq M$, alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad a \leq b \ \Rightarrow m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a) .$$

• Si $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ et si sa dérivée vérifie l'inégalité $|f'| \leq k$, alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq k\,|b - a| .$$

b) $\boxed{\text{Justifier, pour tout } x \leq 0, \text{ l'inégalité : } \quad |\mathrm{e}^x - 1| \leq |x| .}$

Il suffit d'appliquer la deuxième inégalité des accroissements finis (QC) à la fonction exp sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_-$, dont la valeur absolue de la dérivée est majorée par $k = 1$.

2. $\boxed{\text{Justifier la convergence absolue de l'intégrale } \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t .}$

La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue et négative sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\ln(\sin t) = \ln(t + o(t)) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t) + o(1) \underset{0}{\sim} \ln(t)$$

Or $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t)\ dt$ converge donc par comparaison $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ est convergente.

On note $f$ la fonction définie par : $\boxed{f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t}$.

3. a) $\boxed{\text{Déterminer le domaine de définition } D_f \text{ de } f \text{ et justifier que } f \text{ est monotone.}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $\varphi : \left\{ \begin{array}{lll} \left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & \sin^x(t) = \mathrm{e}^{x \ln(\sin t)} \end{array} \right.$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Comme $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^x$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > -1$.

Par conséquent, $f$ est définie sur $\boxed{D_f = ]-1, +\infty[}$.

Si $-1 < x \leq y$, alors, pour tout $t \in ]0, \pi/2]$, $\sin^x(t) \geq \sin^y(t)$ et par conséquent :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,dt \geq \int_0^{\pi/2} \sin^y(t)\,dt\ .$$

La fonction $f$ est donc décroissante.

b) Justifier, pour tout $x \in D_f$, l'égalité : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1} f(x+2)$ .

$$\begin{aligned}
f(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sin^x(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(t)\right)\sin^x(t)\,dt \\
&= f(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^x(t)^{\uparrow} \cos t_{\downarrow}\,dt \\
&= f(x) - \left[\frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1}\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1}\,(-\sin t)\ dt \\
&= f(x) - \frac{1}{x+1} f(x+2)
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{f(x) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2)}\ .$$

4. a) Établir, pour tout $(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, l'inégalité :

$$|f(x) - f(y)| \ \leq\ |x-y| \int_0^{\pi/2} |\ln(\sin t)|\,dt\ .$$

Soit $(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.

Pour tout $t \in ]0, \pi/2]$, on a :

$$|\sin^x(t) - \sin^y(t)| \ =\ |\sin^{\min\{x,y\}}(t)|\,|\sin^{|x-y|}(t) - 1|\ \leq |e^{|x-y|\ln(\sin t)} - 1|\ \leq |x-y|\,|\ln(\sin t)|$$

d'après 1b, puisque $\ln(\sin t) < 0$.

Il en résulte, par intégration entre 0 et $\pi/2$ (possible grâce au résultat de la question 2) que :

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \ \leq\ |x-y| \int_0^{\pi/2} |\ln(\sin t)|\,dt}\ .$$

b) Démontrer que $f$ est continue.

La majoration précédente entraîne la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la formule démontrée en 3.b de l'étendre à $D_f$.

c) $\boxed{\text{Trouver la limite et un équivalent simple de } f(x) \text{ quand } x \to -1_+ .}$

Par continuité de $f$ au point 1, on trouve

$$\lim_{x\to -1} f(x+2) = f(1) = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

d'où $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$ et

$$\boxed{f(x) \underset{-1_+}{\sim} \frac{1}{x+1}} .$$

5. a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$f(n) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\pi}{2} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) .$$

Par la relation de Chasles

$$f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t$$

d'où

$$f(n) \leq \frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\pi}{2}\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)} .$$

b) $\boxed{\text{En déduire la limite de } f(x) \text{ quand } x \text{ tend vers l'infini.}}$

$$\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = \left(1 - \frac{1}{2n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right)^n$$

tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, puisque son logarithme néperien, équivalent à $-\dfrac{n^{1/3}}{2}$, tend vers $-\infty$.

Il en résulte que la suite de terme général $f(n)$ converge vers 0, et, comme $f$ est décroissante, que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0} .$$

# Corrigé de l'exercice sans préparation

On considère la fonction *Scilab* suivante :

```
function f=bn(N,n,p)
X=grand(N,n,'geom',p); // simulation de N fois n var iid G(p)
k=0;
for i=1: N
    Y=sum(X(i,:)) //simulation de la somme de n var iid G(p)
    if Y>=n/p then k=k+1;
        end
end
f=k/N // fr\'{e}quence des simulations au moins \'{e}gales \`{a} n/p
endfunction
```

1. De quel nombre réel $\mathrm{bn}(N,1,0.4)$ fournit-il une valeur approchée lorsque $N$ est grand ?

   Pour chaque valeur de $i$, $Y$ est une simulation d'une variable de Bernoulli dont le paramètre est égal à :

$$P([\mathcal{G}(0.4) \geq \frac{1}{0.4}]) = P([\mathcal{G}(0.4) \geq 3]) = \sum_{k=3}^{+\infty} 0.4 \times (1-0,4)^{k-1} = 0.6^2 = 0.36$$

   Par la loi des grands nombres, $bn(N,1,0.4)$ sera donc proche de 0.36 pour les grandes valeurs de $N$.

2. Donner une valeur approximative de $\mathrm{bn}(10000, 10000, 0.4)$.

   La loi de la somme de $n = 10000$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p = 0.4)$ coïncide presque exactement avec la loi normale de même espérance ($n/p = 25000$) et de même variance $n(1-p)/p^2 = 37500$, dont la probabilité qu'elle excède son espérance est égale à $1/2$.
   Une valeur approximative de $\mathrm{bn}(10000, 10000, 0.4)$ est donc 0.5.

# Exercice principal

1. Question de cours.

   Énoncer le théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes.

2. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et montrer qu'elle est strictement positive.

   b) Pour $s \in \mathbb{R}$, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et exprimer sa valeur en fonction de $I_1$ et de $|s|$.

3. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{2u}{n}}$, la convergence de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\,\right)^n}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et déterminer une relation entre $J_n$ et $I_n$.

   b) Établir, pour tout $(n,u) \in \mathbb{N}^*\times]0,1]$, l'inégalité :

$$\left|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right| \leq u\ .$$

   c) Démontrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Dans la suite de l'exercice, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\{-1,1\}$, qui sont mutuellement indépendantes et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}\cdot$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E\big(\cos(t\,S_n)\big) = (\cos t)^n$.

   b) En utilisant les formules trouvées en 2.b et 3.a, exprimer $E(|S_n|)$ en fonction de $I_n$ et de $I_1$.

5. En déduire l'existence d'un réel positif $M$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) \leq M\sqrt{n}$.

## Exercice sans préparation

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AM$.

1. Démontrer que $A$ et $\varphi_A$ ont le même spectre.
2. Comparer, pour chacune de leurs valeurs propres communes, les dimensions des sous-espaces propres correspondants de $A$ et $\varphi_A$.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.

$\boxed{\text{Énoncer le théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes.}}$

Soit $X$ est une variable aléatoire réelle discrète définie sur $\Omega$ et $f$ est une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors $f(X)$ est une variable aléatoire réelle discrète et si $X(\Omega)$ est infini, $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$ est absolument convergente.

Dans le cas où $f(X)$ admet une espérance, on a l'égalité :

$$E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)\ .$$

2. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}dt$ et montrer que $I_n > 0$.

• L'application $f_n : t \mapsto \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Au voisinage de 0, $(\cos t)^n = \left(1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^n = 1 - n\dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ donc $f_n(t) = \frac{n}{2} + o(1)$ ; l'application $f_n$ est donc prolongeable par continuité en 0 ce qui assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

• La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ résulte par exemple du fait que pour tout $t \geq 1$,

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{2}{t^2}\cdot$$

Comme la fonction $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et différente de la fonction nulle, son intégrale donc $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est strictement positive.

b) Pour $s \in \mathbb{R}$, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}dt$ et exprimer sa valeur en fonction de $I_1$ et de $|s|$.

• Si $s > 0$, l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto su$ est bijective, strictement croissante et de classe $C^1$ donc le changement de variable $t = su$ dans l'intégrale convergente $I_1$ conduit à une intégrale convergente qui lui est égale.
On en déduit que

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{s^2u^2}s\,\mathrm{d}u$$

et par conséquent que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(su)}{u^2}\,du$ est convergente et égale à $sI_1$.

- Par parité de la fonction cosinus, on en déduit que pour tout $s\in\mathbb{R}^*$, $u\mapsto\dfrac{1-\cos(su)}{u^2}$ est d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(su)}{u^2}\,du=|s|\,I_1$.

- Le résultat précédent reste vrai pour $s=0$ car les deux membres existent et valent alors 0.

3. a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, , montrer à l'aide du changement de variable $t=\sqrt{\frac{2u}{n}}$, la convergence de l'intégrale $J_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n}{u\sqrt{u}}du$ et déterminer une relation entre $J_n$ et $I_n$.

Si $n\in\mathbb{N}^*$, l'application $\varphi:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$, $u\mapsto\sqrt{\frac{2u}{n}}$ est de classe $C^1$, strictement croissante et bijective, donc le changement de variable $t=\sqrt{\frac{2u}{n}}$ dans l'intégrale convergente $I_n$ conduit à une intégrale convergente qui lui est égale.

On a donc $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n}{\frac{2u}{n}}\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{du}{2\sqrt{u}}=\boxed{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}J_n}$, et, en particulier, la convergence de l'intégrale $J_n$.

b) Montrer que pour tout $(n,u)\in\mathbb{N}^*\times]0,1]$, $\left|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right|\le u$ .

L'application $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $u\mapsto g(u)=\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$ et pour tout $u\in]0,1]$,

$$g'(u)=n\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{1}{2\sqrt{u}}\Big(-\sin\sqrt{\frac{2u}{n}}\Big)\Big(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\Big)^{n-1}=-\frac{\sin\sqrt{\frac{2u}{n}}}{\sqrt{\frac{2u}{n}}}\Big(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\Big)^{n-1}$$

Or, d'après **l'inégalité des accroissements finis**, puisque la dérivée de la fonction sin est bornée par 1, on a pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|\sin t|\le|t|$.
On en déduit que pour tout $u\in]0,1]$, $|g'(u)|\le 1$ et, toujours par l'inégalité des accroissements finis

$$\left|1-\Big(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\Big)^n\right|=|g(0)-g(u)|\le|u|\ .$$

c) Démontrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$|J_n|\le\int_0^1\frac{|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n|}{u\sqrt{u}}du+\int_1^{+\infty}\frac{|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n|}{u\sqrt{u}}du\le\int_0^1\frac{1}{\sqrt{u}}\,du+\int_1^{+\infty}\frac{2}{u\sqrt{u}}\,du=5\ .$$

Dans la suite de l'exercice, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\{-1, 1\}$, qui sont mutuellement indépendantes et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}\cdot$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

4. a) $\boxed{\text{Montrer que pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ E\big(\cos(t\,S_n)\big) = (\cos t)^n.}$

On montre la propriété par récurrence sur $n$.

La propriété est vraie pour $n = 1$ car $\cos(t\,S_1)$ est la variable certaine égale à $\cos t$.

On suppose ensuite la propriété vraie à l'ordre $n$.
Vu que $\cos(t\,S_{n+1}) = \cos(t\,S_n)\cos(t\,X_{n+1}) - \sin(t\,S_n)\sin(t\,X_{n+1})$ et que les variables $S_n$ et $X_{n+1}$ sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} E(\cos(t\,S_{n+1})) &= E(\cos(t\,S_n))E(\cos(t\,X_{n+1})) - E(\sin(t\,S_n))E(\sin(t\,X_{n+1})) \\ &= (\cos t)^n \cos t - E(\sin(t\,S_n))E(\sin(t\,X_{n+1})) \end{aligned}$$

De plus $E(\sin(t\,X_{n+1})) = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin(-t) = 0$ donc $E(\cos(t\,S_{n+1}t)) = (\cos t)^{n+1}$.

b) $\boxed{\text{En utilisant les formules trouvées en 2.b et 3.a, exprimer } E(|S_n|) \text{ en fonction de } I_n \text{ et de } I_1.}$

D'après la question 2.b) et la formule de transfert, on a :

$$E(|S_n|) = \sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n = s)\ \frac{1}{I_1}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos su}{u^2}\mathrm{d}u$$

Par linéarité de l'intégrale sur l'espace vectoriel des fonctions d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+^*$ il vient :

$$E(|S_n|) = \frac{1}{I_1}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n = s)\frac{1-\cos su}{u^2}\right)\mathrm{d}u$$

d'où en utilisant $\sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n = s) = 1$ et à nouveau la formule de transfert :

$$E(|S_n|) = \frac{1}{I_1}\int_0^{+\infty}\frac{1-E(\cos S_n u)}{u^2}\mathrm{d}u$$

soit, compte-tenu de la question précédente, $E(|S_n|) = \frac{1}{I_1}\int_0^{+\infty}\frac{1-(\cos u)^n}{u^2}\mathrm{d}u = \boxed{\frac{I_n}{I_1}}$.

5. $\boxed{\text{En déduire l'existence d'un réel positif } M \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ E(|S_n|) \leq M\sqrt{n}.}$

D'après 3.a), on a $E(|S_n|) = \frac{J_n}{2\sqrt{2}\,I_1}\sqrt{n}$ et d'après 3.b), $E(|S_n|) \leq M\sqrt{n}$, pour $M = \frac{5}{2\sqrt{2}\,I_1}\cdot$

# Corrigé de l'exercice sans préparation

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AM$.

1. Comparer les spectres de $A$ et $\varphi_A$.

Il faut commencer par souligner que $\varphi_A$ est bien un endomorphisme. Nous allons montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors c'est aussi une valeur propre de $\varphi_A$ ; et que si $\mu$ est une valeur propre de $\varphi_A$, c'est aussi une valeur propre de $A$.

• S'il existe $v$ non nul tel que $Av = \lambda v$, alors $M_v = [v \dots v]$ est une matrice non nulle et telle que $\varphi_A(M_v) = [Av \dots Av] = \lambda[v \dots v] = \lambda M_v$.

• S'il existe une matrice $M = [m_1 \dots m_n]$ non nulle telle que $AM = \varphi_A(M) = \mu M$, alors l'un des $m_j$ est un vecteur non nul et vérifiant $A m_j = m_j$.

2. Comparer, pour chacune de leurs valeurs propres communes, les dimensions des sous-espaces propres de $A$ et $\varphi_A$.

Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $\varphi_A$.
L'application de $E_\lambda(A)^n$ dans $E_\lambda(\varphi_A)$ qui associe à tout $n$-uplet $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs-colonnes de $E_\lambda(A)$ la matrice $[v_1 \dots v_n]$ est un isomorphisme.
La dimension de $E_\lambda(\varphi_A)$ est donc égale à $n$ fois la dimension de $E_\lambda(A)$.

# EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Si $H$ est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $F$, rappeler la définition de la projection orthogonale $p_H$ sur $H$ et, pour $x \in F$, donner la caractérisation de $p_H(x)$ par minimisation d'une norme.

   Dans la suite de l'exercice, on considère deux espaces euclidiens $E$ et $F$ de dimensions supérieures ou égales à 2. Le produit scalaire sur $F$ est noté $(\ |\ )$ et la norme associée $\|\ \|$.

   Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ et $v$ un vecteur de $F$.

2. a) Justifier l'existence d'un vecteur $x_0$ de $E$ tel que : $\|f(x_0) - v\| = \min\limits_{x \in E} \|f(x) - v\|$.

   Dans la suite, un tel vecteur $x_0$ sera appelé une pseudo-solution de l'équation $f(x) = v$.

   b) Montrer que si $f$ est injective, l'équation $f(x) = v$ admet une unique pseudo-solution.

3. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de $E$ et $F$ respectivement. On appelle $A$ la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et $V$ la matrice de $v$ dans $\mathcal{C}$.

   a) Montrer que $x_0$ est pseudo-solution de l'équation $f(x) = v$ si et seulement si pour tout $x$ de $E$, $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$.

   b) Soit $x_0$ un vecteur de $E$ et $X_0$ la matrice de $x_0$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $x_0$ est pseudo-solution de $f(x) = v$ si, et seulement si, : ${}^tAAX_0 = {}^tAV$.

   c) Dans cette question on suppose que $E = F = \mathbb{R}^3$ qu'on munit du produit scalaire usuel. On suppose que la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et celle de $v$ est $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les pseudo-solutions de $f(x) = v$.

4. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ et $c = (c_1, \ldots, c_n)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On souhaite déterminer deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

   a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $f(x) = v$ où $f$ est un élément de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$. Préciser le vecteur $v$ et donner la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$.

   b) À quelle condition sur $a$ et $b$ l'application $f$ est-elle injective ?

   c) Lorsque cette condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant $\lambda$ et $\mu$ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

Sujet S 258

## Exercice sans préparation

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ .
2. Trouver la limite quand $n$ tend vers l'infini de $\displaystyle\frac{2^n}{(n-1)!}\int_{(n+\sqrt{n})/2}^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ .

# Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours

| Si $H$ est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $F$, rappeler la définition de la projection orthogonale $p_H$ sur $H$ et, pour $x \in F$, donner la caractérisation de $p_H(x)$ par minimisation d'une norme. |
|---|

On sait que $H^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $F$ qui est un supplémentaire de $H$ dans $F$ et par définition, $p_H$ est le projecteur de $F$ qui a pour image $H$ et pour noyau $H^\perp$.

On a pour tout vecteur $y$ de $H$, $\|y-x\| \geq \|p_H(x)-x\|$ avec égalité si et seulement si $y = p_H(x)$ donc $p_H(x)$ est l'unique vecteur $z$ de $H$ tel que $\|z - x\| = \min\limits_{y \in H} \|y - x\|$.

Dans la suite de l'exercice, on considère deux espaces euclidiens $E$ et $F$ de dimensions supérieures ou égales à 2. Le produit scalaire sur $F$ est noté $(\,|\,)$ et la norme associée $\|\ \|$.

Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ et $v$ un vecteur de $F$.

2. a)

| Justifier l'existence d'un vecteur $x_0$ de $E$ tel que : $\|f(x_0) - v\| = \min\limits_{x \in E} \|f(x) - v\|$.<br>Dans la suite, un tel vecteur $x_0$ sera appelé une pseudo-solution de l'équation $f(x) = v$. |
|---|

Notons $w$ le projeté orthogonal de $v$ sur $\operatorname{Im} f$. Alors $w \in \operatorname{Im} f$ donc il existe $x_0 \in E$ tel que $w = f(x_0)$ et d'après la question de cours, $\|w - v\| = \min\limits_{z \in \operatorname{Im} f} \|z - v\|$, autrement dit

$$\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\| .$$

b)

| Montrer que si $f$ est injective, l'équation $f(x) = v$ admet une unique pseudo-solution. |
|---|

L'existence d'une pseudo-solution de $f(x) = v$ a été justifiée en 2a.

Par ailleurs, d'après le rappel de cours, si $x_0 \in E$, $x_0$ est pseudo-solution de $f(x) = v$ si, et seulement si, $f(x_0)$ est égal au projeté orthogonal $w$ de $v$ sur $\operatorname{Im} f$.

Si $f$ est injective, alors l'élément $w = p_{\operatorname{Im} f}(v)$ de $\operatorname{Im} f$ possède un unique antécédent par $f$, ce qui établit l'unicité d'une pseudo-solution de $f(x) = v$.

3. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de $E$ et $F$ respectivement. On appelle $A$ la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et $V$ la matrice de $v$ dans $\mathcal{C}$.

a)

| Montrer que $x_0$ est pseudo-solution de l'équation $f(x) = v$ si et seulement si pour tout $x$ de $E$, $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$. |
|---|

Le vecteur $x_0$ de $E$ est pseudo-solution de $f(x) = v$ si et seulement si $f(x_0) = p_{\operatorname{Im} f}(v)$ ce qui équivaut à $f(x_0) \in \operatorname{Im} f$ et $v - f(x_0) \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ soit encore à $\forall y \in \operatorname{Im} f$, $(y|v - f(x_0)) = 0$ et finalement à $\forall x \in E$, $(f(x)|v - f(x_0)) = 0$.

b) Soit $x_0$ un vecteur de $E$ et $X_0$ la matrice de $x_0$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $x_0$ est pseudo-solution de $f(x) = v$ si, et seulement si, : ${}^tAAX_0 = {}^tAV$.

Si $x \in E$ a pour matrice $X$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$ est égale à $AX$ et, vu que la base $\mathcal{C}$ est orthonormée, on a :

$$(f(x)|f(x_0) - v) = {}^t(AX)(AX_0 - V) = {}^tX({}^tAAX_0 - {}^tAV)$$

Notons $\alpha$ le vecteur de $E$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est égale à ${}^tAAX_0 - {}^tAV$.
Alors $(f(x)|f(x_0) - v)$ est égal au produit scalaire dans $E$ entre $x$ et $\alpha$.
Dans ces conditions, $x_0$ est pseudo solution de $f(x) = v$ si et seulement si $\alpha$ est orthogonal à tout vecteur de $E$ ce qui équivaut à dire que $\alpha$ est le vecteur nul de $E$ ou encore

$${}^tAAX_0 - {}^tAV = 0 .$$

c) Dans cette question on suppose que $E = F = \mathbb{R}^3$ qu'on munit du produit scalaire usuel. On suppose que la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et celle de $v$ est $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les pseudo-solutions de $f(x) = v$.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 11 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tAV = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve que les pseudo-solutions de $f(x) = v$ sont les vecteurs de la forme $(\frac{1}{4} - 2z, \frac{1}{4} + z, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.

4. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ et $c = (c_1, \dots, c_n)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On souhaite déterminer deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $f(x) = v$ où $f$ est un élément de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$. Préciser le vecteur $v$ et donner la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$.

Si on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel, $\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2 = \|\lambda a + \mu b - c\|^2$ ce qui nous conduit à définir $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ tel que $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda, \mu) = \lambda a + \mu b$.

Le problème posé revient alors à chercher les pseudo-solutions de $f(x) = v$ avec $v = c$.

La matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ est $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$.

b) $\boxed{\text{À quelle condition sur } a \text{ et } b \text{ l'application } f \text{ est-elle injective ?}}$

$f$ est injective si et seulement si $(a, b)$ est une famille libre.

c) Lorsque cette condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant $\lambda$ et $\mu$ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

$$^tAA = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a|b) \\ (a|b) & \|b\|^2 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tAV = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix}.$$

La solution du problème posé est alors

$$(\lambda, \mu) = \left( \frac{(a|c)\|b\|^2 - (a|b)(b|c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2} \quad , \quad \frac{(b|c)\|a\|^2 - (a|b)(a|c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2} \right).$$

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x$ .

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n)}{2^n} = \frac{(n-1)!}{2^n} \, .$$

2. Trouver la limite quand $n$ tend vers l'infini de $\displaystyle\frac{2^n}{(n-1)!} \int_{(n+\sqrt{n})/2}^{+\infty} x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x$ .

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi $\gamma(1)$.

$$\frac{2^n}{(n-1)!} \int_{(n+\sqrt{n})/2}^{+\infty} x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(n-1)!} \int_{n+\sqrt{n}}^{+\infty} t^{n-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = P([S_n \geq n + \sqrt{n}])$$

où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ puisque, par la propriété de convolution des lois $\gamma$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi $\gamma(n)$.

Par le théorème-limite central, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P([\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \geq 1]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t = 1 - \Phi(1)$ où $\Phi$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

# EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Rappeler la définition de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un nombre réel $x$. Donner l'allure du graphe de la fonction partie entière et en indiquer les principales propriétés.

2. Soit $x > 0$.

   a) Justifier que si $x = M \times 10^n$ avec $1 \leq M < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors nécessairement :
$$n = \lfloor \frac{\ln x}{\ln 10} \rfloor \; .$$

   b) En déduire qu'il existe un unique couple $(\mathcal{M}(x), k(x)) \in [1, 10[ \times \mathbb{Z}$ tel que :
$$x = \mathcal{M}(x) \times 10^{k(x)} \; .$$

Le nombre réel $\mathcal{M}(x)$ est appelé la mantisse de $x$ et sa partie entière, notée $\mathcal{C}(x)$, le premier chiffre significatif de $x$.
Par exemple, la mantisse et le premier chiffre significatif de 0,0351 sont respectivement égaux à 3,51 et 3 ; ceux de 6492,253 sont 6,492253 et 6.

3. On appelle *loi de Benford* la loi de $B = 10^U$, où $U$ suit une loi uniforme sur $[0, 1[$.

   a) Montrer que cette loi admet une densité, que l'on calculera.

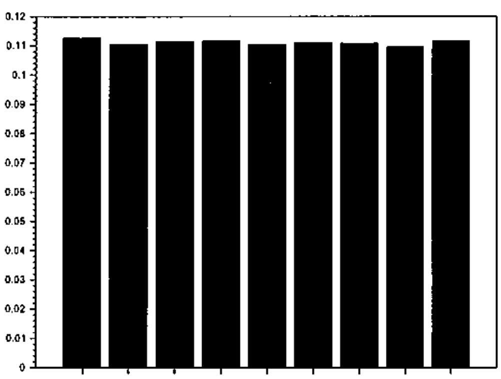
   b) Déterminer l'espérance de cette loi.

   c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\lfloor B \rfloor$ lorsque $B$ suit la loi de Benford.

4. On considère maintenant un entier $k_0 \in \mathbb{Z}$ et une variable aléatoire $Y$ de loi uniforme sur $]0, 10^{k_0}[$. Identifier les lois de $\mathcal{M}(Y)$ et de $\mathcal{C}(Y)$.

5. On considère le code Scilab suivant, qui crée l'image de droite.

```
n = 10^5;
M = 10*rand(1,n);
C = floor(M./10.^floor(log(M)/log(10)));
H = tabul(C);
bar(H(:,1),H(:,2)/n);
```




   a) Expliquer la signification du code et ce qu'il illustre.

   b) Expliquer comment on pourrait modifier le code précédent pour calculer des réalisations de $\mathcal{M}(B)$ et de $\mathcal{C}(B)$.

# Exercice sans préparation

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note $H$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$.

1. a) Justifier que $H$ est un hyperplan de $E$.
   b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à $H$. Est-elle unique ?

2. On considère le produit scalaire sur $E$ défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad < P,Q >= P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4) \ .$$

   Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de $P$ sur $H^{\perp}$.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

> Rappeler la définition de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un nombre réel $x$. Donner l'allure du graphe de la fonction partie entière et en indiquer les principales propriétés.

La partie entière de $x$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$. Elle est donc caractérisée par :

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \end{cases} .$$

La fonction partie entière est croissante au sens large, continue à droite sur $\mathbb{R}$ et continue en tout point non entier.

2. Soit $x > 0$.

a)
> Justifier que si $x = M \times 10^n$ avec $1 \leq M < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors nécessairement :
> $$n = \lfloor \frac{\ln x}{\ln 10} \rfloor .$$

Comme $x = M \times 10^n$, on a les équivalences

$$1 \leq M < 10 \Longleftrightarrow 10^n \leq x < 10^{n+1} \Longleftrightarrow n \leq \frac{\ln x}{\ln 10} < n + 1$$

ce qui entraîne l'égalité $n = \lfloor \frac{\ln x}{\ln 10} \rfloor$, puisque $n$ est entier.

b)
> En déduire qu'il existe un unique couple $(\mathcal{M}(x), k(x)) \in [1, 10[\times\mathbb{Z}$ tel que :
> $$x = \mathcal{M}(x) \times 10^{k(x)} .$$

La question précédente peut être considérée comme le début d'une analyse, dont la fin (le calcul de $M$ en fonction de $x$) est immédiate et la synthèse facile.

3. On appelle *loi de Benford* la loi de $B = 10^U$, où $U$ suit une loi uniforme sur $[0, 1[$.

a)
> Montrer que cette loi admet une densité, que l'on calculera.

On calcule tout d'abord la fonction de répartition : pour $x \in [1, 10]$,

$$F(x) = P\big(10^U \leq x\big) = P\big(U \leq \frac{\ln(x)}{\ln(10)}\big) = \frac{\ln x}{\ln 10} ,$$

et $F$ vaut 0 avant 1 et 1 après 10. Cette fonction $F$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'une part, $C^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de 0 et 1 d'autre part, ce qui prouve que $B$ admet une densité $f$, obtenue par dérivation (là où celle-ci est possible) :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln 10} & \text{si } 1 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}\,.$$

b) $\boxed{\text{Déterminer l'espérance de cette loi.}}$

Par théorème de transfert,

$$E(B) = E\big[10^U\big] = \int_1^{10} x \, \frac{1}{x \ln 10} \, \mathrm{d}x = \boxed{\frac{9}{\ln 10}} \quad \approx 3{,}91\,.$$

c) $\boxed{\text{Déterminer la loi de la variable aléatoire } \lfloor B \rfloor \text{ lorsque } B \text{ suit la loi de Benford.}}$

La variable aléatoire $\lfloor B \rfloor$ prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, 9\}$ : pour $j$ dans cet ensemble,

$$P\Big(\lfloor B \rfloor = j\Big) = P(B \in [j, j+1[) = \int_j^{j+1} \frac{1}{x \ln 10} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 10}\big(\ln(j+1) - \ln(j)\big)\,.$$

4. On considère maintenant un entier $k_0 \in \mathbb{Z}$ et une variable aléatoire $Y$ de loi uniforme sur $]0, 10^{k_0}[$.

$\boxed{\text{Identifier les lois de } \mathcal{M}(Y) \text{ et de } \mathcal{C}(Y).}$

On note tout d'abord que $\mathcal{M}(Y)$ prend ses valeurs dans $[1, 10[$ et $\mathcal{C}(Y)$ dans $\{1, 2, \ldots, 9\}$.
On considère le système complet des événements $A_k = [10^{k-1} \leq Y < 10^k]$ pour les entiers relatifs $k \leq k_0$.
On obtient, pour tout $x \in [1, 10[$ :

$$\begin{aligned} P\big(\mathcal{M}(Y) \leq x\big) &= \sum_{k=-\infty}^{k_0} P\big(A_k \cap [\mathcal{M}(Y) \leq x]\big) = \sum_{k=-\infty}^{k_0} P\big([10^{k-1} \leq Y < x \times 10^{k-1}]\big) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k_0} \frac{(x-1)\,10^{k-1}}{10^{k_0}} = \frac{(x-1)}{10^{k_0}} \sum_{k=-\infty}^{k_0} 10^{k-1} \\ &= \frac{(x-1)}{10^{k_0}} \left( 10^{k_0 - 1} \sum_{j \geq 0} 10^{-j} \right) = \frac{x-1}{10} \frac{1}{1 - 1/10} \\ &= \frac{x-1}{9}\,. \end{aligned}$$

La variable aléatoire $\mathcal{M}(Y)$ suit donc la loi uniforme sur $[1, 10[$.

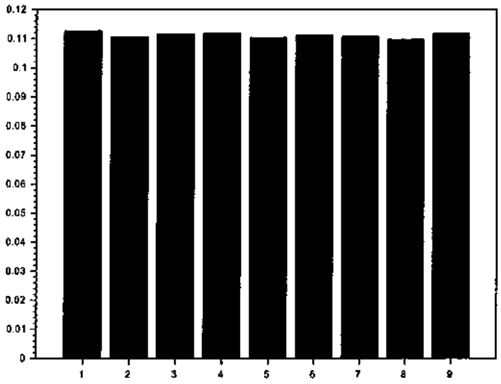
On en déduit que pour $j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$,

$$P\big(\mathcal{C}(Y) = j\big) = P\big(\mathcal{M}(Y) \in [j, j+1[\big) = \frac{1}{9}\,,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{C}(Y)$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

5. On considère le code Scilab suivant, qui crée l'image de droite.

```
N = 10^5;
Y = 10*rand(1,N);
C = floor(Y./10.^floor(log(Y)/log(10)));
H = tabul(C);
bar(H(:,1),H(:,2)/n);
```




a) Expliquer la signification du code et ce qu'il illustre.

