# Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (S)

Juin-juillet 2021

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de belles qualités de logique et de présentation. Bien sûr, il y a une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 2 à 20.
Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes de cours et de grosses faiblesses en calcul.
A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances et dans leur finesse de raisonnement.
La moyenne est de $11,21$ et l'écart-type est de $3,93$.
Le jury aimerait insister sur certaines fautes récurrentes :

- L'énoncé du théorème central limite est parfois surprenant et n'a souvent rien à voir avec celui du programme.
- Le jury insiste sur le rôle du tableau : il doit être utilisé comme un support et doit permettre à l'étudiant de commenter son travail mais il n'est pas nécessaire d'y voir tous les calculs. Un juste équilibre doit être trouvé, certains candidats veulent recopier l'intégralité de leur brouillon, d'autre ne rien écrire.
- Les étudiants pensent souvent à tort qu'une limite existe toujours et utilisent le symbole lim a mauvais escient.
- Il est utile de connaitre les lettres grecques. Il est parfois difficile de suivre les étudiants lorsqu'ils confondent deux lettres de leurs énoncés.
- Il est important qu'un étudiant sache dessiner les fonctions usuelles et connaissent l'interprétation géométrique de l'algèbre linéaire et bilinéaire.
- Nous avons fortement apprécié les étudiants qui remarquaient des incohérences dans leurs calculs, par exemple :
  - La variable est à valeurs de $[0,1]$ et mon calcul me donne une espérance de 2.
  - La fonction est positive et son intégrale est négative...

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.
L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et à permis de sauver des oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

# SUJET S1

## Exercice principal S1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.

Soit $S_n$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre $(n,p)$ et $x > 0$. On pose $q = 1 - p$.

1. **Question de cours :** inégalité de Markov.
2. Soit $\lambda > 0$. Montrer que :
$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - np)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}}$$
3. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)}) = (p\mathrm{e}^{\lambda q} + q\mathrm{e}^{-\lambda p})^n$.
4. On admet pour l'instant que, pour tout réel $t$, $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{t^2} + t$.
Montrer, en utilisant cette inégalité, que :
$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \mathrm{e}^{n(\lambda^2 - \lambda x)}.$$
puis en déduire que :
$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}}.$$
5. Expliquer comment on démontrerait de la même façon que :
$$\mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}}.$$
6. En déduire :
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant x\right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}}.$$
Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
7. Dans cette dernière question, on revient sur l'inégalité admise à la question 4. Etudier la fonction $f : t \mapsto e^{t^2-t} + t\mathrm{e}^{-t}$ et en déduire l'inégalité admise à la question 4.

---

**Solution :**

1. Question de cours : programme ECS1 2013 p. 24.
2. Soit $\lambda > 0$. Comme $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est une bijection strictement croissante :
$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) = \mathbb{P}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)} \geqslant \mathrm{e}^{n\lambda x})$$
puis par l'inégalité de Markov :
$$\boxed{\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - np)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}}}$$
3. Par le théorème de transfert :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\lambda(k-np)}\mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \mathrm{e}^{\lambda(k-np)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda np}(p\mathrm{e}^{\lambda} + q)^n \text{ par la formule du binôme} \\
&= \boxed{(p\mathrm{e}^{\lambda q} + q\mathrm{e}^{-\lambda p})^n}
\end{aligned}$$
comme demandé.

4. On applique l'inégalité admise avec $t = \lambda q$ et $t = -\lambda p$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} p\mathrm{e}^{\lambda q} + q\mathrm{e}^{-\lambda p} & \leqslant & p(e^{\lambda^2 q^2} + \lambda q) + q(e^{\lambda^2 p^2} - \lambda p) \\ & \leqslant & p\mathrm{e}^{\lambda^2 q^2} + q\mathrm{e}^{\lambda^2 p^2} \\ & \leqslant & p\mathrm{e}^{\lambda^2} + q\mathrm{e}^{\lambda^2} \text{ car } p^2 \leqslant 1 \text{ et } q^2 \leqslant 1 \\ & \leqslant & e^{\lambda^2} \text{ car } p + q = 1 \end{array}$$

Alors $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - np)}) \leqslant e^{n\lambda^2}$ d'où finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \mathrm{e}^{n(\lambda^2 - \lambda x)}}$$

Cette inégalité, dont le premier membre ne dépend pas de $\lambda$ est vraie pour tout $\lambda$. Or, à $x > 0$ fixé, la fonction $\lambda \mapsto \lambda^2 - \lambda x$ atteint son minimum pour la valeur $\lambda_0 = \dfrac{x}{2}$ et ce minimum vaut alors $-\dfrac{x^2}{4}$. On en déduit donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}}}$$

5. On démarre de la même façon en écrivant :

$$\mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) = \mathbb{P}(\lambda(n - S_n) \geqslant \lambda nx) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(np - S_n)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}}$$

Il suffit alors de reprendre les calculs précédents en remplaçant $\lambda$ par $-\lambda$ et on obtient le même majorant à l'arrivée.

6. Il suffit d'écrire :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant x\right) & = & \mathbb{P}(|S_n - np| \geqslant nx) \\ & = & \mathbb{P}(S_n - np \geqslant x) + \mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) \\ & \leqslant & 2\mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}} \end{array}$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne simplement :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant x\right) \leqslant \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{x^2} = \frac{p(1-p)}{nx^2}$$

L'inégalité de Bernstein $\boxed{\text{est nettement meilleure}}$ pour les grandes valeurs de $n$ puisque l'exponentielle va plus vite vers zéro.

7. On revient sur la preuve de l'inégalité utilisée dans la question 4. Cette preuve a été reportée en fin d'exercice car elle est essentiellement technique.
On suit l'indication de l'énoncé et donc, soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2 - t} + t\mathrm{e}^{-t}$. La fonction $f$ est dérivable et, pour $t \in \mathbb{R}$ :

$$f'(t) = (2t-1)\mathrm{e}^{t^2 - t} + (1-t)\mathrm{e}^{-t} = [(2t-1)\mathrm{e}^{t^2} + (1-t)]\mathrm{e}^{-t}$$

Le signe de $f'(t)$ est donc le même que celui de $\varphi(t) = (2t-1)\mathrm{e}^{t^2} + (1-t)$. La fonction $\varphi$ ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi'(t) = (4t^2 - 2t + 2)\mathrm{e}^{t^2} - 1$$

La fonction $t \mapsto 4t^2 - 2t + 2$ admet un minimum en $t_0 = \dfrac{1}{4}$ et ce minimum est égal à $\dfrac{7}{4}$. On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) \geqslant \frac{7}{4}\mathrm{e}^{t^2} - 1 \geqslant \frac{7}{4} - 1 > 0$$

La fonction $\varphi$ est donc croissante. Or $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi$ est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. Il en est donc de même pour $f'$ et la fonction $f$ admet donc un minimum en $t = 0$. Or $f(0) = 1$. On en déduit donc que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) \geqslant 1 \text{ soit } \boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{t^2} + t}$$

# Exercice sans préparation S1

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

1. Donner une expression de $f(x)$ en fonction de $x$.
2. Dessiner le graphe de $f$ sur $[0,4[$.
3. $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

---

**Solution :**

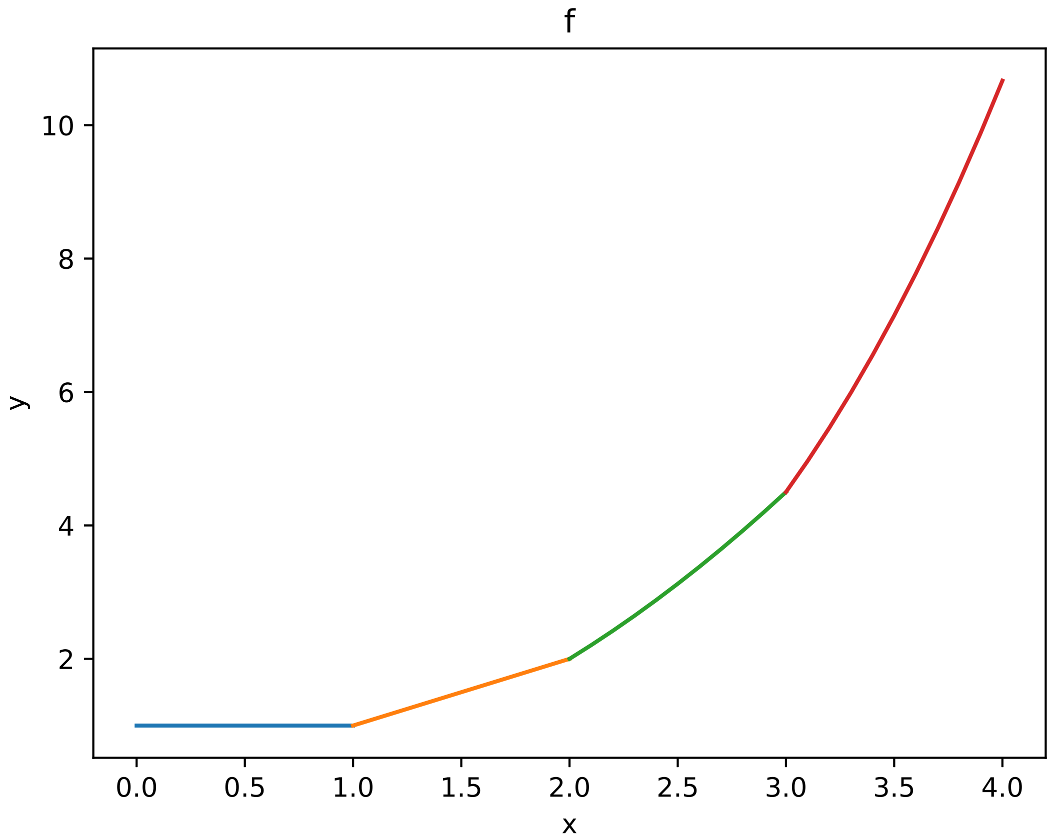
1. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [k, k+1[$ (on a ainsi $k = \lfloor x \rfloor$) . Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$

$$u_n(x) \leqslant u_{n+1}(x) \Leftrightarrow n+1 \leqslant x \Leftrightarrow n \leqslant x-1 \Leftrightarrow n < \lfloor x \rfloor$$

   Donc $u_0(x) \leqslant u_1(x) \leqslant .... \leqslant u_k(x) > u_{k+1}(x) > u_{k+2}(x)......$

$$f(x) = \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{(\lfloor x \rfloor)!}$$

2. Sur le dessin, on voit la continuité mais pas la dérivabilité .




3. $f$ est continue et $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$ privé de $\mathbb{N}^*$. Etude en $k$

$$\lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} f(x) = \frac{k^k}{k!} = \frac{k^{k-1}}{(k-1)!} \text{ et } \lim_{\substack{x \to k \\ x > k}} f(x) = \frac{k^{k-1}}{(k-1)!} = f(k).$$

$f$ est bien continue sur $\mathbb{R}$.
On peut faire aussi chercher les dérivée à droite et à gauche
(qui valent respectivement $\dfrac{k^{k-1}}{(k-1)!}$ et $\dfrac{k^{k-2}}{(k-2)!}$ si $k \geqslant 2$, et 0 et 1 si $k = 1$)

# SUJET S2

## Exercice principal S2

Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$, non identiquement nulle, et à valeurs positives.
Pour tous polynômes $P$ et $Q$ de $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

1. **Question de cours :** Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
2. Justifier que $\varphi$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que pour tout $n$ entier vérifiant $n \geqslant 1$, il existe une base orthogonale $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \left\{ \begin{array}{l} \deg(P_k) = k \\ \text{et } P_k \ \text{ est unitaire} \end{array} \right.$$
4. Montrer que $P_1$ admet une racine dans $[0,1]$.
5. Soit $k \geqslant 1$. On souhaite montrer que $P_k$ admet exactement $k$ racines réelles simples, toutes dans $[0,1]$.
Soit $j \in [\![0,k]\!]$, et supposons que $P_k$ admette exactement $j$ racines distinctes dans $[0,1]$ qui soient d'ordre de multiplicité impaire, notées (dans le cas où $j \geqslant 1$) $a_1, a_2, \ldots, a_j$.
On note alors $Q(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{j}(X - a_i)$ si $j \neq 0$ et $Q(X) = 1$ si $j = 0$.
   (a) Étudier le signe de $t \mapsto P_k(t)Q(t)$ sur $[0,1]$.
   (b) Montrer que $P_k(X)Q(X) = 0$ si $j < k$.
   (c) Conclure.
6. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, le polynôme $(P_k)^2 + 1$ n'admet que des racines complexes, toutes simples.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS1 page 7.
2. • L'application $\varphi$ est clairement bien définie, symétrique, et bilinéaire par linéarité de l'intégrale.
   • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,(P(t))^2\,\mathrm{d}t$.
   Comme $t \mapsto f(t)\,(P(t))^2$ est continue positive, et que les bornes d'intégration sont dans le bon ordre, on a bien $\varphi(P,P) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

   • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$.
   La fonction $t \mapsto f(t)\,(P(t))^2$ étant continue positive d'intégrale nulle, elle est alors nulle sur $[0,1]$.
   On a donc : $\forall t \in [0,1], f(t)\,(P(t))^2 = 0$.
   Comme $f$ n'est pas identiquement nulle : il existe au moins un réel $c \in [0,1]$ tel que $f(c) \neq 0$.
   Comme $f$ est continue en $c$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in [0,1] \cap [c-\varepsilon, c+\varepsilon], f(t) \neq 0$.
   Ainsi, $\forall t \in [0,1] \cap [c-\varepsilon, c+\varepsilon], P(t) = 0$.
   Le polynôme $P$ admet donc une infinité de racines, donc est nul.

   $\boxed{\varphi \text{ est donc bien un produit scalaire.}}$ Notons dans la suite $\|\cdot\|$ la norme associée.
3. On procède par récurrence, en appliquant la $\boxed{\text{méthode d'orthonormalisation de Schmidt}}$ à partir de la base canonique.
   • Notons $P_0 = \dfrac{1}{\|1\|}$ : $P_0$ est un polynôme de degré 0.

- Soit $k \geqslant 0$.
Supposons qu'on ait défini une base orthonormée $(P_0, \dots, P_k)$ de $\mathbb{R}_k[X]$ telle que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$.
Notons $e_{k+1} = X^{k+1} - \sum_{j=0}^{k} \varphi(X^{k+1}, P_k)P_k$.
Alors $e_{k+1}$ est de degré $k+1$, donc n'appartient pas à $\mathbb{R}_k[X] = Vect(P_0, \dots, P_k)$.
De plus, $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $\varphi(e_{k+1}, P_i) = \varphi(X^{k+1}, P_i) - \varphi(X^{k+1}, P_i)\varphi(P_i, P_i) = 0$.
Ainsi, $e_{k+1}$ est non nul, et orthogonal à $(P_0, \dots, P_k)$.
Ainsi, en posant $P_{k+1} = \dfrac{e_{k+1}}{\|e_{k+1}\|}$, la famille $(P_0, \dots, P_k, P_{k+1})$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_{k+1}[X]$, de cardinal $k+2 = \dim(\mathbb{R}_{k+1}[X])$, donc $\boxed{\text{une base orthonormée de } \mathbb{R}_{k+1}[X].}$

4. On sait que $1 \in$Vect$(P_0)$, donc $P_1 \perp 1$ : on doit avoir $\varphi(1, P_1) = 0$.

$$\forall t \in [0,1], \quad \int_0^1 f(t)P_1(t)\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction $P_1$ est continue sur $[0,1]$, donc est bornée et atteint ses bornes.
Comme $\forall t \in [0,1]$, $\min\limits_{u\in[0,1]}(P_1(u)) \leqslant P_1(t) \leqslant \max\limits_{u\in[0,1]}(P_1(u))$, en multipliant par $f(t) \geqslant 0$ et en intégrant (positivité de l'intégrale), on obtient :

$$\min_{u\in[0,1]}(P_1(u)) \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0 \leqslant \max_{u\in[0,1]}(P_1(u)) \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

Comme $f$ est positive non identiquement nulle, on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t > 0$, donc nécessairement :
$\min\limits_{[0,1]} P_1 \leqslant 0 \leqslant \max\limits_{[0,1]} P_1$.
Par Théorème des Valeurs Intermédiaires, $\boxed{P_1 \text{ s'annule donc au moins une fois sur } [0,1]}$ (et c'est la seule racine réelle puisque $\deg(P_1) = 1$)

5. Soit $k \geqslant 1$.
   (a) Remarquons que pour tout $k \geqslant 1$, $P_k \perp 1$ donc comme dans 4, $P_k$ admettra toujours au moins une racine dans $[0,1]$.
   Notons $a_1, \dots, a_j$ les racines d'ordre impair de $P_k$ dans $[0,1]$, de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_j$.
   Notons $b_1, \dots, b_m$ les (éventuelles) racines d'ordre pair de $P_k$ dans $[0,1]$, de multiplicités resp. $\beta_1, \dots, \beta_m$.
   Remarquons qu'on peut factoriser $P_k$ sous la forme

$$P_k = \prod_{i=1}^{j}(X - a_i)_i^{\alpha} \cdot \prod_{i=1}^{m}(X - b_i)^{\beta_i} \cdot R_k(X),$$

   où $R_k$ est un polynôme n'admettant pas de racines dans $[0,1]$ donc de signe constant sur $[0,1]$ car continu.
   Alors, on a :

$$P_k(X)Q(X) = \prod_{i=1}^{j}(X - a_i)^{\alpha_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{m}(X - b_i)^{\beta_i} \cdot R_k(X)$$

   Ainsi, $P_k(t)Q(t)$ est toujours du signe de $R_k(t)$ sur $[0,1]$, donc toujours $\boxed{\text{de signe constant.}}$
   (b) Supposons $j < k$. Alors $Q(X) \in \mathbb{R}_j[X] =$Vect$(P_0, \dots, P_j)$. Donc $P_k$ est orthogonal à $Q$.

$$\varphi(P_k, Q) = \int_0^1 f(t)P_k(t)Q(t)\mathrm{d}t = 0$$

   Or, la fonction $t \mapsto f(t)P_k(t)Q(t)$ est continue, de signe constant, d'intégrale nulle, donc est nulle sur $[0,1]$.
   Comme à la question 1, on montre que $\boxed{\text{le polynôme } P_kQ}$ est nul car admet une infinité de racines.
   (c) Or, $P_k$ est de degré $k \geqslant 1$ et on a toujours $Q \neq 0$, donc c'est absurde d'avoir $P_kQ = 0$.
   Ainsi, on a nécessairement $j = k$. Ainsi, $P_k$ admet exactement $k$ racines réelles dans $[0,1]$, d'ordre de multiplicité impaire, donc toutes ses racines d'ordre de multiplicité 1 nécessairement, donc $\boxed{\text{toutes simples, et toutes dans } [0,1].}$

6. Soit $k \geqslant 1$.
Déjà, pour tout réel $t$, on a $(P_k(t))^2 + 1 > 0$, donc $P_k^2 + 1$ ne peut pas avoir de racines réelles.

Supposons que $P_k^2 + 1$ admette une racine au moins double $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On aurait :

$$2P_k(\alpha)P_k'(\alpha) = 0$$

Donc $\alpha$ serait racine de $P_k$ ou racine de $P_k'$.
Or, $P_k$ admet $k$ racines réelles uniquement, donc $P_k(\alpha) \neq 0$.
De plus, en notant toujours $a_1 < \cdots < a_k$ les racines de $P_k$, en appliquant Rolle sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ ($i \in [\![1, k-1]\!]$), $P_k'$ s'annule déjà au moins $k-1$ fois (une fois sur chacun de ces intervalles), en étant de degré $k-1$.
Donc $P_k'$ admet exactement $k-1$ racines, toutes réelles.
Ainsi, $\boxed{P_k^2 + 1 \text{ ne peut pas avoir de racine double.}}$

# Exercice sans préparation S2

On dispose d'un dé à 6 faces non pipé.
Proposer une méthode pour effectuer un tirage au sort équitable entre 24 individus (c'est à dire un tirage uniforme entre 1 et 24) en au plus 3 lancers.
Implémenter la méthode avec Scilab et proposer un programme qui affiche un histogramme permettant de valider la méthode proposée.

---

**Solution :**

On lance le dé 6 fois, on modélise par $X_1, ..., X_3$, 3 variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1, 6]\!]$.

On divise les 24 résultats possibles en quatre "lots" de 6

On utilise les deux derniers lancers pour déterminer quel sous ensemble choisit parmi les quatre, en fonction de la valeur de ces deux derniers lancers par rapport à 3.

$X = X_1 + 12 * \mathbb{1}_{[X_2 \leqslant 3]} + 6 * \mathbb{1}_{[X_3 \leqslant 3]}$.

On peut écrire le programme Scilab suivant :

```
Ntest=50000;
test=[];
for i=1:Ntest
    de=grand(3,1,"uin",1,6);
    choix=de(1);
    if de(2)<4 then choix=choix+de(2)*12
               end
    if de(3)<4 then choix=choix+de(3)*6
               end
    test=[test,choix];
end;
histplot(0.5:25,test)
```

# SUJET S3

## Exercice principal S3

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne canonique.

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)^2 \,\mathrm{d}t$.

1. **Question de cours :** Donner une condition suffisante pour qu'une fonction de plusieurs variables admette des extrema globaux sur un ensemble donné.
2. Montrer que la fonction $f$ est bien définie.
3. On note $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $M = ((i+j)!)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$

   Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $u = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$

   Montrer que $f(x) = {}^t u M u$
4. (a) On admet que pour tout $u \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, si $u \neq 0$ alors ${}^t u M u > 0$

   Montrer que les valeurs propres de M sont toutes strictement positives.

   (b) En déduire qu'il existe un réel A strictement positif tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$f(x) \geqslant A \left|\left|x\right|\right|^2$$

5. En déduire que $f$ admet un minimum global.

   On notera $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un point où ce minimum est atteint.
6. (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k! + (k+1)!a_1 + \cdots + (k+n)!a_n = 0$.

   (b) On pose $P(X) = 1 + a_1(X+1) + a_2(X+1)(X+2) + \cdots + a_n(X+1)(X+2)\cdots(X+n)$.

   Montrer que $P(X) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}(X-1)(X-2)\cdots(X-n)$.

   (c) Montrer que $f(a) = P(0) = \dfrac{1}{n}$.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS2 page 19.
2. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

   Soit la fonction $g : t \mapsto e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)^2$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus, $g(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\mathrm{t}^2}\right)$ par croissances comparées, donc $\boxed{\text{l'intégrale } f(x) \text{ converge}}$ par domination.
3. Par linéarité (toutes les intégrales convergent par le même raisonnement qu'à la question précédente), on

trouve que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \,\mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^{n} x_k \int_0^{+\infty} t^k k e^{-t} \,\mathrm{d}t + + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} k! x_k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i+j)! x_i x_j \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (i+j)! x_i x_j \text{ en notant } x_0 = 1 \\
&\boxed{= u^T M u}
\end{aligned}$$

Remarque : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} \,\mathrm{d}t = (i+j)!$ en utilisant la densité d'une loi $\gamma(i+j)$, ou éventuellement par récurrence.

4. (a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $M$ et $u$ un vecteur propre associé
   Comme $u$ est non nul, $u^T M u = \lambda \,||u||^2 > 0$.
   Donc $\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } M \text{ sont strictement positives.}}$

   (b) La matrice $M$ étant symétrique réelle, elle est diagonalisable d'après le théorème spectral et il existe donc une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (on peut supposer $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$) et une matrice orthogonale $P$ telle que $M = PD^tP$. On peut alors écrire avec les notations précédentes, en posant $v = {}^tPu = (v_0, \ldots, v_n)$ :

$$f(x) = {}^tuPD^tPu = {}^tvDv = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k v_k^2 \geqslant \lambda_0 \sum_{k=0}^{n} v_k^2 = \lambda_0 \|v\|^2 = \lambda_0 \|u\|^2 \boxed{\geqslant \lambda_0 \|x\|^2.}$$

5. D'après la question précédente, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| > r \Rightarrow f(x) > f(0)$.
   La fonction $f$ étant polynômiale, elle est continue sur la boule fermée bornée $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant r\}$. Elle admet donc un minimum $m$ sur $\mathcal{B}$. Par construction de $r$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B},\ f(x) > f(0) \geqslant m$.
   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc un minimum global sur } \mathbb{R}^n.}$

6. (a) Puisque la fonction $f$ est polynômiale, donc $\mathcal{C}^1$, sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, le point $a$ est un point critique, i.e. :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0.$$

   Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 2k! + 2\sum_{i=1}^{n} a_k (k+i)!$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ k! + \sum_{i=1}^{n} a_k (k+i)! = 0.}$$

   (b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle k!P(k) = k! + \sum_{i=1}^{n} a_k (k+i)! = 0$. Le polynôme $P$ est de degré inférieur ou égal à $n$ et admet $n$ racines distinctes. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \lambda(X-1)\cdots(X-n)$.
   Puisque $P(-1) = 1$, on trouve $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

$$\boxed{P(X) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(X-1)\cdots(X-n).}$$

   (c) On a, par linéarité (toutes les intégrales convergent) :

$$\begin{aligned}
f(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n) \,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n) \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}(1+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n)\,\mathrm{d}t = k!+a_1(k+1)!+a_2(k+2)!+\cdots+a_n(k+n)! = 0.$$

Ainsi :

$$f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n)\,\mathrm{d}t = 1+\sum_{k=1}^{n} a_k k! = P(0) \boxed{= \frac{1}{n}}.$$

# Exercice sans préparation S3

On tire (avec remise) une boule d'une urne contenant $n$ boules distinctes. On note $V$ la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois. Calculer l'espérance de $V$ et trouver un équivalent quand $n$ tend vers l'infini.

Proposer un programme Scilab pour tester ce résultat.

---

**Solution :**

Soit $T_i$ le numéro de tirage lorsque $i$ boules différentes ont été tirées au moins une fois. En notant $V_i = T_i - T_{i-1}$ et $V_1 = 1$, on a $V = V_1 + ... + V_n$. Or, $V_i$ est égal au nombre de tirages pour tirer une des $n-(i-1)$ boules qui n'ont pas encore été tirées. $V_i$ suit donc une loi géométrique de paramètre

$$p_i = \frac{n-(i-1)}{n}$$

D'où

$$E(V) = E(V_1) + ... + E(V_n) = \frac{1}{p_1} + ... \frac{1}{p_n} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1}}$$

En particulier $\boxed{E(V) \sim n \ln n}$ quand $n$ tend vers l'infini.

On peut proposer le programme Scilab suivant :

```
n=30;
Ntest=10000;
esp=0;
E=0
compt=0;
for i=1:Ntest
 A=zeros(1,n);
 while sum(A)<n
    u=int(n*rand()+1);
    if A(u)==0 then
       A(u)=1 ;
    end
    compt=compt+1;
 end
end
 E=compt/Ntest;
 esp=E/(n*log(n));
disp(esp)
```

# SUJET S4

## Exercice principal S4

1. **Question de cours :** matrice hessienne en un point $x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

   Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ puis calculer les dérivées premières et les dérivées secondes de $f$.
3. (a) Déterminer le seul point critique $(a_1, \ldots, a_n)$ de $f$ sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Vérifier que la hessienne de $f$ en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$ où $I_n$ est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $J_n$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
4. Déterminer le rang de $J_n$.
   En déduire le spectre de $J_n$, puis celui de $A_n$.
5. Montrer que $f$ admet un minimum local en $(a_1, \ldots, a_n)$ et préciser la valeur de ce minimum.
6. Dans cette dernière question, on va retrouver et préciser le résultat précédent par une méthode différente.
   Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathcal{C}_r$ la contrainte d'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2$ et $S_r = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2\right\}$.
   (a) Montrer que $f$ admet un minimum global et un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}_r$.
   On note respectivement $m(r)$ et $M(r)$ la valeur de ce minimum et de ce maximum.
   (b) On admet que :

$$m(r) = \begin{cases} (n+1)r^2 - r\sqrt{n} & \text{si } 0 < r < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \\ r^2 - \dfrac{1}{4} & \text{si } r \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \end{cases} \quad \text{et} \quad M(r) = (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

   En déduire que le minimum local obtenu à la question 5. est un minimum global.
   (c) Prouver le résultat admis à la question précédente.

---

**Solution :**

1. Question de cours : programme ECS2 2014 p. 19.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{R}^n \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

   La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ car elle est polynomiale. Un calcul immédiat donne :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \partial_i f(x_1, \ldots, x_n) = 2x_i + 2\sum_{k=1}^{n} x_k - 1 = 4x_i + 2\sum_{k \neq i} x_k - 1}$$

   puis

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \partial_{i,j}^2 f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 4 & \text{si } j = i \\ 2 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

3. (a) Le point $(a_1,\dots,a_n)$ est un point critique de $f$ si et seulement si $\partial_i f(a_1,\dots,a_n)=0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. Le $n$-uplet $(a_1,\dots,a_n)$ est donc solution du système linéaire dont la matrice augmentée est :

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2 & \dots & 2 & 1\\ 2 & 2 & 4 & & 2 & 1\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & \dots & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

En faisant successivement pour $i$ variant de 1 à $n-1$, les opérations $L_i\leftarrow L_i-L_{i+1}$, on trouve $a_1=a_2=\dots=a_n$ puis la dernière équation donne $a_n=\dfrac{1}{2(n+1)}$.

Finalement l'unique point critique de $f$ est :

$$\boxed{(a_1,\dots,a_n)=\left(\frac{1}{2(n+1)},\dots,\frac{1}{2(n+1)}\right)}$$

(b) On note $a=(a_1,\dots,a_n)$. Le résultat demandé découle directement du calcul des dérivées secondes. On remarque d'ailleurs que la hessienne ne dépend pas du point ce qui est normal car $f$ est un polynôme de degré 2 en les $x_k$.

On a donc :

$$\boxed{\nabla f(a)=2(I_n+J_n)}$$

4. La matrice $J_n$ a toutes ses colonnes égales. Elle est donc au plus de rang 1. De plus, elle est non nulle. On a donc $\operatorname{rg} J_n=1$.

Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker}(J_n)=n-1$. Ainsi 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

On remarque par ailleurs que $J_n\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}$.

Ainsi, $n$ est valeur propre de $J_n$. Comme le sous-espace propre associé à 0 est de dimension $n-1$, la dimension du sous-espace propre de $J_n$ associé à la valeur propre $n$ est nécessairement 1 et alors, par argument de dimension, $\boxed{\operatorname{Sp} J_n=\{0,n\}}$.

Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

$$J_nX=\lambda X\Leftrightarrow (I_n+J_n)X=(1+\lambda)X\Leftrightarrow A_nX=2(1+\lambda)X$$

On en déduit donc que $\boxed{\operatorname{Sp} A_n=\{2,2(n+1)\}}$

5. La matrice hessienne de $f$ en $a=(a_1,\dots,a_n)$ n'admet que des valeurs propres strictement positives donc $f$ admet un minimum local en ce point. Ce mininum est alors :

$$f(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4(n+1)^2}+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(n+1)}\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(n+1)}=-\frac{n}{4(n+1)}$$

6. (a) Chercher les extrema globaux de $f$ sous la contrainte $\mathcal{C}_r$ revient à chercher les extrema de la restriction de $f$ à $S_r$. Or $S_r$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ et $f$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc un minimum global et un maximum global sur } S_r.}$

(b) On remarque que $\mathbb{R}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}=\bigcup_{r>0}S_r$ et que $S_r\cap S'_r=\varnothing$ pour $r\neq r'$ avec $r$ et $r'$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Comme, pour tout $x\in S_r$, $f(x)\geqslant m(r)$, il suffit de montrer qu'il existe $r_1>0$ tel que $m(r_1)\leqslant m(r)$ pour tout $r>0$ pour montrer que la fonction $f$ admet un minimum global.

Or, pour $r\geqslant r_0=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, $m(r)=r^2-\dfrac{1}{4}\geqslant r_0^2-\dfrac{1}{4}$.

On peut par ailleurs remarquer que :

$$r_0^2-\frac{1}{4}=(n+1)r_0^2-r_0\sqrt{n}$$

Maintenant la fonction $r \mapsto (n+1)r^2 - r\sqrt{n}$ est une fonction polynomiale de degré 2 qui admet un minimum en
$$r_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$
On peut vérifier que l'on a bien $0 < r_1 < r_0$ car $n+1 > n$.
Ainsi, pour tout $r \in ]0, r_0]$ : $m(r_1) \leqslant m(r)$. En particulier : $m(r_1) < m(r_0)$ et donc :
$$\forall r > 0 \quad m(r_1) \leqslant m(r) \text{ où } r_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$
Or :
$$m(r_1) = (n+1)r_1^2 - r_1\sqrt{n} = \frac{1}{4}\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\boxed{= -\frac{1}{4}\frac{n}{n+1}}$$
En particulier $m(r_1) < 0 = f(0, \ldots, 0)$.

Ainsi, la fonction $f$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ égal à $\boxed{-\frac{1}{4}\frac{n}{n+1}}$. On retrouve bien la valeur obtenue à la question 5.

