ORAL HEC Paris 2019

MATHEMATIQUES
Options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L

Programme Grande Ecole

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Sur chacune des quatre sessions de trois jours, ces épreuves ont mobilisé quatre à cinq jurys par demi-journée.

Outre la rigueur intellectuelle et la maîtrise des techniques mathématiques du programme, déjà testées lors des épreuves écrites, l'oral de mathématiques permet de valoriser des qualités de communication essentielles pour la future carrière des candidats. Une bonne maîtrise de l'expression orale, la précision du langage, la clarté et la rigueur dans l'argumentation, ainsi que la réactivité et l'aptitude au dialogue sont particulièrement appréciées.

Rappelons que le jury n'est pas là pour mettre les candidats en difficulté mais pour les aider à tirer le meilleur parti de leurs connaissances.

1. Procédure d'interrogation

Le sujet proposé aux candidats comprend deux exercices, dont le couplage permet d'aborder les trois grandes parties du programme, algèbre, analyse et probabilités. Des questions de Scilab peuvent intervenir dans l'un ou l'autre des deux exercices.

→ Un exercice principal préparé pendant trente minutes. Cet exercice commence par une brève question de cours, éventuellement accompagnée de l'analyse d'un exemple illustratif, en rapport avec le thème de l'exercice. La suite de l'énoncé comprend plusieurs questions, que le candidat a intérêt à traiter dans l'ordre, sans que cela soit requis. Original et moins calculatoire qu'un problème d'écrit, cet exercice permet de bien juger de l'assimilation du programme et de sa réelle compréhension, au-delà d'un simple catalogue de recettes et procédés de calculs.

→ Un exercice sans préparation. Hormis le cas où il contient un script Scilab, son énoncé est très court, ce qui permet aux candidats d'en prendre rapidement connaissance. Il ne s'agit pas d'un « exercice-type » et la manière de l'aborder n'est pas unique. Son objectif principal est de juger de l'aptitude des candidats à prendre des initiatives et à mobiliser leurs connaissances pour apporter une réponse aux questions posées, éventuellement ouvertes.

Dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

2. Statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:

→ option scientifique (457 candidats): 10,34 (écart-type 3,78);
→ option économique (201 candidats): 8,94 (écart-type 3,94);
→ option technologique (28 candidats): 7,82 (écart-type 3,93);
→ option littéraire B/L (21 candidats): 8,97 (écart-type 3,60).

Par rapport aux résultats des épreuves orales du concours 2018, les notes sont assez stables en option scientifique, mais en baisse dans les autres options, pour lesquelles le jury a constaté de graves lacunes mathématiques chez de nombreux candidats.

3. Commentaires

Les rapports de jury des concours précédents ainsi que les échanges dans la commission de mathématiques lors de la journée des classes préparatoires semblent avoir été bien pris en compte par les admissibles. Les prestations d'une majorité de candidats sont essentiellement orales et le tableau est le plus souvent utilisé à bon escient, pour l'écriture des formules mathématiques et des points-clés du raisonnement.

Rappelons qu'aucune phrase entière n'a lieu d'être transcrite au tableau, dans la mesure où elle peut être énoncée oralement. En revanche, une formule mathématique complexe doit systématiquement apparaître au tableau. Signalons aussi qu'il est essentiel que les candidats n'effacent pas les formules qu'ils viennent d'écrire, parfois avant même que le jury ait pu en prendre connaissance. Avant d'enchaîner, la plupart des candidats pensent à demander au jury le droit d'effacer. Cette précaution est hautement souhaitable.

On peut noter un certain nombre de points positifs dans les productions des candidats des options scientifique et économique.

• La question de cours est très souvent traitée correctement et les candidats ne semblent que très rarement s'être livrés à des « impasses ».

• Les questions de Scilab ne sont presque jamais ignorées et les candidats ont en général une connaissance convenable de la syntaxe de ce langage.

• Les candidats savent pour la plupart utiliser les indications fournies par le jury. Rappelons que celui-ci attache beaucoup d'importance à ce qu'un dialogue puisse s'établir avec le candidat.

On relève aussi des points négatifs, se reproduisant de façon récurrente.

• Les candidats ont trop souvent des difficultés à illustrer la question de cours à l'aide d'exemples simples. Lorsqu'une définition est demandée et que l'énoncé ne fournit pas de notations pour les objets mathématiques concernés, il revient au candidat de les introduire.

• La différence entre une inégalité stricte et une inégalité large est souvent mal perçue, de même que la distinction entre une équivalence et une implication.

• Les candidats parviennent généralement à deviner l'objectif d'un programme Scilab mais ils ont souvent de grosses difficultés à analyser un algorithme de manière précise. Là encore, une bonne expression orale est absolument nécessaire.

• Le commentaire et l'interprétation des courbes et graphiques restent des points noirs, par suite de la « sous-traitance » informatique de leur tracé, et sans doute de la manière dont les mathématiques sont trop souvent enseignées ou perçues, alors que tous les mathématiciens réfléchissent à l'aide de figures ! Le jury est bien conscient du fait que les candidats manquent de pratique du tracé de courbes « à la main » et ont trop peu été habitués à utiliser une figure pour comprendre le sens d'une hypothèse, faire une conjecture ou envisager l'approche d'une question. Il ne cherchera donc pas à les accabler et ne leur demandera que rarement de tracer une figure de façon improvisée. Il n'en demeure pas moins que la détermination de l'allure d'une courbe représentative est exigible et que le vocabulaire géométrique élémentaire (abscisse, ordonnée, corde, tangente, point d'inflexion, asymptote, etc.) doit être connu et utilisé à bon escient. Des figures illustrant la méthode des rectangles, la notion de convexité ou les propriétés d'une projection orthogonale doivent également être connues. Une figure pertinente, même dépourvue d'une quelconque valeur artistique, est toujours la bienvenue.

4. Quelques recommandations aux futurs candidats

Un certain nombre de candidats utilisent, dans leurs argumentations, des concepts ou des théorèmes qui dépassent le cadre du programme. Cela n'est pas interdit, ni critiquable en soi, mais il faut savoir qu'un candidat qui fait mention d'un résultat hors-programme sera systématiquement amené à le justifier, au moins succinctement.

Par exemple, le programme ne stipule pas que la somme de deux suites de variables aléatoires qui convergent en probabilité converge en probabilité vers la somme de leurs limites. Il convient donc de savoir le démontrer. De même, de nombreux candidats connaissent ou ont entendu parler des séries de Bertrand. Leur critère de convergence n'étant nullement au programme, il convient de les étudier au cas par cas, avec les seuls outils du programme.

Le jury recommande aux futurs candidats d'éviter l'emploi de recettes mécaniques, surtout s'ils ne les maîtrisent pas. Même si elles peuvent parfois faire illusion à l'écrit, les phrases ou les formules apprises par cœur, qui tiennent lieu de « prêt - à penser », passent difficilement le filtre de l'épreuve orale.

Pour ce qui est de l'exercice sans préparation, il est recommandé aux candidats de noter au tableau, sous forme très succincte, les données et hypothèses proposées, ne serait-ce que pour se donner le temps de la réflexion.

En résumé, le jury de mathématiques réitère aux futurs candidats les recommandations qu'il avait faites à l'issue des concours précédents : une très solide assimilation du cours est nécessaire et un raisonnement toujours préférable à la simple récitation de formules toutes faites.
En espérant que les brèves indications fournies par ce rapport les aideront dans leur préparation, et dans l'attente de les retrouver en juin et juillet prochains, le jury souhaite aux candidats une année de travail aussi sereine et efficace que possible.

HEC
PARIS

ORAL HEC Paris 2019

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option scientifique

Concours HEC 2019

Sujet S 293

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : loi d'un couple de variables aléatoires discrètes, caractérisation de leur indépendance.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout entier n strictement supérieur à 2, on note

$$N_1^{(n)} = \text{Card}\{i \in [\![1,n]\!]\,;\, X_i \in [1-\frac{1}{n},1]\}$$

$$N_2^{(n)} = \text{Card}\{i \in [\![1,n]\!]\,;\, X_i \in [1-\frac{2}{n},1-\frac{1}{n}[\}$$

2. Soit n un entier strictement supérieur à 2.
   a) Reconnaître la loi de chacune des deux variables aléatoires $N_1^{(n)}$ et $N_2^{(n)}$.
   b) Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
   c) Écrire une fonction *Scilab* permettant d'effectuer une simulation du couple $(N_1^{(n)}, N_2^{(n)})$.

3. Établir, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ et pour tout entier $n \geq \max\{3, k+\ell\}$, l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} P([N_1^{(n)} = k] \cap [N_2^{(n)}] = \ell]) = \frac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!}\frac{(n-2)^{n-k-\ell}}{n^n}\,.$$

4. Démontrer que la suite $\left(N_1^{(n)} + N_2^{(n)}\right)_{n\geq 3}$ converge en loi vers une variable suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$.

5. Soit $(s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2$.
   a) Calculer, pour tout entier $n \geq 3$, l'espérance de la variable aléatoire $s_1^{N_1^{(n)}} s_2^{N_2^{(n)}}$.
   b) Vérifier l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(s_1^{N_1^{(n)}} s_2^{N_2^{(n)}}\right) = \mathrm{e}^{s_1+s_2-2}\,.$$

Exercice sans préparation

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le rang de M.
2. Justifier qu'il existe une matrice semblable à M possédant deux colonnes égales.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.

2. a) Chacune des deux variables aléatoires $N_1^{(n)}$ et $N_2^{(n)}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/n)$.

   b) Non, puisque par exemple

$$P([N_1^{(n)} = n] \cap [N_1^{(n)} = n]) = 0 \neq P([N_1^{(n)} = n]) \times P([N_1^{(n)} = n]) .$$

   c)

```
function [N1,N2]=ggrand(n)
   X=rand(n,1);
   N1=length(find(X>=1-1/n));
   N2=length(find((X>=1-2/n))-N1;
endfunction
```

3.

$$\begin{aligned} P([N_1^{(n)} = k] \cap [N_2^{(n)}] = \ell]) &= \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}(\frac{1}{n})^k(\frac{1}{n})^{n-k}(1-\frac{2}{n})^{n-k-\ell} \\ &= \frac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!}\frac{(n-2)^{n-k-\ell}}{n^n} . \end{aligned}$$

4. La voie la plus courte pour parvenir au résultat est d'observer que $N_1^{(n)} + N_2^{(n)}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 2/n)$ et d'utiliser le résultat du cours sur la convergence de lois binomiales vers la loi de Poisson.

   On peut aussi utiliser le résultat de la question précédente, car lorsque n tend vers l'infini

   - $\dfrac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!} \sim \dfrac{n^{k+\ell}}{k!\,\ell!}$
   - $(1-\dfrac{2}{n})^{n-k-\ell} \to \mathrm{e}^{-2}$.

   Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} P([N_1^{(n)} = k] \cap [N_2^{(n)}] = \ell]) = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{k!\,\ell!} \qquad (1)$$

   Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on déduit du résultat précédent que :

$$\lim_{n\to+\infty} P([N_1^{(n)} + N_2^{(n)} = m]) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{e}^{-2}}{k!\,(m-k)!} = \frac{2^m}{m!}\mathrm{e}^{-2} .$$

   Ceci confirme que la suite $\left(N_1^{(n)} + N_2^{(n)}\right)_{n\geq 3}$ converge en loi vers une variable suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$.

5. a) p

$$E\big(s_1^{N_1^{(n)}} s_2^{N_2^{(n)}}\big) = \sum_{k\geq 0,\ell\geq 0,k+\ell\leq n} \frac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!}\Big(\frac{s_1}{n}\Big)^k\Big(\frac{s_2}{n}\Big)^\ell\,\Big(1-\frac{2}{n}\Big)^{n-k\ell} = \Big(1+\frac{s_1+s_2-2}{n}\Big)^n$$

b)

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{s_1+s_2-2}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^{s_1+s_2-2} \tag{2}$$

Sujet S 293

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. On a par exemple $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-4\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$\mathrm{rg}(M) = 2\ .$$

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.
Soit x est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui n'appartient pas au noyau de f et y la somme de x et d'un vecteur non nul du noyau de f.
Les deux vecteurs x et y sont linéairement indépendants et il est possible de choisir un vecteur z de $\mathbb{R}^3$ pour lequel (x, y, z) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Comme $f(x) = f(y)$, les deux premières colonnes de la matrice de f dans cette base sont égales et cette matrice est semblable à M puisque les deux matrices représentent le même endomorphisme.

Concours HEC 2019

Sujet S 295

EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : minorant et minimum d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.

   b) Pour tout réel x, justifier que l'ensemble $\{|x-n|\,;\, n\in\mathbb{Z}\}$ admet un minimum.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\mathrm{Min}\{|x-n|\,;\, n\in\mathbb{Z}\} \tag{1}$$

2. a) Calculer $f(x)$ lorsque x est compris entre $-1/2$ et $+1/2$.

   b) Donner une représentation graphique de la fonction f et écrire un script *Scilab* permettant de la tracer.

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

   a) Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a :

$$f(x)\leq |y-n|+|x-y|\,.$$

   b) Établir l'inégalité :

$$|f(y)-f(x)|\ \leq\ |y-x|\,.$$

4. a) Justifier, pour tout réel x, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 2^{-n}f(2^n x)$.

On note b l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad b(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}f(2^n x) \tag{2}$$

   b) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Justifier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les inégalités :

$$|b(y)-b(x)|\ \leq\Big(\sum_{k=0}^{n-1}2^{-k}\,|f(2^k y)-f(2^k x)|\Big)+2^{-n}\leq n\,|y-x|+2^{-n}$$

   c) En déduire que la fonction b est continue.

   d) Démontrer que la fonction b n'est pas dérivable à droite en 0.

Sujet S 295

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (où $n \geq 2$).
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant chacune la loi normale d'espérance μ et d'écart-type $\sigma > 0$.

Quelle est la probabilité pour que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ appartienne à E ?

Corrigé de l'exercice principal

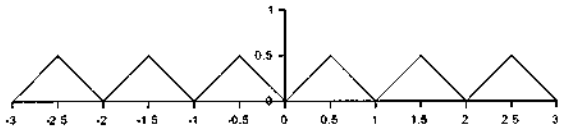
1. a) Question de cours.

b) $\{|x-n|\,;\, n\in\mathbb{Z}\}$ admet un minimum parce que son intersection avec le segment $[0,1/2]$ est un singleton ou un doubleton.

2.
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\mathrm{Min}\{|x-n|\,;\, n\in\mathbb{Z}\} \tag{3}$$

a)
$$\forall x\in[-1/2,+1/2],\quad f(x)=|x|\ .$$

b) La fonction f étant 1-périodique , son graphe est celui d'une « onde triangulaire » .



Pour le tracer sous *Scilab*, sans utiliser la fonction **round** qui n'est pas explicitement au programme, on peut par exemple observer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\ |x-\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor\,|$$

ce qui permet d'utiliser le script suivant

```
--> deff('y=f(x)','y=abs(x-floor(x+.5))');
--> x=linspace(-3, 3,13); // comme f est affine par morceaux, on peut faire des économies
--> y=feval(x,f);
--> plot(x,y)
```

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

a) $f(y)\le|y-n|=|y-x+x-n|\le|x-n|+|y-x|$.

b) En choisissant n tel que $f(x)=|x-n|$, on obtient l'inégalité

$$f(y)-f(x)\ \le\ |y-x|\ .$$

Par symétrie des rôles de x et y, on en déduit l'inégalité demandée.