La ligne 2 simule $N = 10^5$ variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_N$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme sur $[0, 10[$.
La ligne 3 extrait les mantisses `Y./10.^floor(log(Y)/log(10))` de ces $N$ nombres, desquelles on prend ensuite les parties entières pour avoir les premiers chiffres significatifs.

Exemple (N=5)

```
--> Y = 10*rand(1,5)
 Y  = 9.1847078    0.4373343    4.8185089    2.639556    4.1481037
--> C = floor(Y./10.^floor(log(Y)/log(10)))
 C  = 9.    4.    4.    2.    4.
```

La ligne 4 regroupe les $Y_i$ par valeurs distinctes et calcule les effectifs associés.

Exemple (suite)

```
--> H = tabul(C)
 H  =  9.    1.
       4.    3.
       2.    1.
```

La ligne 5 trace le diagramme en bâtons de la distribution empirique des $Y_i$.
Le diagramme confirme l'uniformité de la distribution de $\mathcal{C}(Y)$ (dans le cas où $k_0 = 1$).

b) Expliquer comment on pourrait modifier le code précédent pour calculer des réalisations de $\mathcal{C}(B)$ et $\mathcal{M}(B)$, puis représenter graphiquement leurs distributions.

Pour calculer $\mathcal{C}(B)$ : remplacer le `*` par un `^` dans la ligne 2 ; pour calculer $\mathcal{M}(B)$ : omettre le `floor` le plus externe dans la ligne 3.
Pour la loi de $\mathcal{C}(B)$ : aucun changement, un diagramme avec `tabul` convient très bien.
Pour $\mathcal{M}(Y)$ dont la loi possède une densité sur $[1, 10[$, on peut générer un grand nombre de réalisations et construire un histogramme avec suffisamment de classes avec `histplot`, qui ressemblera à un histogramme uniforme.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note $H$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$.

1. a) Justifier que $H$ est un hyperplan de $E$.

Le sous-espace vectoriel $H$ est un hyperplan puisque c'est un sous-espace vectoriel de dimension $3 = 4-1$ de $E$, car les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$ sont linéairement indépendants.

b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à $H$. Est-elle unique ?

La forme linéaire $\phi : P \longmapsto P(4)$ admet $H$ pour noyau. Les formes linéaires admettant le même noyau que $\phi$ sont les multiples non nuls de $\phi$.

2. On considère le produit scalaire sur $E$ défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad <P,Q>= P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4) .$$

Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de $P$ sur $H^\perp$.

Le polynôme $L = (X-1)(X-2)(X-3)$ étant orthogonal à $H$, la projection orthogonale de $P$ sur $H^\perp$ est :

$$p(P) = \frac{<L,P>}{<L,L>}\, L = \frac{L(4)P(4)}{L^2(4)}\, L = \frac{P(4)}{6}\, (X-1)(X-2)(X-3)$$

# EXERCICE PRINCIPAL

Soit $p$ un nombre entier supérieur ou égal à 2 et $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ un élément de $\mathbf{R}^p$ avec $a_p \neq 0$.

On note $\mathcal{U}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\mathcal{U}_p$ l'ensemble des suites réelles $u \in \mathcal{U}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \cdots + a_p u_n\ .$$

1. a) Question de cours : rappeler la définition d'une application bijective.
   b) Soit $H$ l'application de $\mathcal{U}_p$ dans $\mathbf{R}^p$ qui associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p$ le $p$-uplet $(u_1, u_2, \dots, u_p)$. Justifier que $H$ est une bijection de $\mathcal{U}_p$ sur $\mathbf{R}^p$.

2. a) Montrer que $\mathcal{U}_p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et trouver sa dimension.
   b) Trouver une base de l'espace vectoriel des suites $u \in \mathcal{U}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+p} = u_n\ .$$

3. Soit $d$ l'endomorphisme de $\mathcal{U}_p$ défini par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p, \quad d(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}^*}\ .$$

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de $\mathcal{U}_p$.
*On admet sans démonstration* que l'ensemble $G$ des polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $\big(P(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$, où $0_{\mathcal{U}_p}$ désigne la suite nulle de $\mathcal{U}_p$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

a) Soit $A \in G$. Démontrer que : $\forall Q \in \mathbf{R}[X],\ Q \times A \in G$.

b) Soit $N$ l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de $G$. Justifier que $N$ possède un plus petit élément $r$ et qu'il existe dans $G$ un polynôme $\Pi$ de degré $r$, dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

c) En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que l'ensemble $G$ est constitué par les polynômes de la forme $Q \times \Pi$, où $Q \in \mathbf{R}[X]$.

4. *Un exemple.* On considère ici le cas où : $p = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 1$.
On note $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite de $\mathcal{U}_p$ qui vérifie $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 1$.

Trouver un polynôme non nul $\Pi$ de degré minimal tel que $\big(\Pi(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$. Est-il unique ?

# EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}[-\theta,+\theta]$, où $\theta$ désigne un paramètre réel strictement positif inconnu.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \mathrm{Inf}\{X_1, \cdots, X_n\}$ et $V_n = \mathrm{Sup}\{X_1, \cdots, X_n\}$.

1. Démontrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de $\theta$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $T_n = \dfrac{1}{2}\mathrm{Sup}\{X_j - X_i\,;\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$ .
   a) Exprimer $T_n$ en fonction de $U_n$ et $V_n$.
   b) En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de $\theta$.

# Corrigé de l'exercice principal

Soit $p$ un nombre entier supérieur ou égal à 2 et $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un élément de $\mathbf{R}^p$ avec $a_p \neq 0$.

On note $\mathcal{U}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\mathcal{U}_p$ l'ensemble des suites réelles $u \in \mathcal{U}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \cdots + a_p u_n \ .$$

1. a) Question de cours : rappeler la définition d'une application bijective.

On dit qu'une application $f$ d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ est bijective lorsqu'elle vérifie :

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E, \quad f(x) = y \ .$$

b) Soit $H$ l'application de $\mathcal{U}_p$ dans $\mathbf{R}^p$ qui associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p$ le $p$-uplet $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
Justifier que $H$ est une bijection de $\mathcal{U}_p$ sur $\mathbf{R}^p$.

Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p) \in \mathbf{R}^p$.

La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $\begin{cases} \forall n \in [\![1,p]\!], & u_n = v_n \\ \forall n \geq p+1, & u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_p u_{n-p} \end{cases}$
est, par analyse-synthèse, l'unique suite de $\mathcal{U}_p$ vérifiant $H(u) = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$.

2. a) Montrer que $\mathcal{U}_p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et trouver sa dimension.

On vérifie aisément que $\mathcal{U}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$. Sa dimension est $p$ puisque $H$ est un isomorphisme.

b) Trouver une base de l'espace vectoriel des suites $u \in \mathcal{U}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+p} = u_n \ .$$

On peut constituer une base de cet espace vectoriel à l'aide des images réciproques des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ par l'application $H$ correspondant à $a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$ et $a_p = 1$, c'est-à-dire des $p$ suites $u^{(i)}$ définies (pour $i \in [\![1,p]\!]$), par :

$$u_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n-i \in p\mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Soit $d$ l'endomorphisme de $\mathcal{U}_p$ défini par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p, \quad d(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}^*} \ .$$

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de $\mathcal{U}_p$.

*On admet sans démonstration* que l'ensemble $G$ des polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $\big(P(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$, où $0_{\mathcal{U}_p}$ désigne la suite nulle de $\mathcal{U}_p$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

a) Soit $A \in G$. Démontrer que : $\forall Q \in \mathbf{R}[X],\ Q \times A \in G$.

Comme $\big(A(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$, on aussi :

$$\big(Q \times A(d)\big)(u) = \big(Q(d)\big)(u) \circ \big(A(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}\ .$$

b) Soit $N$ l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de $G$. Justifier que $N$ possède un plus petit élément $r$ et qu'il existe dans $G$ un polynôme $\Pi$ de degré $r$, dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

$N$ admet un plus petit élément $r$, puisque c'est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (parce que le polynôme $P = X^p - a_1X^{p-1} - \cdots - a_p$ vérifie $\big(P(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$).
En choisissant un polynôme de degré $r$ dans $G$ et en le divisant par son coefficient dominant, on obtient un polynôme $\Pi$ de degré $r$, dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

c) En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que l'ensemble $G$ est constitué par les polynômes de la forme $Q \times \Pi$, où $Q \in \mathbf{R}[X]$.

Soit $P \in G$.
Par division euclidienne, $P = \Pi Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(\Pi)$.
Or, $\Pi \in G$ et $Q \in \mathbf{R}[X]$, d'où $\Pi Q \in G$ et, par conséquent, $(P - \Pi Q) = R \in G$.
Comme $\Pi$ est de degré minimal dans $G$, la condition $\deg(R) < \deg(\Pi)$ entraîne que $R$ est nul.
Par suite, $P = \Pi Q$.
La réciproque est immédiate, puisque $\Pi \in G$ implique $\Pi Q \in G$ pour tout $Q \in \mathbf{R}[X]$.

4. *Un exemple.* On considère ici le cas où : $p = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 1$.
On note $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite de $\mathcal{U}_p$ qui vérifie $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 1$.

Trouver un polynôme non nul $\Pi$ de degré minimal tel que $\big(\Pi(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$. Est-il unique ?

Le polynôme $P(X) = X^3 - 2X - 1$ vérifie $\big(P(d)\big)(u) = d^3(u) - 2d(u) - u = 0_{\mathcal{U}_3}$.

Or, $P(X) = (X+1)(X^2-X-1) = (X+1)(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$ avec $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

- Aucun polynôme constant non nul $Q$ ne vérifie $\big(Q(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$.
- Pour qu'un polynôme $Q(X) = aX+b$ de degré 1 appartienne à $G$, il faut que $\big(Q(d)\big)(u) = ad(u) + bu = 0_{\mathcal{U}_3}$.

En particulier, on doit avoir $au_2 + bu_1 = 0$ et $au_3 + bu_2 = 0$, ce qui donne $a = b = 0$. Il n'existe donc dans $G$ aucun polynôme non nul de degré égal à 1.

- Posons $\boxed{\Pi(X) = X^2 - X - 1}$. On a : $\big(\Pi(d)\big)(u) = d^2(u) - d(u) - u$.

Posons $\big(\Pi(d)\big)(u) = v = (v_n)_{n\geq 1}$ : $\quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ v_n = u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$ .
On a : $v_1 = u_3 - u_2 - u_1 = 0$, $v_2 = u_4 - u_3 - u_2 = 0$.
Supposons que pour un $n \in \mathbf{N}^*$, on a $v_n = 0$, c'est-à-dire $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
On a alors : $\quad v_{n+1} = u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1}$,
soit, par définition, $v_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n - u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+2} + u_n$ et l'hypothèse de récurrence permet d'écrire : $v_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+1} - u_n + u_n = 0$.
Le polynôme non nul $\Pi$ appartient à $G$ et il est de degré minimal (égal à 2). Il est unique, à un coefficient réel non nul multiplicatif près.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}[-\theta,+\theta]$, où $\theta$ désigne un paramètre réel strictement positif inconnu.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \text{Inf}\{X_1, \cdots, X_n\}$ et $V_n = \text{Sup}\{X_1, \cdots, X_n\}$.

1. $\boxed{\text{Démontrer que } (V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite convergente d'estimateurs de } \theta.}$

   On calcule la fonction de répartition de $V_n$ selon des principes bien répertoriés.

$$P[V_n \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\theta \\ (\frac{x+\theta}{2\theta})^n & \text{si } -\theta \leq x \leq +\theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

   qui, lorsque $n$ tend vers l'infini, tend vers la fonction de répartition d'une variable certaine de valeur $\theta$.
   On en déduit que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente (en loi ou en probabilité) d'estimateurs de $\theta$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $T_n = \dfrac{1}{2}\text{Sup}\{X_j - X_i\,;\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$ .

   a) $\boxed{\text{Exprimer } T_n \text{ en fonction de } U_n \text{ et } V_n.}$

$$T_n = \frac{1}{2}\left(V_n - U_n\right) .$$

   b) $\boxed{\text{En déduire que } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite convergente d'estimateurs de } \theta.}$

   Comme $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\theta$ et, symétriquement, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $-\theta$, on en déduit (preuve exigible) que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}\left(\theta - (-\theta)\right) = \theta$.

# EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ sur un ouvert $\Omega$ non vide de $\mathbb{R}^n$.
   Donner la définition des dérivées directionnelles, première et seconde, de $f$ en un point $x$ de $\Omega$ dans la direction $h = (h_1, \dots, h_n)$.
   Exprimer leurs valeurs en fonction du gradient $\nabla(f)(x)$ et de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x)$ de la fonction $f$ au point $x$.

2. Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi, admettant chacune une espérance et un écart-type, notés respectivement $\mu$ et $\sigma$.

   Pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note : $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = E\Big(\big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i X_i - \mu\big)^2\Big)$ .

   a) Justifier l'égalité : $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma^2 \sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \mu^2 (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - 1)^2$ .

   b) Justifier, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité : $(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2 \leq n \sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2$ .

   c) En déduire le minimum de $f$ sous la contrainte $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ .

3. a) Justifier que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et trouver son unique point critique $a$.

   b) Justifier l'égalité :

   $$f(a+h) = f(a) + 2\int_0^1 (1-t)\Big(\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i\, h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {h_i}^2\Big)\, \mathrm{d}t\ .$$

   c) En déduire que $f$ admet un minimum global en $a$.

# Exercice sans préparation

Soit un entier $n \geq 2$, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme de $E$.

Démontrer que, si $f$ n'est pas une homothétie, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ a pour première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

> Donner la définition des dérivées directionnelles, première et seconde, de $f$ au point $x$ dans la direction $h$ pour une fonction $f$ de classe $C^2$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ . Préciser leur valeur en fonction du gradient $\nabla(f)(x)$ et de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x)$ de $f$ au point $x$.

Soit $f$ de classe $C^2$ sur $\Omega$. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$ et $h = (h_1, \cdots, h_n)$.
On considère la fonction $g$ définie pour tout $t$ tel que $x+th$ appartienne à $\Omega$ par $g(t) = f(x+th)$.
Alors $g$ est de classe $C^2$ au voisinage de 0.
Sa dérivée première en 0 est appelée dérivée directionnelle de $f$ au point $x$ dans la direction $h$ :

$$g'(0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(f)(x)h_i = < \nabla(f)(x), h >$$

Sa dérivée seconde en 0 est appelée dérivée seconde directionnelle de $f$ au point $x$ dans la direction $h$ :

$$g''(0) = \sum_{i=1}^{n} h_i \Big( \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{i,j}(f)(x)h_j \Big) = \ {}^tH\, \nabla^2(f)(x)\, H$$

2. Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note : $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E\Big(\big(\mu - \sum_{i=1}^{n} x_i X_i\big)^2\Big)$ .

> a) Justifier l'égalité : $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \mu^2 \big(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\big)^2$ .

Par la formule de Koenig-Huygens, $E((X-a)^2) = V(X) + (E(X)-a)^2$, on obtient :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E\Big(\big(\sum_{i=1}^{n} x_i(X_i - \mu) + \mu(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)\big)^2\Big) = V\big(\sum_{i=1}^{n} x_i X_i\big) + \big(\mu(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)\big)^2$$

puis l'égalité cherchée par indépendance des $X_i$.

> b) Justifier, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité : $\quad \big(\sum_{i=1}^{n} x_i\big)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$ .

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(1, \cdots, 1)$, fournit directement l'inégalité demandée.

> c) En déduire le minimum de $f$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ .

Le minimum de $f$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ est $\dfrac{\sigma^2}{n}$, atteint exclusivement au point $\dfrac{1}{n}(1, 1, \ldots, 1)$.

On peut utiliser la condition du premier ordre pour un extremum local sous contrainte linéaire, qui impose l'égalité des $x_i$, mais cela n'a rien d'indispensable.