(c) On note $g(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. La fonction $g$ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
Les points $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ où les extrema de $f$ sous la contrainte $\mathcal{C}_r$ sont atteints sont nécessairement ceux pour lesquels $g(x) = r^2$ et pour lesquels il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \partial_i f(x) = \lambda \partial_i g(x)$$
soit :
$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad 2(2-\lambda)x_i + 2\sum_{k \neq i} x_k = 1$$
La matrice augmentée de ce système est :
$$\tilde{B}_r = \begin{pmatrix} 2(2-\lambda) & 2 & 2 & \ldots & 2 & 1 \\ 2 & 2(2-\lambda) & 2 & \ldots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2(2-\lambda) & & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \ldots & 2 & 2(2-\lambda) & 1 \end{pmatrix}$$
On suppose d'abord $\lambda \neq 1$. Sous cette hypothèse, on peut résoudre le système par les mêmes opérations élémentaires sur les lignes et colonnes que pour le système de la question 3.(a) et on obtient de même que $x_1 = \ldots = x_n$.
On a alors $2(n+1-\lambda)x_1 = 1$ et donc nécessairement, pour qu'il existe une solution, $\lambda \neq n+1$. Alors :
$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{2(n+1-\lambda)}$$
La contrainte $g(x) = r^2$ donne alors la condition :
$$\frac{n}{4(n+1-\lambda)^2} = r^2$$
soit :
$$\lambda = \lambda_1 = n+1+\frac{\sqrt{n}}{2r} \text{ ou } \lambda = \lambda_2 = n+1-\frac{\sqrt{n}}{2r}$$
On remarque que $\lambda_1 \neq n+1$ et $\lambda_2 \neq n+1$. De même $\lambda_1 \neq 1$. Par contre :
$$\lambda_2 = 1 \Longleftrightarrow r = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
Pour la valeur $r = r_0 = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, la valeur $\lambda_2$ est donc à éliminer.
De plus, pour $\lambda = \lambda_1$, alors :
$$x_1 = \ldots = x_n = -\frac{r}{\sqrt{n}} \text{ et } f(x_1, \ldots, x_n) = (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

tandis que pour $\lambda = \lambda_2$, alors :

$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{r}{\sqrt{n}} \text{ et } f(x_1, \ldots, x_n) = (n+1)r^2 - r\sqrt{n}$$

Regardons maintenant ce qui se passe dans le cas où $\lambda = 1$. Le système ne contient alors qu'une seule équation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2}$. A cela s'ajoute la contrainte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2$. S'il existe un $x = (x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifie ces deux équations, on a donc nécessairement :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = r^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = r^2 - \frac{1}{4}$$

A $r$ fixé, on peut remarquer que :

$$r^2 - \frac{1}{4} \leqslant (n+1)r^2 - r\sqrt{n} \leqslant (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

avec égalité dans la première inégalité si et seulement si $r = r_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
Il est donc essentiel de savoir s'il existe un $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant les deux conditions :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1}$$

Ainsi, si un $x$ vérifie les deux contraintes demandées, nécessairement :

$$\frac{1}{2} \leqslant r\sqrt{n} \quad \text{soit} \quad r \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Pour $r = r_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, on remarque que $x = \left(\dfrac{1}{2n}, \ldots, \dfrac{1}{2n}\right)$ vérifie les deux conditions et par homothétie on pourra trouver un tel $x$ pour $r > r_0$.
Comme déjà remarqué, à $r$ fixé :

$$r^2 - \frac{1}{4} \leqslant (n+1)r^2 - r\sqrt{n} \leqslant (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

Comme l'on sait déjà que $m(r)$ et $M(r)$ existent, on peut affirmer à partir des calculs précédents que :

$$\boxed{m(r) = \begin{cases} (n+1)r^2 - r\sqrt{n} & \text{si } 0 < r < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \\ r^2 - \dfrac{1}{4} & \text{si } r \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \end{cases} \quad \text{et} \quad M(r) = (n+1)r^2 + r\sqrt{n}}$$

Remarquons que les calculs précédents permettent également de retrouver que le minimum est atteint en $a = \left(\dfrac{1}{2(n+1)}, \ldots, \dfrac{1}{2(n+1)}\right)$.

# Exercice sans préparation S4

Le métro automatique de la ligne 14 s'arrête à 9 stations numérotées de 0 à 8.
Il démarre à la station 0.
Quand il arrive à la station n$^{\text{o}}$ 8 ou à la station n$^{\text{o}}$ 0, il fait demi tour, et poursuit un mouvement de balancier entre ces deux stations.

On suppose qu'il s'arrête 1 min à chaque station avec un temps de trajet négligeable entre deux stations. (*à la minute 1, il est à la station* 1, *à la minute 2, il est à la station* 2, *à la minute 8, il est à la station 8, à la minute 9, il est la station 7)*

Un voyageur s'endort à la station n$^{\text{o}}$ 0. Son temps de sommeil $T$, compté en minute suit une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$. On note $X$ le numéro de la station à laquelle il se réveille.
Déterminer la loi de $X$

---

**Solution :**

$X(\Omega) = [\![0,8]\!]$.
Le métro fait un aller-retour en 16 minutes et sa position est donc 16-périodique.
On note $q = 1 - p$.

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(T \in 16\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 16k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{16k-1}p = \boxed{\frac{pq^{15}}{1-q^{16}}}$$

$$\mathbb{P}(X=8) = \mathbb{P}(X \in 16\mathbb{N}+8) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 16k+8) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{16k+7}p = \boxed{\frac{pq^{7}}{1-q^{16}}}$$

Pour $i \in [\![1,7]\!]$, lors de son premier aller-retour, le métro sera à la station $i$ aux minutes $i$ et $16-i$.

$$\mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}(T \in 16\mathbb{N}+i) + \mathbb{P}(T \in 16\mathbb{N}+16-i) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 16k+i) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 16k+16-i)$$

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{16k+i-1}p + \sum_{k=0}^{+\infty} q^{16k+16-i-1}p = \boxed{\frac{pq^{i-1}}{1-q^{16}} + \frac{pq^{15-i}}{1-q^{16}}}$$

Idée de question supplémentaire : écrire un programme SCILAB simulant le trajet du métro jusqu'au réveil du voyageur et donnant la valeur de X

```
function x=X(p);
position=1;
sens=1;
a=rand();
While a>p

  if (position=0) or (position=8)
  then sens=(-1)*sens
  end;
  position=position+sens
  a=rand()
end
x=position;
endfunction
```

# SUJET S5

## Exercice principal S5

Soit $a$ un réel de $]0,1[$ qu'on suppose inconnu. Soit $X$ une variable aléatoire réelle telle que :

- $\mathbb{P}([X \leqslant a]) = \dfrac{1}{2}$.
- la loi conditionnelle de $X$ sachant $[X \leqslant a]$ est la loi uniforme sur $[0,a]$.
- la loi conditionnelle de $X$ sachant $[X > a]$ est la loi uniforme sur $[a,1]$.

1. **Question de cours :** Énoncer le théorème central limite.
2. Montrer que la variable aléatoire $X$ est à densité, dont une densité $f_X$ est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \dfrac{1}{2(1-a)} & \text{si } a < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
3. Montrer que $X$ admet une espérance et une variance et les calculer en fonction de $a$.
4. Établir que l'on a $\dfrac{1}{12} \leqslant \mathbb{V}[X] \leqslant \dfrac{1}{8}$.
5. On considère $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes de même loi que $X$.
   On note pour tout $n \geqslant 1$, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Déterminer deux réels $\beta$ et $\gamma$ ($\beta \neq 0$) tels que $T_n = \beta\overline{X_n} + \gamma$ soit un estimateur sans biais de $a$.
   (b) Montrer que $T_n$ est un estimateur convergent de $a$.
   (c) Soit $\alpha \in ]0,1[$. Montrer que $\left[T_n - \dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}}, T_n + \dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right]$ est un intervalle de confiance de $a$ au niveau de confiance $1-\alpha$.
   (d) On pose pour tout $\alpha \in ]0,1[$, $u_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ où $\Phi$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Monter que l'intervalle $\left[T_n - \dfrac{1}{\sqrt{2n}}u_\alpha, T_n + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}u_\alpha\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $a$ au niveau de confiance $1-\alpha$.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS2 page 29.
2. D'après la définition de $X$, on voit que $X(\Omega) \subset [0,1]$ presque-sûrement.
   - Pour $x < 0$, $F_X(x) = 0$.
   - Pour $x \geqslant 1$, $F_X(x) = 1$.
   - Soit $x \in [0,a]$. Alors :
   $$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}([X \leqslant a] \cap [X \leqslant x]) = \mathbb{P}(X \leqslant a)\mathbb{P}_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a} = \frac{x}{2a}$$
   - Soit $x \in [a,1]$. Alors :
   $$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}([X \leqslant a] \cup [a < X \leqslant x]) = \mathbb{P}(X \leqslant a) + \mathbb{P}(X > a] \cap [a < X \leqslant x]) \\ &= \frac{1}{2} + \mathbb{P}(X > a)\mathbb{P}_{[X>a]}(a < X \leqslant x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-a}{1-a} = \frac{x+1-2a}{2(1-a)} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition de $X$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \dfrac{x+1-2a}{2(1-a)} & \text{si } a \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

La fonction de répartition $F_X$ est clairement continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{0, a, 1\}$ ce qui suffit, donc $X$ est bien une variable aléatoire à densité. On peut donner comme densité par exemple la fonction $f_X$ donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \dfrac{1}{2(1-a)} & \text{si } a < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

3. La variable aléatoire $X$ est bornée puisque $X(\Omega) = [0,1]$, donc $X$ admet bien une espérance et une variance.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 t f_X(t) dt = \int_0^a \frac{t}{2a} dt + \int_a^1 \frac{t}{2(1-a)} dt = \frac{1}{2a} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2(1-a)} \cdot \frac{1-a^2}{2} = \frac{a}{4} + \frac{1+a}{4} \boxed{= \frac{1+2a}{4}}$$

Par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 t^2 f_X(t) dt = \int_0^a \frac{t^2}{2a} dt + \int_a^1 \frac{t^2}{2(1-a)} dt = \frac{1}{2a} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{1}{2(1-a)} \cdot \frac{1-a^3}{3} = \frac{a^2}{6} + \frac{1+a+a^2}{6} \boxed{= \frac{1+a+2a^2}{6}}$$

Donc :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1+a+2a^2}{6} - \frac{(1+2a)^2}{16} = \frac{8(1+a+2a^2) - 3(1+4a+4a^2)}{48} = \frac{5-4a+4a^2}{48} \boxed{= \frac{(2a-1)^2+4}{48}}$$

4. D'après ce qui précède, on a :

$$\mathbb{V}[X] = \frac{(2a-1)^2+4}{48} \geqslant \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

et

$$\mathbb{V}[X] = \frac{(2a-1)^2+4}{48} < \frac{1+4}{48} \leqslant \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

5. (a) Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}[X_1] = \frac{1+2a}{4}$$

On voit donc qu'en particulier $\mathbb{E}\left[\dfrac{4\overline{X_n}-1}{2}\right] = a$.

Il suffit donc de poser $\boxed{T_n = 2\overline{X_n} - \dfrac{1}{2} \text{ pour obtenir un estimateur sans biais de } a.}$

(b) D'après la loi faible des grands nombres, $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1+2a}{4}$

$x \mapsto \dfrac{4x-1}{2}$ est continue donc $\boxed{T_n \text{ converge en probabilité vers } a.}$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_n - \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}} \leqslant a \leqslant T_n + \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right) &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{2n\alpha}} \leqslant T_n - a \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}[T_n]| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}[T_n]| > \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right) \\
&\geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}[T_n]}{\left(\frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right)^2} \\
&= 1 - 2n\alpha\mathbb{V}[T_n] \\
&= 1 - 2n\alpha\left(\frac{4}{n}\mathbb{V}[X_1]\right) (les X_i \text{ sont indépendants}) \\
&= 1 - 8\mathbb{V}[X_1]\alpha \\
&\geqslant 1 - \alpha
\end{aligned}$$

$\boxed{\left[T_n - \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}, T_n + \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } a \text{ au niveau de confiance } 1-\alpha.}$

(d) En utilisant le théorème central limite $\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \frac{2a+1}{2}}{\sigma(X)}$ converge en loi vers $N \hookrightarrow N(0,1)$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \frac{2a+1}{4}}{\sigma(X)} \in [-u_\alpha, u_\alpha]\right) = 1-\alpha$$

Or $\overline{X_n} = \dfrac{2T_n+1}{4}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{T_n - a}{2\sigma(X)} \in [-u_\alpha, u_\alpha]\right) = 1-\alpha$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(T_n - a \in \left[-u_\alpha\sqrt{\frac{4\mathbb{V}(X)}{n}}, u_\alpha\sqrt{\frac{4\mathbb{V}(X)}{n}}\right]\right) = 1-\alpha$$

Or $\mathbb{V}[X] \leqslant \dfrac{1}{8}$ donc

$$\mathbb{P}\left(T_n - a \in \left[-u_\alpha\sqrt{\frac{4\mathbb{V}(X)}{n}}, u_\alpha\sqrt{\frac{4\mathbb{V}(X)}{n}}\right]\right) \leqslant \mathbb{P}\left(T_n - a \in \left[-u_\alpha\sqrt{\frac{1}{2n}}, u_\alpha\sqrt{\frac{1}{2n}}\right]\right)$$

$\boxed{\left[T_n - \frac{1}{\sqrt{2n}}u_\alpha, T_n + \frac{1}{\sqrt{2n}}u_\alpha\right] \text{ est un intervalle de confiance asymptotique de } a \text{ de niveau } 1-\alpha.}$

# Exercice sans préparation S5

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.

Montrer que la matrice $A$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ , \ AM = MA\}$.

---

**Solution :**

Notons $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$. On vérifie sans peine que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (en tant que noyau de l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$).
Puisque $A^2 = 0$, $f^2 = 0$, et ainsi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Puisque $f \neq 0$ (car $A \neq 0$), le théorème du rang assure nécessairement que $\operatorname{rg} f = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.
Soit $(e_1)$ une base de $\operatorname{Im} f$. En ajoutant un vecteur $e_2 \in \operatorname{Ker} f \setminus \operatorname{Im} f$, on obtient une famille libre donc une base de $\operatorname{Ker} f$. Soit $e_3$ un antécédent de $e_1$ par $f$. Puisque $e_1 \neq 0$, $e_3 \notin \operatorname{Ker} f$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est alors une famille libre de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base la matrice de $f$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

en notant $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{A et B sont semblables.}}$

Remarquons que :

$$M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow PBP^{-1}M = MPBP^{-1} \Leftrightarrow B\left(P^{-1}MP\right) = \left(P^{-1}MP\right)B$$

Les matrices $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $BN = NB$ sont les matrices de la forme

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

On en déduit une famille génératrice de $\mathcal{C}_A$ :

$$\mathcal{C}_A = \left\{ P \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}, \ (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\} = \operatorname{Vect}\left(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\right)$$

où $M_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$, $M_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $M_3 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $M_4 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $M_5 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On vérifie sans problème que $(M_1, \ldots, M_5)$ forme une famille libre, i.e. $\boxed{\dim \mathcal{C}_A = 5.}$

# SUJET S6

## Exercice principal S6

1. **Question de cours** Rappeler la définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel réel $E$.
2. Soient $l$ et $k$ deux entiers de $[\![1, n]\!]$. Soit $E_{l,k}$ la matrice de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé sur la $l$-ième ligne et la $k$-ième colonne qui vaut alors 1.
   Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
   Exprimer $\mathrm{Tr}(E_{l,k}A)$ en fonction d'un coefficient de la matrice A.
3. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Soit $F$ l'application bilinéaire symétrique définie par

$$F : \begin{array}{lll} M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto & \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B) - \mathrm{Tr}(AB) \end{array}.$$

   (a) Montrer que si, pour tout $X$ de $M_n(\mathbb{R})$ on a $F(A, X) = 0$, alors $A = 0$.

   (b) Soit $u$ une application de $M_n(\mathbb{R})$ vers $M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (X, Y) \in (M_n(\mathbb{R}))^2, \quad F(u(X), Y) = F(X, u(Y)).$$

   Montrer que $u$ est linéaire.

   (c) L'application $F$ est-elle un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ ?
4. Soit $M$ une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$.
   Soit $f$ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$f : \begin{array}{lll} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MXM^{-1} \end{array}.$$

   On pose l'équation suivante pour $h$ un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ :

$$\forall (X, Y) \in (M_n(\mathbb{R}))^2, \quad F(f(X), Y) = F(X, h(Y)) \quad (*)$$

   (a) Montrer que $f$ est bijective et expliciter $f^{-1}$.

   (b) Montrer que $f^{-1}$ est l'unique endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation (*).

   (c) Montrer qu'une condition suffisante pour que $f$ soit égal à $f^{-1}$ est que la matrice $M$ soit diagonalisable et que $\mathrm{Sp}\,(M) \subset \{1; -1\}$. Cette condition est-elle nécessaire ?
5. Soit l'endomorphisme $g$ de $M_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$g : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a+c & b+d-a-c \\ c & d-c \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Déterminer $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$, $g(A)M = MA$.

   (b) Déterminer tous les endomorphismes $k$ de $M_2(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $X$ et $Y$ de $M_2(\mathbb{R})$ on ait :

$$Tr(g(X))Tr(Y) - Tr(X)Tr(k(Y)) = -Tr(k(Y)X) + Tr(Yg(X)).$$

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS2 page 7.
2. On note $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $(x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les coefficients respectifs des matrices $A$ et $E_{l,k}$

   Avec la formule du produit matriciel : $\mathrm{Tr}(A.E_{l,k}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_{j,i})$

   Mais $x_{j,i} = 0$ seulement si $j = l$ et $i = k$, donc

   $\boxed{\mathrm{Tr}(A.E_{l,k}) = a_{k,l}}$
3. (a) Soit A telle que pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, $F(A,X) = 0$

   En prenant $X = E_{l,k}$ on obtient

   Si $l = k$ : $\mathrm{Tr}(A)\times 1 - a_{l,l} = 0$ et si $l \neq k$, $0 - a_{k,l} = 0$. Les $a_{l,l}$ sont tous égaux, on doit avoir $\mathrm{Tr}(A) = n\mathrm{Tr}(A)$ ce qui donne $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

   $\boxed{\text{Ainsi A=0.}}$

   (b) Soient $\alpha$ et $\beta$ réels et des matrices $X$, $Y$ et $T$ de $M_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned}
F(u(\alpha X+\beta Y)-\alpha u(X)-\beta u(Y),T) &= F(u(\alpha X+\beta Y),T)-F(u(\alpha X),T)-F(u(\beta Y),T)\\
&= F(\alpha X+\beta Y,u(T)-F(\alpha X,u(T)))-F(\beta Y,u(T))\\
&= F(\alpha X+\beta Y-\alpha X-\beta Y,u(T))\\
&= F(0,u(T))=0
\end{aligned}$$

   Comme cette propriété est vraie pour tout $T$ , d'après a) on a $u(\alpha X+\beta Y)-\alpha u(X)-\beta u(Y)=0$

   $\boxed{\text{l'application } u \text{ est linéaire.}}$

   (c) Non : en effet si on note $\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$

   Et $F(C,C) = \mathrm{Tr}^2(C) - \mathrm{Tr}(C^2) = -1 < 0$

   $\boxed{\text{F n'est pas un produit scalaire.}}$
4. (a) Soit $Y \in M_n(\mathbb{R})$, $f(X) = Y$ ssi $MXM^{-1} = Y$ ssi $X = M^{-1}YM$.

   $\boxed{\text{Pour tout } Y \in M_n(\mathbb{R}),\ f^{-1}(Y) = M^{-1}YM}$

   (b) * Montrons que $f^{-1}$ vérifie (*) ie $\mathrm{Tr}(MXM^{-1}Y) - \mathrm{Tr}(f(X))\mathrm{Tr}(Y) = \mathrm{Tr}(XM^{-1}YM) - \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(f^{-1}Y)$.
   On a déjà $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(f(X))$ et $\mathrm{Tr}(f^{-1}(Y)) = \mathrm{Tr}(Y)$. De plus $\mathrm{Tr}(M.XM^{-1}Y) = \mathrm{Tr}(XM^{-1}Y.M)$, on a bien l'identité voulue.
   Ainsi $\forall (X,Y) \in (M_n(\mathbb{R})^2, \quad F(f(X),Y) = F(X, f^{-1}(Y))$ et $f^{-1}$ vérifie (*)

   * Supposons qu'il y ait un autre endomorphisme $h$ de $M_n(\mathbb{R})$ ; alors, pour tout $X$ tout $Y$ de $M_n(\mathbb{R})$ on aurait $F(X,h(Y)) = F(X,f^{-1}(Y))$ d'où pour tout $X$ de $M_n(\mathbb{R})$ on aurait $F(X,h(Y)-f^{-1}(Y)) = 0$ d'où d'après 1) a) pour tout $Y$ de $M_n(\mathbb{R}))$ on a : $h(Y) - f^{-1}(Y) = 0$ d'où $h = f^{-1}$.

   $\boxed{f^{-1} \text{ est l'unique endomorphisme de } M_n(\mathbb{R}) \text{ vérifiant la relation demandée}}$

   (c) Si la matrice $M$ est semblable à une matrice diagonale $D$ ne contenant que des 1 ou des $-1$ sur la diagonale on a $D^2 = I$ et par suite $M^2 = I$ donc $M = M^{-1}$ et $h = f$ $\boxed{\text{La condition est bien suffisante}}$

   Cette condition $\boxed{\text{n'est pas nécessaire}}$ car si on choisit $M = 2I$ on a $h = f$.
5. (a) On détermine cette matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ en écrivant l'égalité $Mg(A) = Ag(M)$ pour des matrices de la base canonique.

   Pour $E_{1,1}$ ; $\begin{pmatrix} \alpha & 0\\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-\gamma & \beta-\delta\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Pour $E_{1,2}$ $\begin{pmatrix} 0 & \alpha\\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   On trouve ainsi $\alpha = \beta = \delta$ et $\gamma = 0$

$\boxed{\text{On pose alors } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ et l'on trouve bien : $M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d-a-c \\ c & d-c \end{pmatrix} M.$

(en fait tous les multiples non nuls de M conviennent)

(b) La matrice M trouvée est inversible, donc l'endomorphisme $g$ est de la forme $g(X) = MXM^{-1}$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Alors d'après 4. on sait que l'endomorphisme $k$ existe et est unique ; il est défini par : $k(X) = M^{-1}XM$ c'est à dire puisque $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a : $\boxed{k(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a-c & a-c+b-d \\ c & c+d \end{pmatrix}}.$

# Exercice sans préparation S6

On dit qu'une variable aléatoire réelle $X$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la distribution de Lévy–Pareto si :

— Il existe $\varepsilon > 0$ tel que
  — $\mathbb{P}(X > \varepsilon) = 1$ ;
  — pour tout $\eta > \varepsilon$, $\mathbb{P}(X > \eta) > 0$.

— pour tous $\eta_1$, $\eta_2 > \varepsilon$, la loi de $\dfrac{X}{\eta_1}$ conditionnellement à l'événement $\{X > \eta_1\}$ est la même que celle de $\dfrac{X}{\eta_2}$ conditionnellement à l'événement $\{X > \eta_2\}$, ce qui équivaut à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\left(\frac{X}{\eta_1} > x | X > \eta_1\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{\eta_2} > x | X > \eta_2\right).$$

Déterminer la forme de la densité d'une telle variable aléatoire.

---

**Solution :**

Il suffit de voir que l'hypothèse implique que $Z = \ln \dfrac{X}{\varepsilon}$ possède la propriété d'absence de mémoire (ECS1 p.24) et donc que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$.

On détermine la densité cherchée en déterminant la fonction de répartition de $x$ (et en la dérivant à la fin) : Soit $x > \varepsilon$ (et donc $\ln \dfrac{x}{\varepsilon} > 0$), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \mathbb{P}\left(\ln \frac{X}{\varepsilon} \leqslant \ln \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= 1 - \exp(-\lambda . \ln \frac{x}{\varepsilon}) = 1 - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{-\lambda} \end{aligned}$$

On obtient par dérivation (la f.r. obtenue, valant 0 sur $]-\infty, \varepsilon[$ est bien continue sur tout $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\varepsilon\}$) la densité de $X$ :

$$\boxed{\delta_X(x) = \lambda . \frac{\varepsilon^\lambda}{x^{\lambda+1}} \mathbb{1}_{]\varepsilon, +\infty[}(x)}.$$

De là, on peut enchainer sur des questions d'existence d'espérance et de variance, de lois du min, du max, etc...

# SUJET S7

## Exercice principal S7

On se place dans un espace euclidien $E$ de dimension $n \geqslant 1$.

1. **Question de cours :** réduction des matrices symétriques réelles.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$. Montrer que :
$$\forall x \in E \quad ||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k \rangle^2.$$
3. On s'intéresse maintenant à la réciproque du résultat précédent. Soit donc une famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_m)$ de $E$ telle que :
$$\forall x \in E \quad ||x||^2 = \sum_{k=1}^{m} \langle x;\ e_k \rangle^2.$$
On suppose en outre que les vecteurs $e_1, \ldots, e_m$ sont tous de norme 1.
   (a) Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_m)$ est une famille orthonormée de $E$.
   (b) Déterminer $(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m))^{\perp}$ et conclure.
4. On considère désormais une famille de $n$ vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ (où $n = \dim E$) telle que :
$$\forall x \in E \quad ||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k \rangle^2.$$
On ne suppose plus que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont de norme 1.
   (a) Pourquoi la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est-elle encore une base de $E$ avec ces hypothèses ?
   (b) Montrer que, pour tous $x$ et $y$ dans $E$ :
$$\langle x;\ y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k \rangle \langle y;\ e_k \rangle.$$
   (c) Soit $G$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$G = \begin{pmatrix} \langle e_1;\ e_1 \rangle & \langle e_1;\ e_2 \rangle & \ldots & \langle e_1;\ e_n \rangle \\ \langle e_2;\ e_1 \rangle & \langle e_2;\ e_2 \rangle & \ldots & \langle e_2;\ e_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n;\ e_1 \rangle & \langle e_n;\ e_2 \rangle & \ldots & \langle e_n;\ e_n \rangle \end{pmatrix}.$$
   Autrement dit : $G = (\langle e_i;\ e_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
   Pourquoi la matrice $G$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ?
   (d) Prouver que $G^2 = G$.
   En déduire que $G = I_n$ et conclure.

---

**Solution :**

1. Question de cours : programme ECS2 2013 p. 18.

2. C'est encore un résultat du cours. Si la base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, le vecteur $x$ se décompose sous la forme :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k \rangle e_k$$

d'où par bilinéarité du produit scalaire :

$$||x||^2 = \langle x;\ x \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x;\ e_i \rangle \langle x;\ e_j \rangle \langle e_i;\ e_j \rangle \boxed{= \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k \rangle^2}$$

car la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée.

3. (a) On applique l''hypothèse avec $x = e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. On obtient ainsi :

$$1 = ||e_i||^2 = \sum_{k=1}^{m} \langle e_i;\ e_k \rangle^2 = 1 + \sum_{k \neq i} \langle e_i;\ e_k \rangle^2$$

Ainsi : $\sum_{k \neq i} \langle e_i;\ e_k \rangle^2 = 0$. Mais c'est une somme de termes positifs donc chaque terme est nul :

$$\forall (i,k) \in [\![1,m]\!] \quad i \neq k \Rightarrow \langle e_i;\ e_k \rangle = 0$$

Les vecteurs étant unitaires, $\boxed{\text{la famille est donc bien orthonormée.}}$

(b) Soit $x \in (\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m))^{\perp}$. Alors, pour tout $k \in [\![1,m]\!]$, $\langle x;\ e_k \rangle = 0$ d'où :

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{m} \langle x;\ e_k \rangle^2 = 0$$

Donc $x = 0$. Ainsi :

$$(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m))^{\perp} = \{0\}$$

Mais alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m) = E$ et donc la famille $(e_1, \dots, e_m)$ est génératrice. Elle est libre car orthonormée et c'est donc bien $\boxed{\text{une base orthonormée de } E.}$ En particulier, cela prouve que $m = n$.

4. (a) L'argument utilisé à la question 3.(b) pour montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice reste valable. De plus, comme on sait désormais que le cardinal de la famille est égal à la dimension de $E$, on peut affirmer que $\boxed{\text{la famille } (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base de } E.}$

(b) D'une part :

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x;\ y \rangle + ||y||^2$$

et d'autre part, en utilisant l'hypothèse sur la famille $(e_1, \dots, e_n)$ on peut également calculer :

$$\begin{aligned}
||x+y||^2 &= \sum_{k=1}^{n} \langle x+y;\ e_k \rangle^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\langle x;\ e_k \rangle + \langle y;\ e_k \rangle)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k \rangle^2 + 2\sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k \rangle \langle y;\ e_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle y;\ e_k \rangle^2 \\
&= ||x||^2 + 2\sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k \rangle \langle y;\ e_k \rangle + ||y||^2
\end{aligned}$$

En comparant les deux expressions on en déduit :

$$\boxed{\langle x;\ y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k \rangle \langle y;\ e_k \rangle}$$

(c) La matrice $G$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car c'est une matrice $\boxed{\text{symétrique réelle.}}$

(d) On note $A = G^2 = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors par définition du produit matriciel, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i;\ e_k\rangle\langle e_k;\ e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i;\ e_k\rangle\langle e_j;\ e_k\rangle = \langle e_i;\ e_j\rangle$$

par la question 4.(b). Mais cela signifie exactement que $\boxed{G^2 = G.}$
La matrice $G$ définit donc un projecteur.
Montrons que $G$ est inversible. Il suffit pour cela de montrer que ses colonnes forment une famille libre.
On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de $G$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j;\ e_i\rangle = 0$$

soit encore par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j;\ e_i\rangle = 0$$

Mais alors cela signifie que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in (\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n))^{\perp} = \{0\}$ et donc $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$. Mais alors, par liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$, on obtient $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Cela prouve que la matrice $G$ est inversible.
En multipliant l'égalité $G^2 = G$ par $G^{-1}$ on obtient alors $G = I_n$. Mais cela signifie exactement que $\langle e_i;\ e_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ et que $\langle e_i;\ e_i\rangle = 1$ : $\boxed{\text{la base } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est orthonormée.}}$

# Exercice sans préparation S7

```
function y=g(x)
    X=grand(1,10000,"unf",0,1/2);
    Y=grand(1,10000,"unf",0,1/3);
    S=0;
for k=1:10000

    if X(k)+Y(k)<=x then S=S+1;
    end
end
y=S/10000;

endfunction
function graph2()
    X=linspace(-0.1,1,101);
    fplot2d(X,g)
endfunction
```

1. Commentez les fonctions Scilab.
2. Dessiner le graphe de sortie la fonction **graph2**

---

**Solution :**

1. $g$ représente la fonction de répartition de $X+Y$ où $X \hookrightarrow U([0,\frac{1}{2}])$ et $Y \hookrightarrow U([0,\frac{1}{3}])$.
2. $X$ et $Y$ sont indépendantes. Posons $Z = X+Y$, le produit de convolution donne une densité de $Z$

$$h(z) = 6\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{0\leqslant t\leqslant 0.5}\mathbb{1}_{0\leqslant z-t\leqslant \frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = 6\int_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{z-\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant z}\,\mathrm{d}t$$

$z-\frac{1}{3} \geqslant 0$ ssi $z \geqslant \frac{1}{3}$ et $z-\frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{2}$ ssi $z \geqslant \frac{5}{6}$

si $z<0$ ou $z>\frac{5}{6}$, $h(z)=0$,

si $z \leqslant \frac{1}{3}$, $h(z) = 6\int_0^z \mathrm{d}t = 6z$,

si $\frac{1}{3} < z \leqslant \frac{1}{2}$, $h(z) = 6\int_{z-\frac{1}{3}}^z \mathrm{d}t = 2$,