4. a) Comme la fonction f ne prend que des valeurs comprises entre 0 et 1/2 la série $\sum_{n\geq 0} 2^{-n} f(2^n x)$ est convergente, par domination.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} f(2^n x) \tag{4}$$

b)

$$\begin{aligned} |b(y) - b(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} |f(2^k y) - f(2^k x)| + \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k} |f(2^k y) - f(2^k x)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} |2^k y - 2^k x| + \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k} \frac{1}{2} \\ &= n\,|y - x| + 2^{-n} \,. \end{aligned}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

On choisit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Dès lors, pour tout y tel que $|y - x| \leq \dfrac{\varepsilon}{2n}$, on a :

$$|b(y) - b(x)| \leq \varepsilon \,.$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$f(2^k\, 2^{-n}) = \begin{cases} 2^{k-n} & \text{si } k < n \\ 0 & \text{si } k \geq n \end{cases} .$$

Par conséquent :

$$b(2^{-n}) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k}\, 2^{k-n} = \boxed{n\, 2^{-n}} \,.$$

Il en résulte que le taux d'accroissement $\dfrac{\beta(2^{-n}) - \beta(0)}{2^{-n}} = n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire quand le point 2^{-n} tend vers 0.
La fonction b n'est donc pas dérivable à droite en 0.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Hormis le cas où $E = \mathbb{R}^n$ (pour lequel la probabilité demandée est égale à 1), on a toujours

$$P\big[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in E\big] = 0$$

puisque toute combinaison linéaire non nulle des variables aléatoires X_k admet une densité, ce qui entraîne que la probabilité que la probabilité que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ appartienne à un hyperplan est nulle.

Concours HEC 2019

Sujet S 296

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ admettant une racine complexe z dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 2.

   a) Vérifier que le conjugué $\bar{z}$ de z est aussi une racine de P.

   b) Démontrer que, si z n'est pas un nombre réel, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

   $$P = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\,X + |z|^2\right)^2 Q\ .$$

   c) En déduire que z est racine du polynôme dérivé P' de P.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note P_n le polynôme $X^{2n} - 2nX + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

   a) Déterminer les racines complexes du polynôme dérivé P_n'.

   b) Combien le polynôme P_n admet-il de racines complexes ?

Pour tout entier $n \geq 2$, on note f_n la fonction réelle définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{2n} - 2nx + 1\ .$$

3. Combien l'équation $f_n(x) = 0$ admet-elle de solutions réelles ?

4. On note u_n la plus grande des solutions réelles de l'équation précédente.

   a) Soit $\varepsilon > 0$. Que peut-on dire du signe de $f_n(1+\varepsilon)$? En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers 1.

   b) Justifier le développement asymptotique, quand n tend vers l'infini :

   $$u_n = 1 + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\cdot$$

Sujet S 296

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit X une variable aléatoire réelle.

Justifier qu'il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs ou nuls pour laquelle la série terme général $P([X \geq x_n])$ est convergente.

Voie S
référence : S 296

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.

2. a) Comme les coefficients de P sont réels, $P(\bar{z})$ est nul puisque c'est le conjugué de $P(z)$, lui-même nul.

b) Comme z est une racine multiple de P, il existe un polynôme $M \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-z)^2 M$.
En effectuant dans $\mathbb{C}[X]$ la division euclidienne de M par $(X-\bar{z})^2$, on peut écrire $P = (X-z)^2\Big((X-\bar{z})^2 Q + R\Big)$ où le degré du polynôme R est au plus égal à 1.

Le reste R est en fait nécessairement nul puisque la factorisation (dans $\mathbb{C}[X]$) $P = (X-\bar{z})^2\,\overline{M}$ prouve que R est divisible par $(X-\bar{z})^2$. Il en résulte que $P = (X-z)^2(X-\bar{z})^2$, $Q = \big(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\,X + |z|^2\big)^2\,Q$ et cette mise en facteur d'un polynôme à coefficients réels prouve que le polynôme Q appartient à $\mathbb{R}[X]$.

c)

• Si $z \in \mathbb{R}$, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-z)^2 Q$ de sorte que $P'(z) = 0$ (ce qui est un résultat de cours, dans $\mathbb{R}[X]$, pas dans $\mathbb{C}[X]$).

• Si $z \notin \mathbb{R}$, on utilise la factorisation trouvée en 2.b pour dériver le polynôme P

$$P' = (X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\,X + |z|^2)\Big(2\big(X - \mathrm{Re}(z)\big)\,Q + (X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\,X + |z|^2)\,Q'\Big)$$

et constater qu'il s'annule bien en z.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note P_n le polynôme $X^{2n} - 2nX + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

a) Le polynôme dérivé de P_n est $P_n' = 2nX^{2n-1} - 2n$.
Par conséquent :

$$P_n'(z) = 0 \Longleftrightarrow z^{2n-1} = 1$$

Les racines complexes du polynôme P_n sont donc les racines $(2n-1)$-ièmes de l'unité, c'est-à-dire les $2n-1$ nombres complexes

$$z_k = \exp(\frac{2ik\pi}{2n-1}) \quad \text{où } k \in [\![0, 2n-2]\!]\,.$$

b) D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le nombre de racines complexe de P_n est compris entre 1 et $2n$.
Si P_n admettait une racine complexe multiple z, celle-ci annulerait simultanément, comme vu en 1.b, P_n et son polynôme dérivé

$$P_n' = 2n(X^{2n-1} - 1)\,.$$

On aurait donc $z^{2n-1} = 1$ et par conséquent

$$P_n(z) = z^{2n} - 2nz + 1 = (1-2n)z + 1 = 0$$

ce qui est impossible puisque $\dfrac{1}{2n-1}$ n'est pas une racine $(2n-1)$-ième de l'unité (puisque $n \geq 2$).
Le polynôme P_n admet donc $2n$ racines complexes (distinctes).

4. Une étude de la fonction f_n montre que celle-ci est décroissante sur $]-\infty, 1[$ puis croissante sur $]1, +\infty[$ avec $f_n(1) = 2(1-n) < 0$ L'équation $f_n(x) = 0$ admet donc deux solutions, l'une < 1 et l'autre > 1.

5. a) Comme $f_n(0) = 1 > 0$, $f_n(1) = 2(1-n) < 0$ et $f_n(2) = 4^n - 4n + 1 > 0$, la plus petite des deux solutions de l'équation (??) est comprise entre 0 et 1, et la plus grande entre 1 et 2.

$$\forall n \geq 2, \quad 1 < u_n < 2 \, .$$

b)

$$f_n(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{2n} - 2n(1+\varepsilon) + 1 \sim (1+\varepsilon)^{2n}$$

quand n tend vers l'infini, ce qui entraîne que $f_n(1+\varepsilon) > 0$ pour n assez grand.
Il en résulte que, pour tout $\varepsilon > 0$, u_n est compris entre 1 et $1+\varepsilon$ pour tout n suffisamment grand.
Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

c) On écrit $u_n = 1 + \varepsilon_n$ puis on exprime la relation $f_n(u_n) = 0$. Il vient après un DL de $\ln(1+x)$ en 0 :

$$e^{2n\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n)} = 2n - 1 + 2n\varepsilon_n$$

puis

$$2n\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n) = \ln(2n) + \ln(1 - \frac{1}{2n} + \varepsilon_n) = \ln(n) + O(1)$$

ce qui implique en prenant les équivalents à gauche et à droite $2n\varepsilon_n \sim \ln n$ et

$$u_n = 1 + \frac{\ln n}{2n} + o(\frac{\ln n}{n}) \cdot$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} P([X \geq x]) = 0$, on peut définir par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} \geq x_n \\ P([X \geq x_n + 1]) \leq 2^{-n} \end{cases}$$

Concours HEC 2019

Sujet S 298

EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : définition et propriétés des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

   b) Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\quad \|x\| > A \Longrightarrow \varphi(x) > M\ .$$

   i) Justifier que l'ensemble $K = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \varphi(x) \leq \varphi(0)\}$ est non vide, fermé et borné.

   ii) En déduire que la fonction φ admet un minimum global.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

2. a) En quels points la fonction f admet-elle un extremum local ?

   b) Justifier, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité : $f(x,y) \geq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - 4(x^2+y^2)$.

   c) La fonction f admet-elle un extremum global ?

3. On rappelle que, pour tout réel c, la ligne de niveau c d'une fonction de deux variables est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ en lesquels la fonction prend la valeur c.
   La figure suivante, obtenue à l'aide de *Scilab* représente les lignes de niveaux -6 et -7 de la fonction f.

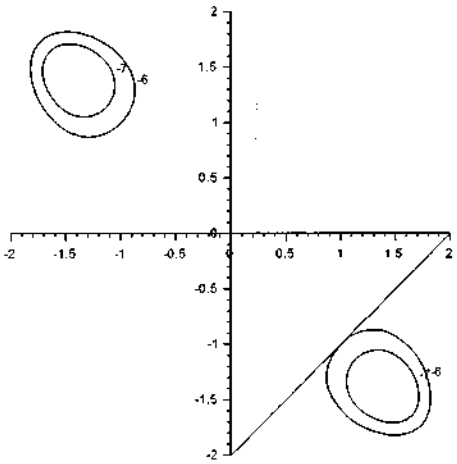


FIGURE 1 – *Lignes de niveau*

a) Quelle symétrie des lignes de niveau de la fonction f la figure 1 suggère-t-elle ? En donner une justification mathématique.

b) Trouver l'équation de la tangente au point $(-1,+1)$ à la ligne de niveau -6.

c) En quels autres points les tangentes à cette ligne de niveau sont-elles parallèles à la tangente trouvée en b ?

Sujet S 298

Exercice sans préparation

Soit un entier naturel n non nul. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.

On tire successivement $n+1$ boules de cette urne, *sans* remise.

Quelle est la loi de la variable aléatoire X égale au rang du *dernier* numéro impair sorti ?

Corrigé de l'exercice principal

1. a) Question de cours.

b) i)

- K est non vide puisque $0 \in K$.
- K est fermé d'après la première propriété rappelée en question de cours.
- K est borné parce qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| > A \Longrightarrow \varphi(x) > \varphi(0)$$

ce qui entraîne que K est inclus dans la boule fermée de centre 0 et de rayon A.

ii) D'après la seconde propriété des fonctions continues rappelée en question de cours, la fonction φ admet un minimum global m sur K.
Comme $\varphi(x) > \varphi(0) \geq m$ pour tout $x \notin K$, m est en fait un minimum global de φ sur $\mathbb{R}^n$.

2. a) Les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f sont données par :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) = 4(x^3 - x + y) \\ \partial_2(f)(x,y) = 4y^3 + 4(x-y) = 4(y^3 + x - y) \end{cases}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f sont données par :

$$\begin{cases} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 4(3x^2 - 1) \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 4 \\ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 4(3y^2 - 1) \end{cases}$$

La fonction f possède trois points critiques $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

- f admet un minimum local en chacun des deux points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ parce que les deux valeurs propres, 24 et 16 de la matrice hessienne de f en ces deux points

$$\nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \nabla^2(f)(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

sont strictement positives.

- f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ et $(0,0)$ est un point col (ou point selle) de f parce que $f(x,x) = 2x^4$ et $f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2$ sont de signes contraires au voisinage de $x = 0$.

b) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les inégalités $x^2 + y^2 - 2|xy| \geq 0$ et $x^4 + y^4 - 2x^2y^2 \geq 0$ entraînent

$$\begin{cases} (x-y)^2 \leq x^2 + y^2 + 2|xy| \leq 2(x^2 + y^2) \\ (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \leq 2(x^4 + y^4) \end{cases}$$

et par conséquent :

$$f(x,y) \geq x^4 + y^4 - 4(x^2 + y^2) \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) \, .$$

c) Il résulte de l'inégalité précédente que $f(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand $x^2 + y^2$ tend vers $+\infty$, ce qui entraîne que f n'est pas majorée et qu'elle admet un minimum global, d'après le résultat de la question 1.b.

3. a) Chaque ligne de niveau (composée de deux courbes pour les niveaux -7 et -6 de la figure 1) de la fonction f présente une symétrie par rapport à l'origine parce que :

$$\forall c \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = c \Longleftrightarrow f(-x,-y) = c\ .$$

b) L'équation de la tangente à la ligne de niveau -6 au point $(1,-1)$ est $y = x + 2$.
Par symétrie, de la tangente à la ligne de niveau -6 au point $(-1,1)$ est $y = x - 2$.

c) Les vecteurs directeurs des tangentes aux lignes de niveau sont orthogonaux aux gradients de f aux points correspondants.
Lorsque les gradients sont colinéaires, Deux tangentes en des points réguliers d'une ligne de niveau sont donc parallèles si, et seulement si, les gradients de f en ces deux points sont colinéaires.

$$\nabla(f)(-1,+1) = \big(\partial_1(f)(-1,1), \partial_2(f)(-1,1)\big) = (4,-4)$$

Pour que la tangente à la courbe de niveau -6 en un point (x,y) soit parallèle à sa tangente au point $(1,-1)$, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 = -6 \\ 4(x^3 - x + y) = -4(y^3 + x - y) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

On trouve ainsi les deux autres points où le gradient est proportionnel au vecteur $(-1,1)$, les deux points $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, c'est-à-dire où les tangentes à la ligne de niveau -6 sont parallèles à la tangente trouvée en b.
Les équations des quatre tangentes parallèles trouvées, représentées sur la figure ??, sont donc

$$y = x \pm 2 \quad \text{et} \quad y = x \pm 2\sqrt{3}\ .$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

Comme toute $(n+1)$-liste d'éléments de $[\![1,2n]\!]$ contient au plus n nombres pairs donc au moins un nombre impair, l'ensemble des valeurs possibles de X est inclus dans $[\![1,n+1]\!]$.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'événement $[X \leq k]$ est constitué des $(n+1)$-listes d'éléments de $[\![1,2n]\!]$ dont les $(n+1-k)$ derniers termes (correspondants aux tirages de rangs $k+1$ à $n+1$) sont pairs.
On trouve ainsi :

$$\mathbf{P}([X \leq k]) = \frac{\binom{n+k-1}{n}}{\binom{2n}{n}}.$$

Cette relation restant valable pour $k = 0$ et $k = n+1$, on conclut que, pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$:

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X \leq k) - \mathbf{P}(X \leq k-1) = \frac{\binom{n+k-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}}.$$

Concours HEC 2019

Sujet S 299

EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace probabilisé.

1. a) Question de cours : rappeler la définition d'une tribu de parties de Ω.

   b) Donner trois exemples de tribus de parties de $\mathbb{N}$.

2. On note C l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0$.

   a) Justifier l'égalité :

$$C = \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\geq k} \left[|X_n| < \frac{1}{p}\right].$$

   b) En déduire que C est un élément de la tribu $\mathcal{A}$.

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 si la probabilité de l'événement C est égale à 1.

3. a) Comparer, pour tout $\varepsilon > 0$, les deux événements $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup\limits_{n\geq k} \left[|X_n| \geq \varepsilon\right]$ et $\overline{C}$.

   b) En déduire que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

4. Dans cette question, α désigne un réel strictement positif. On suppose que les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

   a) Justifier que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

   b) Soit p et k deux entiers strictement positifs.

   Calculer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la probabilité p_N de l'événement $\bigcap\limits_{n=k}^{k+N} \left[|X_n| < \dfrac{1}{p}\right]$ et étudier la convergence de la suite $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

   c) Pour quelles valeurs de α la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle presque sûrement vers 0 ?

Sujet S 299

Exercice sans préparation

Soit L_1 et L_2 deux matrices triangulaires inférieures, dont les termes sur la diagonale sont égaux à 1, et U_1 et U_2 deux matrices triangulaires supérieures inversibles. On suppose que

$$L_1 U_1 = L_2 U_2.$$

1. Montrer que L_1 et L_2 sont inversibles.
2. Montrer que $L_2^{-1} L_1$ est une matrice triangulaire inférieure.
3. Montrer que $L_1 = L_2$.

Voie S
référence : S 299

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace probabilisé.