3. a) Justifier que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et trouver son unique point critique $a$.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \mu^2 (\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)^2$$

La fonction est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^n$ parce qu'elle est polynomiale, et ses dérivées partielles sont données par :

$$\partial_i(f)(x) = 2\sigma^2 x_i + 2\mu^2 (\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)$$

On en déduit que le seul point critique de $f$ est le point $a$ dont toutes les coordonnées $a_i$ sont égales à

$$\frac{\mu^2}{\sigma^2 + n\mu^2} .$$

b) Justifier l'égalité : $f(a+h) = f(a) + 2 \int_0^1 (1-t)\Big(\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i\, h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {h_i}^2\Big)\, dt$ .

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 à la fonction $g : t \longmapsto f(a+th)$ entre 0 et 1 :

$$f(a+h) = g(1) = g(0)+g'(0)+\int_0^1 (1-t)g''(t)dt = f(a)+ 2 \int_0^1 (1-t)\Big(\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i\, h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {h_i}^2\Big)\, \mathrm{d}t$$

parce que $g'(0) = 0$ et

$$g''(t) = {}^tH\, \nabla^2(f)(a+th)\, H = 2\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j + 2\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2$$

c) En déduire que $f$ admet un minimum global en $a$.

Comme $\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2 = \mu^2 \big(\sum_{i=1}^{n} h_i\big)^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \geq 0$ , on déduit du résultat précédent que :

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n, \ f(a+h) \geq f(a)$$

ce qui prouve que $f$ admet un minimum global en $a$.

# Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit un entier $n \geq 2$, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme de $E$.

Démontrer que, si $f$ n'est pas une homothétie, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice $M$ de $f$ a pour première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cela revient à trouver un vecteur $e_1$ dont l'image $e_2 = f(e_1)$ ne lui est pas colinéaire (on n'aura plus alors qu'à compléter la famille libre pour former la base cherchée).

Il suffit donc de prouver que tout endomorphisme $f$ de $E$ qui vérifie

$$\forall x \in E,\ \exists k_x \in \mathbb{K},\ f(x) = k_x x$$

est une homothétie vectorielle.

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$ et $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$.
Il existe des $k_i$ dans $\mathbb{K}$ tels que $\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ f(e_i) = k_i e_i$.
alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i = k_x x = k_x \sum_{i=1}^{n} e_i$.
On en déduit que tous les $k_i$ sont égaux à $k_x$.
$f$ est une homothétie car, pour tout $y$ dans $E$ tel que $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on a $f(y) = k_x \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = k_x y$.

# EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours
Quand dit-on qu'une fonction $f$ est négligeable par rapport à une fonction au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ ?

b) Soit $f$ une fonction de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.
Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que la différence $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^n$ lorsque $x$ tend vers $a$ si, et seulement si, pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$, la dérivée d'ordre $k$ de $f$ en $a$ est nulle.

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ f^{(k)}(a) = 0\ .$$

On note $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $a$, on note $E_n(a)$ l'ensemble des fonctions de $E$ telles que la différence $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^n$ lorsque $x$ tend vers $a$.

2. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ vérifiant $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = 1$, et tel que la fonction polynomiale $P_n$ appartient à $E_n(0) \cap E_1(1)$.

3. Soit $p$ un nombre entier supérieur ou égal à 2, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des nombres réels deux à deux distincts et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ des nombres entiers strictement positifs.
Soit $m = p - 1 + \sum_{k=1}^{p} n_k$.
Soit $\Phi$ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = \left(P^{(0)}(a_1), P^{(1)}(a_1), \ldots, P^{(n_1)}(a_1), \ldots, P^{(0)}(a_p), P^{(1)}(a_p), \ldots, P^{(n_p)}(a_p)\right)$$

(où la dérivée 0-ième $P^{(0)}$ de $P$ désigne la fonction polynomiale $P$ elle-même).

a) Vérifier que $\Phi$ est linéaire et trouver son noyau.

b) Justifier que le noyau de $\Phi$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

c) En déduire que pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $m$ appartenant à $\bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k)$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ P(a_k) = \alpha_k\ .$$

# EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $p \in \mathbb{R}$.

On considère une variable aléatoire réelle $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant des moments jusqu'à l'ordre 2 et vérifiant :

$$E(X) = E(X^2) = p \cdot$$

1. Montrer que $p$ est compris entre 0 et 1.
2. Montrer que $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours

Quand dit-on qu'une fonction $f$ est négligeable par rapport à une fonction au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ ?

b) Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que la fonction $f$ appartient à $E_n(a)$ si, et seulement si, pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$, la dérivée d'ordre $k$ de $f$ en $a$ est nulle.

Comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de $a$, la formule de Taylor-Young permet d'écrire :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big) \ .$$

• On en déduit immédiatement que, si les dérivées d'ordre 1 à $n$ de $f$ sont nulles en $a$, alors $f$ appartient à $E_n(a)$.

• Réciproquement, si $f$ appartient à $E_n(a)$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

quand $x$ tend vers $a$, ce qui rend impossible que l'une des dérivées $f^{(k)}(a)$ (pour $1 \leq k \leq n$) soit différente de 0.

2. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ vérifiant $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = 1$, et tel que la fonction polynomiale $P_n$ appartient à $E_n(0) \cap E_1(1)$.

En procédant par analyse-synthèse, on suppose d'abord l'existence d'un polynôme $P_n$ vérifiant les conditions exigées.
Comme la fonction polynomiale associée à $P_n$ est plate à l'ordre $n$ et nulle en 0, le polynôme $P_n(X)$ est divisible par $X^{n+1}$ et s'écrit donc sous la forme :

$$P_n(X) = X^{n+1}(aX + b)$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ puisque le degré de $P_n$ est inférieur ou égal à $n+2$.
Le polynôme dérivé de $P_n(X)$ étant $P_n'(X) = X^n\big((n+2)aX + (n+1)b\big)$ les contraintes $P_n(1) = 1$ et $P_n'(1) = 0$ deviennent :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ (n+2)a + (n+1)b = 0 \end{cases}$$

d'où $a = -(n+1)$ et $b = n+2$, c'est-à-dire :

$$P_n(X) = (n+2)X^{n+1} - (n+1)X^{n+2}$$

qui vérifie effectivement les conditions exigées : c'est donc l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ qui vérifie $P(0) = 0$ et $P(1) = 1$, et pour lequel la fonction polynomiale associée appartient à $E_n(0) \cap E_1(1)$.

3. Soit $p$ un nombre entier supérieur ou égal à 2, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des nombres réels deux à deux distincts et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ des nombres entiers strictement positifs.

Soit $m = p - 1 + \sum_{k=1}^{p} n_k$.

Soit $\Phi$ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = \Big(P^{(0)}(a_1), P^{(1)}(a_1), \ldots, P^{(n_1)}(a_1), \ldots, P^{(0)}(a_p), P^{(1)}(a_p), \ldots, P^{(n_p)}(a_p)\Big)$$

(où la dérivée 0-ième $P^{(0)}$ de $P$ désigne la fonction polynomiale $P$ elle-même).

a)b) Vérifier que $\Phi$ est linéaire et que son noyau est un supplémentaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

La linéarité de $\Phi$ résulte immédiatement de la linéarité de l'opérateur de dérivation.

Le noyau de $\Phi$ est constitué des multiples du polynôme $Q(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - a_k)^{n_k+1}$.

Comme $\deg(Q) = \sum_{k=1}^{p} (n_k + 1) = m + 1$, on a bien :

$$\operatorname{Ker}(\Phi) \oplus \mathbb{R}_m[X] = \mathbb{R}[X] \; .$$

c) En déduire que pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $m$ appartenant à $\bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k)$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \; P(a_k) = \alpha_k \; .$$

Comme $\mathbb{R}_m[X]$ est un supplémentaire du noyau de $\Phi$, l'application linéaire réalise, d'après le théorème image-noyau, un isomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$ sur $\operatorname{Im}(\Phi)$, image qui est nécessairement égale à $\mathbb{R}^{m+1}$ puisque sa dimension est $m + 1$.

Par conséquent, $\Phi$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_m[X]$ sur $\mathbb{R}^{m+1}$ et le vecteur

$$(\underbrace{\alpha_1, 0, \ldots, 0}_{n_1+1}, \underbrace{\alpha_2, 0, \ldots, 0}_{n_2+1}, \ldots\ldots, \underbrace{\alpha_p, 0, \ldots, 0}_{n_p+1})$$

de $\mathbb{R}^{m+1}$ admet dans $\mathbb{R}_m[X]$ un unique antécédent $P$ par $\Phi$ , qui est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_m[X]$ appartenant à $\bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k)$ et vérifiant : $\quad \forall k \in [\![1, p]\!], \; P(a_k) = \alpha_k$ .

## Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit $p \in \mathbb{R}$.

On considère une variable aléatoire réelle $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant des moments jusqu'à l'ordre 2 et vérifiant :

$$E(X) = E(X^2) = p \cdot$$

1. $\boxed{\text{Montrer que } p \text{ est compris entre 0 et 1.}}$

   $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p(1-p) \geq 0$, d'où $0 \leq p \leq 1$.

2. $\boxed{\text{Montrer que } X \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } p.}$

   Comme $E(X^2) - E(X) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(n^2 - n)\, P([X = n]) = 0$, les probabilités $P([X = n])$ sont nulles pour tout entier $n \geq 2$.

   Il en résulte que $X$ suit une loi de Bernoulli, dont le paramètre est $p$ puisque $E(X) = p$.

# ORAL HEC Paris 2018

## MATHÉMATIQUES

## EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

### Option économique

# EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, $E$ désigne un $R$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

1. Question de cours.
   Donner la définition d'une famille génératrice de $E$. Que peut-on dire de son cardinal ?

   Pour tout endomorphisme $f$ de $E$, on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ qui commutent avec $f$ :
   $$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\} \ .$$

2. a) Démontrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
   b) Quelle est la plus grande dimension possible pour $C(f)$ ?

3. On suppose dans cette seule question que $E = \mathbb{R}^2$.
   On note $j$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Trouver les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $MJ = JM$.
   b) En déduire la dimension de $C(j)$.

4. On suppose dans cette question que $f$ est un endomorphisme de $E$ pour lequel il existe $a \in E$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que la famille $(a, f(a), ..., f^{n_0}(a))$ est génératrice.

   a) On note $p$ le plus grand entier strictement positif pour lequel la famille $\big(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\big)$ est libre.
   Montrer que $\big(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\big)$ est une base de $E$. Que vaut $p$ ?

   b) Démontrer que, pour tout endomorphisme $g \in C(f)$ , il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ tel que :
   $$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k \ .$$

   c) En déduire la dimension de $C(f)$.

# EXERCICE SANS PRÉPARATION

Une urne contient au départ une boule verte et une boule rouge. On effectue des tirages successifs selon la procédure suivante : on tire une boule, si elle est rouge, on arrête les tirages, si elle est verte on la remet dans l'urne en ajoutant une boule rouge. On note $X$ le nombre de tirages effectués.

1. Montrer que $X$ admet une espérance et la calculer.
2. Montrer que $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance et la calculer.

# Corrigé de l'exercice principal

Dans tout l'exercice, $E$ désigne un $R$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

1. Question de cours.

$\boxed{\text{Donner la définition d'une famille génératrice de } E. \text{ Que peut-on dire de son cardinal ?}}$

On dit qu'une famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de vecteurs de $E$ est génératrice si tout vecteur de $E$ est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille :

$$\forall x \in E, \quad \exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \ .$$

Le cardinal d'une famille génératrice est au moins égal à la dimension de l'espace qu'elle engendre : $\ p \geq n$ .

Pour tout endomorphisme $f$ de $E$, on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ qui commutent avec $f$ :

$$C(f) = \left\{ g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f \right\} \ .$$

2. a) $\boxed{\text{Démontrer que } C(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E).}$

$C(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ parce que :

— $C(f) \subset \mathcal{L}(E)$

— $C(f) \neq \emptyset$ car $Id_E \in C(f)$

— $\forall\, (v, w, \lambda) \in C(f)^2 \times \mathbb{K}, (v + \lambda w) \circ f = v \circ f + \lambda w \circ f = f \circ v + \lambda f \circ w = f \circ (v + \lambda w)$

b) $\boxed{\text{Quelle est la plus grande dimension possible pour } C(f) \text{ ?}}$

La plus grande dimension possible pour $C(f)$ est $n^2$, atteinte par exemple lorsque $f$ est l'endomorphisme nul.

3. On suppose dans cette seule question que $E = \mathbb{R}^2$.

On note $j$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) $\boxed{\text{Trouver les matrices } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ telles que } MJ = JM.}$

$$JM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MJ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute donc avec $J$ si, et seulement si, $c = 0$ et $a = d$.

Les matrices $M$ telles que $MJ = JM$ sont donc les matrices de la forme $aI_2 + bJ$.

b) $\boxed{\text{En déduire la dimension de } C(j).}$

Isomorphe à $\text{Vect}\{I_2, J\}$, l'espace vectoriel $C(j)$ est de dimension 2.

4. On suppose dans cette question que $f$ est un endomorphisme de $E$ pour lequel il existe $a \in E$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que la famille $(a, f(a), ..., f^{n_0}(a))$ est génératrice.

a) On note $p$ le plus grand entier strictement positif pour lequel la famille $\left(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\right)$ est libre.
Montrer que $\left(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\right)$ est une base de $E$. Que vaut $p$?

Par une récurrence facile, on prouve que, pour tout $k \geq p$, $f^k(a) \in \text{Vect}\left(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\right)$.

En distinguant les cas $n_0 < p$ et $n_0 \geq p$, on en déduit l'inclusion :

$$\text{Vect}\left(f^k(a), k \in [\![0, n_0]\!]\right) \subset \text{Vect}\left(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\right)$$

Il en résulte que la famille $(a, f(a), ..., f^{p-1}(a))$ est génératrice. Comme elle est libre, c'est une base de $E$.
Par conséquent : $\boxed{p = \dim E = n}$ .

b) Démontrer que, pour tout endomorphisme $g \in C(f)$ , il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ tel que :

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k \ .$$

Soit $g \in C(f)$.
$g(a)$ se décompose dans la base $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ :

$$g(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(a) \ .$$

Deux endomorphismes de $E$ sont égaux si, et seulement si, ils coïncident sur une base. Il suffit donc de montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \ \ h(f^k(a)) = g(f^k(a))$
Soit donc $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Comme $f$ et $g$ commutent, $f^k$ et $g$ commutent aussi, et en utilisant la linearité de $f^k$, on obtient

$$g\left(f^k(a)\right) = f^k\left(g(a)\right) = f^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(a)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{k+i}(a) = h\left(f^k(a)\right).$$

$$\boxed{f = g}$$

c) $\boxed{\text{En déduire la dimension de } C(f).}$

La dimension de $C(f)$ est égale à $n$ puisque $\left(Id_E, f, ..., f^{n-1}\right)$ en est une famille libre et génératrice.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   En notant $V_i$ l'événement « tirer une boule verte au $i$-ème tirage », on a :

$$P(X > k) = P(V_1 \cap \ldots \cap V_k) = \frac{1}{(k+1)!}\ .$$

   On en déduit (ou on démontre directement) que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$$

   d'où

$$kP(X = k) = \frac{k^2}{(k+1)!} = \frac{(k+1)k - (k+1) + 1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}\ .$$

   En utilisant la série exponentielle convergente $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$, dont la somme est égale à e, on en déduit que $X$ admet une espérance, égale à :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,P(X = k) = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) + (\mathrm{e} - 2) = \boxed{\mathrm{e} - 1}\ .$$

2. La variable $\frac{1}{X}$ est bornée et admet donc une espérance, calculable par la formule de transfert

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \boxed{\mathrm{e} - 2}\ .$$

# EXERCICE PRINCIPAL

Soit $a$ un nombre réel strictement positif.
On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont *tous* les termes sont strictement positifs, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{cases} w_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{a}{n} \\ \\ \ell_n = \ln(n^a\, u_n) \end{cases}$$

On suppose que la *série* de terme général $w_n$ est absolument convergente.

1. Question de cours : formule de Taylor-Young.

2. Soit $f$ la fonction $t \longmapsto \ln(1+t) - t$.

   a) Préciser le domaine de définition de $f$ et donner un équivalent simple de cette fonction au voisinage de 0.

   b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

3. Démontrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{w_n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(w_n)^2$ sont convergentes.