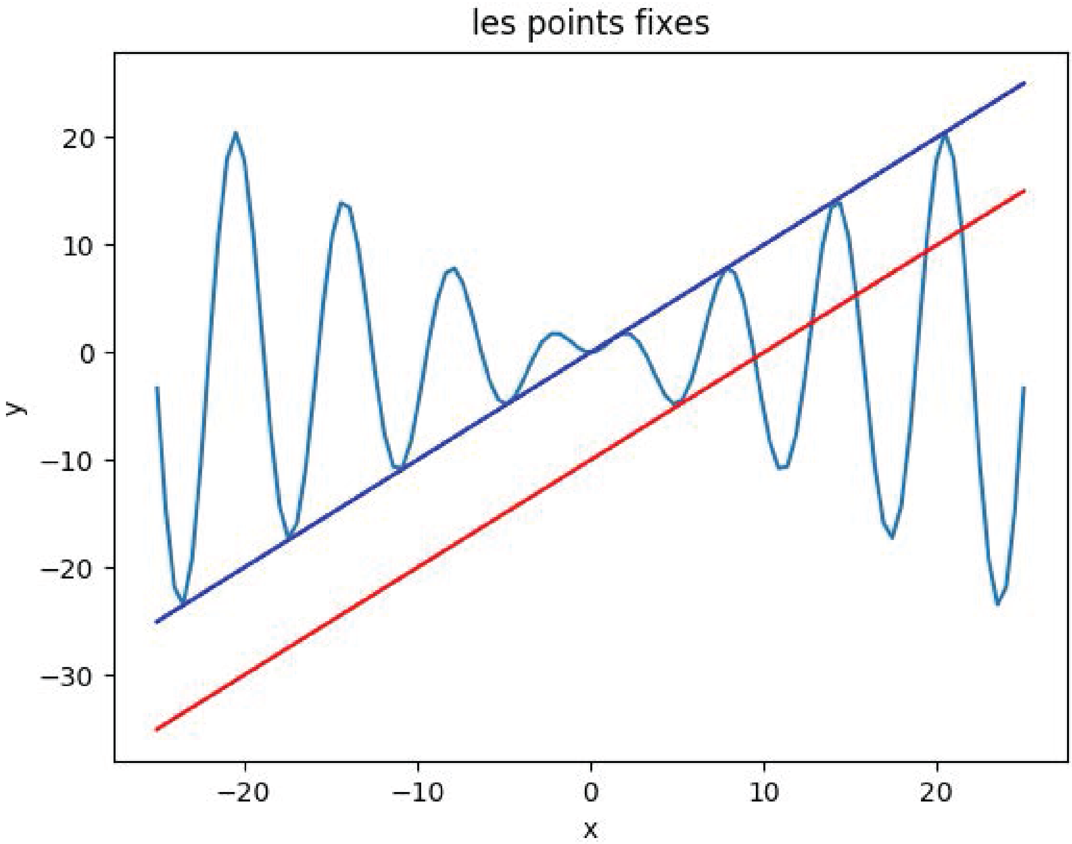
si $\frac{1}{2} < z \leqslant \frac{5}{6}$, $h(z) = 6\int_{z-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = 3-6z+2 = 5-6z$,

Calculons la fonction de répartition : si $z \leqslant \frac{1}{3}$ $H(z)\boxed{=3z^2}$,

si $\frac{1}{3} < z \leqslant \frac{1}{2}$ $H(z) = H\left(\frac{1}{3}\right) + \int_{\frac{1}{3}}^z 2t\,\mathrm{d}t \boxed{=2z-\frac{1}{3}}$,

si $\frac{1}{2} < z \leqslant \frac{5}{6}$ $H(z) = H\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^z (5-6t)\,\mathrm{d}t \boxed{=5z-3z^2-\frac{13}{12}}$,

si $z<0$ $H(z)=0$, et si $z>\frac{5}{6}$, $H(z)=1$.


les points fixes
y
x
20
10
0
−10
−20
−30
−20
−10
0
10
20

# SUJET S8

## Exercice principal S8

Pour tout réel $t$ de $[0,1]$, on définit la fonction $f_t$ sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad f_t(x) = \ln(x) - \ln(x+t) + \frac{1}{x}.$$

1. **Question de cours :** Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires à densité.
2. (a) Soit $t \in [0,1]$.
   Montrer que l'équation $f_t(x) = 1$, d'inconnue $x \in ]0,+\infty[$, admet une unique solution dans $]0,+\infty[$ que l'on note $\varphi(t)$.
   (b) Calculer $\varphi(0)$, et montrer que $\dfrac{1}{3} < \varphi(1) < \dfrac{1}{2}$.
   (c) Montrer que $\varphi$ est strictement décroissante sur $[0,1]$.
3. Pour tout réel $t$ de $[0,1]$, on note $g_t$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \varphi(t) \\ \dfrac{t+x-tx}{x^2(x+t)} & \text{si } x \geqslant \varphi(t) \end{cases}$$

   Montrer que $g_t$ est une densité de probabilité.
4. Soit $t$ un réel de $[0,1]$. On considère dans la suite une variable aléatoire $X_t$ admettant $g_t$ pour densité.
   Les questions (a), (b) et (c) sont indépendantes.
   (a) On admettra provisoirement que $\varphi$ est continue en 0.
   On note pour tout $n \geqslant 1$, $Z_n = X_{1/n}$. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
   (b) Montrer que $X_t$ admet une espérance si et seulement si $t=1$, et vérifier que : $\mathbb{E}[X_1] = \dfrac{1}{\varphi(1)} - 1$.
   (c) On note $Y_t = f_t(X_t)$. Montrer que $Y_t$ suit une loi uniforme sur un intervalle $[a,b[$, où $a$ et $b$ sont deux réels à préciser.
5. Montrer que $\forall t \in [0;1[$, $\varphi(t) \geqslant 1-t$. En déduire que $\varphi$ est continue en 0.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS2 page 22
2. (a) Soit $t \in [0,1]$. La fonction $f_t$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus,

$$\forall x > 0,\ f_t'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+t} - \frac{1}{x^2} = \frac{x(x+t) - x^2 - x - t}{x^2(x+t)} = \frac{x(t-1) - t}{x^2(x+t)}$$

   Comme $t-1 \leqslant 0$ et $-t \leqslant 0$, on a $\forall x > 0, f_t'(x) \leqslant 0$ et $f_t'$ ne s'annule jamais.
   (si $x(t-1) + (-t) = 0$, on a nécessairement (tout est négatif) $x(t-1) = -t = 0$, donc $t=1$ et $t=0$, absurde).

   Ainsi $f_t$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, et continue. Donc $f_t$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $f_t(]0,+\infty[) = ]\lim\limits_{+\infty} f_t, \lim\limits_{0^+} f_t[$.
   Or, en $0^+$, $f_t(x) = \dfrac{x\ln(x)+1}{x} - \ln(x+t) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ car $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée.
   En $+\infty$, $f_t(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+t}\right) + \dfrac{1}{x} = \ln\left(\dfrac{1}{1+\frac{t}{x}}\right) + \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
   Finalement : $1 \in ]0,+\infty[ = f_t(]0,+\infty[)$, donc $\boxed{\text{il existe un unique réel } \varphi(t) \in ]0,+\infty[ \text{ tel que } f_t(\varphi(t)) = 1.}$

(b) $f_0(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $f_0(x) = 1 \iff x = 1$ : on a donc $\varphi(0) = 1$.
$f_1(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.
On a $f_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 + \ln\left(\dfrac{1/2}{3/2}\right) = 2 - \ln(3) < 1$ (car $\ln(3) > \ln(e) > 1$).
Par ailleurs $f_1\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3 + \ln\left(\dfrac{1/3}{4/3}\right) = 3 - \ln(4) = 3 - 2\ln(2) > 1$ (car $\ln(2) < \ln(e) < 1$).
Ainsi :

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) < f_1(\varphi(1)) < f_1\left(\frac{1}{3}\right) \overset{f_1 \searrow}{\Longrightarrow} \boxed{\frac{1}{3} < \varphi(1) < \frac{1}{2}}$$

(c) Fixons $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.
Alors :

$$f_a(\varphi(b)) = \ln(\varphi(b)) - \ln(\varphi(b)+a) + \frac{1}{\varphi(b)} = (1 + \ln(\varphi(b)+b)) - \ln(\varphi(b)+a) = 1 + \ln\left(\frac{\varphi(b)+b}{\varphi(b)+a}\right) > 1$$

Ainsi, $f_a(\varphi(b)) > f_a(\varphi(a))$, et $f_a$ est strictement décroissante, donc nécessairement $\varphi(b) < \varphi(a)$.
La fonction $\boxed{\varphi \text{ est donc strictement décroissante sur } [0,1].}$

3. La fonction $g_t$ est clairement continue au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{\varphi(t)\}$.
De plus, comme $t \in [0,1]$, on a $\forall x \geqslant \varphi(t),\ t + x - tx = x(1-t) + t \geqslant 0$.
La fonction $g_t$ est donc bien positive.
De plus,

$$\forall A > 0,\ \int_{\varphi(t)}^{A} g_t(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(t)}^{A} (-f_t'(x))\mathrm{d}x = \Big[ - f_t(x) \Big]_{\varphi(t)}^{A} = 1 - f_t(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(t)}^{+\infty} g_t(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.
$\boxed{\text{La fonction } g_t \text{ est donc bien une densité de probabilité.}}$

4. (a) On note pour tout $n \geqslant 1$, $Z_n = X_{1/n}$.
Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \\ 1 - f_{1/n}(x) & \text{si } x \geqslant \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \\ 1 - \frac{1}{x} - \ln(x) + \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) & \text{si } x \geqslant \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

Comme $\varphi$ est décroissante et $\varphi(0) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right) < 1$ donc :
pour $x < 1$, alors comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, pour $n$ assez grand, $x < \varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc $F_{Z_n}(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Pour $x \geqslant 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \geqslant 1 \geqslant \varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $F_{Z_n}(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \ln(x) + \ln\left(x + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \dfrac{1}{x}$.
La fonction $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est continue, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, croissante, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$ : c'est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire $Z$ et $\boxed{(Z_n) \text{ converge en loi vers } Z.}$

(b)

$$\mathbb{E}[X_t] < +\infty \iff \int^{+\infty} x g_t(x)\mathrm{d}x \text{ converge (absolument)}$$

Or,

$$x g_t(x) = \frac{x((1-t)x+t)}{x^2(x+t)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{(1-t)x^2}{x^3} = \dfrac{1-t}{x} & \text{si } t \neq 1 \\ \dfrac{tx}{x^3} = \dfrac{t}{x^2} & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Par critère d'équivalence de fonctions positives, par comparaison avec les intégrales de Riemann, on a donc bien que :

$$\boxed{\mathbb{E}[X_t] \text{ existe } \iff t = 1}$$

Dans le cas où $t=1$, on a :

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_{\varphi(1)}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx = \lim_{A\to+\infty}\left(\Big[\ln(x)-\ln(x+1)\Big]_{\varphi(1)}^{A}\right) = 0-(\ln(\varphi(1))-\ln(\varphi(1)+1) \boxed{= \frac{1}{\varphi(1)}-1}$$

(c) Vu l'expression de $g_t$, on voit déjà que $X_t(\Omega) = [\varphi(t), +\infty[$.
La fonction de répartition de $X_t$ est alors donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X_t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \varphi(t) \\ 1-f_t(x) & \text{si } x \geqslant \varphi(t) \end{cases}$$

Comme $f_t([\varphi(t), +\infty[) = ]0,1]$, on a donc $Y_t(\Omega) = ]0,1]$.
De plus,

$$\forall x \in ]0,1],\ F_{Y_t}(x) = \mathbb{P}(Y_t \leqslant x) = \mathbb{P}(f_t(X_t) \leqslant x) = \mathbb{P}(X_t \geqslant f_t^{-1}(x)) = 1 - F_{X_t}(f_t^{-1}(x)) = 1-(1-x) = x$$

(la variable $X_t$ étant à densité, $\mathbb{P}((X_t = f_t^{-1}(x)) = 0)$

$\boxed{\text{Ainsi, } Y_t \text{ suit bien une loi uniforme sur } ]0,1].}$

5. Soit $t \in [0,1[$. $\varphi(t) \geqslant 1-t$ ssi $f_t(\varphi(t)) \leqslant f_t(1-t)$ ssi $1 \leqslant \ln(1-t) + \dfrac{1}{1-t}$
On définit sur $[0;1[$ $x \mapsto \ln(1-x) + \dfrac{1}{1-x}$, $g'(x) = \dfrac{-1}{1-x} + \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.
$g$ est bien croissante sur $[0;1[$ et $g(0)=1$, donc en particulier $g(t) \geqslant 1$ et $1 \geqslant \varphi(t) \geqslant 1-t$.
Par encadrement $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 1 = \varphi(0)$.

$\boxed{\varphi \text{ est continue en } 0.}$

# Exercice sans préparation S8

Soit $a$ un réel strictement positif.

1. Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\arctan(n+a) - \arctan n)$.
2. Proposer un programme SCILAB permettant d'en donner une valeur approchée à 0.001 près quand $a = \frac{1}{2}$
   On rappelle que `atan(x)` renvoie la valeur de $\arctan(x)$

---

**Solution :**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction arctan est dérivable sur $[n, n+a]$, donc, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe un réel $u_n \in ]n, n+a[$ tel que $\dfrac{\arctan(n+a) - \arctan n}{a} = \dfrac{1}{u_n^2+1}$. On en déduit que

$$\arctan(n+a) - \arctan n = \frac{a}{u_n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}.$$

   Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 1} \arctan(n+a) - \arctan n$ converge.

2. Il s'agit donc de calculer $\sum_{n=0}^{N} \left(\arctan\left(n+\frac{1}{2}\right) - \arctan(n)\right)$ pour un N tel que

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\arctan\left(n+\frac{1}{2}\right) - \arctan(n)\right)\right| < 0.001$$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\arctan\left(n+\frac{1}{2}\right) - \arctan(n)\right)\right| &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\arctan\left(n+\frac{1}{2}\right) - \arctan(n)\right) \\
&= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2(u_n^2+1)} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

   Par une comparaison série intégrale $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2n^2} \leqslant \dfrac{1}{2N}$.

   Il suffit donc de calculer $S_{500}$.

```
S=0;
for n=0:500
   S=S+atan(n+1/2)-atan(n);
   end;
disp(S)
```

# SUJET S9

## Exercice principal S9

Soit $E$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et soit $\mathcal{F}=(v_1,\dots,v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $E$.

1. **Question de cours :** énoncer le théorème de Pythagore.
2. Soit $(x,y)\in E^2$. Exprimer $\langle x,y\rangle$ à l'aide de $\|x+y\|^2$ et de $\|x-y\|^2$.
3. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par :
$$\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=\frac{1}{2}$$
On pose $U=X_1v_1+\cdots+X_nv_n$. Calculer l'espérance de $\|U\|^2$.
4. En déduire qu'il existe $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1;1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1v_1+\cdots+\varepsilon_nv_n\|\leqslant\sqrt{n}$.
5. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est orthogonale si, et seulement si :
$$\forall(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1;1\}^n,\ \|\varepsilon_1v_1+\cdots+\varepsilon_nv_n\|=\sqrt{n}.$$
6. Montrer que si $\mathcal{F}$ n'est pas orthogonale, il existe $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1;1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1v_1+\cdots+\varepsilon_nv_n\|>\sqrt{n}$.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS2 page 7.
2. Soit $(x,y)\in E^2$. Alors : $\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2-\left(\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2\right)=4\langle x,y\rangle$.
$$\boxed{\forall(x,y)\in E^2,\ \langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right).}$$
3. Pour tout $\omega\in\Omega$, on a :
$$\|U(\omega)\|^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n X_i(\omega)X_j(\omega)\langle v_i,v_j\rangle.$$
Par linéarité de l'espérance puis indépendance des $X_1,\dots,X_n$, on trouve :
$$\mathbb{E}\left(\|U\|^2\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mathbb{E}(X_iX_j)\langle v_i,v_j\rangle=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}(X_i^2)\|v_i\|^2\boxed{=n.}$$
4. Supposons le contraire par l'absurde. On aurait alors : $\forall\omega\in\Omega,\ \|U(\omega)\|^2>n$ et donc $\mathbb{E}\left(\|U(\omega)\|^2\right)>n$, ce qui est absurde. Il existe donc $\omega\in\Omega$ tel que $\|U(\omega)\|^2\leqslant n$, i.e. :
$\boxed{\text{il existe } (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1;1\}^n \text{ tel que } \|\varepsilon_1v_1+\cdots+\varepsilon_nv_n\|\leqslant\sqrt{n}.}$
5. Supposons la famille $\mathcal{F}$ orthogonale. Soit $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1;1\}^n$. La famille $(\varepsilon_1v_1,\dots,\varepsilon_nv_n)$ reste orthogonale, donc le théorème de Pythagore assure que :
$$\|\varepsilon_1v_1+\cdots+\varepsilon_nv_n\|^2=\sum_{k=1}^n|\varepsilon_k|^2\|v_k\|^2=n$$
On a donc bien $\|\varepsilon_1v_1+\cdots+\varepsilon_nv_n\|=\sqrt{n}$.
Supposons réciproquement que, pour tout $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1;1\}^n,\ \|\varepsilon_1v_1+\cdots+\varepsilon_nv_n\|=\sqrt{n}$. La variable aléatoire $\|U\|^2$ est donc constante égale à $n$.

Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $(\varepsilon_j)_{j \neq i} \in \{-1; 1\}^{n-1}$. D'après une égalité de polarisation on a :

$$\left\langle v_i, \sum_{j \neq i} \varepsilon_j v_j \right\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\|v_i + \sum_{j \neq i} \varepsilon_j v_j\right\|^2 - \left\|v_i - \sum_{j \neq i} \varepsilon_j v_j\right\|^2\right) = \frac{1}{4}(n-n) = 0.$$

Pour $j \neq i$, on peut écrire :

$$v_j = \frac{1}{2}\left[\left(v_j + \sum_{k \neq i,j} v_k\right) - \left(-v_j + \sum_{k \neq i,j} v_k\right)\right]$$

Le vecteur $v_j$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs orthogonaux à $v_i$, il est donc lui-même orthogonal à $v_i$. La famille $\mathcal{F}$ est donc orthogonale.

$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est donc orthogonale si et seulement si } \forall(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n,\ \|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.}$

6. Si $\mathcal{F}$ n'était pas orthogonale, il existerait $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \neq \sqrt{n}$. Supposons par l'absurde que, pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$, $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| < \sqrt{n}$. La variable aléatoire $\|U\|^2 - n$ serait alors une variable aléatoire finie, négative et d'espérance nulle, donc presque-sûrement nulle, ce qui est absurde pas hypothèse.

   On en déduit donc que :

   $\boxed{\text{il existe } (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n \text{ tel que } \|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}.}$

# Exercice sans préparation S9

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = |u_n - n|$.
À l'aide de Scilab, on calcule $(u_0, u_1, \ldots, u_{10})$ pour certaines valeurs de $u_0$. On obtient le tableau suivant :

| $u_0$ | Calcul de $(u_0, u_1, \ldots, u_{15})$ par Scilab | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | -3. | 3. | 2. | 0. | 3. | 1. | 4. | 2. | 5. | 3. | 6. | 4. | 7. | 5. | 8. | 6. |
| 4 | 4. | 4. | 3. | 1. | 2. | 2. | 3. | 3. | 4. | 4. | 5. | 5. | 6. | 6. | 7. | 7. |
| 6 | 6. | 6. | 5. | 3. | 0. | 4. | 1. | 5. | 2. | 6. | 3. | 7. | 4. | 8. | 5. | 9. |
| 9 | 9. | 9. | 8. | 6. | 3. | 1. | 4. | 2. | 5. | 3. | 6. | 4. | 7. | 5. | 8. | 6. |

Déterminer un équivalent de $u_n$ lorsque $n \to +\infty$.

---

**Solution :**

Ce qu'il faut conjecturer, c'est qu'à partir d'un certain rang, on aurait : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + 1$.
(Regarder une case sur deux, suivant les couleurs du tableau.

La suite $(u_n)$ est clairement positive (à partir de $u_1$), et décroissante sur ses premiers termes (à partir de $u_1$ puisque :

$$u_1 = |u_0|, \quad u_2 = u_1 - 1, \quad u_3 = u_1 - 1 - 2, \qquad u_4 = u_1 - 1 - 2 - 3, \ldots$$

Plus précisément tant que $u_n < n$, on a $u_{n+1} - u_n = -n$ et la suite est

Si $u_1 \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, alors la suite finie $(u_1, \ldots, u_n)$ est strictement décroissante.

Il existe nécessairement au moins un rang $n_0$ où on aura $u_{n_0} - n_0 \leqslant 0$

Pour ce rang $n_0$, on a alors $u_{n_0+1} = |u_{n_0} - n_0| = n_0 - u_{n_0} \geqslant 0$.

Et donc $u_{n_0+1} \leqslant n_0 + 1$

Donc : $u_{n_0+2} = |u_{n_0+1} - (n_0+1)| = (n_0+1) - u_{n_0+1} = (n_0+1) - (n_0 - u_{n_0}) = u_{n_0} + 1$.

On a une relation de type arithmétique entre $u_{n+2}$ et $u_n$ ,à condition que $u_n \leqslant n$.

Par récurrence immédiate, pour $k \in \mathbb{N}$, "$u_{n_0+2k} = u_{n_0} + k \leqslant n_0 + 2k$ et $u_{n_0+2k+1} = u_{n_0+1} + k \leqslant n_0 + 2k + 1$"

A partir du rang $n_0$, suites $(u_{2k})$ et $(u_{2k+1})$ sont arithmétiques de raison 1. On a donc, pour $2r$ pair supérieur ou égal à $n_0$ :

$$u_{2k} = u_{2r} + (k - r) \underset{k\to+\infty}{\sim} k$$

et

$$u_{2k+1} = u_{2s+1} + (k - s) \underset{k\to+\infty}{\sim} k$$

Ainsi :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}}$$

# SUJET S10

## Exercice principal S10

1. **Question de cours :** Somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes ?
2. Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire $X$ suit une *loi de Cauchy* de paramètre $\lambda$, noté $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ si $X$ admet pour densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_\lambda : x \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$$
On pose $Z = \ln|X|$.
Vérifier que $Z$ est définie presque sûrement et en déterminer une densité.
3. On considère maintenant deux variables indépendantes $X$ et $Y$ suivant une loi de Cauchy de paramètre 1. Posons $U = \ln|XY|$.
   (a) Vérifier que $U$ est définie presque sûrement et montrer qu'elle admet la fonction $g$ comme densité où :
$$g : x \mapsto \frac{4}{\pi^2}\frac{x}{e^x - e^{-x}}\ \mathbb{1}_{x\in\mathbb{R}^*}$$
   On pourra remarquer, au cours du calcul à effectuer, que :
$$\text{Si } x \neq 0,\ \frac{1}{(y+1)(y+e^{2x})} = \frac{1}{e^{2x}-1}\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+e^{2x}}\right)$$
   (b) Etudier la continuité de $g$ sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant le fait que $g$ est une densité, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$.
5. (a) Montrer que, pour $t \in [0,1[$ :
$$\frac{\ln t}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\ln t + r_n(t) \text{ où } r_n(t) = \frac{t\ln t}{t^2-1}t^{2n+1}.$$
   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^1 r_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0$ quand $n \to +\infty$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ puis celle de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

---

**Solution :**

1. Question de cours : programme ECS2 2014 p. 14.
2. La probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$ est nulle donc $Z$ est définie presque sûrement. De plus, $Z$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et

pour $x \in \mathbb{R}$, en notant $F_Z$ la fonction de répartition de $Z$ :

$$\begin{array}{rcl} F_Z(x) & = & \mathbb{P}(Z \leqslant x) \\ & = & \mathbb{P}(\ln|X| \leqslant x) \\ & = & \mathbb{P}(|X| \leqslant e^x) \text{ par croissance de l'exponentielle} \\ & = & \mathbb{P}(-e^x \leqslant X \leqslant e^x) \\ & = & \displaystyle\int_{-e^x}^{e^x} \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{e^x} \frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ par parité} \\ & = & \displaystyle\frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\frac{e^x}{\lambda}\right) \end{array}$$

En particulier $F_Z$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $Z$ est une variable aléatoire à densité et une densité est la fonction :

$$\boxed{f_\lambda : t \mapsto \frac{2\lambda}{\pi}\frac{e^t}{\lambda^2+e^{2t}}}$$

3. (a) $U$ est définie dès que $XY \neq 0$, or :

$$\mathbb{P}(XY=0) = \mathbb{P}(\{X=0\}\cup\{Y=0\}) \leqslant P(X=0)+P(Y=0) = 0$$

donc $U$ est définie presque sûrement.
De plus, $U = \ln|X| + \ln|Y|$ et donc par indépendance de $X$ et de $Y$, si on note respectivement $f_1$ et $f_2$ des densités de $\ln|X|$ et de $\ln|Y|$, la variable $U$ admet comme densité la fonction $g$ définie par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(x-t)\,\mathrm{d}t$$

On va mener le calcul en utilisant le résultat de la question précédente. Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & \displaystyle\frac{4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\frac{e^{x-t}}{1+e^{2(x-t)}}\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\frac{4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^{2t})(e^{2t}+e^{2x})}e^{2t}\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+y)(y+e^{2x})}\,\mathrm{d}y \text{ en posant } y=e^{2t} \text{ (bijection croissante } \mathcal{C}^1) \\ & = & \displaystyle\frac{2e^x}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}-1}\left(\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+e^{2x}}\right)\mathrm{d}y \text{ car } e^{2x}\neq 1 \text{ pour } x\neq 0 \\ & = & \displaystyle\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{e^x+e^{-x}}\left[\ \ln\frac{y+1}{y+e^{2x}}\ \right]_0^{+\infty} \\ & = & \boxed{\displaystyle\frac{4}{\pi^2}\frac{x}{e^x-e^{-x}}} \end{array}$$

(b) Il suffit de calculer la limite quand $x$ tend vers 0 de l'expression trouvée ci-dessus. Or :

$$\frac{4}{\pi^2}\frac{x}{e^x-e^{-x}} \underset{0}{\sim} \frac{4}{\pi^2}\frac{x}{2x} = \frac{2}{\pi^2}$$

On en déduit donc que $\boxed{g \text{ n'est pas continue en } 0.}$

4. (a) Comme $g$ est une densité définie sur $\mathbb{R}$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1 \text{ donc } \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{e^x-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$$

Or en effectuant le changement de variable $t = e^x$ – valide car défini par une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ – on obtient par ailleurs :

$$\boxed{\frac{\pi^2}{4} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{e^x-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t}$$

d'où le résultat demandé.

(b) Il suffit d'écrire par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

et en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans la seconde intégrale – changement de variable là encore valide car toujours défini par une bijection décroissante et $\mathcal{C}^1$ – on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(\frac{1}{u}\right)^2-1}\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^1 \frac{\ln u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u$$

d'où $2\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$ et donc finalement : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}}$.

5. (a) Pour $t \neq 1$, par la formule pour les sommes géométriques :

$$\sum_{k=0}^{n} t^{2k} = \frac{t^{2n+2}-1}{t^2-1}$$

d'où :

$$\frac{1}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} t^{2k} + \frac{t^{2n+2}}{t^2-1}$$

puis finalement :

$$\boxed{\frac{\ln t}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\ln t + \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\ln t + r_n(t)}$$

avec $r_n(t) = \dfrac{t\ln t}{t^2-1}t^{2n+1}$.

(b) On pose $\varphi(t) = \dfrac{t\ln t}{t^2-1}$. Alors la fonction $\varphi$ est continue sur $]0,1[$. De plus, par croissance comparée :

$$\lim_{x\to 0} \varphi(t) = 0$$

tandis qu'au voisinage de 1 :

$$\varphi(t) \underset{1}{\sim} \frac{t(t-1)}{t^2-1} = \frac{t}{t+1}$$

d'où : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \varphi(t) = \frac{1}{2}$ Ainsi la fonction $\varphi$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ en posant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = \dfrac{1}{2}$. On continue de noter $\varphi$ la fonction ainsi prolongée.

Alors, la fonction $\varphi$ est continue sur le segment $[0,1]$ et elle y est donc bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0,1] \quad |\varphi(t)| \leqslant M.$$

Remarquons que la continuité de $\varphi$ sur $[0,1]$ implique que la fonction $r_n$ est bien intégrable sur $[0,1]$ et on peut donc parler de son intégrale sur ce segment.

Alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 r_n(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 |r_n(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M\int_0^1 t^{2n+1}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{M}{2n+2}\end{aligned}$$

Par théorème de comparaison, comme $\dfrac{M}{2n+2} \to 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{\int_0^1 r_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0 \text{ quand } n \to +\infty}$$

(c) Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^{2k} \ln t$ est intégrable sur $[0,1]$. Cette fonction est en effet continue sur $]0,1]$ et, pour $k \geqslant 1$, se prolonge en continuité par 0 car, par croissance comparée, $\lim\limits_{t \to 0} t^{2k} \ln t = 0$.
Dans le cas où $k = 0$, $t \mapsto \ln t$ est bien intégrable au voisinage de 0, par exemple par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, ainsi $|\ln t| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{t}}}\right)$ au voisinage de 0. On peut aussi calculer explicitement une primitive (c'est le calcul fait ci-dessous).
Cela remarqué, on peut intégrer terme à terme sur $]0,1[$ l'égalité obtenue à la question 5.(a), ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} \,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^{2k} \ln t \,\mathrm{d}t + \int_0^1 r_n(t) \,\mathrm{d}t$$

On pose $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} \ln t \,\mathrm{d}t$ pour $k \in \mathbb{N}$. En intégrant par parties, toutes les fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_k &= \left[ \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2k}}{2k+1} \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} + \int_0^1 r_n(t) \,\mathrm{d}t$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} \,\mathrm{d}t - \int_0^1 r_n(t) \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^1 r_n(t) \,\mathrm{d}t$$

Par la question précédente, on en déduit en passant à la limite que :

$$\boxed{\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

On remarque alors, en séparant les termes d'indice respectivement pair et impair, que :

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} + \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

d'où :

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

# Exercice sans préparation S10

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(\frac{x+1}{2}) = f(x).$$

Montrer que $f$ est constante.

---

**Solution :**

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$.

Si $x \leqslant 1$ alors $(u_n)$ majorée par 1 [récurrence] et croissante [signe de $f(x) - x$].
Si $x > 1$ $(u_n)$, on montre de même que $(u_n)$ est minorée par 1 et décroissante.

Ainsi dans tous les cas, $(u_n)$ converge. Elle converge donc vers l'unique point fixe 1.

(on peut aussi calculer explicitement $u_n$ en remarquant que c'est une suite arithmético-géométrique :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (x-1)$)

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(x)$ par continuité et unicité de la limite $f(x) = f(1)$ et $\boxed{f \text{ est constante}}$.

# SUJET S11

## Exercice principal S11

Soit $n \geqslant 2$. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, défini par : $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$.

1. Soit $Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on note $H = Z\,{}^tZ$.
   (a) Montrer que $H$ est diagonalisable et vérifier que $\mathrm{Ker}(H) = (\mathrm{Vect}(Z))^{\perp}$.
   (b) Montrer que $Z$ est vecteur propre de $H$ et préciser la valeur propre associée.

Dans la suite de l'exercice, on considère $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
On admet également la valeur suivante : $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2. **Question de cours** Lois $\gamma$ : densité et stabilité par une opération à expliciter.
3. Soit $i \in [\![1, n]\!]$
   (a) Donner la fonction de répartition de la variable $V_i = \dfrac{X_i^2}{2}$ en fonction de $\Phi$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
   Justifier que $V_i$ possède une densité et proposez-en une.
   Reconnaître alors une loi $\gamma$ dont on précisera le paramètre.
   (b) Donner la loi suivie par $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V_i$.
4. On note encore $Z = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ le vecteur aléatoire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ obtenu et la matrice aléatoire $H = Z\,{}^tZ$.
   Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $p_F$ la projection orthogonale sur $F$.
   (a) Calculer la probabilité que $Z$ soit le vecteur nul.
   (b) Déterminer la loi suivie par la valeur propre aléatoire $\|Z\|^2$ de la matrice $H$.
   (c) Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un vecteur normé de $F$.
   Montrer que la variable aléatoire $\langle u, Z\rangle$ suit une loi normale dont on précisera les paramètres.
   (d) On admet que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, si $(v_1, \ldots, v_k)$ est une famille orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors les variables aléatoires $\langle v_1, Z\rangle$, $\langle v_2, Z\rangle, \ldots, \langle v_k, Z\rangle$ sont mutuellement indépendantes.
   Vérifier que les variables aléatoires $\|p_F(Z)\|^2$ et $\|Z - p_F(Z)\|^2$ sont indépendantes et déterminer leur loi.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS2 pages 12 (définition) et 14 (stabilité par la somme)
2. (a) ${}^tH = {}^t(Z\,{}^tZ) = Z\,{}^tZ = H$, donc $H$ est $\boxed{\text{symétrique réelle donc diagonalisable.}}$
   De plus, pour tout $T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$T \in \mathrm{Ker}(H) \iff HT = 0 \iff Z(\,{}^tZH) = 0 \iff \langle Z, H\rangle Z = 0 \overset{Z\neq 0}{\iff} \langle Z, H\rangle = 0 \iff \boxed{T \in (\mathrm{Vect}(Z))^{\perp}}$$

(b) Le vecteur $Z$ est bien non nul et : $HZ = Z\,{}^tZZ = Z(\langle Z, Z\rangle) = \|Z\|^2 Z$.
Ainsi, $\boxed{Z \text{ est vecteur propre de } H \text{ pour la valeur propre } \|Z\|^2 \neq 0.}$

3. (a) $X_i(\Omega) = \mathbb{R}$, donc $V_i(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
- pour $x < 0$, $F_{V_i}(x) = 0$ ;
- pour $x \geqslant 0$,

$$F_{V_i}(x) = \mathbb{P}(V_i \leqslant x) = \mathbb{P}(X_i^2 \leqslant 2x) = \mathbb{P}(-\sqrt{2x} \leqslant X_i \leqslant \sqrt{2x}) = 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{V_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

La fonction $\Phi$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\Phi(0) = 1/2$, on voit que $F_{V_i}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ce qui suffit pour affirmer que $V_i$ est une variable à densité.
Comme densité de $V_i$, on peut proposer :

$$f_{V_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\Phi'(\sqrt{2x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(1/2)}x^{1/2-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{On reconnaît donc une loi } \gamma \text{ de paramètre } 1/2.}$

(b) Les $V_i$ étant mutuellement indépendantes de loi $\gamma(1/2)$, leur somme $W = \sum_{i=1}^{n} V_i$ suit donc une loi $\boxed{\gamma(n/2).}$

4. (a)

$$[Z = 0] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0] \subset [X_1 = 0]$$

Ainsi, $0 \leqslant \mathbb{P}(Z = 0) \leqslant \mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$, donc $\boxed{\mathbb{P}(Z = 0) = 0.}$

(b) On a $\|Z\|^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 2W$, avec $W$ la variable aléatoire calculée à la question 2(b). On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(\|Z\|^2 \leqslant x) = \mathbb{P}\left(W \leqslant \frac{x}{2}\right) = F_W\left(\frac{x}{2}\right)$$

Par composition, $\|Z\|^2$ est donc encore une variable à densité, de loi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f_{\|Z\|^2}(x) = \frac{1}{2}f_W\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{\frac{n}{2}-1}e^{-x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)}$$

(c) La variable aléatoire $\langle u, Z\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k X_k$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes de loi normale, elle suit donc encore une loi normale. De plus,

$$\mathbb{E}[\langle u, Z\rangle] = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathbb{E}[X_k] = 0$$

et

$$\mathbb{V}[\langle u, Z\rangle] = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \mathbb{V}[X_k] = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \|u\|^2 = 1$$

Ainsi, $\boxed{\langle u, Z\rangle \text{ suit une loi normale centrée réduite.}}$

(d) Notons $r$ la dimension de $F$.
Notons $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(v_1, \ldots, v_r)$ soit une base orthonormée de $F$ (et $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ une base orthonormée de $F^{\perp}$).
Alors : $p_F(Z) = \sum_{k=1}^{r} \langle v_k, Z\rangle v_k$ et $Z - p_F(Z) = \sum_{k=r+1}^{n} \langle v_k, Z\rangle v_k$.