1. a) Question de cours.

b) $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$, $\{\emptyset, \{0\}, \mathbb{N}^*, \mathbb{N}\}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

2. a) Soit $\omega \in \Omega$. Par définition d'une limite :

$$\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq k,\ |X_n(\omega)| < \varepsilon$$

ce qui équivaut à $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq k,\ |X_n(\omega)| < \dfrac{1}{p}$, c'est-à-dire à $\omega \in C$.

b) Tous les ensembles $\left[|X_n| < \frac{1}{p}\right]$ étant des éléments de $\mathcal{A}$ puisque les X_n sont des variables aléatoires sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, C est un élément de $\mathcal{A}$, par stabilité de cette tribu par réunions et intersections dénombrables.

3. a) Soit $\varepsilon > 0$. Si ω est un élément de C, on a, par définition d'une limite,

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq k,\ |X_n(\omega)| < \varepsilon$$

ce qui signifie que ω appartient à $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} \Big(\bigcap_{n\geq k} \Big[|X_n| < \epsilon\Big] \Big)$.

On a donc l'inclusion $C \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} \Big(\bigcap_{n\geq k} \Big[|X_n| < \epsilon\Big] \Big)$ qui fournit, par passage aux événements contraires : $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\geq k} \Big[|X_n| \geq \varepsilon\Big] \subset \overline{C}$.

b) On suppose que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 (i.e. $P(\overline{C}) = 0$).
Soit $\varepsilon > 0$.
De l'inclusion de 3.a, on déduit que la probabilité de l'événement $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\geq k} \Big[|X_n| \geq \varepsilon\Big]$ est nulle.
Comme les événements $A_k = \displaystyle\bigcup_{n\geq k} \Big[|X_n| \geq \varepsilon\Big]$ forment une suite décroissante, la propriété de limite monotone permet d'en déduire que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(A_k) = P\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k \Big) = 0$.
Des inclusions $\Big[|X_k| \geq \varepsilon\Big] \subset A_k$, on en déduit ensuite que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P\Big(\big[|X_k| \geq \varepsilon\big]\Big) = 0$.
La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc bien en probabilité vers 0.

4. a) $P\Big(\big[|X_n| \geq \varepsilon\big]\Big) \leq P\Big(\big[|X_n| \geq \min\{\varepsilon, 1\}\big]\Big) = P([X_n = 1]) = \dfrac{1}{n^\alpha}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) $p_N = P\Big(\bigcap_{n=k}^{k+N} \big[|X_n| < \frac{1}{p}\big]\Big) = \prod_{n=k}^{k+N} \big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)$.

• Si $\alpha = 1$

$$p_N = \prod_{n=k}^{k+N} \big(\frac{n-1}{n}\big) = \frac{k-1}{k+N}$$

qui tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

• Si $\alpha < 1$, les inégalités $\prod_{n=k}^{k+N} \big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big) \leq \prod_{n=k}^{k+N} \big(1 - \frac{1}{n}\big)$ prouvent que p_N tend aussi vers 0 quand N tend vers l'infini.

• Si $\alpha > 1$, la série de terme général $\ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)$ est convergente (par comparaison à la série de Riemann $1/n^\alpha$).

Finalement : $\lim_{N\to+\infty} p_N = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \exp\Big(\sum_{n=k}^{+\infty} \ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)\Big) & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$.

c)

• Si $\alpha \leq 1$, $P\Big(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \big[|X_n| < \frac{1}{p}\big]\Big) = \lim_{N\to+\infty} P\Big(\bigcap_{n=k}^{k+N} \big[|X_n| < \frac{1}{p}\big]\Big) = 0$.

Par limite monotone, on en déduit $P\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \big[|X_n| < \frac{1}{p}\big]\Big) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, puis

$$P(C) = 0$$

ce qui prouve que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.

• Si $\alpha > 1$, le reste $\sum_{n=k}^{+\infty} \ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)$, de la série convergente de terme général $\ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)$, tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

Par limites monotones, on en déduit $P\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \big[|X_n| < \frac{1}{p}\big]\Big) = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, puis

$$P(C) = 1$$

ce qui prouve que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. L_1 et L_2 sont inversibles puisqu'elles sont triangulaires et que leurs coefficients diagonaux sont tous non nuls.
2. Le produit de deux matrices triangulaires inférieures l'est aussi. L'inverse l'est également.
3. On a donc $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$ est triangulaire inférieure mais aussi supérieure donc est diagonale. De plus, ses termes sur la diagonale sont les produits des termes diagonaux de L_2^{-1} et L_1, donc 1. Ainsi $L_2^{-1}L_1 = I$ puis $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

Concours HEC 2019

Sujet S 301

EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité.

   b) Quelle propriété spécifique la fonction de répartition F d'une variable aléatoire possède-t-elle lorsque cette variable aléatoire possède une densité paire ? Que dire alors du graphe de F ?

Dans toute la suite de l'exercice, X désigne une variable aléatoire à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_X la fonction de répartition de X.

2. Dans cette question, on suppose que X admet une espérance $E(X)$ et qu'elle possède une densité continue sur $]0, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, 0]$.

   a) Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, P([X \geq x]) = 0$.

   b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P([X \geq t])\, \mathrm{d}t$ est convergente et que :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P([X \geq t])\, \mathrm{d}t \ .$$

3. Soit $r > 0$.

   a) Justifier, pour tout $t \geq 0$, l'existence de $H(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} u^{r-1}\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u$.

   b) Montrer que H est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour quelles valeurs de r est-elle de classe C^1 ?

   c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente et préciser sa valeur.

4. Dans cette question, on suppose que X possède une densité continue sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que si X admet une espérance, alors : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t) - F_X(-t)\big)\, \mathrm{d}t$.

5. a) Justifier l'existence d'une unique constante réelle c pour laquelle la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{c}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$ est une densité de probabilité.

   On suppose désormais que X admet f pour densité (pour la valeur convenable de c).

   b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t) - F_X(-t)\big)\, \mathrm{d}t$ est-elle convergente ? La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

   c) Justifier que $x\, P([X \geq x])$ tend vers c quand x tend vers $+\infty$.

Sujet S 301

EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère deux nombres **complexes** u et v et on pose :

$$z = u + iv \ .$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le nombre complexe $u\,\bar{v}$ pour que le module de z soit égal à $\sqrt{|u|^2 + |v|^2}$.
2. Proposer une interprétation géométrique du résultat trouvé.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours.

b) Lorsqu'une variable aléatoire possède une densité paire, sa fonction de répartition F vérifie la propriété de symétrie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(-x) = 1 - F(x)\,.$$

Le graphe de F est alors symétrique par rapport au point d'abscisse 0 et d'ordonnée $\frac{1}{2}$.

2. a) $0 \leq x\,P([X \geq x]) \leq \displaystyle\int_x^{+\infty} t\,f_X(t)\,\mathrm{d}t$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

b) On prouve la convergence et l'égalité demandées par passage à la limite (quand $\epsilon \to 0$ puis $A \to +\infty$) à partir de l'égalité :

$$\int_\epsilon^A t\,f_X(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-t\,P([X \geq t])\Big]_\epsilon^A + \int_\epsilon^A P([X \geq t])\,\mathrm{d}t\,.$$

3. Soit $r > 0$.

a) La question de cours permet d'éviter une preuve par domination.

b) H est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que primitive de $u \longmapsto -u^{r-1}\,\mathrm{e}^{-u}$ et en 0 par définition d'une intégrale convergente.
Elle est de classe C^1 pour $r \geq 1$.

c) On applique le résultat de 2° à une variable aléatoire X suivant la loi $\gamma(r)$.

$$\int_0^{+\infty} H(t)\,\mathrm{d}t = \Gamma(r)\int_0^{+\infty} P([X \geq t])\,\mathrm{d}t = \Gamma(r)E(X) = r\Gamma(r) = \Gamma(r+1)\,.$$

4.

$$|1 - F_X(t) - F_X(-t)| \leq 1 - F_X(t) + F_X(-t) = P([|X| \geq t])$$

dont l'intégrale est convergente puisque $|X|$ admet une espérance.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t) - F_X(-t)\big)\,\mathrm{d}t$ est donc (absolument) convergente.

Comme précédemment, par intégrations par parties et passages à la limite, on obtient :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\,f_X(t)\,\mathrm{d}t$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(-F_X(-t)\big)\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{0} F_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{0} u\,f_X(u)\,\mathrm{d}u$

On en conclut, par la formule de Chasles, que

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F(t) - F(-t)\big)\,\mathrm{d}t\ .$$

5. a) Il s'agit d'une conséquence directe de la positivité et de l'intégrabilité de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$.

b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t) - F_X(-t)\big)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et elle est nulle (par parité de f).

La variable aléatoire X n'admet pas d'espérance, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

c) Comme $t^2 \leq \sqrt{1+t^2+t^4} \leq 1+t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient par intégration

$$\int_x^{+\infty} \frac{c}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{+\infty} \frac{c}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$c\,\mathrm{Arctan}\big(\frac{1}{x}\big) = c\big(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x)\big) \leq \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{c}{x}\ .$$

Quand x tend vers $+\infty$, on en déduit l'équivalence :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \ \sim \int_x^{+\infty} \frac{c}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{c}{x}$$

d'où le résultat.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. On pose $u = a + ib$ et $v = c + id$ (avec a, b, c, d réels).

$$\begin{aligned} |z|^2 = |u|^2 + |v|^2 &\Longleftrightarrow (a-d)^2 + (b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &\Longleftrightarrow ad - bc = 0 \Longleftrightarrow \end{aligned}$$

Comme $u\,\bar{v} = (a+ib)(c-id) = (ac+bd) + i(bc-ad)$, on a l'équivalence :

$$|z| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2} \Longleftrightarrow u\,\bar{v} \in \mathbb{R}\ .$$

2. On peut observer que le module de z est égal à $\sqrt{|u|^2 + |v|^2}$ si, et seulement si, les deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (a, b) et $(-d, c)$ (associé à $iv = -d + ic$) sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel.

Concours HEC 2019

Sujet S 302

EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire réelle, qui est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suit la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Question de cours : définition et propriétés de la fonction Γ.

2. a) Justifier que la variable X admet des moments de n'importe quel ordre et établir, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, l'égalité :

$$\frac{V(X^n)}{n^2\ E(X^{2n-2})} = \frac{2(2n-1)}{n} - \frac{1}{\binom{2n-2}{n-1}}\ .$$

b) En déduire la limite de $\dfrac{V(X^n)}{n^2\ E(X^{2n-2})}$ quand n tend vers l'infini.

On note L l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbf{R}_+$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

3. a) Justifier que L est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel.

b) Justifier que l'application $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur L.

4. Soit g une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ telle que g et sa dérivée g' appartiennent à L.

a) Justifier l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \big(g(x) - g(0)\big)^2\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \big(g(x) - g(0)\big) g'(x)\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x\ .$$

b) En déduire l'inégalité :

$$V\big(g(X)\big) \leq 4\, E\Big(\big(g'(X)\big)^2\Big)\ .$$

c) Existe-t-il une constante $c < 4$ telle que

$$V\big(h(X)\big) \leq c\, E\Big(\big(h'(X)\big)^2\Big)\ .$$

pour toutes les fonctions h de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ pour lesquelles les variables aléatoires $h(X)$ et $h'(X)$ admettent un moment d'ordre 2 ?

Sujet S 302

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que $f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)}$ et $\operatorname{rg} f = 2$.

Déterminer le spectre de f et les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ qui sont stables par f.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.

2. a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Par la formule de transfert, la variable aléatoire X^n admet une espérance parce que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$ est (absolument) convergente (cf question de cours).

$$E(X^n) = \Gamma(n+1) = n! \ .$$

On a donc $E(X^{2n}) = (2n)\,! = 2n(2n-1)\,(2n-2)\,! = 2n(2n-1)\,E(X^{2n-2})$ et par conséquent :

$$\frac{V(X^n)}{n^2\,E(X^{2n-2})} = \frac{E(X^{2n}) - \big(E(X^n)\big)^2}{n^2\ E(X^{2n-2})} = \frac{2(2n-1)}{n} - \frac{(n\,!)^2}{n^2\,(2n-2)!} = \frac{2(2n-1)}{n} - \frac{1}{\binom{2n-2}{n-1}} \cdot$$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{V(X^n)}{n^2\ E(X^{2n-2})} = 4$.

3. a) On démontre que L est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$ (à valeurs réelles) en constatant que L contient la fonction nulle, est stable par multiplication par un scalaire (immédiat) et par addition (seul point consistant de la preuve). En effet, si f et g sont deux éléments de L, la majoration

$$(f+g)^2 \leq 2(f^2+g^2)$$

prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(x)+g(x)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et par suite l'appartenance de la fonction continue $f+g$ à L.

b) On vérifie aisément que l'application considérée est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur L (en n'omettant pas de signaler le rôle décisif de la continuité des éléments de L dans le caractère « défini » de l'application).

4. Soit g une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ telle que g et sa dérivée g' appartiennent à L.

a) Pour tout $A > 0$, une intégration par parties permet d'écrire :

$$\int_0^A \big(g(x)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\big(g(x)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^A + \int_0^A 2\big(g(x)-g(0)\big)g'(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (1)$$

Comme les fonctions $g-g(0)$ et g' appartiennent à L, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)g'(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ sont convergentes, ce qui entraîne que $\big(g(A)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-A}$ admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$.

Cette limite ne peut qu'être nulle puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente, et on obtient donc par passage à la limite dans l'équation (1), l'égalité demandée :

$$\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)g'(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\ .$$

b) Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire défini en 3.b), on obtient à partir du résultat précédent l'inégalité

$$\Big(\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\Big)^2 \leq 4\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \times \int_0^{+\infty} \big(g'(x)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

qui entraîne :

$$\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leq 4\int_0^{+\infty} \big(g'(x)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\ .$$

Par la formule de transfert, il ne reste plus qu'à traduire l'inégalité précédente pour obtenir l'inégalité demandée.

c) Il n'existe pas une telle constante.
Cela provient du résultat trouvé en 2b, puisque pour $h := x \longmapsto x^n$, on a :

$$E\Big(\big(h'(X)\big)^2\Big) = n^2 E(X^{2n-2})\ .$$

Le quotient $\dfrac{V(h(X))}{E\Big(\big(h'(X)\big)^2\Big)} = \dfrac{V(X^n)}{n^2\,E(X^{2n-2})}$ peut donc être arbitrairement proche de 4.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

• Comme $\operatorname{rg} f = 2$, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et 0 est valeur propre de f. C'est la seule, puisque toute valeur propre de f est racine du polynôme (annulant f) $X^3 + X = X(X^2+1)$.

• Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ stable par f (autre que $\{(0,0,0)\}$ et $\mathbf{R}^3$) .

◇ Si S est une droite, S est dirigée par un vecteur propre de f, donc $S = \operatorname{Ker} f$, seule droite propre de f.

◇ Si S est un plan, le sous-espace vectoriel $S \cap \operatorname{Im} f$, stable par f, est soit une droite, soit un plan . Si c'était une droite , on aurait $S \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$, ce qui est absurde parce que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires. [1] Il en résulte que $S \cap \operatorname{Im} f$ est un plan et par conséquent que S est égal à $\operatorname{Im} f$.

Il en résulte que les sous-espace de $\mathbf{R}^3$ stables par f sont $\{(0,0,0)\}$, $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ et $\mathbf{R}^3$.

1. Si $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$, on dispose d'un vecteur $t \in \mathbf{R}^3$ tel que $x = f(t)$. Il vient que $f^2(t) = f(x) = 0_{\mathbf{R}^3}$, donc que $f^3(t) = 0_E$, et $f(t) = 0_E$; ainsi, $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$, et, d'après le théorème du rang, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

Concours HEC 2019

Sujet S 303

EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'énoncé, r et n sont deux nombres entiers vérifiant les inégalités : $1 \leq r < n$.