4. a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\ell_{n+1} - \ell_n = f\left(w_n - \dfrac{a}{n}\right) + w_n + a\, f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   b) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\ell_{n+1} - \ell_n\right)$.

5. a) Justifier la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^a}$.

6. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$.

# Exercice sans préparation

1. Indiquer l'allure du graphe de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2. La fonction *Scilab* « cdfnor » permet de déterminer les valeurs de la fonction de répartition d'une loi normale et de sa bijection réciproque.
En voici deux exemples d'utilisation :

```
--> cdfnor("PQ",1.96,0,1)
 ans  =   0.9750021
--> cdfnor("X",0,1,0.975,0.025)
 ans  =   1.959964
```

a) Indiquer les sorties *Scilab* consécutives aux trois entrées suivantes :

```
--> cdfnor("PQ",0,0,1)
--> cdfnor("X",0,1,0.5,0.5)
--> cdfnor("X",0,1,0.025,0.975)
```

b) Expliquer le script suivant et fournir une estimation de la valeur affectée à p à l'issue de l'exécution du script.

```
--> n=1000;
--> X=zeros(n,1);
--> for i=1:n X(i,1)=grand(1,1,'nor',0,1)*grand(1,1,'bin',1,.5); end;
--> p=length(find(X<1.96))/n
```

Voie E
référence : E 121

# Corrigé de l'exercice principal

Soit $a$ un nombre réel strictement positif.
On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont *tous* les termes sont strictement positifs, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{cases} w_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{a}{n} \\ \\ \ell_n = \ln(n^a\, u_n) \end{cases}$$

On suppose que la *série* de terme général $w_n$ est absolument convergente.

1. $\boxed{\text{Question de cours : formule de Taylor-Young.}}$

La formule de Taylor-Young, applicable à toute fonction $f$ de classe $C^2$ au voisinage d'un point $x_0$, peut donc s'énoncer comme suit :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x)}$$

où $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ .

2. Soit $f$ la fonction $t \longmapsto \ln(1 + t) - t$ .

a) Préciser le domaine de définition de $f$ et donner un équivalent simple de cette fonction au voisinage de 0.

La fonction est définie sur l'intervalle ouvert $]-1, +\infty[$ .
Par la formule de Taylor-Young appliquée au point $x_0 = 0$, on obtient l'équivalent simple demandé :

$$\boxed{f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{2}} \,.$$

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

Comme $f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ qui est le terme général, de signe constant, d'une série convergente, la série $\sum\limits_{n\geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente, elle aussi.

3. Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{w_n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} (w_n)^2$ sont convergentes.

La majoration $\frac{|w_n|}{n} \leq |w_n|$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et la majoration $(w_n)^2 \leq |w_n|$, valable pour $n$ assez grand puisque $w_n$ (en tant que terme général d'une série convergente) tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, permettent d'assurer par comparaison de séries à termes positifs que les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{w_n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1}(w_n)^2$ sont (absolument) convergentes.

4. a) $\boxed{\text{Vérifier, pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{, l'égalité : } \quad \ell_{n+1} - \ell_n = f\Big(w_n - \frac{a}{n}\Big) + w_n + a\, f\Big(\frac{1}{n}\Big)\ .}$

$$
\begin{aligned}
f\Big(w_n - \frac{a}{n}\Big) + w_n + a\, f\Big(\frac{1}{n}\Big) &= f\Big(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\Big) + \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{a}{n} + a\, f\Big(\frac{1}{n}\Big) \\
&= \ln\Big(\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big) + \frac{a}{n} + a\Big(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\Big) = \ln\Big(\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big) + a\ \ln(\frac{n+1}{n}) \\
&= \ln\big((n+1)^a u_{n+1}\big) - \ln\big(n^a u_n\big) = \ell_{n+1} - \ell_n\ .
\end{aligned}
$$

b) $\boxed{\text{En déduire la convergence de la série } \sum_{n\geq 1}\big(\ell_{n+1} - \ell_n\big)\ .}$

$$
f\Big(w_n - \frac{a}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{(w_n - \frac{a}{n})^2}{2} = -\frac{w_n^2}{2} + a\frac{w_n}{n} - \frac{a^2}{2n^2}
$$

et $\ell_{n+1} - \ell_n$ est donc la somme des termes généraux de cinq séries convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 1}\big(\ell_{n+1} - \ell_n\big)$ est convergente.

5. a) $\boxed{\text{Justifier la convergence de la suite } (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ .}$

La convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ résulte de la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\big(\ell_{n+1} - \ell_n\big)$ et des égalités :

$$
\ell_n = \ell_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\big(\ell_{k+1} - \ell_k\big)\ .
$$

b) $\boxed{\text{En déduire l'existence d'un réel } A > 0 \text{ tel que : } \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}\ .}$

On vient de constater qu'il existe un réel $\ell$ tel que

$$
\lim_{n\to+\infty} \ln(n^a u_n) = \ell\ .
$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = \mathrm{e}^\ell$ et par conséquent

$$
u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}
$$

pour $A = \mathrm{e}^\ell > 0$ .

6. $\boxed{\text{Déterminer la nature de la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\,.}$

Soit $u_n = \dfrac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$ .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3}\,.$$

Comme la série de terme général $w_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n+3} = \dfrac{3}{2n(2n+3)}$ est absolument convergente, il existe d'après ce qui précède un réel $A > 0$ que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^{1/2}}\,.$$

La série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$ est donc divergente.

# Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Indiquer l'allure du graphe de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On n'attend pas une œuvre d'art !

On exigera une expression intégrale de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$\Phi : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t \ .$$

On pourra demander de situer le point d'inflexion de la courbe (et d'en justifier la présence). Exiger la preuve qu'il s'agisse aussi d'un centre de symétrie constitue une question indiscrète.

2. La fonction *Scilab* « cdfnor » permet de déterminer les valeurs de la fonction de répartition d'une loi normale et de sa bijection réciproque.

En voici deux exemples d'utilisation :

```
--> cdfnor("PQ",1.96,0,1)
 ans  =  0.9750021
--> cdfnor("X",0,1,0.975,0.025)
 ans  =  1.959964
```

a) Indiquer les sorties *Scilab* consécutives aux trois entrées suivantes :

```
--> cdfnor("PQ",0,0,1)
--> cdfnor("X",0,1,0.5,0.5)
--> cdfnor("X",0,1,0.025,0.975)
```

Soit $Z$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Comme $P([Z \leq 0]) = \frac{1}{2}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P([X \leq -x]) = 1 - P([X \leq x]]$, on obtient :

```
--> cdfnor("PQ",0,0,1)
 ans  = 0.5
--> cdfnor("X",0,1,0.5,0.5)
 ans  = 0.
--> cdfnor("X",0,1,0.025,0.975)
 ans  = - 1.959964
```

b) Expliquer le script suivant et indiquer une estimation de la valeur affectée à p à l'issue de l'exécution du script.

```
--> n=1000;
--> X=zeros(n,1);
--> for i=1:n X(i,1)=grand(1,1,'nor',0,1)*grand(1,1,'bin',1,.5); end;
--> p=length(find(X<1.96))/n
```

Remarque
Les fonctions « find » et « size » figurent dans le programme de la section E, sans que leur connaissance soit requise. On a donc rappelé la signification de « find » aux candidat(e)s qui en avaient besoin. La signification de « length » n'a pas eu besoin d'être indiquée, car elle est facile à deviner.

Soit $Z_1, Z_2 \ldots, Z_n, B_1, B_2 \ldots, B_n$ des variables aléatoires indépendantes, telles que les $Z_i$ suivent la loi normale centrée réduite et les $B_i$ la loi de Bernoulli de paramètre 1/2.
Par la formule des probabilités totales, les variables $X_i = Z_i B_i$ admettent pour fonction de répartition :

$$F_X : x \longmapsto F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\left(1 + \Phi(x)\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

```
--> n=1000;
--> X=zeros(n,1);
                                         //matrice-colonne nulle
--> for i=1:n X(i,1)=grand(1,1,'nor',0,1)*grand(1,1,'bin',1,.5); end;
                                         // n simulations indépendantes de X=ZB
--> p=length(find(X<1.96))/n
                                         // fréquence relative des simulations inférieures à 1.96
```

Par la loi faible des grands nombres, la fréquence $P_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_i \leq X]}$ converge en probabilité vers $F_X(x)$.

On s'attend donc à une valeur proche de $\frac{1}{2}\left(1 + \Phi(1,96)\right) \simeq 0,9875$ .

# EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours

Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?

b) Justifier que la fonction $x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{2x}\right)$ définit une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$, et trouver sa bijection réciproque.

2. Soit $U$ une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.

On pose : $X = \ln\left(\dfrac{1+U}{2U}\right)$ .

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$.

b) En déduire que $X$ est une variable aléatoire à densité.

c) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ et la calculer.

d) Justifier que $X$ admet une espérance et la calculer.

e) Compléter le code de la fonction *Scilab* suivante pour qu'elle permette de créer des simulations, indépendantes, de la loi de $X$ :

```
function x=simulX(n)
    x=zeros(n,1);
    for i=1:n
        x(i,1)=???;
    end;
endfunction
```

3. Soit $B_1, B_2, X_1, X_2$ quatre variables aléatoires indépendantes telles que $B_1$ et $B_2$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et que $X_1$ et $X_2$ suivent la même loi que la variable $X$ de la question précédente.

On pose :

$$\begin{cases} Y_1 = B_1X_1 + (1-B_1)X_2 \\ Y_2 = B_1X_1 + B_2X_2 \end{cases}$$

a) Parmi les deux variables aléatoires $Y_1$ et $Y_2$, une seule est une variable à densité. Laquelle et pourquoi ?

b) Les deux variables aléatoires $Y_1$ et $Y_2$ ont-elles la même espérance ?

c) Proposer, pour chacune de ces deux variables, un script *Scilab* permettant d'en simuler une réalisation.

# Exercice sans préparation

Pour tout nombre réel $a$, on note : $M(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Pour quelles valeurs de $a$ la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

2. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice $M(a)$ est semblable à la matrice

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} .$$

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours

Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?

On dit qu'une application $f$ d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ est bijective (ou que c'est une bijection) si elle vérifie :

$$\forall y \in F,\ \exists !\, x \in E,\ f(x) = y\ .$$

La composée $g \circ f$ d'une application bijective $f$ de $E$ dans $F$ et d'une application bijective $g$ de $F$ dans un ensemble $G$ est une application bijective de $E$ dans $G$.

b) Justifier que la fonction $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)$ définit une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$, et trouver sa bijection réciproque.

Bien que le théorème de la bijection [1] (ou une preuve directe par résolution de l'équation $y = f(x)$) soit directement utilisable, la question de cours suggère d'écrire l'application

$$f := \begin{cases} ]0,1] \longrightarrow [0,+\infty[ \\ x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right) \end{cases}$$

comme la composée des applications $x \longmapsto \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2}$ et $x \longmapsto \ln(x)$, dont le sens de variation et les limites sont « évidentes ».
La première réalise une bijection (strictement décroissante) de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$, et la seconde une bijection (strictement croissante) de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

La bijection réciproque de $f$ est l'application de $[0,+\infty[$ sur $]0,1]$ définie par :

$$\forall x \geq 0,\ \boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2e^x - 1}}\ .$$

2. Soit $U$ une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.
On pose : $X = \ln\left(\dfrac{1+U}{2U}\right)$ .

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$.

Comme $U(\Omega) = ]0,1]$, $X(\Omega) = f\big(U(\Omega)\big) = [0,+\infty[$.

1. Le signe de la dérivée $x \longmapsto \dfrac{-1}{x(1+x)}$ de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)$ assure son injectivité et ses limites aux bornes sa surjectivité.

Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$P([X \leq x]) = P([U \geq f^{-1}(x)]) = 1 - f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{2e^x - 1}.$$

La fonction de répartition de $X$ est donc donnée par :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2(e^x - 1)}{2e^x - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}.$$

b) En déduire que $X$ est une variable aléatoire à densité.

La fonction $F_X$ étant continue sur $\mathbb{R}$,[2] et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$[3], la variable $X$ admet une densité, que l'on ne demande pas de calculer[4].

c) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ et la calculer.

L'intégrale ordinaire (sur un segment) $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(x)\,dx = \big[x\ln(x) - x\big]_\varepsilon^1 = -1 + \varepsilon - \varepsilon\ln(\varepsilon)$ tend vers $-1$ quand $\varepsilon$ tend vers $0_+$.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ est convergente et : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1}$.

d) Justifier que $X$ admet une espérance et la calculer.

La convergence (absolue) de l'intégrale obtenue par <u>transfert</u> assure l'existence de l'espérance de $X$ et en fournit la valeur :

$$E(X) = E\left(\ln\left(\frac{1+U}{2U}\right)\right) = \int_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{2x}\right)dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx - \int_0^1 \ln(x)\,dx - \ln(2) = \boxed{\ln(2)}.$$

e) Compléter le code de la fonction *Scilab* fournie pour qu'elle permette de créer des simulations indépendantes de la loi de $X$ :

```
function x=simulX(n)
    x=zeros(n,1);
    for i=1:n
        x(i,1)=log(1/2+1/2/rand());
    end;
endfunction
```

2. parce que $F_X(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0_-} F_X(x)$.
3. Elle n'est en fait pas dérivable en 1.
4. $f_X : \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2e^x}{(2e^x - 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en est une.

3. Soit $B_1, B_2, X_1, X_2$ quatre variables aléatoires indépendantes telles que $B_1$ et $B_2$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et que $X_1$ et $X_2$ suivent la même loi que la variable $X$ de la question précédente.

On pose :

$$\begin{cases} Y_1 = B_1X_1 + (1 - B_1)X_2 \\ Y_2 = B_1X_1 + B_2X_2 \end{cases}$$

a) Parmi les deux variables aléatoires $Y_1$ et $Y_2$, une seule est une variable à densité. Laquelle et pourquoi ?

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Comme $P([B_1 = 1] \cap [Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 1] \cap [X_1 \leq x]) = P([B_1 = 1])P([X_1 \leq x]$ et $P([B_1 = 0] \cap [Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 0] \cap [X_2 \leq x]) = P([B_1 = 0])P([X_2 \leq x]$, on obtient par la formule des probabilités totales :

$$F_{Y_1}(x) = P([Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 1])P([X_1 \leq x] + P([B_1 = 0])P([X_1 \leq x] = F_X(x) \; .$$

Par conséquent, $Y_1$ suit la même loi que $X$ et elle admet une densité.

Quant à $Y_2$, elle n'admet pas de densité, parce que :

$$P([Y_2 = 0]) \geq P([B_1 = 0] \cap [B_2 = 0]) = \frac{1}{4} \; .$$

Remarque : en fait, $P([Y_2 = 0]) = \frac{1}{4}$, mais c'est anecdotique.

b) Les deux variables aléatoires $Y_1$ et $Y_2$ ont-elles la même espérance ?

Oui, parce que $E(Y_1) = E(X) = \ln(2)$ et, par indépendance de $B_1$ et $X_1$ d'une part, de $B_2$ et $X_2$ d'autre part :

$$E(Y_2) = E(B_1)E(X_1) + E(B_2)E(X_2) = \frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{2}E(X) = \ln(2) \; .$$

c) Proposer, pour chacune de ces deux variables, un script *Scilab* permettant d'en simuler une réalisation.

```
b1=grand(1,1,'bin',1,0.5); //simulation de B1
x1=simulX(1); //simulation de X1
x2=simulX(1); //simulation de X2
y1=b1*x1+(1-b1)*x2; simulation de Y1
y2=b1*x1+grand(1,1,'bin',1,0.5)*x2; simulation de Y2
```

## Corrigé de l'exercice sans préparation

Pour tout nombre réel $a$, on note : $M(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Pour quelles valeurs de $a$ la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

La matrice $M(a) - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a-\lambda & a \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $\lambda(\lambda - a - 1)$ est différent de 0, puisqu'elle a le même rang que la matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & a-(a-\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

obtenue par les deux opérations élémentaires $L_1 \leftrightarrow L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - (a-\lambda)L_1$.
Par conséquent : $\operatorname{Sp}(M(a)) = \{0, a+1\}$ .

• Si $a \neq -1$, $M(a)$ est diagonalisable, puisque c'est une matrice carrée d'ordre 2 possédant deux valeurs propres distinctes.