Par théorème de Pythagore, on a donc $\|p_F(Z)\|^2 = \sum_{k=1}^{r}(\langle v_k, Z\rangle)^2$ et $\|Z - p_F(Z)\|^2 = \sum_{k=r+1}^{n}(\langle v_k, Z\rangle)^2$

On sait d'après (a) que chaque $\langle v_k, Z\rangle$ suit une loi normale centrée réduite, et elles sont indépendantes. d'après le résultat qui a été admis.

Par le lemme des coalitions, on voit donc que $\|p_F(Z)\|^2$ et $\|Z - p_F(Z)\|^2$ sont indépendantes.

De plus, en adaptant la méthode du (2.b), on voit que $\boxed{\dfrac{\|p_F(Z)\|^2}{2} \text{ suit une loi gamma } \gamma(d/2)}$ et que

$\boxed{\dfrac{\|Z - p_F(Z)\|^2}{2} \text{ suit une loi gamma } \gamma((n-d)/2).}$

On en déduit ainsi la loi de $\|p_F(Z)\|^2$ et de $\|Z - p_F(Z)\|^2$ par transformation affine.

# Exercice sans préparation S11

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_n^2) = 0$$
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

1. A t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ ?
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

---

**Solution :**

1. $\boxed{\text{Non}}$ pour la question. Prendre $u_n = 0$ si $n$ pair et 1 sinon
2. $\boxed{\text{Oui}}$ pour la question. Comme il existe $M > 0$ tel que pour $n$ assez grand $-M \leq u_n - u_n^2$, soit $u_n^2 - u_n - M \leq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se situe entre les 2 racines du polynôme $X^2 - X - M$ et est donc forcément bornée.

# SUJET S12

## Exercice principal S12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $P_n$ le polynôme $(X^2-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$, sa dérivé $n$-ième.

1. **Question de cours :** énoncer le théorème d'intégration par parties.
2. À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :
$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} Q(x) L_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
3. On note $x_1$,...,$x_p$ les (éventuelles) racines de $L_n$ d'ordre de multiplicité impaire.
On définit alors le polynôme Q par :
$$\begin{cases} Q = (X-x_1)\cdots(X-x_p) & \text{si } P \text{ admet des racines d'ordre de multiplicité impair} \\ Q = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
À l'aide du polynôme $Q$ et de la question précédente, montrer que $L_n$ admet $n$ racines simples appartenant à l'intervalle $]-1,1[$.
4. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note
$$g_k : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_{2n-1}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(x_k) \end{array} \quad \text{et} \quad f : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_{2n-1}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$
Montrer que $f$ est nulle sur $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} g_k$.
5. Montrer que la famille $(g_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{2n-1}[X],\mathbb{R})$.
6. On **admet** provisoirement que si $(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ est une famille libre de $m$ formes linéaires sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$, il existe des vecteurs $u_1,\dots,u_m$ tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!]$, $\varphi_i(u_i) = 1$ et $\varphi_i(u_j) = 0$ si $i \neq j$.

   Déduire des questions précédentes qu'il existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_{-1}^{1} Q(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q(x_i).$$
7. Montrer la propriété provisoirement admise par récurrence sur $m$.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS1 page 12.
2. Par intégration par parties (les polynômes sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$), on trouve :
$$\int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = \left[P_n^{(n-1)}(x)Q(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q'(x)P_n^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$
Remarquons que 1 et -1 sont racines $n$-èmes de $P_n$, donc racines simples de $P_n^{(n-1)}$. On trouve alors :
$$\int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} Q'(x)P_n^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

En intégrant $n-1$ fois de plus par parties, on trouve :

$$\int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} Q'(x)P_n^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x \boxed{= 0}.$$

la dernière égalité étant obtenue puisque $Q^{(n)} = 0$.

3. Si $p \leqslant n-1$, le résultat de la question précédente assure que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$, ce qui est absurde puis le polynôme $QL_n$ est par construction de signe constant et ne s'annule que sur les racines de $L_n$, qui sont en nombre fini.
On en déduit que $p = n$, i.e. $\boxed{L_n \text{ admet } n \text{ racines dans } ]-1,1[.}$
Puisque $\deg L_n = n$, toutes ces racines sont simples.

4. Soit $R \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} g_k$. On a alors $R(x_1) = \cdots = R(x_n) = 0$. Puisque les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont deux-à-deux distincts, le polynôme $(X - x_1)\ldots(X - x_n)$ divise $R$, donc $L_n$ divise $R$. Il existe donc un polynôme $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $R = QL_n$. La première question assure alors que :

$$f(R) = \int_{-1}^{1} R(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\boxed{f \text{ est nulle sur } \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} g_k.}$$

5. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \lambda_1 Q(x_1) + \cdots + \lambda_n Q(x_n) = 0.$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $R_k = \dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X - x_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i)} \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On a $R_k(x_k) = 1$ et $R_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$.

L'évaluation en $Q = R_k$ assure alors que $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. $\boxed{\text{La famille } (g_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \text{ est bien libre.}}$

6. La question revient à montrer que $f \in \operatorname{Vect}(g_1, \ldots, g_n)$.
Supposons par l'absurde que $f \notin \operatorname{Vect}(g_1, \ldots, g_k)$. La famille $(g_1, \ldots, g_n, f)$ serait alors libre. Il existerait alors $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $g_1(Q) = \cdots = g_n(Q) = 0$ et $f(Q) = 1$, ce qui est absurde puisque $Q \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} g_k$.

$$\boxed{\text{Il existe } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que : } \forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} Q(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q(x_i).}$$

7. Montrons le résultat par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$.
Pour $m = 1$ : $\varphi_1$ est une forme linéaire non nulle (car elle forme une famille libre), donc il existe $x_1 \in E$ tel que $\varphi_1(x_1) = 1$. La propriété est donc initialisée.
Soit $m > 1$ et supposons une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ déjà construite.
Puisque la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est libre, la forme linéaire $\psi = \varphi_m - \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \varphi_m(u_k)\varphi_k$ est non nulle. Il existe donc $y \in E$ tel que $\psi(y) = 1$.
* On pose $u'_m = y - \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \varphi_k(y)u_k$.
Comme $\psi(y) = 1$, $\varphi_m(y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \varphi_k(u_k)\varphi_k(y)$ et $\varphi_m(u'_m) = 1$
De plus, si $j < m$, $\varphi_j(u_m) = \varphi_j(y) - \varphi_j(y) = 0$ (seul le terme en $j = k$ est non nul dans la somme.)
* On pose $k \in [\![1, m-1]\!]$, $u'_k = u_k - \varphi_m(u_k)u'_m$
Si $j \in [\![1, m-1]\!]$, $\varphi_j(u'_k) = \varphi_j(u_k) = \delta_{k,j}$. Et $\varphi_m(u'_k) = \varphi_m(u_k) - \varphi_m(u_k) = 0$
La famille $(u'_1, \ldots, u'_m)$ convient donc.

# Exercice sans préparation S12

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $]0, +\infty[$ et telles que $\ln X$ et $\ln Y$ suivent des lois normales $\mathcal{N}(0,1)$.

Calculer la densité de $Z = (X.Y)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

---

**Solution :**

En passant au logarithme :

$$\ln Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ln X + \ln Y)$$

et donc $\ln Z$ est CL de deux variables normales indépendantes.

$$\mathbb{E}(\ln Z) = 0;\ \mathbb{V}(\ln Z) = 1,$$

et donc $\ln Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

On cherche maintenant une densité de $Z = \exp(\ln Z)$. Soit $\Phi$ la fonction de répartition de la loi normale normalisée et $F$ la f.r. de $Z$ : Soit $z \in ]0, +\infty[$.

$$F(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) \quad = \quad \mathbb{P}(\ln Z \leqslant \ln z) = \Phi(\ln z)$$

Pour $z \leqslant 0$, $F(z) = 0$.

La fonction $F$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ (remarquer le bon recollement en 0 du fait que $\Phi(x) \to 0$ lorsque $\ln z = x \to -\infty$), $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est une densité de $Z$ :

$$F'(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \boxed{\dfrac{1}{z}\Phi'(\ln z) = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\ln z)^2}} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

# SUJET S13

## Exercice principal S13

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine $O$ par bonds successifs d'une ou de deux unités suivant la procédure suivante :

- au départ la puce est en $O$ ;
- si, à un instant, la puce est au point d'abscisse $k$, à l'instant d'après elle sera soit au point d'abscisse $k+1$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit au point d'abscisse $k+2$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ;
- les sauts sont indépendants.

1. **Question de cours :** formule des probabilités totales.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n$ la variable aléatoire égale au nombre de sauts à deux unités effectués par la puce au cours des $n$ premiers sauts.
   Déterminer la loi de $S_n$, son espérance et sa variance.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $X_n$ la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après $n$ sauts. Exprimer $X_n$ en fonction de $S_n$. En déduire l'espérance et la variance de $X_n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $Y_n$ la variable aléatoire égale au nombre minimum de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser (au cas où on ne s'y arrêterait pas) la case d'abscisse $n$.
   On définit $Y_0$ comme la variable aléatoire certaine égale à 0.
   (a) Déterminer les valeurs prises par $Y_n$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout entier $k \geqslant 1$ :
   $$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)$$
   (c) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$ :
   $$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$
   (d) Déterminer un réel $a$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathbb{E}(Y_n) - na$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
   Déterminer alors $u_n$ puis $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de $n$.

---

**Solution :**

1. Question de cours : programme ECS1 2013 p. 14.
2. On note $Z_i$, pour $i \in \mathbb{N}^*$ la variable de Bernoulli égale à 1 si le $i$-ème saut est de deux unités et à 0 s'il s'agit d'un saut d'une unité. On a donc $Z_i \sim \mathcal{B}(1/2)$.
   Alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ et comme les $Z_i$ sont indépendantes, puisque par hypothèse les sauts le sont, on en déduit que :
   $$\boxed{S_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2)}$$
   En particulier :
   $$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{2} \text{ et } V(S_n) = \frac{n}{4}$$

3. De manière immédiate, comme $S_n$ est le nombre de sauts de deux unités, et que les $n - S_n$ sauts restants sont de une unité, et que la puce est situé au point d'abscisse nulle au départ :

$$X_n = (n - S_n) + 2S_n \text{ soit } \boxed{X_n = n + S_n}$$

On en déduit par linéarité de l'espérance que :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = n + \mathbb{E}(S_n) = \frac{3n}{2}}$$

tandis que par les propriétés de la variance :

$$\boxed{V(X_n) = V(S_n) = \frac{n}{4}}$$

4. (a) La plus grande valeur prise par $Y_n$ est $n$, dans le cas où l'on effectue que des sauts de une unité. L'autre cas extrême correspond à des sauts qui valent tous deux unités et en ce cas, on atteint, ou dépasse la case d'abscisse $n$ en $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ sauts (si $n = 2k$, $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = k$ tandis que si $n = 2k+1$, $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = k+1$). Ainsi : $Y_n(\Omega) \subset \left[\!\left[ \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, n \right]\!\right]$. Comme tous les cas intermédiaires sont possibles, l'inclusion réciproque est également vérifiée et l'on en déduit finalement : $\boxed{Y_n(\Omega) = \left[\!\left[ \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, n \right]\!\right]}$.

   (b) On considère ce qui se passe au premier saut via la variable de Bernoulli $Z_1$ introduit à la question 1 : $Z_1 = 1$ si le premier saut fait deux unités et 0 sinon. Alors, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n = k) &= \mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 0)\mathbb{P}(Z_1 = 0) + \mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 1)\mathbb{P}(Z_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 1) \end{aligned}$$

   De plus : $\mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_{n-1} = k - 1)$ car une fois effectué un premier saut de une unité, il reste à parcourir une distance de $n-1$ à atteindre en $k-1$ sauts car au départ on voulait parcourir une distance de $n$ unités en $k$ sauts. C'est l'indépendance des sauts et l'invariance du problème par translation sur l'axe gradué qui assure la validité de ce raisonnement.
   De même : $\mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_{n-2} = k - 1)$ puisque si le premier saut est de deux unités, il reste $n - 2$ unités à parcourir en $k - 1$ sauts.
   Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k - 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k - 1)}$$

   (c) Il suffit de calculer en revenant à la définition de l'espérance et en utilisant la relation établie à la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} k\mathbb{P}(Y_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_n = k) \text{ car } \mathbb{P}(Y_n = k) = 0 \text{ pour } k \in \left[\!\left[ 1, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 \right]\!\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(Y_{n-1} = k - 1) + \mathbb{P}(Y_{n-2} = k - 1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_{n-1} = k - 1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_{n-2} = k - 1) \end{aligned}$$

   Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_{n-1} = k - 1) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k - 1)\mathbb{P}(Y_{n-1} = k - 1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k - 1) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(Y_{n-1} = k) + \frac{1}{2} \text{ car } Y_{n-1}(\Omega) \subset [\![0, n - 1]\!] \\ &= \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_{n-2}=k-1) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\mathbb{P}(Y_{n-2}=k-1)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Y_{n-2}=k-1)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(Y_{n-2}=k)+\frac{1}{2} \text{ car } Y_{n-2}(\Omega)\subset [\![0,n-1]\!]\\
&= \mathbb{E}(Y_{n-2})+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit donc finalement :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n)=\frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1})+\frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2})+1}$$

(d) On cherche $a$ tel que :

$$an=\frac{1}{2}a(n-1)+\frac{1}{2}a(n-2)+1$$

ce qui revient à $-\frac{3}{2}a+1=0$ soit $\boxed{a=\frac{2}{3}}$.

Alors, en posant $u_n=\mathbb{E}(Y_n)-\frac{2}{3}a$, on obtient pour $n\geqslant 2$ :

$$u_n=\frac{1}{2}u_{n-1}+\frac{1}{2}u_{n-2}$$

Le trinôme caractéristique associé est $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ qui a deux racines distinctes, dont une évidente :

$$r_1=1 \quad \text{et} \quad r_2=-\frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $n$ :

$$u_n=A+B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

avec $A$ et $B$ des réels.

De plus, de manière immédiate, $Y_0$ et $Y_1$ sont des variables aléatoires certaines avec $Y_0=0$ et $Y_1=1$, d'où $\mathbb{E}(Y_0)=0$ et $\mathbb{E}(Y_1)=1$ et $u_0=0$ et $u_1=\frac{1}{3}$ et donc $A$ et $B$ sont déterminées par le système d'équations :

$$\begin{cases} A+B=0\\ A-\frac{1}{2}B=\frac{1}{3}\end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{2}{9}\\ B=-\frac{2}{9}\end{cases}$$

Finalement :

$$u_n=\frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

et donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathbb{E}(Y_n)=\frac{2}{3}n+\frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

# Exercice sans préparation S13

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On définit par récurrence la suite de fonctions $f^n$ par $f^1 = f$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

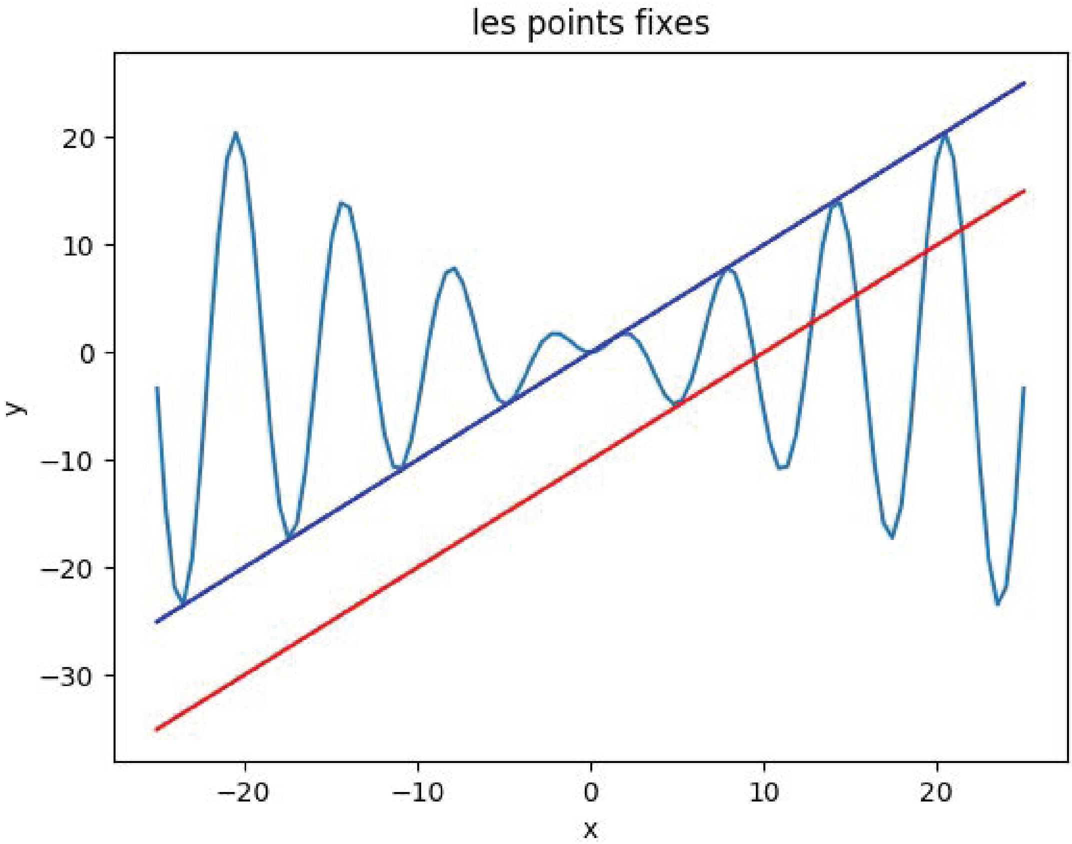
Ainsi, $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$, où la fonction $f$ apparaît $n$ fois.

1. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n$ admette un point fixe. Montrer que $f$ admet un point fixe.
2. Proposer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui n'admette aucun point fixe.
3. Proposer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admette une infinité de points fixes.

---

**Solution :**

1. Par l'absurde, on fait faire un dessin au candidat. (Comme $f$ est continue, c'est en fait une conséquence du TVI, si $f$ n'admet pas de point fixe, le graphe de $f$ est au dessus ou au dessous de la première bissectrice)
   Supposons que le graphe de $f$ soit au dessus de la première bissectrice alors
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) > x.$$
   Mais alors
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) > f^{n-1}(x) > f^{n-2}(x) > ... > x$$
   C'est absurde.
   $\boxed{f \text{ admet un point fixe.}}$
2. $\boxed{x \mapsto x - 1}$
3. $\boxed{x \mapsto x\sin(x)}$


les points fixes
20
10
0
−10
−20
−30
y
−20
−10
0
10
20
x

# SUJET S14

## Exercice principal S14

Soit $\lambda$ un réel strictement positif.
On considère $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant toutes les deux une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

1. Question de cours : Rappeler la définition et les propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2. Soit $\mu > 0$.
   (a) Montrer que la variable $Z = -\mu X$ est une variable aléatoire à densité, et en donner une densité.
   (b) On note $S_\mu$ la variable définie par $S_\mu = Y - \mu X$.
   Montrer que $S_\mu$ admet pour densité la fonction $f_\mu$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1+\mu} \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{1+\mu} \exp\left(\dfrac{\lambda}{\mu} x\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
3. On considère le polynôme $Q$ à coefficients aléatoires défini par :
$$\mathrm{P}ourtoutrelt, \quad Q(t) = t^2 + tX - Y.$$
   (a) Vérifier que le polynôme $Q$ admet, avec probabilité 1, deux racines réelles (aléatoires) distinctes, notées $S$ et $T$ telles que :
$$S \leqslant 0 \leqslant T.$$
   (b) Justifier que, pour tout réel $t$ positif, on a :
$$[T \leqslant t] = [Y - tX \leqslant t^2]$$
   (c) En déduire que la variable aléatoire $T$ admet une densité, et en donner une.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS1 page 20.
2. (a) On a $Z(\Omega) = ]-\infty, 0]$ et pour $x < 0$, $P(Z \leqslant x) = P(-\mu X \leqslant x) = P\left(X \geqslant -\dfrac{x}{\mu}\right) = 1 - F_X\left(\dfrac{-x}{\mu}\right)$.
   On obtient alors que, pour tout réel $x$, on a : $F_Z(x) = \begin{cases} \exp\left(\lambda \dfrac{x}{\mu}\right) & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
   $F_Z$ étant continue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, $Z$ admet une densité $f_Z$ donnée par : $\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu} e^{\frac{\lambda}{\mu} x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$
   (b) Les variables aléatoires $Y$ et $-\mu X$ étant indépendantes, à densité, la variable aléatoire $S_\mu$ admet bien une densité, donnée par le produit de convolution :
$$f_\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) f_Z(x-t) dt = \int_{\max(x,0)}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) e^{\frac{\lambda}{\mu}(x-t)} dt$$

- si $x < 0$, on a : $f_\mu(x) = \lambda e^{\frac{\lambda}{\mu}x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\mu} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1+\mu)t} dt = \lambda e^{\frac{\lambda}{\mu}x} \frac{1}{1+\mu} = \boxed{\frac{\lambda}{1+\mu} e^{\frac{\lambda}{\mu}x}}$
- si $x \geqslant 0$, on a : $f_\mu(x) = \lambda e^{\frac{\lambda}{\mu}x} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\lambda}{\mu} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1+\mu)t} dt = \lambda e^{\frac{\lambda}{\mu}x} \frac{1}{1+\mu} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1+\mu)x} \boxed{= \frac{\lambda}{1+\mu} e^{-\lambda x}}$.

3. (a) Ici, on a $\Delta = X^2 + 4Y \geqslant 0$
De plus, $P(\Delta = 0) = P(X^2 = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = 0$, donc presque-sûrement, $\Delta > 0$ et on a donc $\boxed{\text{deux racines réelles distinctes}}$ $S$ et $T$. On note S la plus petite.
Puisque $ST = -Y \leqslant 0$, les deux racines sont de signes distincts, donc $\boxed{S \leqslant 0 \leqslant T.}$

(b) On sait que le polynôme $Q$ est positif sur $]-\infty, S]$ et sur $[T, +\infty[$.
Donc en particulier, pour $t$ positif, on a $Q(t) \leqslant 0$ si $t \in [0, T]$ et $Q(t) \geqslant 0$ si $t \in [T, +\infty[$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \boxed{[T \leqslant t] = [Q(t) \geqslant 0] = [t^2 + tX - Y \geqslant 0] = [Y - tX \leqslant t^2]}$$

(c) Remarquons déjà que $T$ étant positive, on a $T(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.
- si $t \leqslant 0$, $P(T \leqslant t) = 0$.
- si $t > 0$, $P(T \leqslant t) = P(Y - tX \leqslant t^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t^2} f_t(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{1+t} e^{\frac{\lambda}{t}x} dx + \int_0^{t^2} \frac{\lambda}{1+t} e^{-\lambda x} dx$

$= \dfrac{\lambda}{1+t}\left[\dfrac{t}{\lambda} e^{\frac{\lambda}{t}x}\right]_{-\infty}^{0} + \dfrac{\lambda}{1+t}\left[-\dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{t^2} = \dfrac{t}{1+t} + \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{1+t} e^{-\lambda t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t} e^{-\lambda t^2}$.

Ainsi on a pour tout réel $t$ : $F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1+t} e^{-\lambda t^2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

$F_T$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, $T$ admet bien une densité, par exemple :

$$\boxed{t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1 + 2\lambda t + 2\lambda t^2}{(1+t)^2} e^{-\lambda t^2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}$$

# Exercice sans préparation S14

On rappelle que pour $i \in \mathbb{N}$, $f^{(i)}$ est la dérivée $i$-ème de $f$.
On définit pour chaque $n$ entier naturel la propriété $P_n$ suivante :

$$P_n : \text{"}\forall f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \prod_{i=0}^{n} f^{(i)}(a) \geqslant 0.\text{"}$$

1. Les propositions $P_0$ et $P_1$ sont-elles vraies ?
2. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f'(x)f''(x)f^{(3)}(x) < 0$.
   Montrer que $f$ et $f''$ sont toutes les deux à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ ou toutes les deux à valeurs dans $\mathbb{R}^{-*}$.
3. En déduire que la proposition $P_3$ est vraie.

---

**Solution :**

1. $\boxed{P_0 \text{ et } P_1 \text{ sont fausses}}$ : il suffit de choisir $f_0 : x \mapsto -e^x$ et $f_1 : x \mapsto \exp(-x)$.
2. Remarquons que $f, f', f''$ et $f'''$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$, sont de signe constant car sinon elle s'annulerait ce qui est contraire à l'hypothèse $ff'f''f''' < 0$.

   Si $f'' > 0$ alors $f$ est convexe, donc sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

   En particulier au-dessus de la tangente en 0 , d'équation $y = f'(0)\,.\,x + f(0)$.
   Comme $f'(0)$ est non nul ( $f'$ ne s'annulant pas), $y$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $\pm\infty$, selon le signe de $f'(0)$.
   Donc $f(x)$ est positif quand $x$ tend vers $\pm\infty$, donc partout ($f$ est de signe constant) : $f > 0$.

   $f'' < 0$ implique que $f$ est concave, et un raisonnement analogue montre que : $f < 0$.

   Donc $\boxed{f \text{ et } f'' \text{ ont donc toujours le même signe, et ne s'annulent pas sur } \mathbb{R}.}$
3. Raisonnons par l'absurde : supposons que de même qu'en 2) que $f.f'.f''.f''' < 0$, alors les fonctions $f'$ et $f'''$ sont de même signe ( même preuve avec $f'$ et $f'''$ au lieu de $f$ et $f''$.)

   Il en résulte que : $f.f'.f''.f''' > 0$ ; donc contradiction ; par suite :

   $\boxed{\exists\, a \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(a)\ f'(a)\ f''(a)\ f'''(a) \geq 0,\ P_3 \text{ est vraie.}}$

# SUJET S15

## Exercice principal S15

1. **Question de cours :** Énoncer le théorème de Rolle
2. Montrer que, pour tout $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique polynôme $P_a \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_a(0) = a_1,\ P'_a(0) = a_2,\ P_a(1) = a_3$ et $P'_a(1) = a_4$.
3. On note $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $P_{e_1}$
   On pourrait montrer que $P_{e_2} = X(X-1)^2$, $P_{e_3} = (-2X+3)X^2$ et $P_{e_4} = X^2(X-1)$.

   Soit $f$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$. On note $a(f) = (f(0), f'(0), f(1), f'(1))$
   On note alors $Q_f = P_{a(f)}$, l'unique polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant
   $$Q_f(0) = f(0),\ Q'_f(0) = f'(0),\ Q_f(1) = f(1) \text{ et } Q'_f(1) = f'(1).$$
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 Q_f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{12}f'(1)$.
5. Soit $x \in ]0;1[$ fixé.
   Notons $C = 4!\dfrac{f(x) - Q_f(x)}{x^2(1-x)^2}$. En considérant la fonction $g : t \mapsto f(t) - Q_f(t) - \dfrac{C}{4!}t^2(1-t)^2$,
   montrer qu'il existe $\xi \in ]0,1[$ tel que $f(x) - Q_f(x) = \dfrac{x^2(1-x)^2}{4!}f^{(4)}(\xi)$.
6. Montrer qu'il existe $M$ une constante que l'on exprimera en fonction des propriétés de $f$ telle que :
   $$\left|\int_0^1 f(t) - \left(-\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{12}f'(1)\,\mathrm{d}t\right)\right| \leqslant \frac{M}{720}.$$

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS1 page 12.
2. Considérons l'application $\phi$, qui à tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe $(P(0), P'(0), P(1), P'(1)) \in \mathbb{R}^4$. C'est une application linéaire. Étudions son injectivité : un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ appartient au noyau de $\phi$ si, et seulement si 0 et 1 sont racines (au moins) double de $P$, i.e. si et seulement si $P$ divisible par $X^2(X-1)^2$ ; puisque $\deg P \leqslant 3$, cela revient à affirmer que $P = 0$. L'application $\phi$ est injective. Puisque $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^4$ sont deux espaces vectoriels de même dimension, $\varphi$ est un isomorphisme.
   On en déduit donc que pour tout $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ :
   $\boxed{\text{il existe un unique polynôme } P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(0) = a_1,\ P'(0) = a_2,\ P(1) = a_3 \text{ et } P'(1) = a_4.}$
3. On cherche $P_1 \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_1(0) = 1$ et $P'_1(0) = P_1(1) = P'_1(1) = 0$.
   Il est donc de la forme $(X-1)^2(aX+b)$. Puisque $P_1(0) = 1$ et $P'_1(0) = 0$, il vient que $b = 1$ et $a = 2$, i.e. $\boxed{P_1 = (2X+1)(X-1)^2.}$
   On trouve de la même manière $\boxed{P_2 = X(X-1)^2,\ P_3 = (-2X+3)X^2 \text{ et } P_4 = X^2(X-1).}$
4. $Q_f = \phi^{-1}(a(f)) = f(0)\phi^{-1}(e_1) + f'(0)\phi^{-1}(e_2) + f(1)\phi^{-1}(e_3) + f'(1)\phi^{-1}(e_4)$ par linéarité de $\phi^{-1}$.
   Ainsi $Q_f = f(0)P_1 + f'(0)P_2 + f(1)P_3 + f'(1)P_4$.
   On en déduit que, par linéarité de l'intégrale :
   $$\int_0^1 Q_f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)\int_0^1 P_1(t)\,\mathrm{d}t + f'(0)\int_0^1 P_2(t)\,\mathrm{d}t + f(1)\int_0^1 P_3(t)\,\mathrm{d}t + f'(1)\int_0^1 P_4(t)\,\mathrm{d}t$$
   $$\boxed{= -\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{12}f'(1).}$$

5. Remarquons que $g$ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$. Puisque $g(0)=g(1)=g(x)=0$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $g$ sur les intervalles $]0,x[$ et $]x,1[$ : il existe $a\in]0,x[$ et $b\in]x,1[$ tel que $g'(a)=g'(b)=0$.
On a de plus $g'(0)=g'(1)=0$.
$\boxed{g' \text{ s'annule au moins 4 fois dans } [0;1]}$ En appliquant successivement le théorème de Rolle à $g'$, $g''$ et $g^{(3)}$, on montre que $g''$ s'annule s'annule (au moins) trois fois sur $]0,1[$, puis $g^{(3)}$ s'annule au moins deux fois sur $]0,1[$, et enfin que $g^{(4)}=f^{(4)}-C$ s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.
$\boxed{\text{Il existe donc } \xi\in]0,1[ \text{ tel que } f^{(4)}(\xi)=C, \text{ i.e. } f(x)-Q_f(x)=\dfrac{x^2(1-x)^2}{4!}f^{(4)}(\xi).}$

6. Notons $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f^4(x)|$ ($M$ existe par continuité de $f^{(4)}$ sur $[0,1]$). D'après la question 5.(b), on a :

$$\forall x\in]0,1[,\ |f(x)-Q_f(x)|\leqslant\frac{x^2(1-x)^2}{4!}M.$$

Par continuité de $f$ et $Q_f$ en 0 et 1, cette majoration est toujours valable en 0 et en 1. L'inégalité triangulaire assure alors que :

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 Q_f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f(x)-Q_f(x)|\,\mathrm{d}x=M\int_0^1\frac{x^2(1-x)^2}{4!}\,\mathrm{d}x=\frac{M}{30\times 24}=\boxed{\frac{M}{720}}.$$

# Exercice sans préparation S15

Donner la finalité du progamme suivant :

```
N=100000;S=0;
for i=1:N
    u=rand();
    S=S+4/N*1/(1+u^2);
end
disp(S)
```

---

**Solution :**

Le programme donne une moyenne empirique d'un échantillon de variables ayant la loi de $Y = \dfrac{4}{1+X^2}$ où $X$ suit une loi uniforme sur [0,1].