1. Question de cours : définition et caractérisation des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.

2. On note $D = ((d_{i,j}))$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf les r premiers coefficients de la diagonale, qui valent 1 :

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Compléter le code *Scilab* de la fonction suivante d'arguments r et n pour qu'elle fournisse en sortie la matrice D.

```
function D=drn(r,n)
    D=zeros(n,n);
    ????
endfunction
```

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont le rang est égal à r, et M sa matrice dans la base canonique. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel, qui fait de la base canonique une base orthonormale.

3. Justifier que f est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il existe une matrice orthogonale R telle que :

$$^tR\,M\,R = D .$$

4. a) Justifier l'existence d'une base de $\mathbb{R}^n$ dont les $n - r$ derniers vecteurs constituent une base du noyau de f.

b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une telle base et H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les r vecteurs $e_1, \ldots, e_r$.
Soit g l'application de H dans l'image de f définie par

$$\forall x \in H,\ g(x) = f(x) .$$

Démontrer que g est un isomorphisme.

c) Justifier l'existence d'une base $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ pour laquelle la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est D.

d) En déduire qu'il existe deux matrices inversibles P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$^tQ\,M\,P = D .$$

5. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.
Démontrer que la matrice M appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une matrice inversible P telle que :

$$^tP\,M\,P = D .$$

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance m et une variance v.

On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.

On dit que la loi de X est *stable* lorsque, pour tout entier n non nul, il existe $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que les variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_n$ et $a_n X + b_n$ suivent la même loi.

1. Démontrer que, si la variance v est nulle, alors la loi de X est stable.
2. On suppose désormais que la variance v est strictement positive.
   Trouver la loi de X.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours

2. Code complet

```
function D=drn(r,n)
    D=zeros(n,n);
    D(1:r,1:r)=eye(r,r);
endfunction
```

3. • Si f est un projecteur orthogonal, c'est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. Il existe donc une matrice orthogonale R telle que la matrice ${}^tR\,M\,R$ est diagonale. Comme le rang de f est r, les sous-espaces propres $E_1(f)$ et $E-0(f)$ sont de dimensions respectives r et $n-r$, on peut choisir R de telle manière que :

$$ {}^tR\,M\,R = D\ . $$

• Réciproquement, s'il existe une matrice orthogonale R telle que ${}^tR\,M\,R = D$, la matrice M de f dans la base canonique (orthonormale) de $\mathbb{R}^n$ est symétrique et vérifie $M^2 = M$. Il en résulte que f est un projecteur orthogonal.

4. a) La dimension du noyau de f est égale à $n-r$.
On peut donc choisir $n-r$ vecteurs $e_{r+1},\ldots,e_n$ formant une base de $\mathrm{Ker}(f)$, puis compléter cette famille libre à l'aide de r vecteurs $e_1,\ldots,e_r$, pour constituer une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

b) L'application g est linéaire (par linéarité de f) et les deux espaces vectoriels H et $f(\mathbb{R}^n)$ sont de même dimension r.
Il suffit donc de prouver que g est injectif, en observant que son noyau est réduit au vecteur nul :

$$ \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap H = \{0_{\mathbb{R}^n}\} $$

puisque $H = \mathrm{Vect}\{e_1,\ldots,e_r\}$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\{e_{r+1},\ldots,e_n\}$.

L'application linéaire g est donc bien un isomorphisme de H sur $f(\mathbb{R}^n)$.

c) Comme g est injective, les vecteurs $f_1 := g(e_1),\ldots,f_r := g(e_r)$ sont linéairement indépendants et on peut les compléter pour former base $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Comme $f(e_i) = \begin{cases} f_i & \text{si } i \leq r \\ 0_{\mathbb{R}^n} & \text{sinon} \end{cases}$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ (base de l'espace de départ) et $\mathcal{C}$ (base de l'espace d'arrivée) est la matrice D :

$$ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = D\ . $$

d) On note P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ et Q la transposée de la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base canonique :

$$\begin{cases} P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \\ \\ Q = {}^tP_{\mathcal{C},\mathcal{B}_0} = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}_0}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \end{cases}$$

D'après le résultat précédent :

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}_0}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = {}^tQ\,M\,P$$

5. • S'il existe une matrice inversible P telle que ${}^tP\,M\,P = D$, alors l'égalité

$$M = {}^t(P^{-1})\,D\,P^{-1}$$

entraîne que M est symétrique et que

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX\,M\,X \geq 0$$

donc que M appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

• Si la matrice M appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale R telle que ${}^tR\,M\,R$ est une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r,0,\ldots,0)$, avec $\lambda_1 > 0,\ldots,\lambda_r > 0$.
La matrice inversible $S = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_r},1,\ldots,1)$ vérifie alors

$${}^tR\,M\,R = {}^tS\,D\,S$$

et on a donc ${}^tP\,M\,P = D$ pour la matrice inversible $P = RS^{-1}$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance m et une variance v.

On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.

1. Si la variance de X est nulle, on a :

$$\begin{cases} P([X = m]) = 1 \\ P([X_1 + \cdots + X_n = n\,m]) = 1 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit donc de choisir $a_n > 0$ et de poser

$$b_n = n\,m - a_n\,m$$

pour que $a_nX + b_n$ suive la même loi que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$.

2. Par identification de l'espérance et de la variance des deux variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_n$ et $a_nX + b_n$, on obtient :

$$a_n = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad b_n = (n - \sqrt{n})m$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sqrt{n\,v}} \quad \text{suit la même loi que} \quad \frac{X - m}{\sqrt{v}}$$

D'après le théorème central limite, $\frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et par conséquent : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$

Concours HEC 2019

Sujet S 307

EXERCICE PRINCIPAL

On considère un paramètre θ décrivant un intervalle Θ de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et une famille de probabilité $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

On note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telles que, pour tout $\theta \in \Theta$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

- les variables $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ sont P_θ-indépendantes
- chaque variable U_n suit, sous la probabilité P_θ, la loi uniforme sur $[0, 1]$
- chaque variable V_n suit, sous la probabilité P_θ, la loi uniforme sur $[\theta, \theta + 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, on note :

$$X_n(\omega) = \max\{U_n(\omega), V_n(\omega)\} \text{ et } M_n(\omega) = \min\{X_k(\omega)\,;\, k \in [\![1, n]\!]\} .$$

On cherche à estimer le paramètre θ à partir des valeurs observées pour les variables $X_1, \ldots, X_n, \ldots$

1. Question de cours : rappeler, dans le contexte précisé ci-dessus, la définition d'un estimateur convergent du paramètre θ.

2. Dans cette question, l'intervalle Θ est le segment $[-1, 0]$.

   a) Démontrer que, pour tout $\theta \in \Theta$, la variable aléatoire X_1 possède une densité que l'on déterminera.

   b) Vérifier que, sous la probabilité P_θ, l'espérance de X_1 est :

$$E_\theta(X) = \frac{1}{6}\big((\theta + 1)^3 + 3\big) .$$

   c) En déduire que $T_n = \Big(\big(\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\big) - 3\Big)^{1/3} - 1$ est un estimateur convergent de θ.

3. Dans cette question, l'intervalle Θ est inclus dans $[0, +\infty[$.

   a) Justifier que, pour $\varepsilon > 0$, la probabilité $P_\theta([X_1 > \theta + \varepsilon])$ est strictement inférieure à 1.

   b) En déduire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de θ.

   c) Démontrer que M_n n'est pas un estimateur sans biais de θ et indiquer le signe de son biais.

4. a) Peut-on trouver un estimateur convergent de θ lorsque Θ est inclus dans $]-\infty, -1[$?

   b) Proposer une méthode pour trouver un estimateur convergent de θ lorsque $\Theta = [-1, +\infty[$.

Exercice sans préparation

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in E$ *non constante* et n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note f^k l'élément de E tel que pour tout réel x :

$$f^k(x) = (f(x))^k \ .$$

Étudier la liberté de la famille $(f^1, f^2, \ldots, f^n)$.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.
2. a) Lorsque $\theta \in [-1, 0]$, « $X_1(\Omega) = [0, 1]$ » et la fonction de répartition $F_\theta := x \longmapsto P_\theta([X_1 \leq x])$ de X_1 est donnée par :

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x(x-\theta) & \text{si } 0 \leq x < \theta + 1 \\ x & \text{si } \theta + 1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé des points $0, \theta + 1$ et 1, la variable aléatoire X_1 admet une densité.
Toute fonction f_θ à valeurs positives, qui ne diffère de F'_θ qu'en un nombre fini de points, est alors une densité de X_1.
Une densité de X_1 est donc donnée par :

$$f_\theta(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - \theta & \text{si } 0 \leq x < \theta + 1 \\ 1 & \text{si } \theta + 1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 01 \end{cases} .$$

b) La variable X_1 n'est pas sans espérance puisque X_1 est bornée et on a :

$$\begin{aligned} E_\theta(X) &= \int_0^1 x\, f_\theta(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\theta+1} x(2x-\theta)\, \mathrm{d}x + \int_{\theta+1}^1 x\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}(\theta+1)^3 - \frac{1}{2}\theta(\theta+1)^2 - \frac{1}{2}(\theta^2 + 2\theta) \\ &= \frac{1}{6}(\theta^3 + 3\theta^2 + 3\theta + 4) \\ &= \frac{1}{6}\big((\theta+1)^3 + 3\big) . \end{aligned}$$

c) Par la loi faible des grands nombres, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en probabilité vers $E_\theta(X)$.

Comme la fonction $\varphi := x \longmapsto \sqrt[3]{6x-3} - 1$ est continue dur $\mathbb{R}$, la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers

$$\varphi\big(E_\theta(X_1)\big) = \varphi\big(\frac{1}{6}\big((\theta+1)^3 + 3\big) = \theta .$$

Par conséquent, T_n est un estimateur convergent de θ.

3. a)

$$P_\theta([X_1 > \theta + \varepsilon]) = 1 - P_\theta([U_1 \leq \theta + \varepsilon])P_\theta([V_1 \leq \theta + \varepsilon]) < 1$$

puisque les probabilités $P_\theta([U_1 \leq \theta + \varepsilon])$ et $P_\theta([V_1 \leq \theta + \varepsilon])$ sont strictement positives.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P_\theta([\,|M_n - \theta| > \varepsilon]) = P_\theta([\,M_n > \theta + \varepsilon]) = \Big(P_\theta([\,X_1 > \theta + \varepsilon])\Big)^n$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, d'après le résultat précédent.
Par conséquent, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers θ.

c) Soit $\theta \geq 0$.
Comme $P_\theta([M_n \geq \theta]) = 1$ (puisque par exemple $M_n \geq V_1$), le biais $E_\theta(M_n) - \theta$ de l'estimateur M_n est positif ou nul.
Comme de plus on n'a pas $P_\theta([M_n = \theta]) = 1$, ce biais ne peut pas être nul.

4. a) Lorsque $\theta \leq -1$, X_n est égale à U_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte que la loi d'un estimateur T_n de θ ne dépend pas de θ, et que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut converger en probabilité vers θ pour P_θ que pour au plus une valeur de θ.
Par conséquent, il n'existe aucun estimateur convergent de θ lorsque l'intervalle Θ (non réduit à un point par hypothèse) est inclus dans $]-\infty, -1[$.

b) En s'inspirant de la méthode utilisée en question 2, on peut exploiter le fait que l'espérance des variables aléatoires X_n sous la probabilité P_θ est une fonction strictement croissante et continue de θ (conjecture plausible) pour construire un estimateur convergent de θ en appliquant à la moyenne empirique la bijection réciproque de cette fonction.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i f^i = 0_E$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i f^i(x) = 0$.

Le polynôme P tel que $P(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i X^i$ s'annule donc sur $f(\mathbb{R})$.

Comme f n'est pas constante $f(\mathbb{R})$ est, par continuité de f, un intervalle non réduit à un point et P s'annule donc une infinité de fois.

Il en résulte que $P = 0$ et que la famille $(f, f^2, \ldots, f^n)$ est libre.

Concours HEC 2019

Sujet S 308

EXERCICE PRINCIPAL

Dans cet exercice, p est un entier naturel non nul et on note $U_p[X]$ l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré p, c'est-à-dire des polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ dont le coefficient de X^p est égal à 1.

1. a) Question de cours : formules d'Euler et de Moivre.
   b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

On admet qu'il existe un unique polynôme $T_p \in U_p[X]$ vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(p\theta) = 2^{p-1} T_p\big(\cos(\theta)\big) .$$

2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\| P \| = \max_{[-1,+1]} |P| .$$

   a) Justifier, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, l'existence de la quantité $\| P \|$.
   b) Calculer $\| T_p \|$.

Pour tout entier $k \in [\![0, p]\!]$, on pose : $\begin{cases} \theta_k = \dfrac{k\pi}{p} \\ a_k = \cos(\theta_k) \end{cases}$.

3. a) Justifier que les réels $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sont deux à deux distincts et vérifient :

$$\forall k \in [\![0, p]\!], \quad |T_p(a_k)| = \| T_p \| .$$

   b) On suppose qu'un polynôme $P \in U_p[X]$ vérifie l'inégalité stricte $\| P \| < \dfrac{1}{2^{p-1}}$.
   Montrer que le polynôme $\Delta = T_p - P$ satisfait à

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \ \Delta(a_{k-1})\Delta(a_k) < 0$$

   et en déduire une contradiction.

4. a) Soit $\lambda \in]0, 1[$ et $P \in U_p[X]$ tel que : $\| P \| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$.
   Justifier que le polynôme $T_p - \lambda P$ a au moins p zéros distincts dans le segment $[-1, +1]$ et en déduire l'inégalité :

$$|T_p(x) - \lambda P(x)| \leq 2^p(1 - \lambda) .$$

   b) Démontrer que T_p est l'unique polynôme P de $U_p[X]$ vérifiant :

$$\| P \| = \min_{Q \in U_p[X]} \| Q \| .$$

Sujet S 308

Exercice sans préparation

Le script *Scilab* suivant permet de simuler une épreuve aléatoire consistant à effectuer des tirages successives dans une urne dont le contenu est lui-même aléatoire.

```
--> p=rand();
--> U=[1]; // contenu initial de l'urne
--> N=1;
--> while rand()>p; U=[U,0]; N=N+1; end;
--> C=U(grand(1,1,'uin',1,N)) // couleur de la boule tirée
```

1. Détailler l'épreuve simulée.
2. Quelles sont les lois des variables aléatoires simulées par N et C ?

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours.

b) $\begin{cases} \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 \\ \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \end{cases}$

2. a) L'image du segment $[-1,+1]$ par la fonction continue $x \longmapsto -P-(x)$ étant un segment, cette fonction est majorée sur ce segment et y atteint sa borne supérieure, ce qui justifie l'existence de la quantité

$$\| P \| = \max_{[-1,+1]} |P| \ .$$

b) Des égalités $T_p\big(\cos(\theta)\big) = \dfrac{\cos(p\theta)}{2^{p-1}}$, on déduit $\| T_p \| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$, puisque $|\cos(p\theta)| \leq 1$ pour tout θ et $|T_p(1)| = T_p\big(\cos(0)\big) = \dfrac{\cos(0)}{2^{p-1}} = \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

3. a) Comme la fonction cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$, on a : $a_0 > a_1 > \cdots > a_p$.
De plus, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, on a :

$$|T_p(a_k)| = \frac{|\cos(p\,\theta_k)|}{2^{p-1}} = \frac{|\cos(k\pi)|}{2^{p-1}} = \frac{1}{2^{p-1}} = \| T_p \| \ .$$

b) Soit $k \in [\![1,p]\!]$.
Comme $\Delta(a_k) = \dfrac{(-1)^k}{2^{p-1}} - P(a_k)$ et $|P(a_k)| < \dfrac{1}{2^{p-1}}$, $\Delta(a_k)$ est strictement positif si k est pair, strictement négatif si k est impair.
Par conséquent, quelle que soit la parité de k, on a bien : $\Delta(a_{k-1})\Delta(a_k) < 0$.
Il en résulte, par le théorème des valeurs intermédiaires, que le polynôme Δ possède p racines distinctes (une dans chacun des intervalles ouverts $]a_0,a_1[,]a_1,a-2[, \ldots,]a_{p-1},a_p[$).
Comme P et T_p sont unitaires, le degré de Δ est inférieur ou égal à $p-1$, et il ne peut être que le polynôme nul s'il possède p racines distinctes.
On a dès lors $P = T_p$, ce qui est impossible puisque $\| T_p \| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

4. a) En appliquant à $T_p - \lambda P$ le résultat appliqué précédemment au polynôme P, on démontre que ce polynôme admet p racines distinctes $c_1, c_2, \ldots, c_p$ situées dans $[-1,+1]$.
Par conséquent,

$$T_p - \lambda P = (1-\lambda)\prod_{k=1}^{p}(X - c_k)$$

ce qui entraîne que, pour tout $x \in [-1,+1]$, on a :

$$|\,T_p(x) - \lambda P(x)\,| \ \leq 2^p(1-\lambda)$$

puisque $|x - c_k| \leq 2$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$.

b)

• En raisonnant par l'absurde, on a démontré en 3.b :

$$\forall Q \in U_p[X], \quad \| T_p \| \leq \| Q \|$$

ce qui prouve l'égalité :

$$\| T_p \| = \min_{Q \in U_p[X]} \| Q \| \ .$$

• D'après a, si un polynôme $P \in U_p[X]$ vérifie

$$\| P \| = \min_{Q \in U_p[X]} \| Q \|$$

alors :

$$\forall x \in [-1,+1], \forall \lambda \in]0,1[, \quad |T_p(x) - \lambda P(x)| \leq 2^p(1-\lambda)$$

ce qui entraîne, en faisant tendre λ vers 1, que le polynôme $T_p - P$ s'annule en tout point x du segment $[-1,+1]$, donc que P est égal à T_p.