• Si $a = -1$, la seule valeur propre de $M(a)$ est 0 et le sous-espace propre associé est de dimension 1. La matrice $M(-1)$ n'est donc pas diagonalisable, puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres n'est pas égale à 2.

Finalement, $M(a)$ est diagonalisable si, et seulement si, $a$ est différent de $-1$.

2. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice $M(a)$ est semblable à la matrice :

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} .$$

La matrice $N(a)$ possède le même spectre que $M(a)$ (par un calcul similaire, ou toute autre méthode légale).

• Si $a \neq -1$, $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables, parce qu'elles sont semblables à la même matrice diagonale :

$$D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} .$$

• Si $a = -1$, on note $f$ l'endomorphisme dont $M(-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} f(e_1) = -e_1 + e_2 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 \end{cases} .$$

Dès lors :

$$\begin{cases} f(e_1 - 2e_2) = e_1 - e_2 = (e_1 - 2e_2) + e_2 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 = -(e_1 - 2e_2) - e_2 \end{cases} .$$

La matrice de $f$ dans la base $(e_1 - 2e_2, e_2)$ est donc $N(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent $M(-1)$ et $N(-1)$ sont semblables.

# EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours

Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?

b) Justifier que la fonction $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)$ définit une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$, et trouver sa bijection réciproque.

2. Soit $U$ une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.

On pose : $X = \ln\left(\dfrac{1+U}{2U}\right)$ .

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$.

b) En déduire que $X$ est une variable aléatoire à densité.

c) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ et la calculer.

d) Justifier que $X$ admet une espérance et la calculer.

e) Compléter le code de la fonction *Scilab* suivante pour qu'elle permette de créer des simulations, indépendantes, de la loi de $X$ :

```
function x=simulX(n)
    x=zeros(n,1);
    for i=1:n
        x(i,1)=???;
    end;
endfunction
```

3. Soit $B_1, B_2, X_1, X_2$ quatre variables aléatoires indépendantes telles que $B_1$ et $B_2$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et que $X_1$ et $X_2$ suivent la même loi que la variable $X$ de la question précédente.

On pose :

$$\begin{cases} Y_1 = B_1X_1 + (1-B_1)X_2 \\ Y_2 = B_1X_1 + B_2X_2 \end{cases}$$

a) Parmi les deux variables aléatoires $Y_1$ et $Y_2$, une seule est une variable à densité. Laquelle et pourquoi ?

b) Les deux variables aléatoires $Y_1$ et $Y_2$ ont-elles la même espérance ?

c) Proposer, pour chacune de ces deux variables, un script *Scilab* permettant d'en simuler une réalisation.

# Exercice sans préparation

Pour tout nombre réel $a$, on note : $M(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Pour quelles valeurs de $a$ la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

2. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice $M(a)$ est semblable à la matrice

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} .$$

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours

$\boxed{\text{Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?}}$

On dit qu'une application $f$ d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ est bijective (ou que c'est une bijection) si elle vérifie :

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y\ .$$

La composée $g \circ f$ d'une application bijective $f$ de $E$ dans $F$ et d'une application bijective $g$ de $F$ dans un ensemble $G$ est une application bijective de $E$ dans $G$.

b) Justifier que la fonction $x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{2x}\right)$ définit une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$, et trouver sa bijection réciproque.

Bien que le théorème de la bijection[1] (ou une preuve directe par résolution de l'équation $y = f(x)$) soit directement utilisable, la question de cours suggère d'écrire l'application

$$f := \begin{cases} ]0,1] \longrightarrow [0,+\infty[ \\ x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{2x}\right) \end{cases}$$

comme la composée des applications $x \longmapsto \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$ et $x \longmapsto \ln(x)$, dont le sens de variation et les limites sont « évidentes ».
La première réalise une bijection (strictement décroissante) de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$, et la seconde une bijection (strictement croissante) de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

La bijection réciproque de $f$ est l'application de $[0,+\infty[$ sur $]0,1]$ définie par :

$$\forall x \geq 0,\ \boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2e^x - 1}}\ .$$

2. Soit $U$ une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.
On pose : $X = \ln\left(\dfrac{1+U}{2U}\right)$ .

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$.

Comme $U(\Omega) = ]0,1]$, $X(\Omega) = f\big(U(\Omega)\big) = [0,+\infty[$.

1. Le signe de la dérivée $x \longmapsto \dfrac{-1}{x(1+x)}$ de $x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{2x}\right)$ assure son injectivité et ses limites aux bornes sa surjectivité.

Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$P([X \leq x]) = P([U \geq f^{-1}(x)]) = 1 - f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{2e^x - 1}\,.$$

La fonction de répartition de $X$ est donc donnée par :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2(e^x - 1)}{2e^x - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}\,.$$

b) En déduire que $X$ est une variable aléatoire à densité.

La fonction $F_X$ étant continue sur $\mathbb{R}$,[2] et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$[3], la variable $X$ admet une densité, que l'on ne demande pas de calculer[4].

c) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ et la calculer.

L'intégrale ordinaire (sur un segment) $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(x)\,dx = \big[x\ln(x) - x\big]_\varepsilon^1 = -1 + \varepsilon - \varepsilon\ln(\varepsilon)$ tend vers $-1$ quand $\varepsilon$ tend vers $0_+$.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ est convergente et : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1}$.

d) Justifier que $X$ admet une espérance et la calculer.

La convergence (absolue) de l'intégrale obtenue par transfert assure l'existence de l'espérance de $X$ et en fournit la valeur :

$$E(X) = E\Big(\ln\Big(\frac{1+U}{2U}\Big)\Big) = \int_0^1 \ln\Big(\frac{1+x}{2x}\Big)\,dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx - \int_0^1 \ln(x)\,dx - \ln(2) = \boxed{\ln(2)}\,.$$

e) Compléter le code de la fonction *Scilab* fournie pour qu'elle permette de créer des simulations indépendantes de la loi de $X$ :

```
function x=simulX(n)
    x=zeros(n,1);
    for i=1:n
        x(i,1)=log(1/2+1/2/rand());
    end;
endfunction
```

2. parce que $F_X(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0_-} F_X(x)$.
3. Elle n'est en fait pas dérivable en 1.
4. $f_X : \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2e^x}{(2e^x - 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en est une.

3. Soit $B_1, B_2, X_1, X_2$ quatre variables aléatoires indépendantes telles que $B_1$ et $B_2$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et que $X_1$ et $X_2$ suivent la même loi que la variable $X$ de la question précédente.

On pose :

$$\begin{cases} Y_1 = B_1X_1 + (1 - B_1)X_2 \\ Y_2 = B_1X_1 + B_2X_2 \end{cases}$$

a) Parmi les deux variables aléatoires $Y_1$ et $Y_2$, une seule est une variable à densité. Laquelle et pourquoi ?

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Comme $P([B_1 = 1] \cap [Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 1] \cap [X_1 \leq x]) = P([B_1 = 1])P([X_1 \leq x]$ et $P([B_1 = 0] \cap [Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 0] \cap [X_2 \leq x]) = P([B_1 = 0])P([X_2 \leq x]$, on obtient par la formule des probabilités totales :

$$F_{Y_1}(x) = P([Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 1])P([X_1 \leq x] + P([B_1 = 0])P([X_1 \leq x] = F_X(x) \ .$$

Par conséquent, $Y_1$ suit la même loi que $X$ et elle admet une densité.

Quant à $Y_2$, elle n'admet pas de densité, parce que :

$$P([Y_2 = 0]) \geq P([B_1 = 0] \cap [B_2 = 0]) = \frac{1}{4} \cdot$$

Remarque : en fait, $P([Y_2 = 0]) = \frac{1}{4}$, mais c'est anecdotique.

b) Les deux variables aléatoires $Y_1$ et $Y_2$ ont-elles la même espérance ?

Oui, parce que $E(Y_1) = E(X) = \ln(2)$ et, par indépendance de $B_1$ et $X_1$ d'une part, de $B_2$ et $X_2$ d'autre part :

$$E(Y_2) = E(B_1)E(X_1) + E(B_2)E(X_2) = \frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{2}E(X) = \ln(2) \ .$$

c) Proposer, pour chacune de ces deux variables, un script *Scilab* permettant d'en simuler une réalisation.

```
b1=grand(1,1,'bin',1,0.5); //simulation de B1
x1=simulX(1); //simulation de X1
x2=simulX(1); //simulation de X2
y1=b1*x1+(1-b1)*x2; simulation de Y1
y2=b1*x1+grand(1,1,'bin',1,0.5)*x2; simulation de Y2
```

# Corrigé de l'exercice sans préparation

Pour tout nombre réel $a$, on note : $M(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Pour quelles valeurs de $a$ la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

La matrice $M(a) - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a-\lambda & a \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $\lambda(\lambda - a - 1)$ est différent de 0, puisqu'elle a le même rang que la matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & a-(a-\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

obtenue par les deux opérations élémentaires $L_1 \leftrightarrow L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - (a-\lambda)L_1$.
Par conséquent : $\operatorname{Sp}(M(a)) = \{0, a+1\}$ .

• Si $a \neq -1$, $M(a)$ est diagonalisable, puisque c'est une matrice carrée d'ordre 2 possédant deux valeurs propres distinctes.

• Si $a = -1$, la seule valeur propre de $M(a)$ est 0 et le sous-espace propre associé est de dimension 1. La matrice $M(-1)$ n'est donc pas diagonalisable, puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres n'est pas égale à 2.

Finalement, $M(a)$ est diagonalisable si, et seulement si, $a$ est différent de $-1$.

2. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice $M(a)$ est semblable à la matrice :

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} .$$

La matrice $N(a)$ possède le même spectre que $M(a)$ (par un calcul similaire, ou toute autre méthode légale).

• Si $a \neq -1$, $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables, parce qu'elles sont semblables à la même matrice diagonale :

$$D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} .$$

• Si $a = -1$, on note $f$ l'endomorphisme dont $M(-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} f(e_1) = -e_1 + e_2 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 \end{cases} .$$

Dès lors :

$$\begin{cases} f(e_1 - 2e_2) = e_1 - e_2 = (e_1 - 2e_2) + e_2 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 = -(e_1 - 2e_2) - e_2 \end{cases} .$$

La matrice de $f$ dans la base $(e_1 - 2e_2, e_2)$ est donc $N(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Par conséquent $M(-1)$ et $N(-1)$ sont semblables.

# EXERCICE PRINCIPAL

On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Question de cours.
   Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

2. On note $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $N = M + 2I$.
   a) Quel est le rang de $N$ ?
   b) En déduire une valeur propre de $M$ et la dimension du sous-espace propre associé.
   c) Calculer $N^2$.
   d) Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de $N$ et de $M$ ?

3. a) À l'aide d'une propriété de $M$, justifier que $f$ est diagonalisable.
   b) Quelles sont les valeurs propres de $f$ ?
   c) Combien existe-t-il de matrices diagonales semblables à $M$ ?
   d) Déterminer l'image de $f$.

4. Soit $r$ un nombre réel strictement positif.
   On considère quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & r\,(-u_n - v_n - w_n + t_n) \\ v_{n+1} & = & r\,(-u_n - v_n + w_n - t_n) \\ w_{n+1} & = & r\,(-u_n + v_n - w_n - t_n) \\ t_{n+1} & = & r\,(u_n - v_n - w_n - t_n) \end{array} \right.$$

   a) Vérifier que, pour tout entier $p \geq 0$, on a : $\left\{ \begin{array}{l} M^{2p} = 4^p\, I \\ M^{2p+1} = 4^p\, M \end{array} \right.$ .

   b) En déduire que si $r$ est strictement inférieur à $1/2$, alors les quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de limite nulle.

   c) Dans quels autres cas, hormis celui où $u_0 = v_0 = w_0 = t_0 = 0$, les quatre suites sont-elles toutes les quatre convergentes ?

## Exercice sans préparation

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
Pour tout $x > 0$, on pose :

$$f(x) = P([x < X < 2x]) \ .$$

1. a) Justifier la continuité de la fonction $f$ sur $]0, +\infty[$.
   b) Trouver les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
2. a) Justifier l'existence d'une valeur maximale $p$ pour la probabilité $P([x < X < 2x])$.
   b) Trouver $a$ tel que $f(a) = p$.

# Corrigé de l'exercice principal

On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Question de Cours

   $\boxed{\text{Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme de } \mathbb{R}^4 \text{ soit diagonalisable.}}$

   Un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à 4.

2. On note $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $N = M + 2I$.

   a) $\boxed{\text{Quel est le rang de } N \text{ ?}}$

   Le rang de la matrice $N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ est égale à 1 puisque toutes ses colonnes sont colinéaires (et $N \neq 0$).

   b) $\boxed{\text{En déduire une valeur propre de } M \text{ et la dimension du sous-espace propre associé.}}$

   Comme le rang de $M + 2I$ est égal à 1, $-2$ est une valeur propre de $M$ et la dimension du sous-espace propre associé est égale à 3, par le théorème du rang.

   c) $\boxed{\text{Calculer } N^2.}$

   $$N^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \end{bmatrix} = 4\,N\ .$$

   Remarque

   $$M^2 = (N - 2I)^2 = N^2 - 4\,N + 4\,I = 4\,I\ .$$

   d) $\boxed{\text{Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de } N \text{ et de } M \text{ ?}}$

   Comme $N^2 = 4N$, $X(X - 4)$ est un polynôme annulateur de $N$. Les seules valeurs propres possibles de $N$ sont 0 et 4. Outre $-2$, la seule valeur propre possible de $M$ est 2.

3. a) À l'aide d'une propriété de $M$, justifier que $f$ est diagonalisable.

Comme $M$ est symétrique, elle est diagonalisable. Par conséquent, l'endomorphisme $f$ est diagonalisable.

b) Quelles sont les valeurs propres de $f$ ?

Les valeurs propres de $f$ sont $-2$ et $+2$, puisque $-2$ ne peut pas être la seule valeur propre de $f$, sans quoi $f$ ne serait pas diagonalisable.

c) Combien existe-t-il de matrices diagonales semblables à $M$ ?

Exactement quatre :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

d) Déterminer l'image de $f$.

Comme 0 n'est pas valeur propre de $f$, $f$ est bijectif. Son image est donc $\mathbb{R}^4$.

4. Soit $r$ un nombre réel strictement positif.
On considère quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= r(-u_n - v_n - w_n + t_n) \\ v_{n+1} &= r(-u_n - v_n + w_n - t_n) \\ w_{n+1} &= r(-u_n + v_n - w_n - t_n) \\ t_{n+1} &= r(u_n - v_n - w_n - t_n) \end{cases}$$

a) Vérifier que, pour tout entier $p \geq 0$, on a : $\begin{cases} M^{2p} = 4^p I \\ M^{2p+1} = 4^p M \end{cases}$.

On peut procéder par récurrence, grâce à l'égalité $M^2 = 4I$, qui provient par exemple de $N^2 = 4N$ (et qui a probablement été découverte à l'occasion de la question 2).

b) En déduire que si $r$ est strictement inférieur à $1/2$, alors les quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de limite nulle.

5. On pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix}.$$

L'énoncé donne $X_{n+1} = rMX_n$, d'où on déduit : $X_n = r^n M^n X_0$.

Si $n = 2p$, on trouve $X_{2p} = r^{2p}\,4^p\ X_0$.

Si $n = 2p+1$, $X_{2p+1} = r^{2p+1}\,4^p\ M\,X_0$.

Si $r < 1/2$, $r^{2p}\,4^p$ et $r^{2p+1}\,4^p$ tendent vers 0 quand $p$ tend vers l'infini, et par conséquent les quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de limite nulle.

c) Dans quels autres cas, hormis celui où $u_0 = v_0 = w_0 = t_0 = 0$, les quatre suites sont-elles toutes les quatre convergentes ?

On suppose $X_0 \neq 0$.

• Si $r > 1/2$, $r^{2p}\,4^p$ tend vers $+\infty$ quand $p$ tend vers l'infini, et il est impossible que les quatre suites convergent.

• Si $r = 1/2$, les quatre suites sont toutes les quatre convergentes si, et seulement si $X_0 = rMX_0$, autrement dit si $(u_0, v_0, w_0, t_0)$ est un vecteur propre de $f$ associée à la valeur propre 2. Les quatre suites sont alors constantes.

# Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. On notera $\Phi$ la fonction de répartition de $X$ et $\varphi$ sa dérivée.
Pour tout $x > 0$, on pose :

$$f(x) = P([x < X < 2x]) \ .$$

1. a) Justifier la continuité de la fonction $f$ sur $]0, +\infty[$.

Comme $\Phi$ est continue, en tant que fonction de répartition d'une variable à densité, la fonction $x \longmapsto \Phi(2x) - \Phi(x)$ est continue.

b) Trouver les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = 0$ .
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ .

2. a) Justifier l'existence d'une valeur maximale $p$ pour la probabilité $P([x < X < 2x])$.

$$f(1) = P([1 < X < 2]) > 0$$

Soit $\varepsilon \in ]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in ]0, \varepsilon[, \quad f(x) < f(1) \ .$$

Soit $A > 1$ tel que :

$$\forall x > A, \quad f(x) < f(1) \ .$$

L'image du segment $[\varepsilon, A]$ par la fonction continue $f$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ et contenant le nombre $f(1)$. Son extrémité $p$ est la valeur maximale de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Trouver $a$ tel que $f(a) = p$.

La dérivée de $f$ est donnée par :

$$f'(x) = 2\,\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(2\mathrm{e}^{-2x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}\right) .$$

$$f'(a) = 0 \Longleftrightarrow 2\mathrm{e}^{-2a^2} = \mathrm{e}^{-a^2/2} \Longleftrightarrow -2a^2 + \ln 2 > -\frac{a^2}{2} \Longleftrightarrow a = \sqrt{\frac{2\ln 2}{3}}$$

# EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.
   Quel est le lien entre la continuité d'une fonction et sa dérivabilité ?

2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Justifier la continuité de $g$ sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que la fonction $h : x \longmapsto x\, g(x)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
   c) La fonction $h$ est-elle de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ ?

3. Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   On note $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les fonctions $f_0 : x \longmapsto 1$, $f_1 : x \longmapsto x$ et $g$ :

$$F = \text{Vect}\,(f_0, f_1, g) \ .$$

   a) Pour toute fonction $f$ de $F$, on note $\Phi(f)$ la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto x\, f(x)$. Montrer que $\Phi$ définit un endomorphisme de $F$.
   b) Prouver que la famille $(f_0, f_1, g)$ est une base de $F$ et trouver la matrice $M$ de $\Phi$ dans cette base.

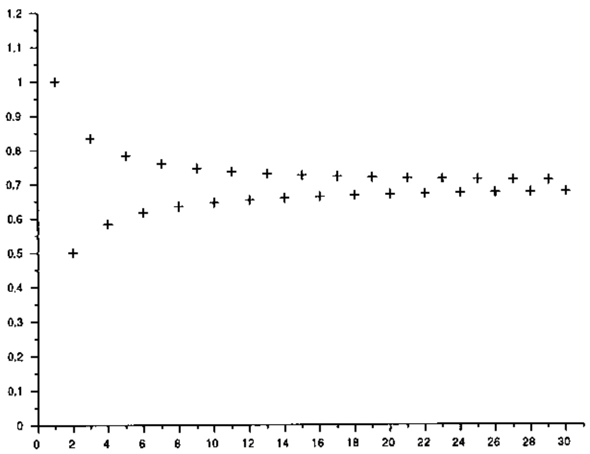
4. a) Montrer que $M$ est une matrice inversible et déterminer son inverse.
   b) En déduire une primitive de la fonction $g$.
   c) Trouver une primitive de la fonction $h$.

# EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit le programme Scilab suivant :

```
x = [1:30];
y = zeros(1,30);
eps = 1;
for k=1:30
y(k) = eps / k;
eps = eps*(-1);
end
z = cumsum(y);
plot2d(x,z,style=-1, rect=[0, 0, 31, 1.2])
```

Le graphe obtenu par l'exécution de ce programme est le suivant :




1. Préciser le contenu des variables y et z après l'exécution du programmme.
2. a) Ce graphe suggère que deux suites sont adjacentes. Lesquelles ?

   b) Démontrer cette conjecture.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

$\boxed{\text{Quel est le lien entre la continuité d'une fonction et sa dérivabilité ?}}$

Toute fonction dérivable est continue.
Le jury n'omet pas de demander un contre-exemple pour la réciproque.

2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) $\boxed{\text{Justifier la continuité de } g \text{ sur } \mathbb{R}.}$

La fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions continues et, par « croissances comparées » :

$$\lim_{x \to 0} x \ln|x| = 0 = f(0) \ .$$

b) $\boxed{\text{En déduire que la fonction } h : x \longmapsto x\, g(x) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

• La fonction $h$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions de classe $C^1$ et, pour tout $x \neq 0$ :

$$h'(x) = 2x \ln|x| + x \ .$$

• La fonction $h$ est dérivable et de dérivéee nulle en 0 parce que :

$$\lim_{x \to 0-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0 \ .$$

Par conséquent, $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ h'(x) = 2g(x) + x \ .$$

Comme $g$ est continue sur $\mathbb{R}$, $h'$ aussi et $h$ est bien de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) $\boxed{\text{La fonction } h \text{ est-elle de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ ?}}$

Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} = \frac{2g(x) + x}{x} = 1 + 2\ln|x|$$

qui tend vers $-\infty$ quand $x$ tend vers 0.
La fonction $h'$ n'étant pas dérivable en 0, $h$ n'est pas de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les fonctions $f_0 : x \longmapsto 1$, $f_1 : x \longmapsto x$ et $g$.

a) Pour toute fonction $f$ de $F$, on note $\Phi(f)$ la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto x\,f(x)$.

Montrer que $\Phi$ définit un endomorphisme de $F$.

Les fonctions $h_0 : x \longmapsto xf_0(x) = x$, $h_1 : x \longmapsto xf_1(x) = x^2$ et $h$ sont dérivables et leurs dérivées appartiennent à $F$, puisque :

$$\begin{cases} h_0' = f_0 \\ h_1' = 2f_1 \\ h' = f_1 + 2g \end{cases} .$$

Il en résulte que, pour toute fonction $f$ de $F$, $\Phi(f)$ est un élément de $F$. Comme de plus $\Phi$ est linéaire, $\Phi$ est un endomorphisme de $F$.

b) Prouver que la famille $(f_0, f_1, g)$ est une base de $F$ et trouver la matrice $M$ de $\Phi$ dans cette base.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \mu g = 0_F$ .
Comme $\lambda_0 f_0(0) + \lambda_1 f_1(0) + \mu g(0) = \lambda_0$, on a nécessairement : $\lambda_0 = 0$.
Comme $\lambda_1 f_1 + \mu g = 0_F$ et comme $f_1$ et $0_F$ sont dérivables en 0 alors que $g$ ne l'est pas, on a nécessairement : $\mu = 0$.
Comme $\lambda_1 f_1 = 0_F$ et comme la fonction $f_1$ n'est pas identiquement nulle, on a aussi, nécessairement : $\lambda_1 = 0$.

Par conséquent, la famille $(f_0, f_1, g)$ est libre. C'est donc une base de l'espace vectoriel $F$, dont elle est par définition une famille génératrice.

D'après les calculs faits en a, la matrice de $\Phi$ dans cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

4. a) Montrer que $M$ est une matrice inversible et déterminer son inverse.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

b) En déduire une primitive de la fonction $g$, puis de la fonction $h$.

$$\Phi^{-1}(g) = -\frac{1}{4} f_1 + \frac{1}{2} g$$

signifie que : $g = -\dfrac{1}{4} g_1' + \dfrac{1}{2} h'$ .

Par conséquent, la fonction

$$-\frac{1}{4} g_1 + \frac{1}{2} h : x \longmapsto \begin{cases} -\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est une primitive de $g$ (sur $\mathbb{R}$).

c) $\boxed{\text{Trouver une primitive de la fonction } h.}$

Comme $g_1 + 3h : x \longmapsto \begin{cases} x^2 + 3x^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est la dérivée de la fonction

$$k : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

une primitive de $h$ (sur $\mathbb{R}$) est la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{3}\big(k(x) - \frac{x^3}{3}\big) = \begin{cases} -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^3 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit le programme Scilab suivant :

```
x = [1:30];
y = zeros(1,30);
eps = 1;
for k=1:30
y(k) = eps / k;
eps = eps*(-1);
end
z = cumsum(y);
plot2d(x,z,style=-1, rect=[0, 0, 31, 1.2])
```

1. $\boxed{\text{Préciser le contenu des variables y et z après l'exécution du programmme.}}$

   Après exécution du progamme :

   - y est un vecteur-ligne dont les 30 composantes sont données par :

   $$\forall k \in [\![1,30]\!],\ y(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{k}\ .$$

   - z est un vecteur-ligne dont les 30 composantes sont données par :

   $$\forall k \in [\![1,30]\!],\ z(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\ .$$

2. a) $\boxed{\text{Ce graphe suggère que deux suites sont adjacentes. Lesquelles ?}}$

   Le programme fournit une représentation graphique des trente points de coordonnées $\big(k, z(k)\big)$.[1]
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut noter :

   $$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\ .$$

   D'après le graphe fourni, "il semble" que les suites $\left(S_{2n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(S_{2n+1}\right)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

   b) $\boxed{\text{Démontrer cette conjoncture.}}$

   Posons $u_n = S_{2n}$.

1. C'est l'affectation à la variable interne « style » d'une valeur négative ou nulle qui permet d'obtenir un tracé point par point.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$$

Bilan : la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante.

Posons $v_n = S_{2n+1}$.

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0 .$$

Bilan : la suite $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ est décroissante.

$$u_n - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1}$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 .$$

Conclusion : $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes.

# EXERCICE PRINCIPAL

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante :
A joue le premier et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 5, A gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, B joue à son tour et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 7, B gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, le tour revient à A et on poursuit comme ci-dessus jusqu'à ce que A ou B ait gagné.

1. Question de cours : formule des probabilités composées.

2. a) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 5.
   b) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 7.

3. a) Déterminer la probabilité pour que A gagne au $(2n+1)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).
   b) Déterminer la probabilité pour que B gagne au $(2n+2)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).

4. En déduire les probabilités $a$ et $b$ pour que A et B gagnent le jeu.

5. Soit $N$ la variable aléatoire égale au nombre de jets de deux dés pour que le jeu s'arrête.
   Montrer que $N$ admet une espérance et la déterminer.

# EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. a) Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}$ .

   b) Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}\,\mathrm{d}t$ .

2. L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(t-2)}}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante :
A joue le premier et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 5, A gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, B joue à son tour et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 7, B gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, le tour revient à A et on poursuit comme ci-dessus jusqu'à ce que A ou B ait gagné.

1. Question de cours : formule des probabilités composées.

- Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.
- Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}\,.$$

2. a) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 5.

En dénombrant les façons d'obtenir 5, nous avons $\boxed{P_5 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}}$.

b) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 7.

De la même façon, on obtient : $\boxed{P_7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$.

3. a) Déterminer la probabilité pour que A gagne au $(2n+1)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).

Pour tout entier $n$, on note $A_{2n+1}$ l'événement « A gagne au $(2n+1)^{\text{ième}}$ jet des deux dés » et $B_{2n+2}$ l'événement « B gagne au $(2n+2)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ».

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$A_{2n+1} = \overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{2n}} \cap A_{2n+1}\,.$$

En utilisant la formule des probabilités composées :

$$P(A_{2n+1}) = P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(\overline{B_2}) \ldots P_{\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{2n}}}(A_{2n+1})$$

$$P(A_{2n+1}) = (1 - P_5)^n (1 - P_7)^n P_5 = \frac{1}{9}\left(\frac{20}{27}\right)^n.$$

b) $\boxed{\text{Déterminer la probabilité pour que B gagne au } (2n+2)^{\text{ième}} \text{ jet des deux dés } (n \geq 0).}$

Avec les même notations, on a :

$$B_{2n+2} = \overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{2n}} \cap \overline{A_{2n+1}} \cap B_{2n+2}$$

En utilisant encore la formule des probabilités composées, on obtient :

$$P(B_{2n+2}) = (1 - P_5)^{n+1}(1 - P_7)^n P_7 = \frac{1}{27}\left(\frac{20}{27}\right)^n .$$

4. $\boxed{\text{En déduire les probabilités } a \text{ et } b \text{ pour que A et B gagnent le jeu.}}$

$$a = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{2k+1}) .$$

$$\boxed{a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{20}{27}\right)^k = \frac{3}{7}} .$$

$$b = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_{2k+2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_{2k+2}) .$$

$$\boxed{b = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{27}\left(\frac{20}{27}\right)^k = \frac{4}{7}} .$$

5. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } N \text{ la variable aléatoire égale au nombre de jets de deux dés pour que le jeu s'arrête.}\\ \text{Montrer que } N \text{ admet une espérance et la déterminer.}\end{array}}$

$$(2n+1)P(N = 2n+1) = (2n+1)P(A_{2n+1}) = \frac{2n+1}{9}\left(\frac{20}{27}\right)^n$$

En reconnaissant des séries géométriques dérivées, on constate que la série $\sum(2n+1)P(N = 2n+1)$ est absolument convergente (ACV).

De même

$$(2n+2)P(N = 2n+2) = (2n+2)P(B_{2n+2}) = \frac{8n+8}{27}\left(\frac{20}{27}\right)^n$$

et la série $\sum(2n+2)P(N = 2n+2)$ est ACV, donc la série $\sum nP(N = n)$ l'est aussi, et $N$ admet une espérance.

$$E(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{9}\left(\frac{20}{27}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8n+8}{27}\left(\frac{20}{27}\right)^n$$

$$E(N) = \frac{14}{27}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{20}{27}\right)^n + \frac{11}{27}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{20}{27}\right)^n$$

$$\boxed{E(N) = \frac{40}{7} + \frac{11}{7} = \frac{51}{7}} .$$

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. a) Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}$.

$$D_f = ]1,2[\,.$$

b) Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}\,dt$.

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}\,dt$ est convergente parce que :

- la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}$ est continue sur l'intervalle $]1,2[$
- l'intégrale $\displaystyle\int_1^{3/2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}\,dt$ est faussement impropre parce que $f(t)$ tend vers 1 quand $t \longrightarrow 1_+$
- $f(t) \sim \dfrac{\ln 2}{\sqrt{2-t}}$ quand $t \longrightarrow 2_-$ et l'intégrale de référence $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-t}}\,dt$ est (absolument) convergente.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(t-2)}}\,dt$ est-elle convergente ?

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(t-2)}}\,dt$ est convergente parce que :

- la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(t-2)}}$ est continue sur l'intervalle $]2,+\infty[$
- l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(t-2)}}\,dt$ est convergente parce que $f(t) \sim \dfrac{\ln 2}{\sqrt{t-2}}$ quand $t \longrightarrow 2_+$ et l'intégrale de référence $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt$ est (absolument) convergente.
- $f(t) \sim \dfrac{\ln(t)}{t^{3/2}} = o(\dfrac{1}{t^{5/4}})$ quand $t \longrightarrow +\infty$ et l'intégrale de référence $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^{5/4}}\,dt$ est (absolument) convergente.

HEC
PARIS

**ORAL HEC Paris 2018**

MATHÉMATIQUES

**EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES**

**Option technologique**

# EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : définition d'une valeur propre d'une matrice.

   Soit $a$ et $b$ des réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On pose : $s = 1 - (a + b)$.
   Soit $A$ la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. a) Établir l'encadrement : $-1 < s < 1$.

   b) Montrer que le polynôme $Q(X) = X^2 - (1+s)X + s$ est un polynôme annulateur de la matrice $A$.

   c) Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de $A$ ?

   d) Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de $A$ associés aux deux valeurs propres de $A$.

   e) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

3. On rappelle que par convention, on pose $A^0 = I$, où $I$ est la matrice identité d'ordre 2.

   a) Exprimer pour tout entier naturel $n$, la matrice $A^n$ sous forme de tableau.

   b) Calculer en fonction de $a$ et $b$ la matrice $L = \lim_{n \to +\infty} A^n$, c'est-à-dire la matrice carrée dont les coefficients sont les limites des coefficients de $A^n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

# Exercice sans préparation

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

On note $T$ une variable aléatoire de densité $f$.