Par la loi des grand nombre, ce programme approche $\mathbb{E}(Y) = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Le programme permet donc $\boxed{\text{d'approcher } \pi \text{ en utilisant la loi des grands nombres. (méthode de Monté-Carlo)}}$

*Question : subsidiaire : vaut-il mieux utiliser cette méthode ou une méthode des rectangles à 100 termes pour approcher $\pi$ ?*

# SUJET S16

## Exercice principal S16

1. **Question de cours :** Somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.
2. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une famille de variables indépendantes suivant chacune une même loi exponentielles de paramètre $\lambda > 0$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer qu'une densité de $S_n$ est la fonction $f_n$ définie par :
   $$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n x^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}}{(n-1)!} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
3. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n$ la fonction de répartition de $S_n$. Montrer que, pour $t \geqslant 0$ :
   $$F_n(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \ldots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$
4. Soit $t \geqslant 0$. On désigne par $N(t)$ le plus grand entier $n$ tel que $S_n \leqslant t$.
   Si $S_1 > t$, on pose $N(t) = 0$.
   Déterminer la loi de $N(t)$.
5. On considère maintenant une variable aléatoire $R$ de loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
   On suppose que $R$ est indépendante de chacune des variables $X_k$, $k \in \mathbb{N}^*$ et l'on pose $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{R} X_k$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de $S$.
   (b) En déduire la loi de $S$ et montrer que $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(R)$.

---

**Solution :**

1. Question de cours : programme ECS2 2014 p. 14.
2. On va prouver le résultat par récurrence sur $n$.
   Pour $n = 1$, de manière immédiate :
   $$f_1(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
   et le résultat est vrai.
   Soit donc $n \geqslant 1$ tel que le résultat demandé soit vrai au rang $n$. Alors, par le lemme des coalitions $S_n$ et $X_{n+1}$ sont indépendantes, $S_{n+1}$ est à densité, et :
   $$f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f_1(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Compte-tenu du support des densités $f_n$ et $f$, $f_{n+1}(x)=0$ pour $x\leqslant 0$ et, pour $x>0$ :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \int_0^x f_n(t)f_1(x-t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}}{(n-1)!}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t\\
&= \lambda^{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t\\
&= \lambda^{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

et le résultat est vrai au rang $n+1$.

3. On démontre là encore le résultat par récurrence sur $n$.
Pour $n=1$ le résultat est vrai car $F_1(t)=1-e^{-\lambda t}$ est bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
Soit donc $n\geqslant$ tel que le résultat soit vrai au rang $n$. Alors, pour $t\geqslant 0$ :

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(t) &= \mathbb{P}(S_{n+1}\leqslant t)\\
&= \int_0^t f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}x^n\mathrm{e}^{-\lambda x}}{n!}\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\ -\lambda^n e^{-\lambda x}\frac{x^n}{n!}\ \right]_0^t+\int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x \text{ par intégration par parties}\\
&= -\lambda^n e^{-\lambda t}\frac{t^n}{n!}+F_n(t)\\
&= 1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1+\frac{\lambda t}{1!}+\ldots+\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(\lambda t)^n}{n!}\right)
\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence.
Le résultat est ainsi prouvé.
On peut également dériver la fonction $F_n$ dont l'expression est donnée dans l'énoncé et vérifier que $F_n'=f_n$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors : $\mathbb{P}(N(t)=n)=\mathbb{P}(S_n\leqslant t, S_{n+1}>t)$ car les variables $X_k$ sont à valeurs positives.
De même toujours par positivité des $X_k$ :

$$\{S_{n+1}>t\}=\{S_n>t\}\cup\{S_n\leqslant t, S_{n+1}>t\}$$

et l'union des deux événements dans le second membre est disjointe. On a donc :

$$\mathbb{P}(S_n\leqslant t, S_{n+1}>t)=\mathbb{P}(S_{n+1}>t)-\mathbb{P}(S_n>t)=F_n(t)-F_{n+1}(t)$$

Finalement, compte-tenu de la question précédente :

$$\boxed{\mathbb{P}(N(t)=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

On reconnaît une loi de Poisson de paramètre $\lambda t$. En particulier, cela prouve que $N(t)$ est presque sûrement fini.

5. (a) Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \leqslant x) &= \sum_{r \geqslant 1} \mathbb{P}_{R=r}(S \leqslant x)\mathbb{P}(R=r) \\
&= \sum_{r \geqslant 1} \mathbb{P}(S_r \leqslant x)\mathbb{P}(R=r) \\
&= \sum_{r \geqslant 1} \left(1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\right) q^{r-1} p \\
&= 1 - p e^{-\lambda x} \sum_{r \geqslant 1} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} q^{r-1} \\
&= 1 - p e^{-\lambda x} \sum_{k \geqslant 0} \sum_{r \geqslant k+1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} q^{r-1} \text{ en intervertissant l'ordre de sommation} \\
&= 1 - p e^{-\lambda x} \sum_{k \geqslant 0} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \frac{q^k}{1-q} \\
&= 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k \geqslant 0} \frac{(q\lambda x)^k}{k!} \text{ car } 1-q=p \\
&= 1 - e^{-\lambda x} e^{q\lambda x} \\
&= \boxed{1 - e^{-\lambda p x}}
\end{aligned}$$

(b) On reconnaît la fonction de répartition $\boxed{\text{d'une loi exponentielle de paramètre } \lambda p}$.

En particulier $\boxed{\mathbb{E}(S) = \frac{1}{\lambda p} = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(R).}$

# Exercice sans préparation S16

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On pose $B = A^3 + A + I_n$.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = Q(B)$.

---

**Solution :**

La fonction $f : x \mapsto x^3 + x + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective.
Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $A$, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$. Il existe alors une matrice $P$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_p I_{m_p}).$$

On a alors $B = f(A) = Pf(D)P^{-1} = P\Delta P^{-1}$ où :

$$\Delta = \operatorname{diag}(f(\lambda_1)I_{m_1}, \dots, f(\lambda_p)I_{m_p}).$$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, notons $\mu_i = f(\lambda_i)$.

Puisque $f$ est injective, les réels $\mu_1, \dots, \mu_p$ sont deux-à-deux distincts. Le polynôme $Q = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i L_i$, où

$$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (X - \mu_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (\mu_i - \mu_k)}$$

vérifie $Q(\mu_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. On a alors : $Q(B) = PQ(\Delta)P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

$\boxed{\text{il existe un polynôme } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } A = Q(B).}$

*On pourra demander aux plus rapides si la propriété est-elle toujours vraie lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
Le résultat n'est plus vrai en toutes généralités si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ : la fonction $f : z \mapsto z^3 + z + 1$ n'est pas injective sur $\mathbb{C}$. Il existe donc deux complexes distincts $\alpha$ et $\beta$ tels que $f(\alpha) = f(\beta) \,(= \gamma)$. Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, alors $B = \begin{pmatrix} f(\alpha) & 0 \\ 0 & f(\beta) \end{pmatrix} = \gamma I_2$. La matrice $B$ est donc scalaire alors que $A$ ne l'est pas.

$\boxed{\text{La propriété est fausse lorsque l'on choisit } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{, sauf si } n = 1.}$

# SUJET S17

## Exercice principal S17

1. **Question de cours :** définition de la convergence absolue d'une série. Lien avec la convergence.
2. Soit $x$ un réel. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{(n!)^2}$ converge.

   On note alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$
3. Soient $x$ et $y$ deux réels positifs. Notons $z = \max(x, y)$. Montrer que :
$$|f(x) - f(y)| \leqslant e^z |x - y|$$
   En déduire que $f$ est continue sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) > 1$ et que : $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
5. On pose pour tout $x > 0$,
$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t(f(t))^2}\mathrm{d}t.$$
   (a) Justifier que $g$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

   (b) Montrer que :
$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$$

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS1 page 18.
2. Soit $x$ un réel. Alors : $\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{x^n}{(n!)^2}\right| = \dfrac{|x|^n}{(n!)^2} \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!}$.

   Comme la série exponentielle $\sum \dfrac{|x|^n}{n!}$ converge, on en déduit par critère de majoration de suites positives que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{(n!)^2} \text{ converge absolument, donc converge.}}$
3. Soient $x$ et $y$ deux réels positifs. On a (toutes les séries étant bien convergentes) :
$$|f(x)-f(y)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n - y^n}{(n!)^2}\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-y)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}}{(n!)^2}\right| \leqslant |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{(n!)^2} \leqslant |x-y| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \boxed{e^z|x-y|}$$
   (on peut aussi appliquer l'IAF à $t \mapsto t^n$ dans l'intervalle $[x;y]$ ou $[y;x]$)

   Comme à $x$ fixé, $y \mapsto \max(x,y)$ est continue, on a bien : $\lim\limits_{y\to x} e^{\max(x,y)}\,|x-y| = 0$

   Pour tout réel $x$ positif, on a donc : $\lim\limits_{y\to x} |f(x) - f(y)| = 0$ par encadrement.

   Autrement dit, $\boxed{f \text{ est continue en tout réel } x \text{ de } [0, +\infty[.}$

4. Soit $x > 0$. Remarquons que $f(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \geqslant 1 + x > 1$.

De plus, pour $x$ proche de 0, $x$ non nul, on a :

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n!)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{((k+1)!)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!)^2}$$

Or,

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!)^2}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|} - 1$$

Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!)^2} = 0$, et on a bien :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1 \Longrightarrow \boxed{f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

5. (a) Soit $x > 0$. Alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{t(f(t))^2}$ est continue sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$) puisque $f$ est continue et ne s'annule pas sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$). Ainsi, $\boxed{g(x) \text{ est bien défini pour tout réel } x > 0.}$

(b) Remarquons alors que :

$$g(x) - \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t(f(t))^2}\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1-(f(t))^2}{t(f(t))^2}\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{f(t)-1}{t}\frac{f(t)+1}{(f(t))^2}\mathrm{d}t$$

Or, remarquons que : $\frac{f(t)-1}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ d'après 4, et $\frac{f(t)+1}{(f(t))^2} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 2$.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)-1}{t}\frac{f(t)+1}{(f(t))^2}$ est prolongeable par continuité en 0.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)-1}{t}\frac{f(t)+1}{(f(t))^2}$ est donc convergente car faussement impropre. En notant $I$ sa valeur, on a donc :

$$g(x) - \ln(x) = I + \underset{x\to 0}{o}(1) \Longrightarrow g(x) = \ln(x) + I + \underset{x\to 0}{o}(1) \Longrightarrow \boxed{g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)}$$

# Exercice sans préparation S17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X, Y)$ un vecteur aléatoire défini sur $\Omega$ tel que :

— $(X, Y)(\Omega) = \{(0,0), (0,1), (1,1)\} \cup \{(n,0) | n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty[\}$

— $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

— $Y$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

1. Les deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ? Déterminer la loi du vecteur $(X, Y)$.

2. Montrer que $\mathbb{P}(X \neq Y) \leqslant \dfrac{2}{3}$.

3. Soit $A$ une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$| \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) | \leqslant \frac{2}{3}$$

---

**Solution :**

1. Les variables $X$ et $Y$ $\boxed{\text{ne sont pas indépendantes}}$ en effet $\mathbb{P}((X = 1 \cap Y = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0)$ .

   Notons $p = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
   On a, par définition des lois marginales : $\boxed{\mathbb{P}((X,Y) = (1,1)) = P(X = 1) = pe^{-p}}$
   et $\mathbb{P}((X,Y) = (0,1)) + \mathbb{P}((X,Y) = (1,1)) = P(Y = 1) = p$ d'où : $\boxed{\mathbb{P}((X,Y) = (0,1)) = p - pe^{-p}}$ $\mathbb{P}((X,Y) = (0,1)) +$ $\mathbb{P}((X,Y) = (0,0)) = P(X = 0) = e^{-p}$ d'où $\boxed{\mathbb{P}((X,Y) = (0,0)) = pe^{-p} + e^{-p} - p}$ Enfin pour tout $n$ supérieur ou égal à 2 on a : $\boxed{\mathbb{P}((X,Y) = (n,0)) = p^n e^{-p}/n!}$.
   Mais attention : pour prouver que qu'une telle loi existe il faut vérifier que la somme des proba vaut 1 :

$$pe^{-p} + p - pe^{-p} + pe^{-p} - p + e^{-p} + \sum_{n=2}^{+\infty} p^n e^{-p}/n! = 1$$

2. On a :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y) = 1 - \mathbb{P}((X,Y) = (1,1)) - \mathbb{P}((X,Y) = (0,0)) = 1 - (e^{-p} + pe^{-p} - p + pe^{-p})$$

   or, par convexité de la fonction $f(x) = e^{-x}$ on a : $e^{-p} \geqslant 1 - p$. D'où :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 + p - e^{-p}(2p + 1) \leqslant 1 + p - 2p(1 - p) = 2p^2 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

3. $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}([X \in A] \cap (Y \in A]) + \mathbb{P}([X \in A] \cap (Y \in \overline{A}])$ et de même

   $\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}([X \in A] \cap (Y \in A]) + \mathbb{P}([Y \in A] \cap (X \in \overline{A}])$ d'où par soustraction

$$|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| = \left|\mathbb{P}([X \in A] \cap (Y \in \overline{A}]) - \mathbb{P}([Y \in A] \cap (X \in \overline{A}])\right| \leqslant \mathbb{P}([X \in A] \cap (Y \in \overline{A}]) + \mathbb{P}([Y \in A] \cap (X \in \overline{A}])$$

   or l'évènement $[X \in A] \cap (Y \in \overline{A}] \cap [Y \in A] \cap (X \in \overline{A}] \subset [X \neq Y]$ et donc :

$$\boxed{|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leqslant \mathbb{P}(X \neq Y) \leqslant \frac{2}{3}}$$

# SUJET S19

## Exercice principal S19

On considère l'équation :

$$1 - 5x = 2x^2 \ln x \tag{E}$$

1. **Question de cours :** énoncer l'inégalité des accroissements finis.
2. Soit $\varphi$ définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{x} - 2\ln x$.

   En étudiant $\varphi$, montrer que l'équation $(E)$ admet une unique solution $\alpha$ et justifier que $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.
3. Soit $f$ définie pour $x \in ]0, +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1 - x - 2x^2 \ln x}{4}$$
   (a) Montrer que l'on peut prolonger $f$ par une fonction continue et dérivable sur $[0, +\infty[$. Préciser alors $f(0)$ et $f'(0)$.

   (b) On rappelle que $0.69 < \ln(2) < 0.7$. Étudier les variations de $f'$ et de $f$ sur $[0, 1]$.
4. Le but de cette question est de déterminer une valeur approchée de $\alpha$. Pour cela on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par :
$$u_0 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \geqslant 0$$
   (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{3}{4}|u_n - \alpha|$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

   (c) Comment utiliser cette suite $(u_n)$ pour obtenir une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-5}$ près ?

   (d) Écrire un programme Scilab qui permette d'obtenir une telle valeur approchée à $10^{-5}$ près.

---

**Solution :**

1. Question de cours : programme ECS1 2013 p. 12.
2. La fonction $\varphi$ est dérivable sur son ensemble de définition et, pour $x > 0$ :
$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} = -\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3} = -\frac{(2x-1)(x-2)}{x^3}$$
   On a donc $\varphi'(x) = 0$ si et seulement $x = 2$ ou $x = \dfrac{1}{2}$. De plus $\varphi'(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$.

   La fonction est donc strictement décroissante sur $]0, 1/2]$, strictement croissante sur $[1/2, 2]$ puis à nouveau strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.

   On remarque que $\varphi(2) = -\dfrac{9}{4} - 2\ln 2$ d'où, par l'étude des variations, le fait que, pour tout $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\varphi(x) < 0$.

   En particulier, $\varphi$ ne s'annule pas sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

   Par ailleurs, $\varphi$ est continue strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, elle induit donc une bijection de $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ sur $\left]\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right), +\infty\right[$ en vertu du théorème de la bijection.

   De plus $0 \in \left]\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right), +\infty\right[$ car $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$. On en déduit donc qu'il existe un unique $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$. De plus c'est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$ par ce qui précède.

Enfin, l'équation $(E)$ est équivalente à l'équation $\varphi(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

On en déduit donc que $\underline{\text{l'équation } (E) \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } ]0, +\infty[ \text{ et que } \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[}$.

3. (a) Par croissance comparée, $\lim_{x \to 0} x^2 \ln x = 0$ d'où $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{4}$. On peut donc prolonger $f$ par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0) = \frac{1}{4}}$.

Le taux d'accroissement en 0 est alors :

$$\frac{f(x) - \frac{1}{4}}{x} = -\frac{1 + 2x \ln x}{4}$$

Encore par croissance comparée, on obtient $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \frac{1}{4}}{x} = -\frac{1}{4}$. Ainsi la fonction est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{4}$.

La dérivabilité sur $]0, +\infty[$ ne pose pas de problème et $f$ est donc bien dérivable sur $[0, +\infty[$.

(b) $\forall x \in ]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{4} - x \ln(x) - \frac{x}{2}$.

La fonction $f'$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ : $f''(x) = -\frac{3}{2} - \ln(x)$ Ainsi $f''(x) = 0$ si et seulement si $x = e^{-\frac{3}{2}} \in ]0, 1]$. De plus $f''(x) < 0$ pour $x \in \left]e^{-\frac{3}{2}}, 1\right]$ et $f''(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]0, e^{-\frac{3}{2}}\right[$.

De plus, $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, donc $f'$ est continue en 0.

Ainsi $f'$ est strictement croissante sur $\left[0, e^{-\frac{3}{2}}\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[e^{-\frac{3}{2}}, 1\right]$.

La fonction $f'$ admet donc un maximum en $x = e^{-\frac{3}{2}}$ et ce maximum est égal à $e^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}$. Ce nombre est négatif car $3 > 4 \ln(2)$. On a donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. De plus, comme $f'(0) = -\frac{1}{4}$ et $f'(1) = -\frac{3}{4}$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1] \quad |f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}}$$

Comme $f' < 0$ sur $[0, 1]$, $f$ y est strictement décroissante et comme $f(0) = \frac{1}{4}$ tandis que $f(1) = 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1] \quad f(x) \in [0, 1]}$$

4. (a) On commence par montrer par récurrence sur $n$ que $u_n$ est bien défini avec $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n$.

Pour $n = 0$ le résultat est évident.

Soit $n \geqslant 0$ tel que $u_n$ est bien défini avec $u_n \in [0, 1]$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini car $f$ est définie sur $[0, 1]$, et d'après la question 2.c), $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$. Cela prouve le résultat au rang $n + 1$.

On en déduit donc le résultat annoncé par récurrence. En particulier : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0, 1]}$.

Alors d'après la question 2.c), $\forall x \in [0, 1] \quad |f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$, donc par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{3}{4} |u_n - \alpha|$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4} |u_n - \alpha|}$$

(b) On montrer par récurrence, que, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Le résultat est trivial pour $n = 0$ car $u_0$ et $\alpha$ sont dans $[0, 1]$.

On suppose qu'il est vrai au rang $n \geqslant 0$. Alors, par la question précédente :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence.
On en déduit donc par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Alors, comme $0 < \dfrac{3}{4} < 1$, par théorème de comparaison, $(u_n)$ est convergente et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$.

(c) Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

il suffit de trouver $n$ tel que $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n < 10^{-5}$ pour obtenir une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-5}$ près. Cela revient à choisir $n$ tel que $n > -5\dfrac{\ln(10)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$. Pour une telle valeur de $n$, $u_n$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-5}$ près.

(d) Une possibilité est le code suivant, qui en plus de calculer la valeur approchée de $\alpha$ renvoie également la valeur de l'indice $n$ du terme $u_n$ étant l'approximation recherchée :

```
u=1/5
n=0
geo=1
while geo>10^(-5)
    u=(1-u-2*u^2*log(u))/4
    geo=geo*3/4
    n=n+1
end
disp(n,u)
```

# Exercice sans préparation S19

Un joueur lance simultanément $N$ dés équilibrés. Puis, il effectue un deuxième lancer en ne relançant que les dés qui n'ont pas donné 6. Il continue ainsi, en ne relançant à chaque tirage que les dés n'ayant jamais donné 6.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n$ le nombre de 6 obtenus lors des $n$ premiers lancers.

1. Déterminer la loi de $S_1$ puis celle $S_2$.
2. Quelle est la loi de $S_n$ ? son espérance ?
3. Montrer que $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n = N]) = 1$

---

**Solution :**

1. $\boxed{S_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, \frac{1}{6}),\ S_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1 - (\frac{5}{6})^2)}$
2. $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1 - (\frac{5}{6})^n)}$
3. Théorème de limite monotone p21 $ECS1$
   $([S_n = N])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements donc

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n = N]) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([S_n = N]) = \lim_{n \to +\infty} (1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n) \boxed{= 1}$$

   Interprétation : avec une infinité de lancers, presque sûrement tous les dés donneront un 6.

# SUJET S20

## Exercice principal S20

1. **Question de cours :** Théorème de d'Alembert-Gauss.
2. Soit $n \geqslant 1$ et soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ des réels positifs non tous nuls.

   On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ défini par : $P(X) = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

   (a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{P(x)}{x^n}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

   (b) En déduire que le polynôme $P$ admet exactement une racine dans $\mathbb{R}_{+,*}$
   On note $\alpha$ cette racine par la suite.

   (c) Soit $z$ une racine complexe de $P$.

   i. Si $z \neq 0$, déterminer le signe de $f(|z|)$.

   ii. En déduire que : $|z| \leqslant \alpha$.

   Soit $n \geqslant 1$, soient $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ des réels non tous nuls et soit $b_n$ un réel non nul.

   On considère maintenant le polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ défini par : $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

3. (a) Montrer que l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |b_k| x^k = |b_n| x^n$ admet une unique solution réelle strictement positive.
   On note cette solution $\beta$.

   (b) Soit $z$ une racine complexe de $Q$.
   Montrer que $|z| \leqslant \beta$. Notons maintenant $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les $n$ racines complexes (distinctes ou non) de $Q$ avec :
$$|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots \leqslant |z_n| \leqslant \beta$$

4. (a) On **admet** que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\left|\dfrac{b_k}{b_n}\right| \leqslant \dbinom{n}{k} |z_n|^{n-k}$.

   En déduire que : $\beta^n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta^k |z_n|^{n-k}$.

   (b) Montrer finalement que : $(\sqrt[n]{2} - 1)\beta \leqslant |z_n|$.

5. On va prouver la formule admise

   (a) On note pour $k \in [\![0, n]\!]$, $E_k$ l'ensemble des parties à $k$ éléments de $[\![0, n]\!]$.

   Factoriser $Q$, et en déduire que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{b_k}{b_n} = \displaystyle\sum_{\{i_1, \ldots, i_{n-k}\} \in E_{n-k}} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_{n-k}}$

   (b) Prouver alors la formule admise.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS1 page 7
2. (a) Pour tout $x > 0$, $f(x) = -1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}$.

   La fonction $f$ est donc la somme de fonctions décroissantes sur $]0, +\infty[$, dont au moins une (les $a_k$ sont non tous nuls) est strictement décroissante.

   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement décroissante sur } ]0, +\infty[.}$

(b) La fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, donc réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $f(]0,+\infty[=]\lim_{+\infty} f, \lim_{0^+} f[=]-1,+\infty[$ car il existe $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_k x^{k-n}$ avec $a_k > 0$.
La fonction $f$ s'annule donc une et une seule fois sur $]0,+\infty[$, et donc $P$ aussi (car pour $x > 0$, on a l'équivalence $f(x) = 0 \iff P(x) = 0$). $P$ admet donc $\boxed{\text{une unique racine réelle strictement positive.}}$

(c) Soit $z$ une racine complexe de $P$.

i. Supposons $z \neq 0$. On a alors : $P(|z|) = |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k |z|^k$. Or $P(z) = 0$, donc : $z^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$.

Donc par inégalité triangulaire, on a $|z|^n = |z^n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} a_k |z^k|$.

Ainsi, on a $P(|z|) \leqslant 0$ et donc $\boxed{f(|z|) \geqslant 0 = f(\alpha).}$

ii. Si $z \neq 0$, d'après la question précédente, on a $f(|z|) \geqslant f(\alpha)$, donc comme $f$ décroissante, on a $\boxed{|z| \leqslant \alpha.}$
Et si $z = 0$, c'est bien vrai puisque $0 \leqslant \alpha$.

3. (a) On note $P_0(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{b_k}{b_n}\right| X^k$. Comme $b_n \neq 0$ : $\sum_{k=0}^{n-1} |b_k| x^k = |b_n| x^n \iff \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{b_k}{b_n}\right| x^k = x^n \iff P_0(x) = 0$.
$P_0$ vérifie les conditions de la question 2, donc $P_0$ admet une unique racine réelle strictement positive.

$$\boxed{\text{L'équation } \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| x^k = |b_n| x^n \text{ admet donc une unique solution réelle strictement positive notée } \beta.}$$

(b) En notant $z$ une racine complexe de $Q$, alors $|b_n z^n| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |b_k||z|^k$ et donc $P_0(|z|) \leqslant 0$.

Or $\lim_{x\to+\infty} P_0(x) = +\infty$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires $\beta \in [|z|, +\infty[$ et donc

$$\boxed{|z| \leqslant \beta}$$

4. (a) On admet que pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, on a : $\left|\frac{b_k}{b_n}\right| \leqslant \binom{n}{k} |z_n|^{n-k}$.
En multipliant par $\beta^k$, puis en sommant, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta^k \left|\frac{b_k}{b_n}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta^k |z_n|^{n-k}$$

Or par définition de $\beta$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} |b_k| \beta^k = |b_n| \beta^n$, d'où : $\boxed{\beta^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta^k |z_n|^{n-k}}$.

(b) On en déduit que $\beta^n \leqslant (\beta + |z_n|)^n - \beta^n \iff 2\beta^n \leqslant (\beta + |z_n|)^n$.
On conclut par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ que : $\boxed{(\sqrt[n]{2} - 1)\beta \leqslant |z_n|}$.

5. (a) Les relations coefficients/racines ne sont pas au programme.
On factorise : $Q(X) = b_n \prod_{j=1}^{n} (X - z_j)$
On développe ce produit, on a somme de produit de "X" et de $z_j$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on aura un terme de degré $k$ quand le facteur "$X$" sera pris $k$ fois et le facteur $z_j$ $n-k$ fois.
Ainsi $b_k X^k = b_n \sum_{\{i_1,\dots,i_{n-k}\} \in E_{n-k}} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_{n-k}}$ et $\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \frac{b_k}{b_n} = \sum_{\{i_1,\dots,i_{n-k}\} \in E_{n-k}} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_{n-k}}}$

(b) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Par inégalité triangulaire
$\left|\frac{b_k}{b_n}\right| \leqslant \sum_{\{i_1,\dots,i_{n-k}\} \in E_{k-1}} |z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_{n-k}}| \leqslant \sum_{\{i_1,\dots,i_{n-k}\} \in E_{n-k}} |z_n|^{n-k}$
Or, il y a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ éléments dans $E_{n-k}$, donc $\binom{n}{k}$ termes dans la somme.

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \left|\frac{b_k}{b_n}\right| \leqslant \binom{n}{k} |z_n|^k}$$

# Exercice sans préparation S20

On considère un circuit électronique avec 3 composants $C_1$, $C_2$ et $C_3$.
Ce circuit ne fonctionne qui si $C_1$ fonctionne ainsi que $C_2$ ou $C_3$.
Sachant que les durées de vie de chaque composant, supposées mutuellement indépendantes, suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la loi de la durée de vie du circuit complet.
Proposer un programme Scilab permettant de vérifier le résultat obtenu.

---

**Solution :**

En notant $V_i$ les durées de vie de chaque composant, on doit ainsi calculer la loi de

$$V = \min(V_1, V_1')$$

avec $V_1' = \max(V_2, V_3)$. On a ainsi

$$\mathbb{P}(V_1' \leq t) = \mathbb{P}(V_2 \leq t)\mathbb{P}(V_3 \leq t) = (1 - \exp(-\lambda t))^2$$

puis

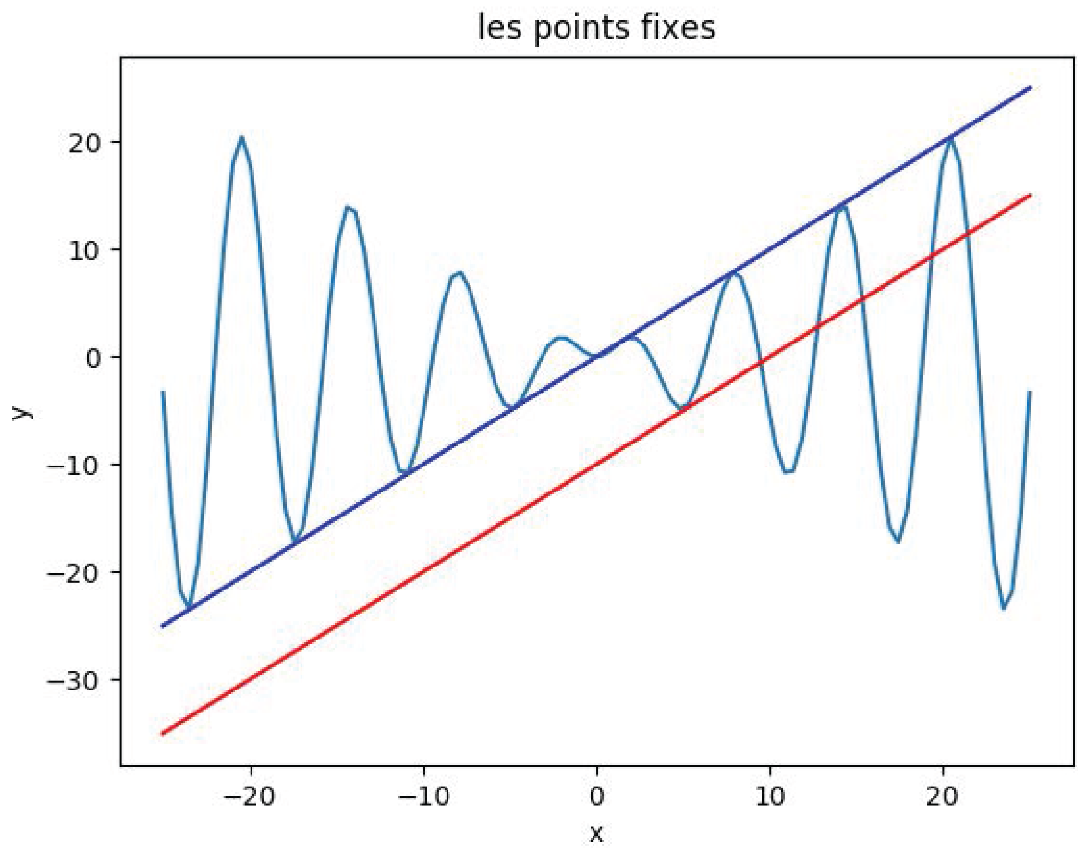
$$\mathbb{P}(V > t) = \mathbb{P}(V_1 > t)\mathbb{P}(V_1' > t) = \exp(-\lambda t)(1 - (1 - \exp(-\lambda t))^2) = \exp(-2\lambda t)(2 - \exp(-\lambda t))$$

et enfin (la fonction de répartition est bien continue sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$)

$$\boxed{f(t) = 4\lambda \exp(-2\lambda t) - 3\lambda \exp(-3\lambda t) = \lambda \exp(-2\lambda t)(4 - 3\exp(-\lambda t))}$$

On peut écrire le programme Scilab suivant pour vérifier ce résultat :

```
Ntest=100000;val=[];lambda=2;
for i=1:10000;
   T=grand(3,1,'exp',1/lambda);
   val=[val,min(T(1),max(T(2),T(3)))];
end
clf()
histplot(100,val)
x=0:0.01:(3*1/lambda)
y=lambda*exp(-2*lambda*x).*(4-3*exp(-lambda*x));
plot2d(x,y)
```


les points fixes
20
10
0
−10
−20
−30
y
−20
−10
0
10
20
x

# SUJET S21

## Exercice principal S21

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On note :

$$\mathbb{A} = \left\{ M = (m_{i,j}) \ \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall i \in [\![1,n]\!], \ |m_{i,n-i+1}| \ > \ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n+1-i}}^{n} |m_{i,j}| \right\},$$

$$\mathbb{B} = \left\{ M = (m_{i,j}) \ \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall \ i \in [\![1,n]\!] : m_{i,i} \neq 0 \text{ et } \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq j}} \frac{m_{i,j}^2}{m_{i,i}^2} < 1 \right\}.$$

1. **Question de cours :** Formule du produit matriciel.
2. Est-ce que $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ ? Est-ce que $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ ?
3. On munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne canonique : si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $||X|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

   Soit une matrice $M$ de $M_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que

   $$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|MX\|^2 \leqslant Tr(M^tM)\|X\|^2.$$

   (b) En déduire que si $Tr(M^tM) < 1$ alors $I_n + M$ est inversible.