Finalement, T_p est bien l'unique polynôme P de $U_p[X]$ vérifiant :

$$\| P \| = \min_{Q \in U_p[X]} \| Q \| \ .$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Une urne contient initialement une seule boule, rouge par exemple.
   On tire à pile ou face avec une pièce équilibrée : pour pile, on ajoute une boule d'une couleur différente, noire par exemple, et on rejoue. Pour face, on tire une boule au hasard dans l'urne et le jeu s'arrête.
   La boule tirée est rouge si $C = 1$, noire si $C = 0$.

2. • N est une simulation de la loi géométrique de paramètre $p = 0,5$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P([N=k] = (1-p)^{k-1} p \frac{1}{2^k} \ .$$

• C est une simulation d'une loi de Bernoulli de paramètre égal à la probabilité que la boule tirée soit rouge, c'est-à-dire :

$$P([C=1]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([N=k]]\, P_{[N=k]}([C=1]) = \sum_{k=1}^{+\infty} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\, 2^k} \ .$$

Concours HEC 2019

Sujet S 310

EXERCICE PRINCIPAL

Dans l'exercice $(E, (\ |\ ))$ désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Question de cours : énoncer le théorème de réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.

2. Soit f l'application de E dans E telle que pour tout x de E, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (e_k \,|\, x)\, e_k$.

   a) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

   b) Montrer que toutes les valeurs propres de f sont strictement positives et en déduire que f est bijectif.

3. Soit p un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_p$ des nombres réels deux à deux distincts.

   Montrer que l'application θ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par

   $$\forall\, P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \quad \theta(P) = \big(P(x_1), \ldots, P(x_p)\big)$$

   est bijective.

4. a) Calculer, pour j, k entiers compris entre 1 et n, le produit scalaire $(e_k \,|\, f^{-1}(e_j))$.

   b) Justifier l'existence d'un polynôme P tel que $g = P(f)$ vérifie $g \circ g = f^{-1}$.

   c) Pour un tel endomorphisme g, montrer que $(g(e_1), \ldots, g(e_n))$ est une base orthonormée de E.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit X une variable aléatoire à densité qui est à valeurs dans $]0, +\infty[$ et telle que X et $\frac{1}{X}$ ont même loi.

1. Quelle est la valeur de $P(X \leq 1)$?

2. On suppose que X admet une densité f qui est continue sur $]0, +\infty[$ et qui est constante sur $]0, 1]$.

   Déterminer la valeur de $f(x)$ pour tout $x > 0$ et vérifier la cohérence du résultat obtenu.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.

2. a) L'application f est linéaire par linéarité à droite du produit scalaire.

De plus, si $x, y \in E$, $\langle f(x) \,|\, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \,|\, x\rangle \langle e_k \,|\, y\rangle$.

On constate que dans l'expression qu'on vient d'obtenir pour $\langle f(x) \,|\, y\rangle$, x et y jouent des rôles symétriques donc $\langle f(x) \,|\, y\rangle = \langle f(y) \,|\, x\rangle$ ce qui prouve que f est sympétrique.

b) Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé.

Alors $\langle f(x) \,|\, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \,|\, x\rangle^2 > 0$ car x étant non nul, l'un au moins des $\langle e_k \,|\, x\rangle$ est non nul.

D'autre part, $\langle f(x) \,|\, x\rangle = \lambda \|x\|^2$. Donc $\lambda = \frac{\langle f(x) \,|\, x\rangle}{\|x\|^2} > 0$.

En particulier, 0 n'est pas valeur propre de f donc f est bijectif.

3. L'application θ est clairement linéaire. Son noyau est réduit au polynôme nul car un polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$ admettant p racines distinctes est nécessairement nul. De plus, $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $\mathbb{R}^p$ sont deux espaces vectoriels de même dimension finie égale à p donc l'application θ est un isomorphisme.

4. a) On a d'une part, $f\big(f^{-1}(e_j)\big) = e_j$ et, par définition de f, $f\big(f^{-1}(e_j)\big) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \,|\, f^{-1}(e_j)\rangle e_k$.

Par unicité de la décomposition de e_j dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\langle e_k \,|\, f^{-1}(e_j)\rangle = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

b) Notons p le nombre de valeurs propres distinctes de f. D'après 3., il existe un (unique) polynôme P de degré au plus $p-1$ tel que pour toute valeur propre λ de f, on ait $P(\lambda) = \sqrt{\lambda^{-1}}$.

On a alors pour tout vecteur propre x de f de valeur propre associée λ, $P(f)^2(x) = P(\lambda)^2 x = \lambda^{-1} x = f^{-1}(x)$ donc $P(f)^2 = f^{-1}$ puisqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

c) Remarquons que f étant symétrique, toutes les puissances de f le sont également donc $g = P(f)$ est un endomorphisme symétrique de E.

On a donc pour tout $(k, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\langle g(e_k) \,|\, g(e_j)\rangle = \langle e_k \,|\, g^2(e_j)\rangle = \langle e_k \,|\, f^{-1}(e_j)\rangle = \delta_{k,j}$ donc la famille $\big(g(e_1), \ldots, g(e_n)\big)$ est orthonormale, et étant de cardinal $n = \dim E$, c'est une base orthonormée de E.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Puisque X et $\dfrac{1}{X}$ ont même loi, $P(X \leq 1) = P\left(\frac{1}{X} \leq 1\right) = P(X \geq 1)$.

   Comme X est à densité, $P(X \geq 1) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$.

   On a donc $P(X \leq 1) = \frac{1}{2}$.

2. On sait que f est constante sur $]0,1]$ et que $P(X \leq 1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

   On a donc pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

   De plus, pour tout $x \in]0,1]$, $P(X \leq x) = P\left(X \geq \frac{1}{x}\right)$ soit $\dfrac{x}{2} = \displaystyle\int_{1/x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   L'application f étant continue sur $]0,+\infty[$, les deux membres de la dernière égalité sont dérivables et on obtient en dérivant :

   $\forall x \in]0,1]$, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ou, de manière équivalente $\forall x \geq 1$, $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}$.

   Réciproquement notons f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

   Alors f est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$, à valeurs positives et d'intégrale convergente égale à 1 donc f est une densité de probabilité et elle est constante sur $]0,1]$.

   De plus, on a pour tout $x \leq 0$, $P(X \leq x) = P(\frac{1}{X} \leq x) = 0$ et pour tout $x \in]0,1]$, $P(X \leq x) = \frac{x}{2}$ et $P(\frac{1}{X} \leq x) = P(X \geq \frac{1}{x}) = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}$ donc $\forall x \in]0,1]$, $P(X \leq x) = P(\frac{1}{X} \leq x)$.

   Enfin, si $x > 1$, on a d'après ce qu'on vient de montrer $P(X \leq \frac{1}{x}) = P(\frac{1}{X} \leq \frac{1}{x})$
   soit $P(\frac{1}{X} \geq x) = P(X \geq x)$ ou encore, en passant aux événements contraires,

   $$P(X < x) = P(\frac{1}{X} < x)$$

   et finalement, compte-tenu du fait que X est à densité,

   $$P(X \leq x) = P(\frac{1}{X} \leq x).$$

   X et $\dfrac{1}{X}$ ont donc même fonction de répartition et par conséquent même loi.

Concours HEC 2019

Sujet S 313

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : énoncer le théorème du rang.
2. Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que :
$$u \circ v \circ u = u \quad \text{et} \quad v \circ u \circ v = v$$
   a) Vérifier que $v \circ u$ est un projecteur sur E.
   b) Montrer que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(v \circ u)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$.
   c) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

   On note E_1 et F_1 des sous espaces vectoriels de E et F tels que :
$$E = \mathrm{Ker}(u) \oplus E_1 \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Im}(u) \oplus F_1 \ .$$
   On définit ensuite l'application linéaire $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E_1, \mathrm{Im}(u))$, comme la restriction de u à E_1.

   a) Montrer que $\tilde{u}$ est une application linéaire bijective.

   En utilisant l'isomorphisme réciproque $\tilde{u}^{-1}$ de $\tilde{u}$, on note alors v l'unique application linéaire de F dans E telle que
$$v(y) = \begin{cases} \tilde{u}^{-1}(y) & \text{si } y \in \mathrm{Im}(u) \\ 0 & \text{si } y \in F_1 \end{cases}$$
   b) Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = F_1$ et $\mathrm{Im}(v) = E_1$.
   c) Montrer que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.
2. a) On a bien $v \circ u \circ v \circ u = v \circ u$.

   b) L'inclusion $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$ est toujours vraie. Réciproquement

$$\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(v \circ u \circ v) \subset \mathrm{Im}(v \circ u) \ .$$

   De même, l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$ est toujours vraie. Réciproquement

$$\mathrm{Ker}(v \circ u) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v \circ u) = \mathrm{Ker}(u) \ .$$

   c) Comme $v \circ u$ est un projecteur, on a bien $E = \mathrm{Ker}(v \circ u) \oplus \mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$.
3. a) On montre tout d'abord que $\tilde{u}$ est injectif : en effet si $x \in E_1$ est tel que $u(x) = 0$, alors $x \in E_1 \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$. D'autre part

$$\dim(E_1) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u)) \ .$$

   et $\tilde{u}$ est bien bijectif.

   b) Ceci vient de la définition de v (dont on pourra demander de justifier l'unicité) et du fait que $\tilde{u}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(u), E_1)$ est bijectif.

   c) Pour $u \circ v \circ u = u$, cette égalité est évidemment vraie sur $\mathrm{Ker}(u)$. Sur E_1, elle l'est aussi car

$$u \circ v \circ u(x) = u \circ v(y) = u \circ \tilde{u}^{-1}(y) = y = u(x) \ .$$

   Pour $v \circ u \circ v = v$, cette égalité est évidemment vraie sur F_1. Sur $\mathrm{Im}(u)$,

$$v \circ u \circ v(y) = v \circ u(\tilde{u}^{-1}(y)) = v(y) \ .$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

Comme g doit être monotone, on distingue les deux cas envisageables :

- g croissante

On veut : $\forall\, x \in]-1,+1[, \quad P[g(X) \leq g(x)] = 1 - \mathrm{e}^{-g(x)} = P[X \leq x] = \dfrac{x+1}{2}$, d'où :

$$g(x) = -\ln\left(\frac{1-x}{2}\right) \ .$$

g est alors une bijection croissante de $]-1,+1[$ sur $]0,+\infty[$.

- g décroissante

On veut : $\forall\, x \in]-1,+1[, \quad P[g(X) \leq g(x)] = 1 - \mathrm{e}^{-g(x)} = P[X \geq x] = \dfrac{1-x}{2}$, d'où :

$$g(x) = -\ln\left(\frac{1+x}{2}\right) \ .$$

g est alors une bijection décroissante de $]-1,+1[$ sur $]0,+\infty[$.

Concours HEC 2019

Sujet S 316

EXERCICE PRINCIPAL

On considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$; on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ constitué des matrices symétriques (resp. des matrices antisymétriques).

Le but de l'exercice est d'étudier l'équation (E) d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$ {}^tM + M^2 = I_n $$

1. Question de cours : sous-espaces supplémentaires : définition et caractérisations.

2. Montrer que toute solution de (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ possède un polynôme annulateur de degré 4. Qu'en déduit-on pour les valeurs propres d'une solution de (E) ?

3. Soit M une solution de (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   a) Montrer que M et ${}^tM$ commutent.

   b) Justifier l'existence et l'unicité de $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ tel que $M = S + A$.

   c) Avec les notations précédentes, montrer que :

$$ \begin{cases} AS = SA, \\ S + S^2 + A^2 = I_n, \\ -A + 2AS = 0. \end{cases} $$

   d) Justifier l'existence d'une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}SP$ soit diagonale et $A' = P^{-1}AP$ soit antisymétrique.

   e) Indiquer les relations entre D et A' résultant de c).

   f) En déduire que $A' = 0$ et préciser les valeurs possibles pour les coefficients diagonaux de D.

4. Déterminer la forme des solutions de (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.

2. Si M est solution de (E), $M = {}^t({}^tM) = {}^t(I_n - M^2) = I_n - ({}^tM)^2 = I_n - (I_n - M^2)^2 = 2M^2 - M^4$.

   On en déduit que $P = X^4 - 2X^2 + X = X(X-1)(X^2+X-1)$ est un polynôme annulateur de M.

   Par conséquent, si M est solution de (E), $\mathrm{Sp}(M) \subset \left\{0, 1, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

3. a) Comme M est solution de (E), ${}^tM = I_n - M^2$ donc ${}^tM.M = M - M^3 = M.{}^tM$.

   b) Par analyse-synthèse, on trouve l'unique décomposition cherchée :

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)\ .$$

   c) D'après 3.b), $S = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$ donc, vu que M et ${}^tM$ commutent, S et A commutent.

   On peut donc appliquer la formule du binôme donc ${}^tM + M^2 = S - A + S^2 + 2AS + A^2$.

   On remarque que S^2 et A^2 sont symétriques car ${}^tS^2 = ({}^tS)^2 = S^2$ et ${}^tA^2 = ({}^tA)^2 = (-A)^2 = A^2$. De même, AS est antisymétrique car ${}^t(AS) = {}^tS{}^tA = -SA = -AS$.