2. a) Calculer l'espérance de $T$.

   b) Déterminer la fonction de répartition $F$ de la variable aléatoire $T$.

# Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours : définition d'une valeur propre d'une matrice.

On appelle valeur propre d'une matrice carrée $A$ tout nombre réel $\lambda$ tel qu'il existe une matrice colonne non nulle $X$ vérifiant :
$$AX = \lambda X \,.$$

Soit $a$ et $b$ des réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On pose : $s = 1 - (a + b)$.

Soit $A$ la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. a) Établir l'encadrement : $-1 < s < 1$.

Comme $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, on a $0 < a + b < 2$ et donc, $-1 < s < 1$.

b) Montrer que le polynôme $Q(X) = X^2 - (1+s)X + s$ est un polynôme annulateur de la matrice $A$.

D'après le cours, si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors le polynôme $X^2 - (a + d)X + ad - bc$ est annulateur de $B$.

Ici, on a : $a+d = 1+s$ et $ad - bc = s$, et $Q(X) = X^2 - (1+s)X + s$ est un polynôme annulateur de $A$.

c) Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de $A$ ?

On sait que l'ensemble des valeurs propres de $A$ est inclus dans l'ensemble des racines de $Q$.
La résolution de l'équation $Q(X) = 0$ donne deux solutions 1 et $s$ qui sont donc des valeurs propres possibles.
Au passage, on remarque que ce sont deux racines distinctes car $s < 1$.

Remarque

Comme $A - I = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, 1 est valeur propre de $A$.

De même, comme $A - sI = \begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, $s$ est valeur propre de $A$.

d) Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de $A$ associés aux deux valeurs propres de $A$.

$A\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$, donc le vecteur non nul $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre 1.

De même, $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $s$.

e) $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est-elle diagonalisable ?}}$

On pose : $P = \begin{pmatrix} b & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$.

On vérifie que $AP = PD$, d'où $D = P^{-1}AP$, et par définition, la matrice $A$ est diagonalisable.

3. a) $\boxed{\text{Exprimer pour tout entier naturel } n, \text{ la matrice } A^n \text{ sous forme de tableau.}}$

On a $A^n = PD^nP^{-1}$.

Les calculs donnent $P^{-1} = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{pmatrix}$ et

$$A^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b + as^n & b(1-s^n) \\ a(1-s^n) & a + bs^n \end{pmatrix} .$$

b) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Calculer en fonction de } a \text{ et } b \text{ la matrice } L = \lim\limits_{n\to+\infty} A^n, \text{ c'est-à-dire la matrice carrée dont les} \\ \text{coefficients sont les limites des coefficients de } A^n \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.\end{array}}$

Puisque $|s| < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} s^n = 0$ et $L = \lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix}$.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. $\boxed{\text{Montrer que } f \text{ est une densité de probabilité.}}$

   La fonction $f$ est positive, continue sur $\mathbf{R}$ et vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$$

   car c'est l'espérance d'une loi $\mathcal{E}(1)$.[1]

On note $T$ une variable aléatoire de densité $f$.

2. a) $\boxed{\text{Calculer l'espérance de } T.}$

$$E(T) = \int_{0}^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2$$

   car c'est le moment (non centré) d'ordre 2 d'une loi $\mathcal{E}(1)$.

   b) $\boxed{\text{Déterminer la fonction de répartition } F \text{ de la variable aléatoire } T.}$

   Pour $x < 0$, on a $F(x) = 0$ et pour $x \geq 0$, à l'aide d'une intégration par parties :

$$F(x) = \int_{0}^{x} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - (1+x)\mathrm{e}^{-x}\ .$$

1. On peut utiliser avec profit les propriétés de la loi exponentielle de paramètre 1..

# EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : définition d'une densité de probabilité.

2. Soit $r$ un réel tel que $r \neq -1$ et soit $g$ la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\ g(x) = -\frac{1}{r+1}(1-x)^{r+1}\ .$$

   a) On note $g'$ la fonction dérivée de $g$. Pour tout $x \in [0,1[$, calculer $g'(x)$.

   b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

3. On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

   a) À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\ .$$

   b) En déduire la relation $(*)$ suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}\,I_n\ .$$

   c) À l'aide de la relation $(*)$, compléter les lignes (2), (4) et (5) du script *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche $I_n$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
(1)  n=input ('donner une valeur de n:')
(2)  I= .........
(3)  for k=1 : n
(4)       I= .........
(5)  ......
(6)  disp(I)
```

   d) Calculer $I_1$.

4. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{4}\,x\sqrt{1-x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\[2ex] 0 & \text{sinon} \end{cases}\ .$$

   a) Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

   b) Déterminer la fonction de répartition $F$ d'une variable aléatoire de densité $f$.

## Exercice sans préparation

Soit $A$ la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. a) Montrer que le réel $\lambda$ est valeur propre de $A$ si, et seulement si, il vérifie l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda = 0 .$$

   b) Quelles sont les valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2$) de $A$ ?

2. a) Déterminer les vecteurs propres de $A$, associés aux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ respectivement.

   b) Montrer que $A$ est diagonalisable.

# Corrigé de l'exercice principal

1. **Question de cours : définition d'une densité de probabilité.**

Une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si elle est positive, continue sauf au plus en un nombre fini de points et si elle vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 .$$

2. Soit $r$ un réel tel que $r \neq -1$ et soit $g$ la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\ g(x) = -\frac{1}{r+1}(1-x)^{r+1} .$$

a) **On note $g'$ la fonction dérivée de $g$. Pour tout $x \in [0,1[$, calculer $g'(x)$.**

On trouve : $g'(x) = (1-x)^r$.

b) **Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.**

Avec $r = \dfrac{1}{2}$, on a : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\Big[(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}\cdot$

3. On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

a) **À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité :**

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x .$$

On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

En dérivant $x \longmapsto x^{n+1}$ et en utilisant une primitive de $x \longmapsto (1-x)^{\frac{1}{2}}$, une intégration par parties donne : $I_{n+1} = \Big[-\dfrac{2}{3}x^{n+1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 + \dfrac{2(n+1)}{3}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$, soit encore :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x .$$

b) **En déduire la relation $(*)$ suivante :**

$$\forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}\,I_n .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant les égalités $x^n(1-x)^{\frac{3}{2}} = x^n(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x) = x^n(1-x)^{\frac{1}{2}} - x^{n+1}(1-x)^{\frac{1}{2}}$, on parvient à

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}(I_n - I_{n+1})$$

puis :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}\, I_n\,.$$

c) À l'aide de la relation (∗), compléter les lignes (2), (4) et (5) du script *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche $I_n$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
(1)  n=input ('donner une valeur de n:')
(2)  I= .........
(3)  for k=1 : n
(4)      I= .........
(5)  ......
(6)  disp(I)
```

En complétant les lignes (2), (4) et (5), on obtient :

```
(1)  n=input ('donner une valeur de n:')
(2)  I=2/3
(3)  for k=1 : n
(4)      I=(2*(k+1)/(2*k+5))*I
(5)  end
(6)  disp(I)
```

d) Calculer $I_1$.

Pour $n = 0$ et $I_0 = \frac{2}{3}$, la relation (∗) donne : $I_1 = \frac{4}{15}$.

4. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{15}{4}\, x\sqrt{1-x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

La fonction $f$ est continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs positives et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{15}{4}\, I_1 = 1$.

b) Déterminer la fonction de répartition $F$ d'une variable aléaléatoire de densité $f$.

On trouve : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{3}{2}x\right)(1-x)^{\frac{3}{2}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $A$ la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. a) $\boxed{\text{Montrer que le réel } \lambda \text{ est valeur propre de } A \text{ si, et seulement si, il vérifie l'équation : } \lambda^2 - \lambda = 0 .}$

Le réel $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ est non inversible (cours), ce qui donne $\lambda^2 - \lambda = 0$ (on utilise, par exemple, la nullité du déterminant d'ordre 2).

b) $\boxed{\text{Quelles sont les valeurs propres } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \ (\lambda_1 > \lambda_2) \text{ de } A\,?}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} .$$

2. a) $\boxed{\text{Déterminer les vecteurs propres de } A, \text{ associés aux valeurs propres } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ respectivement.}}$

• Les vecteurs propres de $A$ associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ sont les vecteurs $U = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$.

• Les vecteurs propres de $A$ associés à la valeur propre $\lambda_2 = 0$ sont les vecteurs $V = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $\beta \neq 0$.

b) $\boxed{\text{Montrer que } A \text{ est diagonalisable.}}$

On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex] PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} .$$

Comme $P$ est inversible, $P^{-1}AP = D$ et la matrice $A$ est donc diagonalisable.

HEC
PARIS

**ORAL HEC Paris 2018**

MATHÉMATIQUES

**EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES**

**Option littéraire B/L**

# EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : définir le maximum d'une fonction réelle de une ou deux variables.

   Pour tout couple $(t, x) \in [0, 1]^2$, on pose : $K(t, x) = \begin{cases} x(1-t) & \text{si } x \leq t \\ t(1-x) & \text{si } x > t \end{cases}$ .

2. Résoudre l'équation $K(t, x) = 0$.

3. Soit $t \in ]0, 1[$ et $k_t$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $k_t(x) = K(t, x)$.

   a) Étudier les variations de la fonction $k_t$.

   b) Montrer que la fonction $k_t$ présente un maximum que l'on déterminera en fonction de $t$.

4. En déduire l'existence d'un couple $(t_0, x_0) \in [0, 1]^2$ vérifiant pour tout couple $(t, x) \in [0, 1]^2$, l'inégalité : $K(t_0, x_0) \geq K(t, x)$.

5. On note $E$ l'ensemble des fonctions $f$ continues sur $[0, 1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. À toute fonction $f \in E$, on associe la fonction $\widehat{f}$ définie sur $[0, 1]$ par : $\widehat{f}(t) = \displaystyle\int_0^1 k_t(x) f(x) \, dx$.

   a) Soit $f \in E$. Montrer que $\widehat{f} \in E$.

   b) Montrer que sur l'intervalle $[0, 1]$, $\widehat{f}$ admet une dérivée seconde $\widehat{f}''$ que l'on exprimera en fonction de $f$.

   c) Soit $g \in E$. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in E$ qui vérifient $f'' = g$.

# EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p$ vérifiant $0 < p < 1$.
On pose : $Y = \mathrm{e}^X$.

1. À quelle condition sur l'entier $r \geq 1$, le moment $E(Y^r)$ d'ordre $r$ de la variable aléatoire $Y$ existe-t-il ?
2. Calculer alors $E(Y)$.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : définir le maximum d'une fonction réelle de une ou deux variables.

On appelle maximum d'une fonction réelle $f$ de une ou deux variables la plus grande valeur qu'elle prend sur son domaine de définition $D$.
Autrement dit, $f$ atteint son maximum en un point $x_0$ de $D$ si, et seulement si, on a :

$$\forall x \in D, \quad f(x) \leq f(x_0) .$$

Pour tout couple $(t,x) \in [0,1]^2$, on pose : $K(t,x) = \begin{cases} x(1-t) & \text{si } x \leq t \\ t(1-x) & \text{si } x > t \end{cases}$ .

2. Résoudre l'équation $K(t,x) = 0$.

$K(t,x) = 0 \iff (x = 0, t = 1)$ ou $(x = 1, t = 0)$.

3. Soit $t \in ]0,1[$ et $k_t$ la fonction définie sur $[0,1]$ par : $k_t(x) = K(t,x)$.

   a) Étudier les variations de la fonction $k_t$.

Si $x \in [0,t]$, $k_t(x) = x(1-t)$ et $k_t$ est croissante sur $[0,t]$.
Si $x \in [t,1]$, $k_t(x) = t(1-x) = -tx + t$ et $k_t$ est décroissante sur $[t,1]$.

   b) Montrer que la fonction $k_t$ présente un maximum que l'on déterminera en fonction de $t$.

Par suite, la fonction $k_t$ définie sur $[0,1]$ présente un maximum au point $x = t$ et ce maximum vaut $t(1-t)$.

4. En déduire l'existence d'un couple $(t_0, x_0) \in [0,1]^2$ vérifiant pour tout couple $(t,x) \in [0,1]^2$, l'inégalité : $K(t_0,x_0) \geq K(t,x)$.

$$\max_{t\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} K(t,x) = \max_{t\in[0,1]} t(1-t) = 1/4 .$$

En effet la fonction $t \longmapsto t(1-t)$ admet un maximum sur $[0,1]$ atteint pour $t = 1/2$.
Donc, pour tout couple $(t,x) \in [0,1]^2$, on a $K(t,x) \leq K(t,t) = t(1-t) \leq K(1/2, 1/2)$.
Finalement, le couple $(t_0, x_0) = (1/2, 1/2)$ convient.

5. On note $E$ l'ensemble des fonctions $f$ continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. À toute fonction $f \in E$, on associe la fonction $\widehat{f}$ définie sur $[0,1]$ par : $\widehat{f}(t) = \displaystyle\int_0^1 k_t(x) f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) $\boxed{\text{Soit } f \in E. \text{ Montrer que } \widehat{f} \in E.}$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\widehat{f}(t) = \displaystyle\int_0^1 k_t(x) f(x)\,\mathrm{d}x = (1-t)\int_0^t x f(x)\,\mathrm{d}x + t\int_t^1 (1-x) f(x)\,\mathrm{d}x$.
On voit aisément que $\widehat{f}(0) = \widehat{f}(1) = 0$ et la dérivabilité (donc la continuité) de $\widehat{f}$ résulte de la continuité de $f$.
Donc $\widehat{f} \in E$.

b) Montrer que sur l'intervalle $[0,1]$, $\widehat{f}$ admet une dérivée seconde $\widehat{f}''$ que l'on exprimera en fonction de $f$.

On a :

$$\widehat{f}'(t) = t(1-t)f(t) - \int_0^t x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_t^1 (1-x) f(x)\,\mathrm{d}x - t(1-t)f(t)$$

soit encore

$$\widehat{f}'(t) = -\int_0^t x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_t^1 (1-x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

et finalement

$$\widehat{f}''(t) = -tf(t) - (1-t)f(t) = -f(t)\ .$$

Donc, $\widehat{f}'' = -f$.

c) Soit $g \in E$. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in E$ qui vérifient $f'' = g$.

Si $g \in E$, on vient de voir que $f = -\widehat{g}$ vérifie $f'' = g$ $(*)$.
Soit $f_1$ une autre solution de $(*)$. Alors, $(f_1 + \widehat{g})'' = f_1'' + (\widehat{g})'' = g - g = 0$ ; donc, il existe des réels $a$ et $b$ tels que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $f_1(t) = -\widehat{g}(t) + at + b$.
De plus, $f_1(0) = f_1(1) = 0$ de même que $\widehat{g}(0)$ et $\widehat{g}(1)$. Par suite, $a = a + b = 0$, donc $a = b = 0$.
Bilan : la seule solution de l'équation $(*)$ dans $E$ est $-\widehat{g}$.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p$ vérifiant $0 < p < 1$.

On pose : $Y = \mathrm{e}^X$.

1. $\boxed{\text{À quelle condition sur l'entier } r \geq 1 \text{, le moment } E(Y^r) \text{ d'ordre } r \text{ de la variable aléatoire } Y \text{ existe-t-il ?}}$

   Pour tout entier $r \geq 1$, on a $Y^r = \mathrm{e}^{rX}$ et par le théorème de transfert, $E(Y^r)$ est la somme de la série de terme général $u_n = \mathrm{e}^{rn}p(1-p)^{n-1}$ si elle converge.
   Il s'agit d'une série géométrique de raison $\mathrm{e}^r(1-p)$.
   Ainsi, $E(Y^r)$ existe $\iff r < -\ln(1-p)$.

2. $\boxed{\text{Calculer alors } E(Y).}$

   L'espérance $E(Y)$ existe si et seulement si $-\ln(1-p) > 1 \iff q = 1 - p < 1/\mathrm{e}$.

   Sous cette condition, on a : $E(Y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^n p\, q^{n-1} = \frac{\mathrm{e}p}{1-\mathrm{e}q}$.