   (c) Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathbb{B}$.
   On note D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à ceux de B.
   Déterminer une matrice $C \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = DC$.

   (d) En déduire que $\mathbb{B} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$.
4. (a) Soient $k, l \in [\![1,n]\!]$ et $E_{k,l}$ le vecteur de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé sur la $k$-ième ligne et la $l$-ième colonne qui vaut 1.
   Vérifier que $\forall a \in [0,1[ \ I_n + aE_{k,l} \in \mathbb{B}$.

   (b) Caractériser le sous-espace vectoriel $F$ engendré par l'ensemble des matrices de $\mathbb{B}$.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECS1 page 8.
2. $M = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ est dans $\mathbb{A}$ (le coefficient "antidiagonal" domine la ligne $i$) mais pas dans $\mathbb{B}$ (les coefficients diagonaux sont nuls).

$I_n$ est dans $\mathbb{B}$ (les coefficients diagonaux sont non nuls et $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n\\i\neq j}} \frac{m_{i,j}^2}{m_{i,i}^2} = 0 < 1$) mais pas dans $\mathbb{A}$.

$\boxed{\text{On n'a ni } \mathbb{A} \subset \mathbb{B} \text{ ni } \mathbb{B} \subset \mathbb{A}}$

3. (a) On a par la formule du produit matriciel :

La $i$-ième coordonnée de $MX$ vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j$ et $M^tM = (\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Ainsi $Tr(M^tM) = \displaystyle\sum_{(i,j)} m_{i,j}^2$ et $||M.X||^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j)^2$.

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 \, . \, \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = (\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2). \, \|X\|^2$.

$\|M.X\|^2 \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left((\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2) \, . \, \|X\|^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 . \, \|X\|^2 = Tr(M^tM).\|X\|^2$ , d'où :

$$\boxed{\|M.X\|^2 \leq Tr(M^tM).\|X\|^2}$$

(b) On suppose que $Tr(M^tM) < 1$. Montrons par l'absurde que $I_n + M$ inversible.
Sinon, il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})) - \{0\}$ , tel que $(I+M).X = 0$ , c'est-à-dire tel que : $-X = M.X$.
Mais alors $\|X\| = \|M.X\|$ d'où, d'après a), $\|X\|^2 \leq (Tr(M^tM)).\|X\|^2$
Comme $||X|| \neq 0$, on obtient $1 \leq Tr(M^tM)$ : ce qui contredit $Tr(M^tM) < 1$.
Donc $\boxed{\text{la matrice } I + M \text{ est inversible.}}$

(c) On a : $B = DC$ où $\boxed{C = \begin{pmatrix} \frac{b_{1,1}}{b_{1,1}} & \frac{b_{1,2}}{b_{1,1}} & \dots & \frac{b_{1,n}}{b_{1,1}} \\ \frac{b_{2,1}}{b_{2,2}} & \frac{b_{2,2}}{b_{2,2}} & \dots & \frac{b_{2,n}}{b_{2,2}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{b_{n,1}}{b_{n,n}} & \frac{b_{n,2}}{b_{n,n}} & \dots & \frac{b_{n,n}}{b_{n,n}} \end{pmatrix}}$.

(d) Montrons que $B$ est le produit de deux matrices inversibles.
La matrice $D$ est inversible car ses coefficients non non nuls
On note $T = C - I_n$. On calcule $\mathrm{Tr}(T^tT) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n\\i\neq j}} \frac{b_{i,j}^2}{b_{i,i}^2} < 1$, puisque $B$ est dans $\mathbb{B}$.

Donc $I_n + T = C$ est inversible
$\boxed{\text{Donc la matrice } B \text{ est inversible.}}$

4. (a) si $k = l$, la matrice $aE_{k,l} + I_n$ est diagonale et $\displaystyle\sum_{i\neq j} \frac{m_{i,j}^2}{m_{i,i}^2} = 0 < 1$ est vérifié.

si $k \neq l$, la matrice $E_{k,l} + I_n$ a des 1 sur la diagonale et un seul terme non nul hors de la diagonale, valant $a$. Alors :

$$\sum_{i\neq j} \frac{m_{i,j}^2}{m_{i,i}^2} = \frac{a^2}{1^2} < 1$$

$\boxed{\text{Dans tous les cas } aE_{k,l} + I_n \in \mathbb{B}}$

(b) Soit $F$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathbb{B}$.
D'après $(a)$, il contient $I_n + aE_{k,l}$ pour $a \in ]0, 1[$.
Mais il contient aussi $I_n \in \mathbb{B}$, donc, il contient tous les vecteurs de la base canonique.
Ainsi, l'ensemble F contient tous les vecteurs de la base canonique, et donc l'espace $M_n(\mathbb{R})$ tout entier.
$\boxed{F = M_n(\mathbb{R})}$

# Exercice sans préparation S21

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant une espérance.
Montrer que $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance puis montrer que $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \geqslant 1$. Étudier le cas d'égalité.

---

**Solution :**

Étudions la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n}\mathbb{P}(X=n) \leqslant n\mathbb{P}(X=n)$

$\boxed{\text{La variable } \dfrac{1}{X} \text{ admet donc une espérance}}$ en vertu du théorème de comparaison de séries à termes positifs.

On peut aussi dire que la variable $\dfrac{1}{X}$ est bornée.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Considérons la variable aléatoire $Y_t = \left(t\dfrac{1}{\sqrt{X}} + \sqrt{X}\right)^2 = \dfrac{t^2}{X} + 2t + X$. Puisque $X$ et $\dfrac{1}{X}$ admettent une espérance, $Y_t$ admet une espérance par linéarité. On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)t^2 + 2t + \mathbb{E}(X) \geqslant 0.$$

Puisque $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) > 0$ ($X \in \mathbb{N}^*$ presque-sûrement), on a trinôme du second degré de signe constant. Son discriminant est donc négatif ou nul, i.e. $4 - 4\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$, i.e. $\boxed{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \geqslant 1.}$

D'après le raisonnement précédent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = 1 &\Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)t_0^2 + 2t_0 + \mathbb{E}(X) \\
&\Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left[\left(t_0\frac{1}{\sqrt{X}} + \sqrt{X}\right)^2\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ t_0\frac{1}{\sqrt{X}} + \sqrt{X} = 0 \ \ p.s. \\
&\Leftrightarrow \boxed{X \text{ est constante presque-sûrement.}}
\end{aligned}$$

# SUJET S22

## Exercice principal S22

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et, pour $P$ et $Q$ dans $E$, on pose :

$$\langle P;\ Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

1. **Question de cours :** que peut-on dire des sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien ?
2. Justifier que l'intégrale ci-dessus est bien définie puis prouver que $(P, Q) \mapsto \langle P;\ Q\rangle$ est un produit scalaire sur $E$.
3. Soit $\varphi$ définie sur $E$ par $\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.
   Justifier que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.
   On admet pour l'instant qu'en outre, $\varphi$ est un endomorphisme *symétrique* de $E$. Ce point sera prouvé à la dernière question de l'exercice.
4. (a) Déterminer les valeurs propres de $\varphi$.
   (b) On note $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $\varphi$ ordonnées par ordre croissant. Soit $P_k$ un vecteur propre associé à $\lambda_k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
   Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est orthogonale et déterminer le degré de $P_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
5. Soit $k \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $P_k$ possède au moins une racine d'ordre impair dans $]-1, 1[$.
   (b) On note $a_1, \ldots, a_r$ les racines d'ordre impair de $P_k$ sur $]-1, 1[$ et soit $S = \prod_{i=1}^{r}(X - a_i)$. En considérant la quantité $\langle S;\ P_k\rangle$, montrer que $P_k$ a $k$ racines distinctes dans $]-1, 1[$.
6. On prouve dans cette question que l'endomorphisme $\varphi$ est symétrique.
   Soient $P$ et $Q$ dans $E$. Montrer, en intégrant par parties, que :

$$\int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P''(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(2t+1)P'(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$$

   et en déduire le résultat demandé.

---

**Solution :**

1. Question de cours : programme ECS2 2013 p. 17.
2. Le seul problème pour la définition de l'intégrale est en $-1$, or :

$$P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \underset{-1}{\sim} P(-1)Q(-1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t}}$$

   qui est intégrable par comparaison à une intégrale de Riemann convergente $(1/2 < 1)$.
   L'application $(P, Q) \mapsto \langle P;\ Q\rangle$ est clairement symétrique et bilinéaire par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale.
   Pour $P \in E$ :

$$\langle P;\ P\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale et :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t = 0 &\implies \forall t\in]-1,1[\quad P(t)^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 0 \text{ par continuité et positivité}\\ &\implies \forall t\in]-1,1[\quad P(t)=0\\ &\implies P=0 \text{ car } P \text{ a une infinité de racines}\end{aligned}$$

L'application $\boxed{(P,Q)\mapsto\langle P;\ Q\rangle \text{ est donc bien un produit scalaire.}}$

3. La linéarité de $\varphi$ est immédiate par linéarité de la dérivation et de la multiplication. De plus, $\varphi$ est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ et si $P\in E$, $\deg(X^2-1)P'' = \deg(2X+1)P' = \deg P$ donc $\deg\varphi(P)\leqslant\deg P$ et donc $\varphi(P)\in E$.

   Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

4. (a) On remarque que $\varphi(1)=0$, $\varphi(X)=2X+1$ et pour $2\leqslant k\leqslant n$ :

$$\varphi(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$$

   La matrice de $\varphi$ dans la base canonique est donc triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les $n+1$ nombres $\boxed{k(k+1) \text{ avec } 0\leqslant k\leqslant n.}$ Ce sont donc les valeurs propres de $\varphi$.

   (b) Avec les notations de l'énoncé on a donc $\lambda_k = k(k+1)$ pour $0\leqslant k\leqslant n$. Comme $\varphi$ a $n+1$ valeurs propres distinctes, $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de $E$. De plus comme $\varphi$ est symétrique, les sous-espaces propres de $E$ sont orthogonaux deux à deux et $\boxed{\text{la famille } (P_0,\ldots,P_n) \text{ est donc orthogonale.}}$

   Montrons que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$.

   On le prouve par récurrence sur $n$. On sait déjà que le résultat est vrai pour $n=0$ car $\varphi(a)=0$ pour $a$ un polynôme constant.

   On suppose le résultat vrai au rang $n-1$ pour $n\geqslant 1$. Comme la matrice $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est triangulaire, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est stable par $\varphi$ et la restriction de $\varphi$ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui admet pour valeurs propres $\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}$ comme on le voit en écrivant les matrices de $\varphi$ et de sa restriction dans la base canonique – c'est le calcul effectué à la question précédente. En fait, en considérant la restriction de $\varphi$ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on se retrouve dans la même situation une dimension en dessous. Autrement dit, en notant $\varphi=\varphi_n$ pour $E=\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_{n|\mathbb{R}_{n-1}[X]} = \varphi_{n-1}$.

   Ainsi $(P_0,\ldots,P_{n-1})$ est une famille de vecteurs propres associée aux valeurs propres $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1})$ et par l'hypothèse de récurrence $\deg P_k = k$ pour $0\leqslant k\leqslant n-1$.

   Comme $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de $E$, on a nécessairement $\boxed{\deg P_n = n}$ ce qui achève la récurrence.

5. (a) Si $P_k$ n'a que des racines d'ordre pair sur $]-1,1[$, il ne change jamais de signe lorsqu'il s'annule sur cet intervalle et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il est de signe constant. Quitte à remplacer $P_k$ par $-P_k$, on peut supposer $P_k\geqslant 0$ sur $]-1,1[$. Alors, par continuité et positivité de l'intégrale :

$$\langle 1;\ P_k\rangle = \int_{-1}^{1} P_k(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t > 0$$

   Mais 1 est dans le sous-espace propre associé à $\lambda_0=0$ d'où $\langle 1;\ P_k\rangle = 0$. Contradiction.

   (b) Par le même raisonnement, on suppose que le nombre $r$ de racines d'ordre impair de $P_k$ vérifie $r<k$. Alors $S\in\mathbb{R}_{k-1}[X] = \mathrm{Vect}(P_0,\ldots,P_{k-1})$ et donc $\langle S;\ P_k\rangle = 0$.

   Mais dans le même temps $SP_k$ n'a que des racines d'ordre pair dans $]-1,1[$ donc ne change pas de signe sur $]-1,1[$ par le même raisonnement que précédemment et, quitte à remplacer $P_k$ par $-P_k$, on peut supposer que $SP_k\geqslant 0$ sur $]-1,1[$ d'où comme avant $\langle S;\ P_k\rangle > 0$.

   C'est une contradiction donc $r=k$ et donc $\boxed{P_k \text{ admet } k \text{ racines distinctes}}$ dans $]-1,1[$. Ces racines sont alors toutes simples.

6. On pose $f(t) = (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q(t)$. Cette fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et pour tout $t\in]0,1[$ :

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{3}{2}(1-t)^{1/2}(1+t)^{1/2}Q(t) + \frac{1}{2}(1-t)^{3/2}(1+t)^{-1/2}Q(t) + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t)\\ &= -\frac{3}{2}(1+t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \frac{1}{2}(1-t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t)\\ &= -(2t+1)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t)\end{aligned}$$

En intégrant par parties – valide car $P'$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ – on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2} P''(t) Q(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1} f(t) P''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[\ f(t)P'(t)\ \Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(t)P'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-1}^{1} f'(t)P'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} (2t+1)P'(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On trouve bien le résultat annoncé. En faisant passer la première intégrale du second membre dans le premier membre, l'égalité obtenue nous dit alors exactement que :

$$\langle \varphi(P);\ Q\rangle = \int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$$

L'expression dans le membre de droite est symétrique en $P$ et $Q$ donc on a automatiquement $\boxed{\langle \varphi(P);\ Q\rangle = \langle P;\ \varphi(Q)\rangle \text{ et } \varphi \text{ est bien symétrique.}}$

# Exercice sans préparation S22

```
function Y=smul1(n,p)
X=grand(1,n,'geom',p);
disp(X)
Z=max(X)
T=zeros(1,Z)
for k=1:n
   if T(X(k))==0 then
       T(X(k))=1
    end
end
Y=sum(T)

endfunction

function m=smul2(n,p)
X=grand(10000,n,'geom',p);
Y=zeros(10000,1)
for j=1:10000
Z=max(X(j,:))
T=zeros(1,Z)
for k=1:n
   if T(X(j,k))==0 then
       T(X(j,k))=1
    end
end
Y(j)=sum(T)
end
m=mean(Y)
endfunction
```

1. Commenter la fonction **smul1**. Quelles sont les valeurs possibles de sortie ? Donner la loi de la VA **smul1**$(2, 0.75)$
2. Le résultat de **smul2**$(2, 0.75)$ est $1.3971$. Commentez ce résultat.

---

**Solution :**

1. **suml1** simule la VA $Y_n$ qui est égale au nombre de valeurs distinctes prises par $n$ variables $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre $p$. $Y_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$
   $Y_2(\Omega) = \{1, 2\}$
   $$\mathbb{P}(Y_2 = 1) = P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2((1-p)^2)^{k-1} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \boxed{\frac{p}{2-p} = \frac{3}{5}}$$
   $$P(Y_2 = 2) = 1 - P(Y_2 = 1) \boxed{= \frac{2(1-p)}{2-p} = \frac{2}{5}}$$
2. **smul2** donne la moyenne empirique d'un échantillon de 10000 variables de même loi que $Y_n$
   Elle approche donc l'espérance de $Y_n$.
   $$\mathbb{E}(Y_2) = \frac{4-3p}{2-p}$$
   pour $p = \dfrac{3}{4}$ on a $\boxed{\mathbb{E}(Y_2) = \dfrac{7}{5} = \dfrac{14}{10}}$. Le résultat de **smul2** est bien cohérent

# Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (E)

Juin-juillet 2021

Le bilan de la session 2021 de l'oral de mathématique en filière ECE est satisfaisant.

Le niveau des candidats est très hétérogène : les notes se sont étalées entre 3 et 20. La moyenne s'établit à 11,47 et l'écart-type à 4,42.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes de cours, de grosses faiblesses en calcul, et une absence totale de réactivité aux indications du jury. Á contrario, le jury a pu apprécier des prestations tout à fait remarquables de candidats réfléchis, précis et efficaces.

Le jury aimerait insister sur les points suivants auprès des futur.e.s candidat.e.s et de leurs enseignant.e.s.

— Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes sont des compétences que nous souhaiterions fortement valoriser à l'avenir. Nous avons été surpris de voir de nombreux candidats esquiver les questions de tracé de graphes issus d'études de fonction ne présentant pas de difficulté technique. Malgré l'aide du jury, certains candidats ont insisté pour sauter ces questions et passer à autre chose. C'est tout à fait contre-productif. Que les futurs candidats aient bien conscience que l'an prochain, ces questions seront incontournables.

— Le programme est à connaître dans son intégralité. Par exemple, la loi faible des grands nombres (telle qu'elle est énoncée dans le programme officiel) n'est pas connue de certains candidats. De la même manière, lorsque les candidats ont eu comme question de cours le théorème de la bijection, il a souvent été difficile de savoir ce que signifiait le mot "bijection" pour les candidats.

— L'usage des quantificateurs est parfois difficile pour les candidats : par exemple la définition précise d'une valeur propre est souvent compliquée à obtenir.

— Les questions informatiques ne doivent pas être négligées par les candidats. Elles ont permis à certains candidats d'améliorer significativement leur note.

— L'oral n'est pas un deuxième écrit : lors de la présentation de l'exercice préparé, certains candidats recopient leur brouillon dans leur intégralité, même sur des questions routinières. D'autres, au contraire lisent leurs notes sans laisser de trace écrite : une juste équilibre doit être trouvé pour permettre au jury de suivre précisément ce qu'à fait le candidat sans perdre de temps inutilement.

— Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation : au cours de la présentation de l'exercice préparé, le jury pose des questions pour aiguiller le candidat vers la solution. Il convient d'y être attentif. Il est souvent utile d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Par ailleurs, une prestation peut être jugée excellente sans que le candidats ne traite beaucoup de questions, alors qu'un candidat traitant de manière approximative un grand nombre de questions en déformant au passage les théorèmes de son cours risque d'être déçu par sa note finale.

— La question sans préparation est aussi très importante. Là encore, pour la plupart d'entre elles, le candidat peut tout à fait faire bonne impression sans aller au bout de la question. L'important est de réfléchir et d'écouter les indications du jury. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, qui avaient complètement raté l'exercice préparé ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation, et parfois dans les toutes dernières minutes.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

# SUJET E1

## Exercice principal E1

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a > 0$ et la fonction

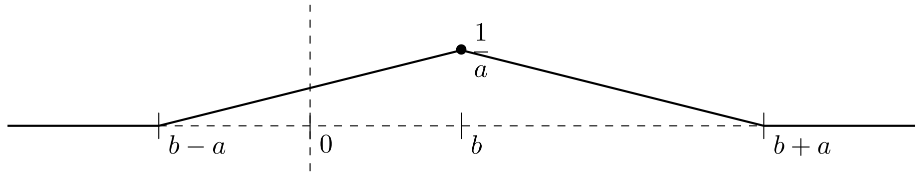
$$f_{a,b} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x+a-b}{a^2} & \text{si } b-a \leq x \leq b \\ \dfrac{-x+a+b}{a^2} & \text{si } b < x \leq b+a \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. **Question de cours :** Définition d'une densité de probabilité.
2. Tracer la représentation graphique de $f_{a,b}$ pour $a = 2$ et $b = 1$. Montrer que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
3. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $X_{a,b}$ une variable aléatoire de densité $f_{a,b}$ et $X_a$ une variable aléatoire admettant $f_{a,0}$ comme densité.
   (a) Montrer que $X_{a,b} - b$ et $X_a$ ont la même loi.
   (b) Quelle est l'espérance de $X_{a,b}$ ?
   (c) Quelle est la variance de $X_{a,b}$ ?
4. On suppose dans cette question que l'on observe une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes admettant $f_{a,b}$ comme densité, où $a$ et $b$ sont inconnus.
   Proposer une suite d'estimateurs sans biais de $b$. Est-elle convergente ?
5. On suppose dans cette question que l'on observe une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes admettant $f_{a,0}$ comme densité, où $a$ est inconnu et on veut estimer $a$ à partir de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad T_n = \max(Y_1, ..., Y_n)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de $T_n$.
   (b) Montrer que l'espérance de $T_n$ est :
   $$\mathbb{E}(T_n) = a - \frac{a}{2^n(2n+1)} - \int_0^a \big(F(x)\big)^n dx$$
   où $F$ est la fonction de répartition de $Y_1$.
   (c) $T_n$ est-il un estimateur sans biais de $a$ ?
   (d) On admet que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^a \big(F(x)\big)^n dx = 0$. Que peut-on en déduire ?

---

**Solution :**

1. Programme ECE1 page 20
   $f$ est densité de probabilité ssi $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, $f$ est positive et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
2. Pour $a = 2$, $b = 1$, $a - b = 1$, $a + b = 1$ et le maximum de la fonction vaut $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}$




$f_{a,b}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}$

et la surface entre la courbe de $f_{a,b}$ et l'axe des $x$ est un triangle d'aire $\dfrac{1}{2} \times 2a \times \dfrac{1}{a} = 1$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b} = \int_{b-a}^{b+a} f_{a,b} = 1$

Conclusion $\boxed{f_{a,b} \text{ est une densité de probabilité.}}$

3. (a) On peut remarquer que $f_{a,b}(x) = f_{a,0}(x-b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Ainsi si l'on note $F_Z$ la fonction de répartition de $X_{a,b} - b$, pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(X_{a,b} - b \leqslant z) = \mathbb{P}(X_{a,b} \leqslant b + z) = \int_{-\infty}^{b+z} f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{b+z} f_{a,0}(x-b)\,\mathrm{d}x.$$

Avec un changement de variable $y = x - b$, on a $F_Z(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{z} f_{a,0}(x)\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{X_{a,b} - b \text{ et } X_a \text{ ont la même loi.}}$

(b) $f_{a,b}$ est nulle hors de $[b-a, b+a]$ donc $X_{a,b}$ admet des moments de tous ordres.

$f_a$ est paire donc $E(X_a) = 0$ et $\boxed{E(X_{a,b}) = b.}$

(c) $\displaystyle\int_0^a x^2 f_a(x)dx = \int_0^a \frac{1}{a^2}(-x^3 + ax^2)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{12}$ donc

$E(X_a^2) = \dfrac{a^2}{6}$ et $\boxed{V(X_{a,b}) = V(X_a) = \dfrac{a^2}{6}.}$

4. Comme $\mathbb{E}(X_{a,b}) = b$, un estimateur sans biais de $b$ est la moyenne empirique.

Soit $(Z_n)_{n\in N*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que $X_{a,b}$, qui admet une espérance et une variance.

donc $\boxed{\text{D'après la loi faible des grands nombres, } \overline{Z_n} \text{ est un estimateur convergent de } b.}$

5. (a) $T_n$ est à valeurs dans $[-a, a]$.

Si $x \in [-a, 0]$ $\quad f_a(x) = \dfrac{1}{a^2}(x+a)$ et

$F(x) = P(Y_1 \leq x) =$ aire du triangle sur $[-a, x] = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x+a)^2}{a^2}$

Si $x \in [0, a]$ $\quad f_a(x) = 1 - \dfrac{1}{a^2}(a-x)$ et

$F(x) = P(Y_1 \leq x) = 1-$ aire du triangle sur $[x, a] = 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{(a-x)^2}{a^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [Y_k \leq x]\right) = \left(\mathbb{P}(Y_1 \leqslant x)\right)^n \quad \text{(indépendance des } Y_k\text{)}.$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant -a \\ \dfrac{(x+a)^{2n}}{2^n a^{2n}} & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant 0 \\ \left(\dfrac{2ax - x^2 + a^2}{2a^2}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant a \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant a \end{cases}}$$

(b) Soit $f_{T_n}$ une densité de $T_n$.

Si $x \in [-a, 0]$ $\quad f_{T_n}(x) = \dfrac{2n(x+a)^{2n-1}}{2^n a^{2n}}$

$$\int_{-a}^{0} x f_{T_n}(x)dx = \frac{2n}{2^n a^{2n}} \int_{-a}^{0} \left((x+a)^{2n} - a(x+a)^{2n-1}\right) dx = \frac{2n}{2^n a^{2n}} \left(\frac{a^{2n+1}}{2n+1} - \frac{a^{2n+1}}{2n}\right) = \frac{-a}{2^n(2n+1)}$$

Si $x \in [0, a]$ $\quad f_{T_n}(x) = n\dfrac{a-x}{a^2}\left(F(x)\right)^{n-1}$.

En intégrant par parties :

$$\int_0^a x f_{T_n}(x)dx = [xF_T(x)]_0^a - \int_0^a F_T(x)dx = a - \int_0^a (F(x))^n dx$$

D'où

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = a - \frac{a}{2^n(2n+1)} - \int_0^a \big(F(x)\big)^n \,\mathrm{d}x}$$

(c) Comme $\dfrac{a}{2^n(2n+1)} > 0$ et $\displaystyle\int_0^a \big(F(x)\big)^n dx \geq 0$, $\mathbb{E}(T_n) < a$ donc $\boxed{T_n \text{ n'est pas sans biais.}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_n) = 0$ donc $\boxed{(T_n) \text{ est asymptotiquement sans biais.}}$

**Exercice sans préparation E1**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_a = \begin{pmatrix} 2+a & 0 & 4 \\ 3 & -4+a & 12 \\ 1 & -2 & 5+a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $AP$.
2. A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ? Donner une matrice semblable à $A$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de $a$, $A_a$ est-elle diagonalisable ? Pour quelle(s) valeur(s) de $a$, $A_a$ est-elle inversible ?

---

**Solution :**

1. $\boxed{AP = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$
2. En notant $C_k$ la $k$-ième colonne de $P$, on a :
   $AC_1 = 2C_1$, $AC_2 = C_1$ et $AC_3 = 0C_3$.
   Comme $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ et $C_3 \neq 0$, A admet trois valeurs propres distinctes donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.
   0 est valeur propre donc $A$ n'est $\boxed{\text{pas inversible.}}$
   $(C_1, C_2, C_3)$ est une base de vecteurs propres donc $P$ est inversible.
   Une matrice semblable à $A$ est $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et $A = PDP^{-1}$
3. Question supplémentaire : pour quelle(s) valeur(s) de $a$, $A_a$ est-elle diagonalisable ? pour quelle(s) valeur(s) de $a$, $A_a$ est-elle inversible ?
   Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\boxed{A_a = A + aI \text{ est diagonalisable}}$ dans la même base de vecteur propre que $A$.
   ses valeurs propres sont $2+a$, $1+a$ et $a$, et donc $\boxed{A_a \text{ est inversible ssi } a \notin \{0; -1; -2\}}$

# SUJET E2

## Exercice principal E2

On désigne par $I$, $J$ et $A$ les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. **Question de cours** : Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ soit diagonalisable.

2. Exprimer les matrices $A$ et $A^2$ en fonction des matrices $I$ et $J$. En déduire que $A$ est inversible et donner une expression de $A^{-1}$ comme combinaison linéaire de $A$ et de $I$.

3. Soit $h$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Montrer que si $x$ est un vecteur propre de $h$ associé à une valeur propre non nulle, alors $x \in \text{Im}(h)$.
4. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $J$.

   (a) Déterminer des bases de $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.

   (b) La matrice $J$ est-elle diagonalisable ? La matrice $J$ est-elle inversible ?

   (c) Déterminer $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.
5. Montrer que $A$ est diagonalisable dans la même base de vecteurs propres que J et donner ses valeurs propres.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   (a) On suppose dans cette question que $g$ est diagonalisable. On construit alors $e'_1, .., e'_n$ une base de vecteurs propres de $g$ et un entier $r \in [|0; n|]$ tels que si $k \leqslant r$, $e'_k$ est associé à une valeur propre non nulle et si $k > r$, $e'_k$ est associé à la valeur propre 0.
   Déterminer une base de $\text{Im}(g)$ et montrer que $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
   (b) Peut-on dire que si $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ alors $g$ est diagonalisable ?

---

**Solution :**

1. Programme ECE2 page 8. Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ est diagonalisable si et seulement si
   $\boxed{\text{la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 3.}}$
2. $A = -4I + J$
   $A^2 = J^2 - 8J + 16I$ or $J^2 = 3J$ donc :
   $\boxed{A^2 = -5J + 16I = -5A - 4I}$
   On en déduit que $A\left(-\dfrac{1}{4}A - \dfrac{5}{4}I\right) = I$ donc $A$ est inversible et $\boxed{A^{-1} = -\dfrac{1}{4}A - \dfrac{5}{4}I}$
3. Si $x$ est un vecteur propre associé à $\lambda \neq 0$, $h(x) = \lambda x$ et donc $x = \dfrac{1}{\lambda}h(x) \in \text{Im}(h)$
   $\boxed{\text{Si } x \text{ est un vecteur propre associé à } \lambda \neq 0,\ x \in \text{Im}(h)}$

4. (a) Im $(f)$ =vect$((f(e_1), f(e_2), f(e_3))$

$\boxed{\text{Im } (f)) = \text{Vect}\,(u_1) \text{ où } u_1 = (1,1,1) \text{ et } (u_1) \text{ est une base de Im } f.}$

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$x \in \ker f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$

D'après le théorème du rang, $\dim \ker f = 2$.

Une base de $\ker(f)$ est donc $\boxed{(u_2, u_3) \text{ avec } u_2 = (-1,1,0) \text{ et } u_3 = (-1,0,1)}$

(b) $\dim(\ker(f)) = 2$ donc 0 est valeur propre de $f$ et la dimension du sous-espace propre associé est 2.

Le vecteur $u_1$ vérifie $f(u_1) = 3u_1$ et est donc un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre 3. La famille $(u_1, u_2, u_3)$ est donc libre (concaténation de bases de sous-espaces propres)

La somme des dimensions des sous-espaces propres de $f$ vaut 3 donc $f$ est diagonalisable, $\boxed{\text{donc } J \text{ est diagonalisable.}}$

$\boxed{\text{Ker } (f) \neq \{0\}, \text{ donc } J \text{ n'est pas inversible.}}$

(c) Comme dim( Im $(f)) = 1$, alors dim(( Im $(f) \cap$ Ker $(f)) \in \{0;1\}$

Or, si dim(( Im $(f) \cap$ Ker $(f)) = 1$ alors Im $(f) \cap$ Ker $(f) =$ Im $(f)$ et donc $f(u_1) = 0$. Ce n'est pas le cas.

$\boxed{(\text{ Im } (f) \cap \text{ Ker } (f)) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$

5. Soit X un vecteur propre de J, il existe un réel $\lambda \in \{0;3\}$ tel que $JX = \lambda X$.

Or $A = -4I + J$ donc $AX = (-4I + J)X = -4X + \lambda X = (-4 + \lambda)X$

Comme $X$ est non nul $\boxed{X \text{ est bien un vecteur propre de A.}}$

$J$ est diagonalisable donc il existe une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $J$, qui sont aussi vecteurs propres de $A$. $\boxed{\text{Donc } A \text{ est diagonalisable.}}$

Ses valeurs propres sont $-4 + 3 = -1$ et $-4 + 0 = -4$.

6. (a) Im $(g) = \text{Vect}\,(g(e'_1), ...g(e'_n)) = \text{Vect}\,(\lambda_1 e'_1, \cdots, \lambda_r e'_r, 0, ..0)) = \text{Vect}\,(e'_1, \cdots, e'_r)$

Mais alors si $x \in$ Im $(g) \cap$ Ker $(g)$, il existe $x_1, ..x_r \in \mathbb{R}$ tels que :

$x = \sum_{k=1}^{r} x_k e'_k$ et $g(x) = \sum_{k=1}^{r} x_k f(e'_k) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k e'_k = 0.$

Ainsi pour tout $k \in [|1, r|]$, $\lambda_k x_k = 0$ et comme $\lambda_k \neq 0$, $x_k = 0$.

$\boxed{\text{Si } g \text{ est diagonalisable, alors Ker } (g) \cap \text{ Im } (g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}}$

(b) $\boxed{\text{Non}}$, il suffit de prendre un endomorphisme non diagonalisable tel que Ker $(g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, par exemple l'endomorphisme induit par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice sans préparation E2**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

1. On suppose dans cette question que
   — $\forall n \in \mathbb{N}\ X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$
   — $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n$ admet une espérance et $\lim \mathbb{E}(X_n) = 0$.
   La suite de variables aléatoires $(X_n)$ converge-t-elle en loi ?
2. On suppose maintenant
   — $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n$ admet une espérance et $\lim \mathbb{E}(X_n) = 0$
   La suite de variables aléatoires $(X_n)$ converge-t-elle en loi ?
3. On suppose dans cette question que
   — $\forall n \in \mathbb{N}\ X_n(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$
   — $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n$ admet une espérance et $\lim \mathbb{E}(X_n) = 0$.
   La suite de variables aléatoires $(X_n)$ converge-t-elle en loi ?