   Par unicité de la décomposition d'une matrice en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, l'égalité $\underbrace{S + S^2 + A^2}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})} + \underbrace{(-A + 2AS)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})} = I_n$ donne :

$$S + S^2 + A^2 = I_n \text{ et } -A + 2AS = 0\ .$$

   d) Le théorème de réduction des matrices symétriques réelles donne l'existence d'une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}SP = D$ soit diagonale. Si l'on pose $A' = P^{-1}AP$, la matrice A' est antisymétrique car $A' = {}^tPAP$ donc ${}^tA' = {}^tP{}^tA{}^t({}^tP) = {}^tP(-A)P = -{}^tPAP = -A'$.

   e) $\begin{cases} A'D = DA', \\ D + D^2 + A'^2 = I_n, \\ -A' + 2A'D = 0. \end{cases}$

   f) Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $A' = (a'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Alors le terme général de $A'D - DA'$ vaut $a'_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i)$, celui de $-A' + 2A'D$ vaut $a'_{i,j}(-1 + 2\lambda_j)$ et le i-ème coefficient diagonal de $D + D^2 + A'^2$ vaut $\lambda_i + \lambda_i^2 + \sum_{k=1}^{n} a'_{i,k}a'_{k,i} = \lambda_i + \lambda_i^2 - \sum_{k=1}^{n} a'^2_{i,k}$.

   On a donc pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{cases} a'_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0 \\ a'_{i,j}(-1 + 2\lambda_j) = 0 \\ \lambda_i + \lambda_i^2 - \sum_{k=1}^{n} a'^2_{i,k} = 1. \end{cases}$$

Si l'un des $a'_{i,j}$ était non nul, on aurait $\lambda_i = \lambda_j = \dfrac{1}{2}$ mais alors $\lambda_i + \lambda_i^2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a'^2_{i,k} \leq \dfrac{3}{4} < 1$ ce qui contredit la dernière relation ci-dessus.

On a donc $A' = 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i + \lambda_i^2 - 1 = 0$ soit $\lambda_i \in \{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$.

4. D'après la question précédente, si M est solution de (E), il existe P matrice orthogonale et D matrice diagonale à coefficients diagonaux appartenant à $\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$ tels que $M = PDP^{-1}$.

   Réciproquement soit M une matrice de la forme précédente. Alors M est symétrique car $P^{-1} = {}^tP$ et que ${}^tD = D$. On en déduit que ${}^tM + M^2 = M + M^2 = P(D + D^2)P^{-1} = I_n$: en effet $D + D^2 = I_n$ étant donné que tous les coefficients diagonaux de D vérifient $\lambda + \lambda^2 = 1$. La matrice M est donc solution de (E).

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Soit f la densité continue de X.
   D'après le théorème de transfert, l'existence de $E(|X - d|)$ équivaut à l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x - d| f(x)\,\mathrm{d}x$, et celle-ci est assurée par le fait que pour tout x réel,

$$0 \leq |x - d| f(x) \leq |x| f(x) + |d| f(x).$$

   Donc $E(|X - d|)$ existe et

$$\begin{aligned} E(|X-d|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x-d| f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{d} (d-x) f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d}^{+\infty} (x-d) f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= d\int_{-\infty}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{d} x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x - d\int_{d}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

2. D'après l'expression précédente l'application $g : d \mapsto E(|X - d|)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} g'(d) &= \int_{-\infty}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + df(d) - df(d) - df(d) - \int_{d}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + df(d) \\ &= \int_{-\infty}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{d}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -1 + 2\int_{-\infty}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x = -1 + 2F_X(d) \end{aligned}$$

   Comme la fonction de répartition de X est continue et croissante sur $\mathbf{R}$ et tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$, elle prend la valeur $\dfrac{1}{2}$ sur un intervalle fermé $[a, b]$ (éventuellement réduit à un point). La fonction g est décroissante sur $]-\infty, a]$, constante sur $[a, b]$ et croissante sur $[b, +\infty[$. Donc g est minimale en tout point de $[a, b]$: ces points sont les médianes de X.

Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Quelle est sa dimension ?

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours

2. a) La négligeabilité $n^r \frac{x^n}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, quand n tend vers l'infini, entraîne la convergence de la série $\sum n^r \frac{x^n}{n!}$ et l'existence de $S_r(x)$.

b) $(Z_x)^r = f(Y_x)$ avec $f(t) = \frac{t^r}{x^r}$.

D'après a), $f(n)P(Y_x = n) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^r} n^r \frac{x^n}{n!}$ est le terme général d'une série positive convergente, donc d'après le théorème de transfert, $(Z_x)^r$ admet une espérance et

$$E\left((Z_x)^r\right) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^r} \sum_{n=0}^{+\infty} n^r \frac{x^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^r} S_r(x)\,.$$

3. a) $E(Z_x) = \frac{E(Y_x)}{x} = 1$ et $V(Z_x) = \frac{V(Y_x)}{x^2} = \frac{1}{x}$; donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) \leq \frac{1/x}{x^{-2/3}} = \frac{1}{x^{1/3}}$$

On a donc, par encadrement, $P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ou encore, en passant à l'événement contraire, $P\left(|Z_x - 1| < x^{-1/3}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

En outre, l'événement $\left(|Z_x - 1| < x^{-1/3}\right) = \left(-x^{-1/3} < Z_x - 1 < x^{-1/3}\right)$ est inclus dans l'événement $\left(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}\right)$ donc on a également $P\left(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

b) Pour $a > 0$, on a d'après l'inégalité de Markov, $P\left(Z_x \geq a\right) = P\left((Z_x)^r \geq a^r\right) \leq \frac{E\left((Z_x)^r\right)}{a^r}$ soit $a^r P\left((Z_x)^r \geq a^r\right) \leq E\left((Z_x)^r\right)$ ce dernier résultat restant vrai pour $a = 0$. On a donc l'inégalité souhaitée puisque si $x \geq 1$, $a = 1 - x^{-1/3} \geq 0$.

4. a) La variable $T_{x,k}$ est une fonction de Y_x donc, en vertu du théorème de transfert, l'existence de $E\left(T_{x,k}\right)$ équivaut à l'absolue convergence de la série de terme général

$$u_n = n(n-1)\ldots(n-k+1)P(Y_x = n) = \mathrm{e}^{-x} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n!} x^n\,.$$

Pour $n \in [\![0, k-1]\!]$, $u_n = 0$ et pour $n \geq k$, $u_n = \mathrm{e}^{-x} x^k \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$ donc la série positive $\sum u_n$ est bien convergente de somme $\mathrm{e}^{-x} x^k \mathrm{e}^x = x^k$.

La variable aléatoire $T_{x,k}$ admet donc une espérance égale à x^k.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, H_k est de degré k donc $(H_0, H_1, \ldots, H_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$. Par conséquent, il existe un unique $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $X^N = \sum_{k=0}^{N} a_k H_k$.

En considérant la valeur en 0 des deux membres, on obtient $a_0 = 0$ et en égalant leurs coefficients dominants, on obtient $a_N = 1$.

c) Le résultat est évident si $N = 0$. Si $N \in \mathbb{N}^*$, $Y_x^N = \sum_{k=1}^{N} H_k(Y_x) = \sum_{k=1}^{N} a_k T_{x,k}$ puis, en prenant l'espérance $E\big((Y_x)^N\big) = \sum_{k=1}^{N} a_k x^k$ ou encore

$$E\big((Z_x)^N\big) = \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{x^{N-k}}$$

Pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, $\frac{1}{x^{N-k}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $E\big((Z_x)^N\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

d) Le réel s appartient à $[0,1[$ donc l'application $h : t \mapsto t^s$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$: en effet, elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h''(t) = s(s-1)t^{s-2} \leq 0$. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $h(t) \leq h'(1)(t-1) + h(1)$ soit $t^s \leq s(t-1) + 1$.

On a donc $Z_x^s = Z_x^{r-N} \leq s(Z_x - 1) + 1 = (1-s) + sZ_x$ et, vu que Z_x est à valeurs strictement positives, $(Z_x)^r \leq (1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}$.

Par linéarité et croissance de l'espérance, on a donc :

$$E\big((Z_x)^r\big) \leq (1-s)E\big((Z_x)^N\big) + sE\big((Z_x)^{N+1}\big).$$

5. En posant $N = \lfloor r \rfloor$ et $s = r - N$, on a d'après les questions 3.b) et 4.d), pour tout $x > 0$;

$$(1 - x^{-1/3})^r P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \leq E\big((Z_x)^r\big) \leq (1-s)E\big((Z_x)^N\big) + sE\big((Z_x)^{N+1}\big)$$

Or, d'après 3.a), $(1-x^{-1/3})^r P(Z_x \geq 1-x^{-1/3}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.1 = 1$ et d'après 4.c), $(1-s)E\big((Z_x)^N\big) + sE\big((Z_x)^{N+1}\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} (1-s)+1 = 1$ donc, par encadrement, $E\big((Z_x)^r\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ce qui, compte-tenu de 2.b) prouve que $S_r(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r\,\mathrm{e}^x$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On sait que, muni de l'addition matricielle et de la multiplication externe des matrices par les scalaires complexes, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. En se restreignant à des scalaires réels, on conserve les propriétés qui définissent la structure d'espace vectoriel.

2. $$\dim_{\mathbb{R}} E = 2n^2 .$$

puisque les matrices $E_{k,\ell}$ et $iE_{k,\ell}$ (pour $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$) constituent une famille libre et génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

HEC
PARIS

ORAL HEC Paris 2019

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option économique

Concours HEC 2019

Sujet E 209

EXERCICE PRINCIPAL

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $\phi_A(M) = AM - MA$. Pour tout couple $(i,j) \in [|1,n|]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que tous ses éléments soit nul sauf celui à la ième ligne et jième colonne qui vaut 1.

1. Donner la définition d'une valeur propre. Quels sont les conditions necéssaires et suffisantes afin qu'une matrice soit diagonalisable.
2. Montrer que 0 est valeur propre de ϕ_A.
3. **Dans cette question uniquement on suppose $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.**
   - Écrire la matrice associée à ϕ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
4. Dans cette question on suppose $n \geq 2$ et on considère une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ ainsi que l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\psi(M) = PMP^{-1}$.
   - Montrer que ψ est un automorphisme.
   - Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\psi(B) = A$. Montrer que si ϕ_B est diagonalisable il en est de même de ϕ_A.
5. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Montrer que la matrice E_{ij} $(1 \leq i,j \leq n)$ est vecteur propre de ϕ_D.
6. Montrer que si A est diagonalisable il en est de même de ϕ_A.

Exercice sans préparation

1. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a(x+4)}{b+|x|} & \text{si} \quad x > -4 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction de répartition.

2. Discuter l'existence d'une espérance et d'une variance pour variable aléatoire X admettant f comme fonction de répartition.

Corrigé de l'exercice principal

1. Cours
2. $\phi_A(I_n) = 0$ et $I_n \neq 0$ donc 0 est une valeur propre de ϕ_A.
3. La matrice demandée est : $\mathrm{Mat}(\phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Le rang de cette matrice est 2 et par le théorème du rang : $\dim(E_0) = 4 - 2 = 2$.
4. (a) La linéarité est immédiate et $\phi^{-1}(M) = P^{-1}MP$.
   (b) $B = P^{-1}AP$ et si X est un vecteur propre de ϕ_B alors $\psi(X)$ est un vecteur propre de ϕ_A Ainsi, s'il existe une base de vecteurs propres de B, alors il existe une base de vecteurs propres de A.
5. Pour tout couple $(i,j) \in \{1,2\}^2$, on a :
$$\phi_D(E_{i,j}) = DE_{i,j} - E_{i,j}D = \lambda_i E_{i,j} - \lambda_j E_{i,j} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$$
   de sorte que $E_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_D.
   Par conséquent, il existe une base composée de vecteurs propres de phi_D, ce qui permet d'affirmer que l'endomorphisme ϕ_D est diagonalisable.
6. Si A est diagonalisable alors A est semblable à une matrice diagonale D ;
   d'après la question 5, ϕ_D est diagonalisable et d'après la question 4, ϕ_A aussi.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. On peut procéder par analyse-synthèse.

   • Analyse : recherche de conditions nécessaires pour que f soit une fonction de répartition.
   Comme la limite de f en $+\infty$ doit être égale à 1, on a nécessairement $a = 1$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$, avec :
$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{b-4}{(x+b)^2} \qquad \forall x \in]-4, 0[,\ f'(x) = \frac{b+4}{(b-x)^2} \qquad \forall x < -4,\ f'(x) = 0$$
   Comme f doit être croissante, on a nécessairement $b \geq 4$.

   • Synthèse.
   Si $a = 1$ et $b \geq 4$, f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$. Comme f tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$, il s'agit bien d'une fonction de répartition.
2. Soit g le prolongement de f' à $\mathbb{R}$ obtenu en posant $g(-4) = g(0) = 0$.
   La variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
   • Si $b \neq 4$, $xg(x)$ est équivalent à $\dfrac{b-4}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
   Par comparaison, l'intégrale est divergente et X n'a pas d'espérance.
   • Si $b = 4$ alors $P(X \in [-4, 0]) = 1$; donc X est bornée et admet une espérance et une variance.

Concours HEC 2019

Sujet E 211

EXERCICE PRINCIPAL

Pour tout nombre réel x, on pose

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \text{et} \qquad S(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. a) Question de cours : propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

   b) Donner l'allure du graphe de la fonction S.

2. Soit X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi normale centrée réduite.

   a) Pour tout $x > 0$, justifier l'inégalité : $\mathbb{P}(|X| > x) \leq \dfrac{1}{x^2}$.

   b) Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$.

3. a) Justifier, pour tout réel $A > 0$, l'égalité :

$$\int_0^A S(x)\,\mathrm{d}x = A\,S(A) + \int_0^A x\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

   b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = S(x)\,\mathrm{e}^{x^2/2}$.

   a) A l'aide du théorème d'intégration par parties, montrer que

$$\forall\, x > 0, \qquad \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq S(x) \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\,.$$

   b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Sujet E 211

EXERCICE SANS PRÉPARATION

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2.

1. Construire une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles.
2. Construire une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours.

b) La fonction S est décroissante et son graphe se déduit aisément de celui de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite, puisque $S = 1 - \varphi$.

2. a) On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X qui a pour espérance $E(X) = 0$ et pour variance $V(X) = 1$.

b)

• La fonction $x \mapsto 1 - \Phi(x)$ est définie, continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.

• En utilisant la question précédente et les propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on trouve :

$$\forall x > 0,\ S(x) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(|X| > x) \leq \frac{1}{2\,x^2}\,.$$

Dès lors, le critère de comparaison des intégrales de fonctions continues et positives prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)dx$ converge.

3. a) Comme la dérivée de S est $-\varphi$, on parvient au résultat en intégrant par parties.

b) En faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient, grâce à la majoration trouvée en 2.b

$$\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

On conclut que

$$\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

4. a) Soit $x > 0$.

• On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^A e^{-t^2/2}dt$ en posant :

$$u'(t) = te^{-t^2/2} \qquad \text{et} \qquad v(t) = \frac{1}{t}$$

les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, +\infty[$. Ainsi,

$$\forall\, A > x \qquad \int_x^A e^{-t^2/2}dt = \Big[-\frac{e^{-t^2/2}}{t}\Big]_x^A - \int_x^A \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, chaque intégrale étant convergente (puisque celle de gauche l'est...),

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt \qquad (*)$$

Par théorème de positivité de l'intégrale,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x}.$$

Il reste à multiplier par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ pour obtenir la majoration demandée.

• On effectue une nouvelle intégration par parties dans $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt$ pour obtenir

$$\forall\, A > x > 0 \qquad \int_x^A \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt = \Big[-\frac{e^{-t^2/2}}{t^3}\Big]_x^A - \int_x^A \frac{3e^{-t^2/2}}{t^4}dt.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, chaque intégrale étant convergente,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x^3} - \int_x^{+\infty} \frac{2e^{-t^2/2}}{t^4}dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x^3}.$$

En revenant à $(*)$, on trouve

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt \geq \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \frac{e^{-x^2/2}}{x^3}$$

Il reste à multiplier par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ pour obtenir la minoration demandée.

b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente, puisque $f(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$ quand x tend vers l'infini.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. On propose la famille composée des quatre matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que ces quatre matrices sont inversibles (matrices triangulaires sans 0 sur la diagonale) et l'on vérifie qu'elles constituent une famille libre de quatre vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension 4.