---

**Solution :**

1. D'après l'inégalité de Markov $\mathbb{P}\left(X_n \geqslant \dfrac{1}{2}\right) \leqslant 2E(X_n)$.

   Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_n \geqslant \dfrac{1}{2}\right) = 0$.

   En considérant l'événement contraire, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_n < \dfrac{1}{2}\right) = 1$.

   Or $X_n$ ne prend que des valeurs entières. Donc $\mathbb{P}\left(X_n \geqslant \dfrac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$.

   Ainsi $\boxed{X_n \text{ converge en loi vers la variable aléatoire certaine égale à } 0.}$
2. Pour tout entier $n$, on note $X_n$ la variable aléatoire telle que :
   $X_n(\Omega) = \{-n; n\}$ et $\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{2}$.
   Alors $X_n$ admet une espérance et $\mathbb{E}(X_n) = 0$.
   Mais $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ -n \leqslant x < n$. Donc $\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \dfrac{1}{2}$.
   Or la fonction constante égale à $1/2$ n'est pas une fonction de répartition.
   $\boxed{\text{Donc } (X_n) \text{ ne converge pas nécessairement en loi.}}$
3. Soit $x$ un réel strictement positif.
   D'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}(X_n \geqslant x) \leqslant \dfrac{E(X_n)}{x}$.
   Or $\mathbb{P}(X_n > x) \leqslant \mathbb{P}(X_n > x)$. Donc $\mathbb{P}(X_n > x) \leqslant \dfrac{E(X_n)}{x}$.
   Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > x) = 0$.
   En passant à l'événement contraire, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = 1$.
   Soit $x$ un réel strictement négatif.
   Pour tout entier $n$, comme $X_n$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
   Or cette dernière fonction est la fonction de répartition d'une variable aléatoire certaine égale à 0.
   $\boxed{\text{Nécessairement, } (X_n) \text{ converge en loi}}$

# SUJET E3

## Exercice principal E3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p$ où $p \in ]0,1[$. On pose pour tout entier $n$ non nul, $Y_n = X_{n-1}X_n$ et $Z_n = Y_nY_{n+1}$.

1. **Question de cours :** Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Montrer que pour tout entier $n$ non nul, $Y_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre à déterminer.
3. Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont-elles deux à deux indépendantes, mutuellement indépendantes ?
4. Pour tout entier $n$ non nul, déterminer la loi de $Z_n$.
5. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Écrire une fonction Scilab d'entrée $(n,p)$ et donnant en sortie une simulation de la variable aléatoire $T_n$.
6. (a) Montrer que pour tout entier $n$ non nul, $T_n$ admet une espérance et la déterminer.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2,
$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Z_k) + (n-1)(n-2)p^4.$$

   (c) En déduire que $T_n$ admet une variance et la déterminer.
7. Montrer que $T_n$ est un estimateur convergent de $p^2$.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECE2 p17.
   Soit $X$ une variable aléatoire admettant une espérance et une variance.
   Alors $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.}$
2. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   Alors $Y_n(\Omega) = \{0,1\}$. Et $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}\big((X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 1)\big)$.
   Or $X_n$ et $X_{n-1}$ sont indépendantes. Donc $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}\big(X_{n-1} = 1\big)\mathbb{P}\big(X_n = 1\big) = p^2$.
   Ainsi $\boxed{Y_n \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p^2.}$
3. Soit $k$ et $\ell$ deux entiers distincts tels que $k < \ell$.
   Si $k < \ell - 1$, alors comme $X_{k-1}$, $X_k$, $X_{\ell-1}$ et $X_\ell$ sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes. Donc $Y_k$ et $Y_\ell$ sont indépendantes.
   Si $k = \ell - 1$, alors $\mathbb{P}\big((Y_k = 1) \cap (Y_\ell = 1)\big) = \mathbb{P}\big((X_{k-1} = 1) \cap (X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1)\big) = p^3$ car $p^4 - p^3 = p^3(1-p)$ et $p \in ]0,1[$ .
   Or $\mathbb{P}(Y_k = 1)\mathbb{P}(Y_\ell = 1) = p^4$. $\boxed{\text{Donc } Y_k \text{ et } Y_\ell \text{ ne sont pas indépendantes.}}$
   Donc les variables aléatoires $Y_1$, $Y_2$, $\cdots$, $Y_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes.
4. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   Alors $Z_n(\Omega) = \{0,1\}$. Et $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}\big((Y_{n+1} = 1) \cap (Y_n = 1)\big) = p^3$ $\boxed{Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^3)}$.
5. 
```
function Tn=T(n,p)
X=grand(n+1,1,"bin",1,p)
    Tn=0
```

```
    for i=1:n
        Tn=Tn+X(i,1)*X(i+1,1)
    end;
    Tn=Tn/n;
endfunction
```

6. (a) Les variables aléatoires $Y_1$, $Y_2$, $\cdots$, $Y_n$ ont même loi et admettent une espérance $p^2$. Donc $T_n$ admet une espérance.

   Et $\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p^2 = p^2}$

   (b) **Initialisation** Si $n = 2$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{2} Y_k\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(Y_1^2 + Y_2^2 + 2Y_1Y_2\right) \\
&= \mathbb{E}(Y_1^2) + \mathbb{E}(Y_2^2) + 2\mathbb{E}(Z_1) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \mathbb{E}(Y_k) + 2\sum_{k=1}^{2-1} \mathbb{E}(Z_k) + (2-1)(2-2)p^4
\end{aligned}$$

**Hérédité** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

Supposons que $\mathbb{E}\left(\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Z_k) + (n-1)(n-2)p^4$.

$$\begin{aligned}
\text{Alors } \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} Y_k\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 + Y_{n+1}^2 + 2Y_{n+1}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) + \mathbb{E}(Y_{n+1}^2) + 2\mathbb{E}\left(Y_{n+1}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) + \mathbb{E}(Y_{n+1}^2) + 2\mathbb{E}\left(Y_{n+1}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\
&\underset{HR}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Z_k) + (n-1)(n-2)p^4 + \mathbb{E}(Y_{n+1}^2) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_{n+1}Y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Y_{n+1}Y_k) + (n-1)(n-2)p^4 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) + 2(n-1)p^4 + (n-1)(n-2)p^4 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) + n(n-1)p^4
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $\boxed{\mathbb{E}\left(\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Z_k) + (n-1)(n-2)p^4.}$

(c) Comme $T_n$ prend un nombre fini de valeurs, $T_n$ admet une variance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(T_n) &= \mathbb{E}(T_n^2) - (\mathbb{E}(T_n))^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) - p^4 \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(Z_k) + (n-1)(n-2)p^4\right) - p^4 \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} p^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} p^3 + (n-1)(n-2)p^4\right) - p^4 \\
&= \frac{p^2}{n} + \frac{2(n-1)}{n^2}p^3 + \frac{(n-1)(n-2)-n^2}{n^2}p^4 \\
&= \frac{p^2}{n} + \frac{2(n-1)}{n^2}p^3 + \frac{2-3n}{n^2}p^4
\end{aligned}$$

7. D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev appliqué à $T_n$, $\mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(T_n)}{\varepsilon^2}$. Or d'après la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(T_n) = 0$. Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|T_n - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

   Ainsi $\boxed{T_n \text{ est un estimateur convergent de } p^2.}$

**Exercice sans préparation E3**

Soit $n$ un entier naturel non nul et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels.
Soit $B$ et $C$ deux éléments de $E$ tels que $B^2 = C^2 = I$ où $I$ est la matrice identité.
On pose $A = BC$.

1. Montrer que la matrice $A$ est inversible. Quelle est son inverse ?
2. Montrer que $A$ est semblable à $A^{-1}$.
3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne. Montrer que si $X$ est vecteur propre de $A$, il l'est aussi de $A^{-1}$.

---

**Solution :**

1. $B^2 = C^2 = I$ donc $B$ et $C$ sont inversibles et $B^{-1} = B$ et $C^{-1} = C$.
   $\boxed{\text{Donc } BC \text{ est inversible et } A^{-1} = C^{-1}B^{-1} = CB.}$
2. $A = BC = CCBC = CA^{-1}C = C^{-1}A^{-1}C$ donc $\boxed{A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables.}}$
3. Si $X$ est vecteur propre, $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$ donc $X = \lambda A^{-1}X$
   Et comme $A$ est inversible, $\lambda \neq 0$ donc $A^{-1}X = \dfrac{1}{\lambda}X$, et comme $X \neq 0$
   $\boxed{\text{X est un vecteur propre de } A^{-1}}$
4. Question supplémentaire éventuelle : Montrer que $BX$ est aussi vecteur propre de $A$.
   $ABX = BCBX = B(CB)X = BA^{-1}X = B(\dfrac{1}{\lambda}X) = \dfrac{1}{\lambda}BX$
   $(\lambda \neq 0)$. De plus BX$\neq 0$ car B est inversible
   $\boxed{BX \text{ est aussi vecteur propre de } A.}$

# SUJET E4

## Exercice principal E4

1. **Question de cours** : énoncés des inégalités des accroissements finis.

   Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On définit la fonction

$$g : \left\{ \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_{x^2}^{x^4} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \right.$$

2. Pour quelles valeurs du réel $x$ a-t-on $x^2 \leqslant x^4$ ?
3. (a) Montrer que $g$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut $g(1)$ ?
   (b) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in ]0;1]$, $|g(x)| \leqslant M\left|x^3 - x\right|$.
   (c) Montrer que $g$ est prolongeable par continuité en 0. On appelle encore $g$ la fonction prolongée. Préciser la valeur de $g(0)$.
4. Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donner $g'(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+^*$.
   On admet provisoirement que $g$ est dérivable en 0 et que $g'(0) = -f(0)$.
5. Applications :
   (a) Soit $f$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = 1$. Vérifier les résultats obtenus ci-dessus et tracer la courbe représentative de $g$.
   (b) Soit $f$ une densité de probabilité, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.
      i. Étudier le signe de $g$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
      ii. On admet de plus que $g'$ s'annule seulement en deux valeurs $\alpha$ et $\beta$ sur $\mathbb{R}_+^*$
      Tracer l'allure de la courbe représentative de $g$.
6. On va maintenant prouver que $g$ est dérivable en 0. On note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour $F$ en 0.
   (b) En déduire des équivalents quand $x$ tend vers 0 de $F(x^4)$ et de $F(x^2)$ et conclure.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECE1, page 14.
   Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
   Si $\forall x \in I$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ alors, pour $a, b \in I$ vérifiant $a \leqslant b$, $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$
   Si $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$ alors, pour $a, b \in I$, $|f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b-a|$
2. $x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$
   D'où le tableau de signe

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^4 - x^2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3. (a) Soit $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}_+$. F est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $g(x) = \dfrac{F\left(x^4\right) - F\left(x^2\right)}{x}$.
   Donc $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$ (quotient de fonctions continues sur $R_+^*$, le dénominateur ne s'annulant pas.)
   De plus $g(1) = 0$

(b) Si $x \in ]0,1]$, $x^4, x^2 \in [0;1]$

$F' = f$ et $f$ est continue sur $[0,1]$, qui est un intervalle fermé borné. Donc $|f|$ est bornée sur [0,1].

Ainsi $\exists M \geqslant 0$ tel que : $\quad \forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leqslant M$

Donc avec l'inégalité des accroissements finis

$\forall x \in ]0,1] \quad \left|F(x^4) - F(x^2)\right| \leqslant M \left|x^4 - x^2\right|$.

Et comme $x > 0$ : $\boxed{|g(x)| \leqslant M \left|x^3 - x\right|}$

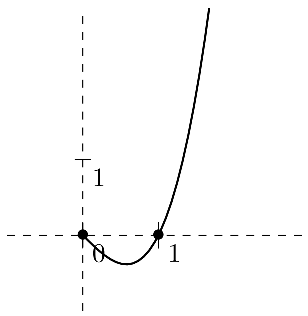
(c) Et par encadrement : $\quad \lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

$\boxed{\text{Conclusion : } g \text{ est prolongeable par continuité en 0. Et } g(0) = 0.}$

4. $F$ est dérivable (c'est une primitive) donc $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\boxed{g'(x) = \dfrac{-1}{x} g(x) + \dfrac{1}{x}\left(4x^3 f\left(x^4\right) - 2xf\left(x^2\right)\right)}$

5. (a) $g(x) = x^3 - x$; $\quad g'(0) = -1 = -f(0)$; $\quad g(1) = 0$; $\quad g'(1) = 2 \quad$ et $\quad g$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$

$g'(x) = 3x^2 - 1$, on a un minimum en $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $g(x_0) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{-2}{3\sqrt{3}}$




(b) i. Soit $F$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité $f$. $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}_+$

$g(x) = \dfrac{1}{x}\left(F\left(x^4\right) - F\left(x^2\right)\right)$

$F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ d'où $g(x) \leqslant 0$ si $x \in [0,1] \quad$ et $\quad g(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$ $\lim_{+\infty} F = 1$

donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0}$

ii. $g(0) = 0$; $\quad g'(0) = -f(0) < 0$; $\quad g(1) = 0$; $\quad g'(1) = 2f(1) > 0$

Comme $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g$ admet un seul minimum local et un seul maximum local sur $\mathbb{R}_+^*$

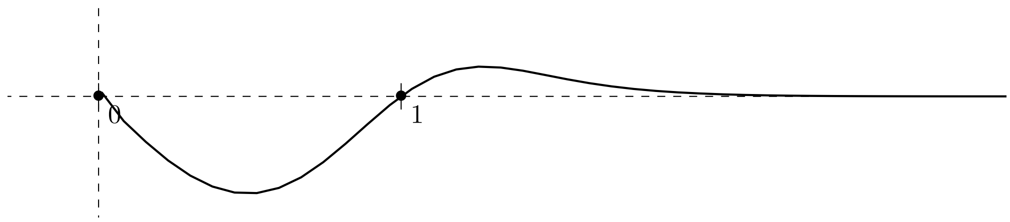
Nécessairement on doit avoir $\alpha \in ]0;1[$ et $\beta \in ]1;+\infty[$

Preuve rigoureuse (si ils ont l'intuition, commencer par leur laisser tracer la courbe)

-> le minimum de $g$ sur $[0;1]$ est strictement négatif car $g'(0) < 0$ et $g(0) = 0$, il est donc dans $]0;1[$ et il vaut $\alpha$

-> On doit avoir $\beta > 1$, car sinon, $g'$ étant continue, on aurait $g'$ de signe constant sur $]1;+\infty[$ et $g$ serait strictement croissante sur $]1;+\infty[$ ce qui est incompatible avec les valeurs trouvées.

D'où l'allure de la courbe.




6. (a) D'après la formule de Taylor-Young appliqué à $F$ au voisinage de 0 ($F$ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$) :

$F(x) = F(0) + f(0)x + o(x)$ quand $x$ tend vers 0.

(b) Donc $F(x) \underset{0^+}{\sim} f(0)x$ (car $f(0) \neq 0$) et $F(x^2) \underset{0^+}{\sim} f(0)x^2$ et $F(x^4) \underset{0}{\sim} f(0^+)x^4$

Or, $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{F(x^4) - F(x^2)}{x^2} = \dfrac{F(x^4)}{x^2} - \dfrac{F(x^2)}{x^2}$

Le premier terme tend vers 0, le deuxième vers $-f(0)$

$\boxed{g \text{ est dérivable en 0 et } g(0) = -f'(0)}$

**Exercice sans préparation E4**

$$g: \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{\begin{array}{cc} \dfrac{9\ln(3)}{3^t} & \text{si } t \in [2;+\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

On admet que $g$ est une densité de probabilité.
On note $Y$ une variable aléatoire admettant $g$ comme densité.

1. On note $Z$ la variable aléatoire égale à la partie entière de $Y$. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel $x$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x$.
   Déterminer la loi de probabilité de $Z$.
2. On note $U$ la variable définie par $Y - Z$. Déterminer sa fonction de répartition.

---

**Solution :**

1. Comme $P(Y \geq 2) = 1$ alors $Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
   Pour tout entier $k \geqslant 2$ : $(Z = k) = (k \leq Y < k+1)$
   Donc $\mathrm{P}(Z = k) = \mathrm{P}(k \leq Y < k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} g(t)\,dt$

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \int_k^{k+1} 9\ln(3)\, e^{-t\ln(3)}dt = 9\ln(3)\left[\frac{-1}{\ln(3)}e^{-t\ln(3)}\right]_k^{k+1} \\ &= 9\left[-e^{-(k+1)\ln(3)} + e^{-k\ln(3)}\right] \\ &= 9\left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{k+1}}\right) = \frac{1}{3^{k-2}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

2. Comme si $(Z = k)$ $(k \leqslant Y < k+1)$ on a toujours $Y - Z \in [0;1]$
   Donc si on note $F_U$ la fonction de répartition de $U$, $F_U(u) = 0$ si $u \leqslant 0$ et $F_U(u) = 1$ si $u \geqslant 1$.
   Pour $u \in ]0;1[$ on utilise la formule des probabilités totales
   $\mathbb{P}(U \leqslant u) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}((Z = k) \cap (U \leqslant u))$
   Or, $(Z = k \cap U \leqslant u)$ ssi $(Z = k) \cap (Y - Z \leqslant u)$ ssi $(Z = k) \cap (Y - k \leqslant u)$ ssi $(Z = k) \cap (Y \leqslant k + u)$ ssi $(k \leqslant Y \leqslant k + u)$
   Or, $\mathbb{P}(k \leqslant Y \leqslant k+u) = 9\ln(3)\left[\dfrac{-1}{\ln(3)}e^{-t\ln(3)}\right]_k^{k+u} = \left[-e^{-(k+u)\ln(3)} + e^{-k\ln(3)}\right] = 9\left(1 - \dfrac{1}{3^u}\right) \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$
   Ainsi $\mathbb{P}(U \leqslant u) = 9\left(1 - \dfrac{1}{3^u}\right)\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{3^k}\right) = 9\left(1 - \dfrac{1}{3^u}\right) \times \dfrac{1}{9(1-1/3)}$
   $\boxed{\forall u \in ]0;1[,\ F_U(u) = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^u}\right)}$
   On peut remarquer que cette variable est bien à densité

# SUJET E5

## Exercice principal E5

1. **Question de cours** : Théorème de la bijection

2. Déterminer l'ensemble $D$ des réels $x$ tels que $e^x - e^{-x} > 0$.

   On définit la fonction
$$f : \left\{ \begin{array}{lll} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(e^x - e^{-x}\right) \end{array} \right.$$
   On note $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3. (a) Sans chercher à le calculer, prouver l'existence d'un unique réel $\alpha$ vérifiant $f(\alpha) = 0$ et montrer que $\alpha < 1$.

   (b) Compléter le programme SCILAB suivant permettant d'avoir une valeur approchée par défaut de $\alpha$ à 0.01 près.

```
 a=  0;
 b=  1;
while
    if
    then b=(a+b)/2;
    else a=(a+b)/2;
    end;
end;
 disp(a)
```

   (c) Calculer la valeur explicite de $\alpha$.

4. (a) Donner la position relative de la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$ par rapport à $(C)$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ et tracer sur un même graphe la courbe $(C)$ et la droite $(\Delta)$

5. Soit $\lambda$ un réel, on note $g_\lambda$ la fonction définie par :
$$g_\lambda \ : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \dfrac{\lambda}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \geqslant \alpha \end{cases} \end{array} \right.$$

   (a) On pose $h \ : \ x \mapsto f(x) - x$. Après avoir calculé $h'(x)$, déterminer $\lambda$ en fonction de $\alpha$ pour que $g_\lambda$ soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire $X$.

   (b) Donner la fonction de répartition $G_\lambda$ de $X$.

6. Montrer qu'au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalent à $\ln(x)$.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECE1 page 12. Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ défi nit une bijection de $I$ sur l'intervalle $f(I)$.

2. $e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Donc $\boxed{D = \mathbb{R}_+^*.}$

3. (a) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$

$f'$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = +\infty$.

$f$ étant continue, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $f(1) = \ln(e - e^{-1}) > 0$ (en effet $e > 2$, $e^{-1} < 1$, donc $e - e^{-1} > 1$ et donc $f(1) > 0$. Comme $f$ est strictement croissante, $\boxed{\alpha < 1.}$

(b) On reconnaît une dichotomie.

```
a=0;
b=1;
while b-a>0.01
    if log(exp((a+b)/2)-exp(-(a+b)/2))>0
    then b=(a+b)/2;
    else a=(a+b)/2;
    end;
end;
disp(a)
```

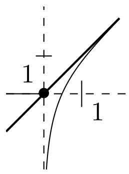
(c) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = e^x \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 1 = 0$

Soit $X = \mathrm{e}^x$. L'équation $X^2 - X - 1 = 0$ du second degré a pour discriminant 5 et pour racines : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Donc l'unique solution est $\boxed{\alpha = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$

4. (a) $f(x) - x = \ln\left(\mathrm{e}^x\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right)\right) - \ln(\mathrm{e}^x) = \ln\left(1 - e^{-2x}\right) < 0$

$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est en dessous de la droite } (\Delta).}$

(b) $\boxed{f(x) - x = \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right) \to 0}$




(c) *Le mot asymptote n'est pas dans le programme*

5. (a) $h$ est dérivable sur $D$ et $h'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - 1 = \dfrac{2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x} - 1} = \dfrac{2}{\lambda} g_\lambda(x)$

Pour $\lambda > 0$ on a $g_\lambda \geq 0$ et continue sur $\mathbb{R} - \{\alpha\}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$ :

— En $-\infty$ : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha} g = \int_{-\infty}^{\alpha} 0 = 0$

— En $+\infty$ : $\displaystyle\int_{\alpha}^{M} g_\lambda(t)\,dt = \left[\frac{\lambda}{2} h(x)\right]_\alpha^M = \frac{\lambda}{2}\left(h(M) - h(\alpha)\right)$

Or $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = -\alpha$ et $f(M) - M \to 0$ quand $M \to +\infty$

Donc $\displaystyle\int_{\alpha}^{M} g(t)\,dt \to \frac{\lambda\alpha}{2}$

— Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g$ converge et vaut $\dfrac{\lambda\alpha}{2}$

$\boxed{\text{Donc } g_\lambda \text{ est une densité si et seulement si } \lambda = 2/\alpha}$.

(b) $\boxed{\text{On a } G_\lambda(t) = 0 \text{ si } t \leq \alpha \text{ et } G_\lambda(t) = \dfrac{1}{\alpha}\left(h(t) + \alpha\right) \text{ si } t \geq \alpha.}$

6. On fait un DL à l'ordre 2, $e^x - e^{-x} = 2x + o(x)$ est équivalent à $2x$

Donc $f(x) = \ln\left(x \times \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}\right)$

Le premier terme tend vers l'infini, le deuxième vers $\ln(2)$, le premier est prépondérant.

$\boxed{f(x) \text{ est équivalent à } \ln(x) \text{ quand } x \text{ tend vers } 0}$

**Exercice sans préparation E5**

Soit $\lambda$ un réel strictement positif.

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramétre $\lambda$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note $V = \max(X, 1 - X)$ le maximum de $X$ et de $1 - X$, et l'on admet que V est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Déterminer $V(\Omega)$, l'ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire $V$.
2. Déterminer la fonction de répartition de $V$. V est-elle une variable aléatoire à densité ?

---

**Solution :**

1. Si $x \geqslant (1 - x)$ ssi $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

   Si $X(\omega) \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors $V(\omega) = X(\omega)$, donc $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[ \subset V(\Omega)$

   Si $X(\omega) \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors $V(\omega) = 1 - X(\omega)$. Or, si l'on note $g : x \mapsto 1 - x$, l'image de $]0; \dfrac{1}{2}]$ par $g$ vaut $\left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$

   $\boxed{V(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[ \cup \left]\dfrac{1}{2}; 1\right[ = \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[}$
2. Attention, les variables $X$ et $1 - X$ ne sont pas indépendantes.

   Si $v \leqslant \dfrac{1}{2}$, $F_V(v) = 0$, et si $v > \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(V \leqslant v) = \mathbb{P}(X \leqslant v \cap 1 - X \leqslant v) = \mathbb{P}(X \leqslant v \cap X \geqslant 1 - v)$

   Ainsi $F_V(v) = \mathbb{P}(1 - v \leqslant X \leqslant v)$ (en effet, comme $v \geqslant \dfrac{1}{2}$, on a bien $1 - v \leqslant v$)

   Ainsi $F_V(v) = F_X(v) - F_X(1 - v)$. Et il faut faire attention. A-t-on $1 - v > 0$ ?

   Si $v \in [\dfrac{1}{2}; 1]$, $F_V(v) = \exp(\lambda(1 - v)) - \exp(-\lambda v)$.

   Mais si $v > 1$, $F_V(v) = 1 - \exp(-\lambda v)$.

   $F_V$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ (en particulier en $\dfrac{1}{2}$ et en 1, et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de $\dfrac{1}{2}$ et de 1.)

   $\boxed{\text{V est une variable à densité}}$

# SUJET E6

## Exercice principal E6

Le jeu de mémory est composé de $n$ ($n$ étant un entier naturel non nul) paires d'images deux à deux distinctes, sur une seule des $n$ paires sont représentés des chatons. Ces images sont réparties en deux tas : chaque paire aura une de ses images dans chaque tas. Les images sont posées face cachée. A chaque étape, une carte de chaque tas est retournée. Si les deux cartes retournées forment la paire de chatons, alors le jeu s'arrête, sinon les cartes sont retournées et les tas à nouveau mélangés.
Deux joueurs $A$ et $B$ jouent en parallèle. Ils possèdent chacun leur propre jeu de mémory et jouent indépendamment, mais réalisent leurs étapes en même temps. Soit $X$ (respectivement $Y$) le nombre d'étapes de jeu effectuées par le joueur $A$ (respectivement $B$) lorsqu'il trouve la paire de chatons. Soit $M = \max(X, Y)$. On admet que $M$ est une variable aléatoire.

1. **Question de cours :** Énoncer la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
2. Donner la loi de $X$, son espérance et sa variance
3. Pour tout entier naturel $k$, déterminer $\mathbb{P}(M \leqslant k)$.
4. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(M > k)$ converge.
5. Montrer que pour tout entier naturel $K$ non nul, $\sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}(M = k) = -K\mathbb{P}(M > K) + \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}(M > k)$.
6. En déduire que $M$ admet une espérance.
7. Montrer que la suite $\big(K\,\mathbb{P}(M > K)\big)_{K\geqslant 0}$ converge vers 0.
8. Déterminer $\mathbb{E}(M)$.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECE1 page 19.
   On dit que la variable aléatoire discrète $X$ telle que $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet une espérance quand la série $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} x_n\mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge absolument.}}$

   En cas de convergence, on appelle espérance de $X$ le réel $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X = x_n)$.
2. $\boxed{X \text{ suit une loi géométrique de paramètre } \frac{1}{n^2}.\ \mathbb{E}(X) = n^2 \text{ et } \mathbb{V}(X_n) = n^2(n^2-1).}$
3. Soit $k$ un entier naturel.
   Remarquons que $(M \leqslant k) = (X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)$.
   Par indépendance des variables aléatoires, $\mathbb{P}(M \leqslant k) = \mathbb{P}(X \leqslant k)\mathbb{P}(Y \leqslant k)$.
   Or $X$ et $Y$ ont même loi. Donc $\mathbb{P}(M \leqslant k) = \mathbb{P}(X \leqslant k)^2$.
   Or $\mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{i-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^k$.
   Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(M \leqslant k) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^k\right)^2.}$

4. D'après la question précédente pour tout entier naturel $k$, $\mathbb{P}(M > k) = 2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k - \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2k}$.

   Or $\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \in [0,1[$ et $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2 \in [0,1[$.

   Donc les séries géométriques $\sum\limits_{k\geqslant 0}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2k}$ convergent.

   Ainsi par combinaison linéaire, la série $\boxed{\sum\limits_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(M > k) \text{ converge.}}$

5. Soit $K$ un entier naturel non nul.
   Rappelons que pour tout entier naturel $k$ non nul, $\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M > k-1) - \mathbb{P}(M > k)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}(M = k) &= \sum_{k=1}^{K} k\left(\mathbb{P}(M > k-1) - \mathbb{P}(M > k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{K} k\Big(\mathbb{P}(M > k-1) - \sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}(M > k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{K} k\ \mathbb{P}(M > k-1) - \sum_{k=1}^{K} k\ \mathbb{P}(M > k) \\
&= \sum_{k=0}^{K-1} (k+1)\mathbb{P}(M > k) - \sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}(M > k) \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}(M > k) - K\mathbb{P}(M > K)}
\end{aligned}$$

6. Pour tout entier naturel $K$ non nul, $K\ \mathbb{P}(M > K) \geqslant 0$.

   Donc $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{K} k\ \mathbb{P}(M = k) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}(M > k)$.

   Or la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(M > k)$ est une série convergente à termes positifs.

   Donc $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}(M > k) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(M > k)$.

   Donc $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{K} k\ \mathbb{P}(M = k) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(M > k)$.

   Ainsi la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\ \mathbb{P}(M = k)$ est majorée. Donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\ \mathbb{P}(M = k)$ converge absolument (car les termes sont positifs.).

   Ainsi $\boxed{M \text{ admet une espérance.}}$

7. Soit $K$ un entier naturel non nul.

   $\mathbb{P}(M > K) = \sum\limits_{k=K}^{+\infty} \mathbb{P}(M = k)$.

   Or $\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant K$, $K\mathbb{P}(M = k) \leqslant k\mathbb{P}(M = k)$.

   Comme $X$ admet une espérance, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(M = k)$ converge.

   Donc $0 \leqslant K\sum\limits_{k=K}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum\limits_{k=K}^{+\infty} k\mathbb{P}(M = k)$.

   Comme reste d'une série convergente, $\lim\limits_{K\to+\infty}\sum\limits_{k=K}^{+\infty} k\mathbb{P}(M = k) = 0$.

   Donc par encadrement $\boxed{\lim\limits_{K\to+\infty} K\mathbb{P}(M > K) = 0.}$

8. D'après les questions précédentes

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(M > k) \\
&= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2k} \\
&= \frac{2}{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} - \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2} \\
&= 2n^2 - \frac{n^4}{2n^2 - 1} \\
&= \boxed{n^2 \frac{3n^2 - 2}{2n^2 - 1}}
\end{aligned}$$

**Exercice sans préparation E6**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note ${}^tA$ la transposée de $A$ et $O_n$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose ${}^tAA = A{}^tA$ et qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$.

1. Montrer que ${}^tAA = O_n$.
2. Que peut-on en déduire concernant la matrice $A$ ?

---

**Solution :**

1. La matrice ${}^tAA$ est symétrique. En tant que matrice symétrique réelle, ${}^tAA$ est diagonalisable (programme officiel de ECE2, page 8). Ainsi, il existe une matrice inversible $P$ telle que
$$ {}^tAA = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}. $$
Comme $A$ et sa transposée commutent, $({}^tAA)^p = ({}^tA)^pA^p = O_n$. Ainsi,
$$ O_n = ({}^tAA)^p = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)P^{-1}. $$
On en déduit que chaque $\lambda_i$ est nul, puis que $\boxed{{}^tAA = O_n.}$
2. On note $a_{ij}$ le coefficient générique de $A$ et $b_{ij}$ le coefficient générique de $B = {}^tAA$. Par la formule du produit matriciel, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
$$ 0 = b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 $$
Il suit que pour tout couple $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ik} = 0$. $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est donc la matrice nulle.}}$

**Question supplémentaire éventuelle.** Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$ A{}^tAA{}^tAA = I_n. $$

**Réponse.** On commence par remarquer que $A$ est inversible avec $A^{-1} = {}^tAA{}^tAA$.
Donc $A^{-1}$ est symétrique réelle, et par suite $A$ l'est aussi. Ainsi, $A$ est diagonalisable et vérifie $A^5 = I_n$. On trouve alors que la seule matrice solution est $\boxed{A = I_n.}$

# SUJET E7

## Exercice principal E7

Dans tout l'exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soient $m$ un réel et

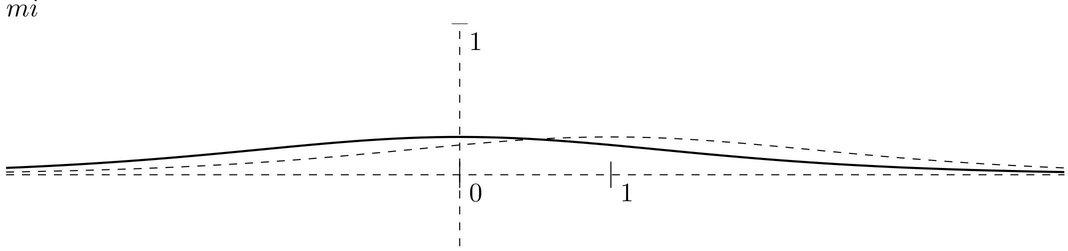
$$f_m : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^{-x+m}}{(1+e^{-x+m})^2} \end{array} \right.$$

1. **Question de cours** : convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
2. On pose $f = f_0$. Vérifier que $f$ est paire et tracer sa courbe représentative.
   Comment en déduire la courbe représentative de $f_m$ pour $m$ réel ?
3. Vérifier que $f_m$ est une densité de probabilité.
4. On note, pour $m \in \mathbb{R}$, $X_m$ une variable aléatoire de densité $f_m$.
   (a) Soit $m \in \mathbb{R}$, quelle est la fonction de répartition de $X_m$ ?
   (b) La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?
5. Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $X_m$ admet une espérance et donner sa valeur.
   On note maintenant, pour $m \in \mathbb{R}$, $Y_m = \ln\left(1 + e^{X_m}\right)$.
6. (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y_0$ ?
   (b) La suite $(Y_{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECE2 page 17.
   Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers $X$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout réel $x$ où $F_X$ est continue.
   $f$ est densité de probabilité ssi $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, $f$ est positive et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
2. $f$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^{-2x}e^x}{e^{-2x}(1+e^x)^2} = f(x)$ donc $f$ est paire.
   La dérivée de $u \mapsto \dfrac{u}{(u+1)^2}$ est $u \mapsto \dfrac{1-u}{(1+u)^3}$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{-e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^3}$ donc $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{4}$
   Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m(x) = f(x-m)$, la courbe de $f_m$ se déduit de celle de $f$ par la translation de vecteur $m\vec{i}$



3. Vu que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m(x) = f(x-m)$, il suffit de vérifier que $f$ est une densité de probabilité. $f$ est continue, positive sur $\mathbb{R}$.