2. On propose la famille composée des quatre matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que ces quatre matrices sont diagonalisables car elles possèdent chacune deux valeurs propres réelles distinctes. On vérifie également que ces quatre matrices constituent une famille libre.

Remarque : l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel puisqu'il n'est pas stable par addition.

Concours HEC 2019

Sujet E 214

EXERCICE PRINCIPAL

Soit (a, b) un couple de réels tels que $a^2 - 4b > 0$.
On s'intéresse ici aux fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$f'' + af' + bf = 0.$$

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On note F l'ensemble des éléments f de E tels que

$$f'' + af' + bf = 0.$$

On note enfin F_0 l'ensemble des éléments de F vérifiant de plus

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

1. Question de cours.
   Rappeler la définition de la dimension d'un espace vectoriel. Comparer cette dimension avec le cardinal d'une famille libre de vecteurs de ce même espace vectoriel.
2. Montrer que F et F_0 sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
3. Soient s et r les deux solutions réelles de l'équation

   $$x^2 + ax + b = 0.$$

   On suppose $s < r$. Soient f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = e^{rx} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = e^{sx}.$$

   Montrer que (f_1, f_2) est une famille libre d'éléments de F. Que peut-on en déduire concernant la dimension de F ?
4. Soit f un élément de F.
   (a) Montrer qu'il existe un unique couple (a_1, a_2) de réels tels que

   $$f - a_1 f_1 - a_2 f_2 \in F_0.$$

   (b) Soient g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1(x) = e^{-rx}(f'(x) - sf(x)) \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = e^{-sx}(f'(x) - rf(x)).$$

   Montrer que g_1 et g_2 sont deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
   (c) Soit $f \in F_0$. Soient g_1 et g_2 définies comme dans la question précédente. Montrer que les fonctions g_1, g_2 et f sont identiquement nulles.
5. Soit φ l'application définie par

   $$\varphi \begin{cases} F \to \mathbb{R}^2 \\ f \to \Big(f(0), f'(0)\Big) \end{cases}$$

   Montrer que φ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la même loi uniforme sur $[-1, 1]$. Soit U une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé, indépendante de X et telle que

$$P(U = 1) = P(U = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S = UX$.

1. (a) Que fait la fonction *Scilab* suivante ?

```
function y=rad()
  x=rand();
  if x < = 0.5 then
        y=1
    else
        y=-1
  end
endfunction
```

   (b) Ecrire un script *Scilab* utilisant la fonction précédente qui permet de simuler la loi de S.

2. Déterminer la loi de S.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.
2. On montre que F et F_0 sont inclus dans E, qu'ils contiennent chacun la fonction nulle et qu'ils sont stables par combinaison linéaire. On conclut donc que F et F_0 sont deux sous-espaces vectoriels de E. En tant que tels, F et F_0 sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
3. • On montre d'abord que f_1 et f_2 sont deux éléments de F. En effet, f_1 et f_2 sont dans E et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = e^{rx} \qquad f_1'(x) = re^{rx} \qquad f_1''(x) = r^2 e^{rx}$$
si bien que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_1''(x) + af_1'(x) + bf_1(x) = e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0.$$
Donc f_1 est dans F. On montre de même que f_2 est dans F.
• Il reste à montrer que la famille (f_1, f_2) est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda e^{rx} + \mu e^{sx} = 0 \qquad (*)$$
En divisant par $e^{rx} > 0$, on obtient $\lambda + \mu e^{(s-r)x} = 0$ et on fait tendre x vers $+\infty$.
Sachant que $s - r < 0$, il reste $\lambda = 0$. En reportant dans $(*)$ et en divisant par $e^{sx} > 0$, on trouve $\mu = 0$. On conclut que (f_1, f_2) est une famille libre d'éléments de F. Ainsi, par la question 1, $\dim(F) \geq 2$.
4. (a) Soit $g = f - a_1 f_1 - a_2 f_2$. Comme f, f_1 et f_2 sont dans F qui est un espace vectoriel, alors g est dans F. De plus, $g \in F_0 \iff g(0) = g'(0) = 0$, d'où :
$$g \in F_0 \iff \begin{cases} f(0) - a_1 f_1(0) - a_2 f_2(0) = 0 \\ f'(0) - a_1 f_1'(0) - a_2 f_2'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(0) = a_1 + a_2 \\ f'(0) = ra_1 + sa_2 \end{cases}$$
Ainsi, comme $s - r \neq 0$, $g \in F_0 \iff \begin{cases} a_1 = \dfrac{f'(0) - sf(0)}{r - s} \\ a_2 = \dfrac{f'(0) - rf(0)}{s - r} \end{cases}$
Il existe donc un unique couple (a_1, a_2) de réels tels que $f - a_1 f_1 - a_2 f_2 \in F_0$.

   (b) Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, g_1 et g_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1'(x) = e^{-rx}\Big(f''(x) - sf'(x)\Big) - re^{-rx}\Big(f'(x) - sf(x)\Big)$$
d'où,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1'(x) = e^{-rx}\Big(f''(x) - (s+r)f'(x) + srf(x)\Big)$$
Comme s et r sont les deux solutions réelles de l'équation du second degré $x^2 + ax + b = 0$ alors $sr = b$ et $s + r = -a$. Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1'(x) = e^{-rx}\Big(f''(x) + af'(x) + bf(x)\Big) = 0 \qquad \text{car} \quad f \in F.$$
On montre de même que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_2'(x) = e^{-sx}\Big(f''(x) + af'(x) + bf(x)\Big) = 0$$
du fait que $f \in F$. On conclut que les fonctions g_1 et g_2 sont constantes sur $\mathbb{R}$.

(c) Comme $f \in F_0 \subset F$, les fonctions g_1 et g_2 définies comme dans la question précédente sont constantes sur $\mathbb{R}$.
Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1(x) = g_1(0) = e^0\Big(f'(0) - sf(0)\Big) = 0 \qquad \text{car} \quad f \in F_0.$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_2(x) = g_2(0) = e^0\Big(f'(0) - rf(0)\Big) = 0 \qquad \text{car} \quad f \in F_0.$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$0 = g_1(x) = e^{-rx}\Big(f'(x) - sf(x)\Big) \text{ et} \qquad 0 = g_2(x) = e^{-sx}\Big(f'(x) - rf(x)\Big)$$

ce qui implique que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad sf(x) = rf(x) \qquad \Rightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad (s-r)f(x) = 0.$$

Comme $s < r$, on conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
Réciproquement, la fonction nulle est bien dans F_0, si bien que $F_0 = \{0\}$.

5. • On commence par montrer que φ est linéaire.
• Puis, l'on montre que φ est injective. En effet,

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{f \in F,\ f(0) = f'(0) = 0\} = F_0 = \{0\} \qquad \text{d'après la question 4(c).}$$

• On montre ensuite que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \dim(F)$.
On sait déjà que la famille (f_1, f_2) est une famille libre de F. Il reste à vérifier que cette famille est également génératrice de F. Soit $f \in F$. Par la question 4(a), il existe un couple de réels (a_1, a_2) tel que $f - a_1 f_1 - a_2 f_2 \in F_0$. Or, $F_0 = \{0\}$ (question 4(c)). D'où, $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$, ce qui prouve que (f_1, f_2) est une famille libre et génératrice, donc une base de F.
• Par corollaire du théorème du rang, comme φ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, φ est bijective. On conclut que φ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. La fonction simule la loi de U.
2.
```
X=grand'1,1,'unf',-1,1) // simulation de la loi de X
U=rad() // Rademacher
S=U*X  // loi de S
```
3. On note que $S(\Omega) = [-1, 1]$. Pour tout $x \in [-1, 1]$, en utilisant le système complet d'événements $([U = 1], [U = -1])$,

$$P(S \leq x) = P(UX \leq x) = \frac{1}{2}P(X \leq x) + \frac{1}{2}P(X \geq -x).$$

D'où,

$$P(S \leq x) = \frac{1}{2}\left(P(X \leq x) + 1 - P(X \leq -x)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x+1}{2} - \frac{1-x}{2}\right) = \frac{x+1}{2}.$$

On en déduit que S suit une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Concours HEC 2019

Sujet E 218

EXERCICE PRINCIPAL

Soit $\alpha > 0$ et $\sum u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Pour tout $n \in N^*$, on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{et, si } n \geq 2, \quad v_n = \frac{u_n}{(R_{n-1})^\alpha}.$$

1. Question de cours : énoncer le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

2. **On supposera dans cette question que** $u_n = \dfrac{1}{2^n}$.
   (a) Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer R_n.
   (b) En déduire v_n, puis donner une condition sur α pour que $\sum v_n$ converge.

Désormais, on ne suppose plus que $u_n = \frac{1}{2^n}$ et on traite le cas général.

3. Exprimer v_n en fonction de R_n, R_{n-1} et α.
4. En prenant $\alpha = 1$
   (a) Exprimer $\ln(1 - v_n)$ en fonction de $\ln(R_n)$ et de $\ln(R_{n-1})$.
   (b) en déduire la nature de $\sum v_n$.
5. On suppose $\alpha > 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $R_{n-1}^\alpha \leq R_{n-1}$
   (b) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.
6. On suppose $0 < \alpha < 1$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^\alpha}$
   (b) En déduire la nature de $\sum v_n$.

Sujet E 218

Exercice sans préparation

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire discrète telle que $E(X) = V(X) = a$.

1. Donner un exemple de variable aléatoire vérifiant cette condition.
2. Montrer que $P([X \geq 2a]) \leq P([(X - a + 1)^2 \geq (a + 1)^2])$.
3. Montrer que $P([X \geq 2a]) \leq \dfrac{1}{a + 1.}$

Corrigé de l'exercice principal

1. Cours
2. (a) $\sum u_n$ converge car somme géométrique de raison $1/2 < 1$, et

$$R_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n} .$$

   (b) On en déduit $v_n = \dfrac{2^{-\alpha}}{2^{(1-\alpha)n}}$.

   La série $\sum v_n$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2^{1-\alpha}}$ donc converge si et seulement si $\alpha < 1$.

3. Pour $n \geq 1$ on a $u_n = R_{n-1} - R_n$ donc $v_n = \frac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$.
4. Lorsque $\alpha = 1$,
   (a) $v_n = 1 - \dfrac{R_n}{R_{n-1}}$ et $\ln(1-v_n) = \ln(R_n) - \ln(R_{n-1})$.

   (b) Par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1-v_k) = \ln(R_n) - \ln(R_0)$. Or $\lim R_n = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(1-v_k) = -\infty$$

   et la série $\sum \ln(1-v_n)$ diverge.
   Si (v_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum v_n$ diverge ; si (v_n) tend vers 0, $\ln(1-v_n) \sim -v_n$ et la série $\sum v_n$ étant à terme général positif, elle a même nature que $\sum \ln(1-v_n)$, à savoir divergente.
5. (a) (R_n) est positive et tend vers 0 donc il existe un rang N à partir duquel $0 \leq R_{n-1} \leq 1$. Mais alors, si $\alpha > 1$ on a $R_{n-1}^{\alpha} \leq R_{n-1}$.

   (b) Pour $n \geqslant N$ on a donc $v_n \geq \frac{u_n}{R_{n-1}}$. D'après la question précédente la série $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}}$ diverge, et par comparaison de séries à termes positifs il en est de même de $\sum v_n$.
6. (a) $\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\left(R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\right)$.

   (b) Par ailleurs, $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha}}$ est décroissante donc $\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^{\alpha}} \geq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{R_{n-1}^{\alpha}} = \frac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}^{\alpha}} = v_n$ donc $0 \leq v_n \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\right)$.

   Par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(R_{k-1}^{1-\alpha} - R_k^{1-\alpha}\right) = R_0^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}$. Puisque $1-\alpha > 0$ et $\lim R_n = 0$ on en déduit que la série $\displaystyle\sum\left(R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\right)$ converge ; par comparaison de séries à termes positifs il en est de même de $\displaystyle\sum v_n$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Une variable qui suit une loi de Poisson de paramètre a.
2. $[X \geq 2a] \subset [X - a + 1 \geq a + 1]$,
   or $a + 1 > 0$, donc $[X - a + 1 \geq a + 1] \subset [(X - a + 1)^2 \geq (a + 1)^2]$.

   Par conséquent :

   $$[X \geq 2a] \subset [(X - a + 1)^2 \geq (a + 1)^2]$$

   d'où l'inégalité souhaitée.

3. $X - a + 1$ admet une variance et donc un moment d'ordre 2. De plus nous avons

   $$E((X - a + 1)^2) = V(X - a + 1) + E(X - a + 1)^2 = V(X) + 1 = a + 1 .$$

   En appliquant l'inégalité de Markov, on obtient

   $$P([(X - a + 1)^2 \geq (a + 1)^2]) \leq \frac{E((X - a + 1)^2)}{(a + 1)^2} = \frac{1}{a + 1}$$

   d'où l'inégalité souhaitée.

Concours HEC 2019

Sujet E 219

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : énoncer le théorème de la bijection.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par la relation $f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$.

   b) Montrer que f_n s'annule sur $\mathbb{R}^+$ en un et un seul réel, que l'on note x_n, et montrer que $x_n > 1$.

3. a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ décroît. *On pourra rechercher le signe de* $f_{n+1}(x_n)$.

   b) Que déduit-on des divers résultats précédents ?

4. a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1.

   b) Montrer que la fonction $h : x \mapsto x(x-1)$ est une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.

   c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n := x_n^n$. En exprimant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h(u_n)$ en fonction de x_n, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   d) Déterminer un équivalent simple de $x_n - 1$ quand n tend vers $+\infty$.

Sujet E 219

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Une urne contient p boules numérotées de 1 à p, p étant un entier naturel non nul.
L'entier naturel n étant également non nul, on considère la variable aléatoire S égale au nombre de numéros distincts obtenus en n tirages d'une boule de l'urne, *avec* remise.
Déterminer l'espérance de S.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.

2. a) La fonction f_n est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.
Son coefficient dominant est 1 donc sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = \big((2n+1)\,x^n - (n+1)\big)\,x^n$: en notant $\alpha_n := \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{1/n}$, on observe que f_n décroît strictement sur $[0, \alpha_n]$ et croît strictement sur $[\alpha_n, +\infty[$.

b) Comme $f_n(0) = f_n(1) = -1$, pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) < 0$ d'après l'étude précédente.
Comme f_n est continue sur $[1, +\infty[$, que $f_n(1) < 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, f_n admet au moins un zéro sur $]1, +\infty[$.
Comme f_n croît strictement sur $[1, +\infty[$ puisque $\alpha_n < 1$, ce zéro est unique.
On conclut que f_n s'annule sur $\mathbb{R}^+$ en un et un seul réel $x_n \in]1, +\infty[$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{2n+3} - x_n^{n+2} - 1 = x_n^2(x_n^{n+1} + 1) - x_n^{n+2} - 1 = (x_n^{n+2} + x_n + 1)(x_n - 1)$$

et par conséquent $f_{n+1}(x_n) > 0$, ce qui implique que $x_{n+1} < x_n$. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ décroît donc.

b) La suite $(x_n)_{n\geq 1}$, décroissante et minorée, converge, et sa limite ℓ vérifie $\ell \geq 1$.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geq \ell$ donc $x_n^n \geq \ell^n$.
Si $\ell > 1$, la suite $(x_n^n)_{n\geq 1}$ diverge donc vers $+\infty$ et la suite $\big(x_n^{n+1}(x_n^n - 1)\big)_{n\geq 1}$ aussi, ce qui contredit qu'elle soit constante de valeur 1.
On conclut que $\ell = 1$.

b) La fonction h, polynomiale, est continue sur $[1, +\infty[$, et elle y est strictement croissante. Elle est donc bijective de $[1, +\infty[$ sur l'intervalle $J := h\big([1, +\infty[\big)$. Comme $h(1) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, $J = \mathbb{R}^+$.
On conclut que la fonction $h : x \mapsto x\,(x-1)$ est une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^n \geq 1$ et $h(x_n^n) = \frac{1}{x_n}$: il s'ensuit que $u_n = h^{-1}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = 1$ et que la fonction h^{-1} est continue au point 1, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers le réel $h^{-1}(1)$ qui n'est autre que le nombre d'or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

d) De la relation $\dfrac{1}{x_n^{n+1}} = x_n^n - 1$, on tire que $(n+1)\ln x_n = -\ln(x_n^n - 1)$.
Or, quand n tend vers $+\infty$, $(n+1)\ln x_n \sim n\,(x_n - 1)$ alors que $-\ln(x_n^n - 1) \sim -\ln(\phi - 1) = \ln\phi$.
Il s'ensuit que, quand n tend vers $+\infty$, $n\,(x_n - 1) \sim \ln\phi$, soit que

$$x_n - 1 \sim \frac{\ln\phi}{n}.$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

On utilisera le modèle $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, Ω étant l'ensemble des n-listes d'élément de $[\![1, p]\!]$, $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et P la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Considérons, pour $i \in [\![1, p]\!]$, la variable aléatoire X_i prenant la valeur 1 si le numéro i est l'un des numéros tirés, la valeur 0 sinon.

On constate d'abord que $S = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

D'autre part, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$P(X_i = 0) = \frac{(p-1)^n}{p^n} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n.$$

En conséquence,

$$E(S) = \sum_{i=1}^{p} E(X_i) = \sum_{i=1}^{p} P(X_i = 1) = p\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right).$$

Concours HEC 2019

Sujet E 220

EXERCICE PRINCIPAL

Dans l'exercice, n désigne un entier strictement positif.

1. Question de cours : définition d'une matrice inversible.
2. Soit A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Démontrer l'équivalence :

   $$AB \text{ est inversible} \iff A \text{ et } B \text{ sont inversibles}$$

3. Pour tout élément ω de Ω, on désigne par $B(\omega)$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par :

   $$B(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_3(\omega) \\ X_2(\omega) & X_4(\omega) \end{pmatrix}$$

   On note U l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels la matrice $B(\omega)$ est inversible, et on admet que U est un événement.

   (a) Démontrer que $P(U) = 2p^2(1-p^2)$.

   (b) En déduire que $P(U) \leq \dfrac{1}{2}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout élément ω de Ω on désigne par $B_k(\omega)$ la matrice carrée de taille 2 telle que :

   $$B_k(\omega) = \begin{pmatrix} X_{4k+1}(\omega) & X_{4k+3}(\omega) \\ X_{4k+2}(\omega) & X_{4k+4}(\omega) \end{pmatrix}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels la matrice-produit $B_0(\omega) \times B_1(\omega) \times \cdots \times B_n(\omega)$ est inversible.

   Calculer $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)$ et $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)$.

Sujet E 220

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x\left((\ln x)^2 + 2y^2\right) .$$

1. Démontrer qu'il existe dans $\mathcal{O}$ un unique point-col pour f.
2. La fonction f admet-elle sur $\mathcal{O}$ un maximum global ? un minimum global ?

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.
2. • Si A et B sont inversibles, alors :

$$AB\,B^{-1}A^{-1} = A\,A^{-1} = I_n$$

ce qui prouve que AB est inversible et que son inverse est $B^{-1}A^{-1}$.

• Si AB est inversible, la matrice

$$A\big(B\,(AB)^{-1}\big) = \big((AB)^{-1}A\big)B = I_n$$

ce qui prouve que A et B sont inversibles, d'inverses respectives $B\,(AB)^{-1}$ et $(AB)^{-1}A$.

3. (a)

$$U = \{\omega \in \Omega ;\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\} .$$

Il en résulte que :

$$P(U) = 2p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) = 2p^2(1-p)(1-p+2p) = 2p^2(1-p^2)$$

(b) On déduit l'inégalité demandée de l'encadrement $0 \leq p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$.

4. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante (puisque l'inversibilité de la matrice $B_0B_1 \dots B_{n+1}$ entraîne celle de $B_0B_1 \dots B_n$), on a :

• $P\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) = P(U_0) = 2p^2(1-p^2)$.

• $P\Big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(2p^2(1-p^2)\big)^{n+1} = 0$, grâce à 3.b et au lemme des coalitions, qui permet d'affirmer l'indépendance mutuelle des événements liés aux diverses matrices B_k.

Corrigé de l'exercice sans préparation

$$\forall (x,y) \in \mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + 2y^2\right) .$$

1. La fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathcal{O}$.
Ses dérivées partielles d'ordre 1 sont données par

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = (\ln x)^2 + 2\ln x + 2y \\ \partial_2(f)(x,y) = 4xy \end{cases}$$

et sa matrice hessienne par

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix}.$$

Par annulation des deux dérivées partielles d'ordre 1, on trouve exactement deux points critiques dans l'ouvert $\mathcal{O}$:

$$\begin{cases} A = (1,0) \\ B = (\mathrm{e}^{-2}, 0) \end{cases}.$$

Au point A, les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont strictement positives (2 et 4) et f admet donc un minimum local en A.

Au point B, les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont de signes opposés ($-2\mathrm{e}^{-2}$ et $4\mathrm{e}^{-2}$) et B est un point col de f.

L'unique point col de f est donc B.

2. La fonction f n'admet aucun maximum global puisqu'elle n'admet aucun maximum locl.

   Le point A correspond à un minimum global de f puisque $f(0,1) = 0$ et que la fonction f ne prend que des valeurs positives ou nulles sur $\mathcal{O}$.

HEC
PARIS

ORAL HEC Paris 2019

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option technologique

Concours HEC 2019

Sujet T 2

EXERCICE PRINCIPAL

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout entier n non nul :

$$P([X > n]) \neq 0$$

On dit que X vérifie la propriété d'absence de mémoire lorsque :

$$\forall n \geq 1,\ \forall m \geq 1, \quad P_{[X>n]}([X > n + m]) = P([X > m])$$

1 a) Question de cours : définition d'une suite géométrique.
b) Quelles sont les suites géométriques admettant une limite finie ?

2. Soit T une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Établir que T vérifie la propriété d'absence de mémoire.

3. Soit S une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété d'absence de mémoire.
On pose, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = P([S > n])$.

a) Établir que :

$$\forall n \geq 1,\ \forall m \geq 1, \quad u_{n+m} = u_n u_m\ .$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est géométrique.

c) Exprimer $P([S = n])$ en fonction de certains termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

d) En déduire que la variable aléatoire S suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

4. Quel résultat a-t-on ainsi démontré ?

Exercice sans préparation

Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ admettant :

- $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur colonne propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$

et

- $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur colonne propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 4$.

Corrigé de l'exercice principal

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout entier n non nul : $P([X > n]) \neq 0$.
On dit que X vérifie la propriété d'absence de mémoire lorsque :

$$\forall n \geq 1 \; \forall m \geq 1 : \quad P_{[X>n]}([X > n+m]) = P([X > m])$$

1 a) Question de cours.

b) Les suites géométriques convergentes sont celles dont la raison appartient à l'intervalle $]-1, +1]$.

2. La variable aléatoire T étant géométrique, on a : $P([T > n]) = (1-p)^n$.

Or :

$$P_{[T>n]}([T > n+m]) = \frac{P([T > n+m] \cap [T > n])}{P([T > n])} = \frac{P([T > n+m])}{P([T > n])} = \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^n} = (1-p)^m = P([T > m]) .$$

Bilan : si T suit une loi géométrique alors T vérifie la propriété d'absence de mémoire.

3 a)

$$P_{[S>n]}([S > n+m]) = \frac{P([S > n+m] \cap [S > n])}{P([S > n])} = \frac{P([S > n+m])}{P([S > n])} = \frac{u_{n+m}}{u_n} = u_m .$$

En résulte l'égalité vraie pour tout couple d'entiers non nuls (n, m) : $u_{n+m} = u_n u_m$.

b) L'égalité précédente étant vraie pour tout couple d'entiers non nuls (n, m) on obtient, pour $m = 1$: $u_{n+1} = u_1 u_n$.
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc géométrique de raison u_1.

c) S étant à valeurs entières on a, pour tout entier n non nul :

$$P([S = n]) = P([S > n-1]) - P([S > n]) = u_{n-1} - u_n .$$

d) On a ainsi :

$$P([S = n]) = u_1^{n-1} - u_1^n = u_1^{n-1}(1 - u_1) .$$

La variable aléatoire S suit donc la loi géométrique de paramètre $p = 1 - u_1$.

4. Les variables aléatoires à valeurs entières et qui vérifient la propriété d'absence de mémoire sont les variables aléatoires qui suivent une loi géométrique.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ alors la matrice $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ convient.

HEC
PARIS

ORAL HEC Paris 2019

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option littéraire B/L

Concours HEC 2019

Sujet BL 1

EXERCICE PRINCIPAL

Dans l'exercice n désignera un entier non nul.
Toutes les variables aléatoires que l'on considérera sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et, lorsqu'elle existe, on note $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X.

On place n boules dans n boîtes numérotées de 1 à n selon le protocole suivant : chaque boule est placée uniformément et indépendamment des autres boules (une boîte pouvant donc contenir plusieurs boules). Si U_i désigne le numéro de la boîte contenant la boule numéro i, les variables aléatoires U_i sont ainsi indépendantes et suivent chacune la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans la boîte numéro i et $N = \sup(N_1, \ldots, N_n)$.
La variable aléatoire N désigne donc le plus grand nombre de boules contenues dans une des n boîtes.

1. Question de cours : loi de Poisson. Lien avec les lois binomiales.

2. a) Déterminer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de la variable aléatoire N_i.
Les variables aléatoires $N_1, \ldots, N_n$ sont-elles indépendantes ?

b) Etablir que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a : $P([N = k]) \leq \sum_{i=1}^{n} P([N_i = k]) \leq \frac{n}{k!}$.

3. a) Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs et de limite $+\infty$ telle que, pour tout entier k non nul :

$$(\frac{e}{\alpha_k})^{\alpha_k} = \frac{1}{k^3}$$

b) Déterminer un équivalent simple de α_n .

4. Etablir que la variable aléatoire N admet une espérance et que, pour tout $\alpha \in [1, n]$ on a :

$$E(N) \leq nP([N > \alpha]) + \alpha$$

5. a) Etablir que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a : $P([N = k]) \leq \frac{n}{k!}$.

b) Montrer que pour tout entier non nul k, on a : $\frac{1}{k!} \leq (\frac{e}{k})^k$.
En déduire que, pour tout $\alpha \in [1, n]$, on a : $P([N > \alpha]) \leq n^2(\frac{e}{\alpha})^{\alpha}$.

6) Démontrer l'existence d'une constante C telle que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$E(N) \leq C\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$$

Exercice sans préparation

Soit n un entier non nul et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel.
Soit p un entier non nul et $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de vecteur de E telle qu'il existe deux réels A et B strictement positifs vérifiant :

$$\forall x \in E \quad A||x||^2 \leq \sum_{i=1}^{p} < x, e_i >^2 \leq B||x||^2 \quad (\star)$$

1. Soit $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Montrer que $F = E$.
2. Montrer que si $A = B = 1$ et si tous les vecteurs e_i sont de norme égale à 1, alors la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base orthonormée de E.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.

2. a) $N_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$.

b) Les variables aléatoires $N_1, \ldots, N_n$ ne sont pas indépendantes, puisque par exemple on a :

$$P([N_1 = n] \cap [N_2 = n]) = 0 \neq P([N_1 = n])P([N_2 = n]) .$$

3. Étant à support fini, la variable aléatoire N admet une espérance.
De plus : $N = \underbrace{N}_{\leq n}\mathbb{I}_{[N>\alpha]} + \underbrace{N\mathbb{I}_{[N\leq\alpha]}}_{\leq\alpha} \leq n\mathbb{I}_{[N>\alpha]} + \alpha$.

Par propriété de croissance de l'espérance, il s'ensuit que :

$$E(N) \leq nP([N > \alpha]) + \alpha .$$

4. a) Soit $f : t \to f(t) = (\frac{\mathrm{e}}{t})^t = \exp(t\ln(\frac{\mathrm{e}}{t})) = \exp(t - t\ln(t))$.
$f'(t) = -\ln(t)f(t) < 0$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
La fonction f est ainsi continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et réalise donc une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]\lim_{t\to+\infty} f(t), f(1)[=]0, \mathrm{e}[$.

Puisque $\frac{1}{k^3} \in]0, e[$, l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha_k > 1$ tel que $f(\alpha_k) = \frac{1}{k^3}$ en résulte.
De plus on a bien $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

b) $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n^3} \iff \alpha_n(1 - \ln(\alpha_n)) = -3\ln(n)$ et puisque $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$ on a :

$$\alpha_n \ln(\alpha_n) \sim 3\ln(n) .$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} 3\ln(n) = +\infty$ on peut composer ces équivalents par ln et on obtient :

$$\ln(\alpha_n) + \ln(\ln(\alpha_n)) \sim \ln(\ln(n)) \text{ soit } \ln(\alpha_n) \sim \ln(\ln(n)) .$$

Bilan :

$$\alpha_n \sim 3\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$$

5. a) $[N = k] \subset \bigcup_{i=1}^{n}[N_i = k]$ et donc : $P([N = k]) \leq P(\bigcup_{i=1}^{n}[N_i = k]) \leq \sum_{i=1}^{n} P([N_i = k])$.
Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
$P(N_i = k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{n})^k(1 - \frac{1}{n})^{n-k} = \underbrace{\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}}_{\leq 1}\underbrace{(1 - \frac{1}{n})^{n-k}}_{\leq 1}\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$.

Il s'ensuit que : $P([N = k]) \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{n}{k!}$

b) Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(k)$.

On a : $P([X = k]) \leq 1$ soit $\mathrm{e}^{-k}\dfrac{k^k}{k!} \leq 1$.

L'inégalité attendue $\frac{1}{k!} \leq (\frac{e}{k})^k$ en résulte.

c) $P([N > \alpha]) = \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{n} P([N = k]) \leq n \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{n^2}{\lceil\alpha\rceil!}$

$$\leq n^2 (\frac{e}{\lceil\alpha\rceil})^{\lceil\alpha\rceil} = n^2 f(\lceil\alpha\rceil) \leq n^2 f(\alpha) .$$

6. D'après ce qui précède $E(N) \leq n^3 f(\alpha_n) + \alpha_n = 1 + \alpha_n$ et l'équivalent obtenu à la question **4** permet de conclure.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Il suffit d'établir que $F^\perp = \{0_E\}$. Or, si $x \in F^\perp$ alors, puisque $A > 0$, on a $||x||^2 = 0$ et donc $x = 0_E$.

2. $\forall j \in [\![1, p]\!]$ on a : $||e_j||^2 = ||e_j||^4 + \sum_{i \neq j}^{p} < e_j, e_i >^2$ et puisque les vecteurs e_j sont de norme 1 :

$$\sum_{i \neq j}^{p} < e_j, e_i >^2 = 0 .$$

Il s'ensuit que : $\forall i \neq j$ on a : $< e_i, e_j >= 0$.
La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est donc orthogonale et étant formée de vecteurs tous non nuls, elle est libre.

Bilan : $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base orthonormée de E.