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ \int_0^A f(x)dx = \left[\frac{-1}{1+e^{-x}}\right]_0^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{-A}}$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)dx = \frac{1}{2}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ $\boxed{f \text{ est donc bien une densité de probabilité.}}$

4. (a) Soit $F_m$ la fonction de répartition de $X_m$. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{F_m(x) = \frac{1}{1+e^{-x+m}}.}$

   (b) Pour $x$ fixé, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = 0$.
   Mais la fonction nulle n'est pas la fonction de répartition d'une variable aléatoire
   $\boxed{\text{La suite } (X_m) \text{ ne converge pas en loi.}}$

5. On remarque $X_m = X_0 + m$. On étudie l'espérance de $X_0$.
   $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}_+$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 f(x) = 0$ donc $xf(x) = \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$ et comme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge, $\int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge
   Comme $f$ est paire, $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge et $E(X_0) = 0$. $\boxed{\text{D'où : } \quad E(X_m) = m.}$

6. (a) $Y_0$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit $F_{Y_0}$ la fonction de répartition de $Y_0$.
   $\forall y \leqslant 0 \quad F_{Y_0}(y) = 0$
   $\forall y > 0 \quad F_{Y_0}(y) = \mathbb{P}\left(\ln\left(1+e^{X_0}\right) \leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(e^{X_0} \leqslant e^y - 1\right) = \mathbb{P}\left(X_0 \leqslant \ln\left(e^y - 1\right)\right)$

   $$\forall y > 0 \quad F_{Y_0}(y) = \frac{1}{1+e^{-\ln(e^y-1)}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^y-1}} = 1 - e^{-y}$$

   $\boxed{Y_0 \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$

   (b) De même : $F_{Y_{\frac{1}{n}}}(y) = 0$ si $y \leqslant 0$

   Si $y > 0$, $F_{Y_{\frac{1}{n}}}(y) = \mathbb{P}(X_{\frac{1}{n}} \leqslant \ln(e^y - 1)) = \dfrac{1}{1+e^{-\ln(e^y-1)+\frac{1}{n}}} = \boxed{= \dfrac{e^y - 1}{e^{\frac{1}{n}} + e^y - 1}}$

   Donc pour $y \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(y) = 0$, pour $y > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_{\frac{1}{n}}}(y) = 1 - e^{-y} = F_{Y_0}(y)$

   $\boxed{\text{La suite } (Y_{\frac{1}{n}}) \text{ converge en loi vers } Y_0}$

**Exercice sans préparation E7**

On définit la suite $(u_n)$ pour tout entier naturel $n$ par $u_n = \dfrac{n^3+6n^2-5n-2}{n!}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n$ converge et calculer sa somme.
   (On pourra remarquer que $(X(X-1)(X-2), X(X-1), X, 1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.)
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et écrire un programme SCILAB qui pour un réel $\varepsilon > 0$ donné par l'utilisateur propose une valeur de $n$ tel que $|u_n| < \varepsilon$

---

**Solution :**

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3+6n^2-5n-2 = n(n-1)(n-2)+9n(n-1)+2n-2$

   D'après la décomposition précédente, pour tout entier naturel $N \geqslant 3$ :
   $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{9n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{2n}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{-2}{n!} \\ &= \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n!} + 9\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n!} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-3} \frac{1}{n!} + 9\sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

   On reconnaît une somme de séries exponentielles, donc la série converge et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 10e}$
2. Comme la série de terme général $u_n$ converge, on a bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

   On propose le script

```
eps=input("Choisir la valeur de epsilon");
n=0;
u=-2;
fac=1;
while abs(u)>=eps
      n=n+1;
      fac=fac*n;
      u=(n*n*n+6*n*n*-5*n-2)/fac;
     end;
disp(n)
```

# SUJET E8

## Exercice principal E8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,\mathrm{d}x \text{ et } v_n = \ln\left(n^{1/3}A_n\right).$$

1. **Question de cours** : Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

2. Montrer que les suites $(A_n)$ et $(v_n)$ sont bien définies.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   (a) Justifier que $A_n = A_{n+1} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $A_{n+1}$ en fonction de $A_n$.

4. (a) Déterminer trois réels $a, b, c$ tels que lorsque $n$ tend vers $+\infty$ : $v_{n+1} - v_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   (b) Étudier la convergence de la suite $(v_n)$.

5. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ converge-t-elle ?

6. On pose $b_k = \dfrac{A_k}{A_1}$.
   Écrire un programme SCILAB qui pour une valeur de $A$ réelle donnée par l'utilisateur renvoie une valeur de $N$ pour laquelle on a :
   $$\forall n \geqslant N,\ \sum_{k=1}^{n} b_k \geqslant A.$$

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECE2 page 9. $\boxed{\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)}$

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. En $+\infty$, comparaison avec une intégrale de Riemann :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{(1+x^3)^n} \leqslant \dfrac{1}{x^{3n}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n}}\,\mathrm{d}x$ converge.
   De plus, par positivité de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n > 0$
   $\boxed{\text{Donc } A_n \text{ et } v_n \text{ sont bien définis pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1+x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$
   $$A_n = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$
   $$\boxed{A_n = A_{n+1} + \int_0^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x}$$

(b) $A_n = A_{n+1} + \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \times x^2}{(1+x^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$

Par intégration par parties :

$$A_n = A_{n+1} + \left[ x \times \frac{-1}{3n} \times \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{3n} \times \frac{1}{(1+x^3)^n}\,\mathrm{d}x$$

$A_n = A_{n+1} + \dfrac{1}{3n} A_n$. Ainsi $\boxed{A_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} A_n}$

4. (a) $\forall n \geqslant 1, v_{n+1} - v_n = \ln\left((n+1)^{1/3} A_{n+1}\right) - \ln\left(n^{1/3} A_n\right)$

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/3}\right) + \ln\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \left(-\frac{1}{3n} - \frac{1}{18n^2}\right) + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{9n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\boxed{a = 0, b = 0, c = -\dfrac{2}{9} \text{ conviennent.}}$

(b) Par comparaison (les termes sont de signe constant), la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge. Cette série est téléscopique :

Or, en posant pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = v_{n+1} - v_1$

Comme $(S_n)$ converge vers une limite $\ell$, $(v_{n+1})$ converge vers $\ell + v_1$, et donc $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge}}$

5. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln\left(n^{1/3} A_n\right)$. Si on note $L$ la limite de la suite $(v_n)$ en $+\infty$, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^{1/3} A_n = \mathrm{e}^L$. Donc $A_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^L}{n^{1/3}}$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ diverge car $\dfrac{1}{3} < 1$ et les séries sont à termes positifs, donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \text{ diverge.}}$

6. On pose $\dfrac{A_{k+1}}{A_1} = \dfrac{3k-1}{3k} \times \dfrac{A_k}{A_1}$, donc $b_{k+1} = \dfrac{3k-1}{3k} b_k$

On cherche donc à trouver $N$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} b_k \geqslant N$.

(comme les $b_k$ sont positifs, l'inégalité sera vraie pour $n \geqslant N$)

```
A=input("Donnez la valeur de A");
b=1;
k=1;
S=1;
while S<A
    b=(3*k-1)/(3*k)*b;
    k=k+1;
    S=S+b;
end;
disp(k);
```

**Exercice sans préparation E8**

On considère une variable aléatoire $Y$ admettant une densité $f$, nulle sur $]-\infty;0[$, continue sur $[0;+\infty[$ et strictement positive sur $[0;+\infty[$. On note alors $F$ la fonction de répartition de $Y$.
Soit

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{cc}-f(x)\ln(1-F(x)) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leqslant 0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Établir que $g$ définit bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire $Z$.

---

**Solution :**

* Comme $f$ est nulle sur $\mathbb{R}_-$ alors $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f=0$ sur $\mathbb{R}_-$ et $1-F(x)>0$ sur $\mathbb{R}_-$.
  D'autre part, $F$ est dérivable là où la densité $f$ est continue. $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $F'=f>0$.
  $F$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus $\lim\limits_{+\infty} F=1$ alors $F<1$ sur $\mathbb{R}_+$ d'où $1-F(x)>0$ sur $\mathbb{R}_+$.
  Ainsi, pour tout réel $x, 1-F(x)>0$ et $g$ est bien définie
* $g$ est nulle, donc positive sur $\mathbb{R}_-^*$.
  Sur $\mathbb{R}_+$ : $0<1-F(x)\leqslant 1$ (car $F(x)$ est une probabilité donc inférieure ou égale à 1)
  Donc $\ln(1-F(x))\leqslant 0$ et $g(x)=-f(x)\ln(1-F(x))\geqslant 0$
  Ainsi, $g$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
* $F$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $1-F(x)>0$ donc $x\to\ln(1-F(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  $f$ est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $[0,+\infty[$
  Donc $g$ est continue sur sur $]-\infty,0[$ et sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions continues.
* Pour tout réel $M\geqslant 0$ :
  $$\int_0^M g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^M -f(x)\ln(1-F(x))\,\mathrm{d}x$$
  Soit $u'(x)=-f(x)$ : $u(x)=1-F(x)$ : $v(x)=\ln(1-F(x))$ : $v'(x)=\dfrac{-f(x)}{1-F(x)}$ et $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$ ($1-F(x)>0$ ) donc
  $$\begin{aligned}\int_0^M g(x)\,\mathrm{d}x &= [(1-F(x))\ln(1-F(x))]_0^M-\int_0^M(1-F(x))\frac{-f(x)}{1-F(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= (1-F(M))\ln(1-F(M))-(1-F(0))\ln(1-F(0))+\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
  Or, $F(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x=0$ donc $\ln(1-F(0))=0$
  $F(M)\to 1$ quand $M\to+\infty$ et comme $x\ln(x)\to 0$ quand $x\to 0$ alors $(1-F(M))\ln(1-F(M))\to 0$
  Enfin, $\displaystyle\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x\to\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } 1.}$

$\boxed{g \text{ définit bien une densité de probabilité}}$

# SUJET E9

## Exercice principal E9

Pour tout entier $n$ non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

1. **Question de cours :** Énoncer les critères de comparaison des séries.
2. (a) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge, puis que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\geqslant 1}$ converge. On notera $\gamma$ sa limite.
3. (a) Montrer que la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante et que la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est croissante.

   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
4. (a) Montrer que pour tout entier $n$ non nul, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2) + \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

   (c) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECE2 page 8.
   Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes positifs.
   Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
   Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
   Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sont de même nature.
2. (a) Rappelons que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   Donc $v_n = \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   Ainsi $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}}$.

   (b) La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$). Donc par critère d'équivalence, $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

   Par définition de la convergence d'une série, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

   Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln(k))\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=0$

Donc $\boxed{\text{la suite } \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$

3. (a) ◇ Pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)}-S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\\ &= \frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

Ainsi $S_{2(n+1)}-S_{2n}\leqslant 0$.

$\boxed{\text{Donc la suite } (S_{2n})_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$

◇ Pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}\\ &= \frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3} \end{aligned}$$

Ainsi $S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1}\geqslant 0$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (S_{2n+1})_{n\geqslant 0} \text{ est croissante.}}$

(b) • Remarquons que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_{2n+1}-S_{2n}=-\dfrac{1}{2n+1}$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_{2n+1}-S_{2n}=0$.

• Les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont monotones et de monotonies différentes

Donc les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

Donc les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent vers une même limite.

Alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Donc par définition $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n} \text{ converge.}}$

4. (a) D'après la question 2(b), la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln(2n)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\gamma$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\ln(2n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

ou encore $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\ln(2)+\ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{o}(1).}$

(b) Soit $n$ un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}+\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{-1}{2k+1}\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} \end{aligned}$$

(c) Pour tout entier $n$ non nul, $2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}$.

Alors $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}=\ln(n)+\gamma-\ln(2)-\ln(n)-\gamma+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Donc $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln(2)+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Ainsi, puisque cette série converge $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\boxed{=-\ln 2.}$

**Exercice sans préparation E9**

Soient $p \in ]0,1[$ et la fonction SCILAB `X` suivante

```
function x=X(p)
    k=1;
    y=0;
    a=rand();
    while a>p
        y=y+1;
        k=k+1;
        a=rand();
    end;
    while a<=p
       k=k+1;
      a=rand()
    end;
    x=k-1-y;
endfunction
```

En s'aidant d'un lancer d'une pièce dont la probabilité d'obtenir "face" est $p$.

1. Interpreter ce que simule la fonction `X` ?
2. Soit $X$ la variable aléatoire simulée par la fonction ci-dessus.
   — Quelle est la loi de $X$ ?
   — Quelle est l'espérance de $X$ si elle existe ?

---

**Solution :**

1. La fonction détermine $\boxed{\text{la longueur de la première séquence de "face".}}$
   `y` est le nombre de "pile" précédant la première séquence de "face".
2. Soit $q = 1 - p$
   Posons $X = 0$ si "face" n'apparaît jamais. $X(\Omega) = \mathbb{N}$
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$
   $[X = k] = \bigcup_{y=0}^{+\infty} \left( B_y \cap A_{y+1,k} \right)$ (union disjointe).
   où $B_y$ est l' événement : " $y$ piles sont apparus avant la première séquence de faces "
   $A_{y+1,k}$ est l'événement : " face est apparu aux rangs $y+1, ..., y+k$ et pile au rang $y+k+1$."
   $\mathbb{P}(X = k = \sum_{y=0}^{+\infty} q^y p^k q$ les jets de pièces étant supposés indépendants.
   $\mathbb{P}(X = k) = \frac{qp^k}{1-q} = qp^{k-1}$
   $\boxed{X \text{ suit donc la loi géométrique de paramètre } q}$
   Ce résultat était prévisible : $X$ et le rang du premier "pile" à partir de l'obtention du premier "face" et la loi géométrique est "sans mémoire"

   Donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{q}}$

# SUJET E10

## Exercice principal E10

Soient $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $k$ un entier naturel inférieur ou égal à $n$.
Sur le segment $[0,1]$, on place au hasard $n$ points, on les ordonne dans l'ordre croissant et, pour $n$ fixé, on appelle $X_k$ la variable aléatoire égale à l'abscisse du $k$-ième point.

On définit pour $x \in ]0,1[$, $Y_x$ le nombre de points qui ont été placés dans le segment $[0;x]$

1. **Question de cours** : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Déterminer la loi de $Y_x$ pour $x \in ]0;1[$.
3. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall q \in \mathbb{N}; \quad I_{p,q} = \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}$$
En déduire l'expression de $I_{p,q}$.
4. Soit $k \in [|1;n|]$ fixé.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de $X_k$ (on pourra laisser l'expression sous la forme d'une somme.)
   (b) Montrer que $X_k$ est une variable à densité dont une densité $f$ est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{k-1}(1-x)^{n-k} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
5. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_k)$ de $X_k$.
On admet que la variance de $X_k$ est donnée par
$$V(X_k) = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}$$
6. (a) $k$ étant toujours un entier naturel non nul fixé, on définit pour tout $n$ entier vérifiant $n \geqslant k$, la variable aléatoire $Z_n$ par $Z_n = X_k$. Montrer l'inclusion d'événements suivante :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \big[\, |Z_n| > \varepsilon \big] \subset \big[ (|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| + |\mathbb{E}(Z_n)|) > \varepsilon \big]$$
Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
On admet que, comme $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n) = 0$, pour $n$ assez grand $|\mathbb{E}(Z_n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $\varepsilon - |\mathbb{E}(Z_n)| > \dfrac{\varepsilon}{2}$
   (b) Montrer que pour $n$ assez grand, $\mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{4V(Z_n)}{\varepsilon^2}$.

---

**Solution :**

1. programme officiel ECE2 page 17.
Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et une variance :
$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$
2. $\boxed{Y_x \text{ une binomiale de paramètres } n \text{ et } x}$

3. On obtient l'égalité $I_{p,q} = \dfrac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}$ à l'aide d'une intégration par parties.

Par itérations :

$$I_{p,q} = \frac{p(p-1)\dots 1}{(q+1)(q+2)\dots(q+p)} I_{0,p+q} = \frac{p!q!}{(p+q)!}\int_0^1 (1-x)^{p+q}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{I_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1)\begin{pmatrix} p+q \\ p \end{pmatrix}}}$$

4. (a) Si l'on note $F_k$ la fonction de répartition

$F_k(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $F_k(x) = 1$ si $x \geqslant 1$.

Pour $x \in ]0;1[$, $F_k(x) = \mathbb{P}(X_k \leqslant x) = \mathbb{P}(Y_x \geqslant k)$

$$\boxed{\forall x \in ]0;1[,\ F_k(x) = \sum_{i=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i (1-x)^{n-i}}$$

(b) $F_k$ est continue sur $\mathbb{R}$ et est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ donc $X_k$ est à densité et une densité est donnée par : * $f_k(x) = 0$ si $x < 0$ ou $x > 1$

* si $0 < x < 1$ et $k < n$ :

$$f_k(x) = \sum_{i=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \left(ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - (n-i)x^i(1-x)^{n-i-1}\right)$$

$$= k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{k-1}(1-x)^{n-k} + \sum_{i=k}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ i+1 \end{pmatrix} (i+1)x^i(1-x)^{n-i-1} - \sum_{i=k}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (n-i)x^i(1-x)^{n-i-1}$$

or $(i+1)\begin{pmatrix} n \\ i+1 \end{pmatrix} = (n-i)\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$

donc $f_k(x) = k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{k-1}\left(1-x^{n-k}\right)$

si $k = n, F_n(x) = x^n$ donc $f_n(x) = nx^{n-1}$ et $f_k(x) = k\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$

Donc, dans tous les cas : $\boxed{f_k(x) = k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{k-1}(1-x)^{n-k}}$

5. $\mathbb{E}\left(X_k\right)$ existe car $X_k$ est bornée

$$\mathbb{E}\left(X_k\right) = k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x = k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\int_0^1 x^k(1-x)^{(n+1)-(k+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{(k+1)\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X_k) = \dfrac{k}{n+1}}$

6. (a) Par inégalité triangulaire. $|Z_n| \leqslant |Z_n - \mathbb{E}\left(Z_n\right)| + |\mathbb{E}\left(Z_n\right)|$

Donc, si $|Z_n| > \varepsilon$, alors $|Z_n - E\left(Z_n\right)| + |E\left(Z_n\right)| > \varepsilon$

On a bien l'inclusion demandée $\boxed{[|Z_n| > \varepsilon] \subset [|Z_n - E\left(Z_n\right)| + |E\left(Z_n\right)| > \varepsilon]}$

(b) On obtient donc

$\mathbb{P}\left(|Z_n| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - E\left(Z_n\right)| > \varepsilon - |E\left(Z_n\right)|\right)$

Mais pour $n$ assez grand $|\mathbb{E}(Z_n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $\varepsilon - |E\left(Z_n\right)| > \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\mathbb{P}\left(|Z_n| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}\left(Z_n\right)| > \mathbb{E}(Z_n) - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}\left(Z_n\right)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$

Or d'après Bienaymé-Tchébytchev $\mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}\left(Z_n\right)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \dfrac{4V\left(Z_n\right)}{\varepsilon^2}$.

Ains i $\boxed{\mathbb{P}\left(|Z_n| > \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{4V\left(Z_n\right)}{\varepsilon^2}}$

**Exercice sans préparation E10**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3.
On note $Id_E$ et $O_{\mathcal{L}(E)}$ les applications identité de $E$ dans $E$, et constante nulle de $E$ dans $E$.
On considère un endomorphisme $f$ de $E$ tel que :

$$f \neq O_{\mathcal{L}(E)}, \quad f^2 + Id_E \neq O_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } f \circ (f^2 + Id_E) = O_{\mathcal{L}(E)}$$

où $f^2$ désigne $f \circ f$.

1. Déterminer $\text{sp}(f)$. L'application $f$ est-elle diagonalisable ?
2. L'application $f^2 + Id_E$ est-elle bijective ?

---

**Solution :**

1. Le polynôme $X(X^2+1)$ est un polynôme annulateur de $f$ et son unique racine est 0. 0 est donc la seule valeur propre possible de $f$.
   $f^2 + Id_E \neq O_{\mathcal{L}(E)}$ donc il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\left(f^2 + Id_E\right)(x_0) \neq 0$.
   $f \circ (f^2 + Id_E) = O_{\mathcal{L}(E)}$ donc $f\left((f^2 + Id_E)(x_0)\right) = 0$. Le vecteur $(f^2 + Id_E)(x_0)$ est donc un vecteur non nul du noyau de $f$
   Ainsi, $\boxed{\text{Sp}(f) = \{0\}.}$
   Par l'absurde, si $f$ était diagonalisable, elle serait représentée dans une base de vecteurs propres par la matrice nulle, donc $f$ serait nulle, ce qui n'est pas le cas.
   $\boxed{\text{Donc } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$
2. Si $f^2+Id_E$ était bijective, on pourrait composer à droite par son inverse dans la relation $f \circ (f^2+Id_E) = O_{\mathcal{L}(E)}$ et obtenir que $f = O_{\mathcal{L}(E)}$, ce qui est absurde.
   $\boxed{f^2 + Id_E \text{ n'est pas bijectif.}}$

# SUJET E11

## Exercice principal E11

Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum a_n$ converge.

1. Question de cours.
   Rappeler les conditions de convergence des séries géométriques, géométriques dérivées et des séries exponentielles. En cas de convergence, rappeler la valeur de la somme de ses séries.

2. (a) La suite $A_1 = \left(\dfrac{1}{n!}\right)$ appartient-elle à $\mathcal{C}$ ?
   (b) La suite $A_2 = ((-1)^n)$ appartient-elle à $\mathcal{C}$ ?
   (c) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

   Pour toute suite $A = (a_n) \in \mathcal{S}$, on dit que la suite $A = (a_n)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si
   (i) pour tout $x \in ]-1, 1[$, la série $\sum a_n x^n$ converge.
   (ii) $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet une limite finie lorsque $x$ se rapproche de 1 par valeurs inférieures.
   On note alors
   $$\ell(A) = \lim_{x\to 1-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \in \mathbb{R}.$$

3. (a) La suite $A_1 = \left(\dfrac{1}{n!}\right)$ vérifie-t-elle la propriété $\mathcal{P}$ ? Si oui, déterminer $\ell(A_1)$.
   (b) La suite $A_2 = ((-1)^n)$ vérifie-t-elle la propriété $\mathcal{P}$ ? Si oui, déterminer $\ell(A_2)$.
   (c) Soit $A_3 = (n^2)$ vérifie-t-elle la propriété $\mathcal{P}$ ? Si oui, déterminer $\ell(A_3)$.
4. Soit $A = (a_n)$ une suite de $\mathcal{S}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$ et que la suite vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \ell(A)$.
   (b) En déduire que la suite $A$ appartient à $\mathcal{C}$.
5. Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+3} = a_n.$$
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A$ soit dans $\mathcal{C}$.
   (b) Montrer que la suite $A$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si $a_0 + a_1 + a_2 = 0$.

---

**Solution :**

1. Programme officiel ECE1, page 16.
   Les séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent ssi $|q| < 1$ et dans ce cas :
   $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q},\ \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}}$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$

2. (a) Comme la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge (en tant que série exponentielle), on conclut que :

la suite $\boxed{\left(\frac{1}{n!}\right) \text{ appartient à } \mathcal{C}.}$

(b) La série $\sum(-1)^n$ $\boxed{\text{diverge grossièrement}}$, donc :
la suite $((-1)^n)$ n'appartient pas à $\mathcal{C}$.

(c) On note que $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est non vide car il contient la suite nulle et l'ensemble $\mathcal{C}$ est stable par combinaisons linéaires.
On conclut ainsi que $\boxed{\mathcal{C} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{S}.}$

3. (a) Pour tout $x \in ]-1,1[$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et a pour somme $\mathrm{e}^x$. Par suite, $\lim_{x\to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \mathrm{e}^1 \in \mathbb{R}$.

Donc, la suite $A_1 = \left(\frac{1}{n!}\right)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$, avec $\boxed{\ell(A_1) = \mathrm{e}.}$

(b) La série géométrique $\sum(-x)^n$ converge si et seulement si $|-x| < 1$, donc si et seulement si $x \in ]-1,1[$.
De plus, pour tout $x \in ]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{1}{1+x}$ qui a pour limite $\frac{1}{2}$ quand $x$ tend vers $1^-$. On conclut que la suite $A_2 = ((-1)^n)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ avec $\boxed{\ell(A_2) = \frac{1}{2}.}$

(c) Pour tout $x \in ]-1,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $n^2x^n = x^2\, n(n-1)x^{n-2} + x\, n\, x^{n-1}$. La série $\sum n^2x^n$ converge comme combinaison linéaire de deux séries géométriques dérivées convergentes et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

Cette quantité n'a pas de limite finie quand $x$ tend vers $1^-$.
On conclut que la suite $\boxed{A_3 \text{ ne vérifie pas la propriété } \mathcal{P}.}$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, somme partielle de rang $n$ de la série $\sum a_k$. Par positivité de la suite $(a_k)$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Montrons qu'elle est majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, $\sum_{k=0}^{n} a_kx^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_kx^k$. Comme la suite $A$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$, on peut fair tendre $x$ vers $1^-$ dans cette inégalité et l'on obtient :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \ell(A).}$$

(b) La suite $(S_n)$ est croissante et majorée, donc elle converge. Ainsi, la série $\sum a_k$ converge, ce qui prouve que :
$\boxed{\text{la suite } A \text{ appartient à } \mathcal{C}.}$

5. (a) Supposons que $A$ soit un élément de $\mathcal{C}$. Alors, la série $\sum a_n$ converge et, par suite, $\lim_{n\to+\infty}(a_n) = 0$. En tant que suite extraite de $(a_n)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty}(a_{3n+i}) = 0$. Or, pour tout $i \in \{0,1,2\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{3n+i} = a_i$.
La suite $\boxed{A \text{ est donc la suite nulle.}}$

Réciproquement, la suite nulle est bien élément de $\mathcal{C}$ et vérifie l'hypothèse.

(b) • La suite $(|a_n|)$ est bornée par le réel $M = \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|\}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in ]-1,1[$, $|a_nx^n| \leqslant M|x|^n$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum a_nx^n$ converge absolument, donc converge.
• Pour tout $x \in ]-1,1[$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{3N-1} a_nx^n = \sum_{i=0}^{N-1} \left(a_{3i}x^{3i} + a_{3i+1}x^{3i+1} + a_{3i+2}x^{3i+2}\right).$$

$$S_N(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(a_0 x^{3i} + a_1 x^{3i+1} + a_2 x^{3i+2}\right) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \sum_{i=0}^{N-1} \left(x^3\right)^i .$$

$$\lim_{N\to+\infty} (S_N(x)) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 - x^3} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}.$$

Il suit que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $1^-$ si et seulement si 1 est racine de $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, donc $\boxed{\text{si et seulement si } a_0 + a_1 + a_2 = 0.}$

**Exercice sans préparation E11**

Soit C un réel, $\lambda$ un réel strictement positif et $f$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} Ce^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Exprimer C en fonction de $\lambda$ pour que $f$ soit une densité de probabilité.
   Soit alors, pour cette valeur de C, une variable aléatoire X admettant $f$ pour densité.
2. Exprimer X simplement à l'aide d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle.
3. On a obtenu les moyennes de 5 expériences de $10^5$ réalisations indépendantes de $X$ :
   1.5016443 1.501896 1.4995983 1.5003972 1.4982147
   Que pensez-vous de la valeur de $\lambda$ ?
   Écrire des lignes de code Scilab qui demande $\lambda$ à l'utilisateur, 5 expériences de $10^5$ réalisations indépendantes de $X$, affiche leurs 5 moyennes, puis propose une estimation de $\lambda$.

---

**Solution :**

1. $f$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}, f \geqslant 0 \Rightarrow C \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1 \Rightarrow \boxed{C = \lambda e^{\lambda}.}$
2. Pour $x \geqslant 1$, $f(x) = \lambda e^{\lambda}.e^{-\lambda x} = \lambda \exp(-(\lambda(x-1)) = g(x-1)$ où $g$ est la densité d'une variable aléatoire Y suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. Ce résultat reste vrai si $x < 1$
   Ainsi $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} g(t-1)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x-1} g(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{P}(Y \leqslant x-1) = \mathbb{P}(Y+1 \leqslant x).$
   On peut écrire $\boxed{X = Y + 1 \text{ où Y suit une loi exponentielle de paramètre } \lambda.}$
3. Chaque moyenne obtenue est la moyenne empirique des $10^5$ réalisations : une valeur de l'espérance de $X$ est environ 1.5 (on peut invoquer la loi des grands nombres)
   Or, $\mathbb{E}(X) = 1 + \dfrac{1}{\lambda}$, donc $\boxed{\lambda \text{ est voisin de } \dfrac{1}{1.5-1} = 2.}$
   On propose

```
lambda= input('lambda=');
A=grand(5,100000,"exp",1/lambda);
A=1+A;
V=mean(A,'c');
disp(V');
disp(1/(mean(V)-1));
```

   Explications :
   `grand(5,100000,"exp",1/lambda)` génère $5 \times 100000$ réalisations indépendantes d'une variable de loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
   `A=1+A` ajoute 1 à chaque élément de $A$.
   `V=mean(A,'c')` : V est une matrice colonne dont le $i$-ème élément est la moyenne des éléments de la $i$ème ligne de $A$.
   `V'` transpose $V$.

# Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (T)

Juin-juillet 2021

Le bilan de la session 2021 de mathématiques voie T est satisfaisant

Le niveau des candidats est très hétérogène : les notes se sont étalées entre 4 et 19. La moyenne s'établit à 10,74 et l'écart-type à 4,59.

On peut noter chez la plupart des candidats des lacunes en calculs. Mais fort heureusement, nombre d'entre eux les ont compensées par des raisonnements astucieux, un exposé clair et rigoureux et ont été récompensés par de bonnes, voire d'excellentes notes.

Le jury aimerait insister sur les points suivants auprès des futur.e.s candidat.e.s et de leurs enseignant.e.s.

— Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes sont des compétences que nous souhaiterions fortement valoriser à l'avenir. Nous insistons sur le fait qu'après avoir tracé un tableau de variation, les candidats doivent être capable d'esquisser l'allure d'une courbe.

— Nous avons noté pas mal de lacunes en calcul, en particulier sur les calculs avec des puissances ou sur le calcul de dérivées.

— les théorèmes du cours doivent être connus précisément, avec leurs hypothèses précises et leurs conclusions.

— Nous avons aussi noté chez certains candidats quelques difficultés avec la formule des probabilités totales.

— Les questions informatiques ne doivent pas être négligées par les candidats. Elles ont permis à certains candidats d'améliorer significativement leur note.

— Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation : au cours de la présentation de l'exercice préparé, le jury pose des questions pour aiguiller le candidat vers la solution. Il convient d'y être attentif. Il est souvent utile d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Par ailleurs, une prestation peut être jugée excellente sans que le candidats ne traite beaucoup de questions, alors qu'un candidat traitant de manière approximative un grand nombre de questions en déformant au passage les théorèmes de son cours risque d'être déçu par sa note finale.

— La question sans préparation est aussi très importante. Là encore, pour la plupart d'entre elles, le candidat peut tout à fait faire bonne impression sans aller au bout de la question. L'important est de réfléchir et d'écouter les indications du jury. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, qui avaient complètement raté l'exercice préparé ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation, et parfois dans les toutes dernières minutes.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

# SUJET T1

## Exercice principal T1

Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue une succession de tirages avec remise de cette urne, jusqu'à ce que l'on ait obtenu au moins une fois une boule blanche et une boule noire. On note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche. On note $T$ la variable aléatoire désignant le nombre de tirages effectués. (On rappelle que les tirages s'arrêtent dès que l'on a obtenu une boule blanche et une boule noire) On notera aussi, pour $j \in \mathbb{N}^*$, $N_j$ l'événement "le $j$-ième tirage donne une boule noire."

1. **Question de cours** : Loi géométrique de paramètre $p \in ]0;1[$ : protocole, loi, espérance et variance.
2. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3. (a) Déterminer $T(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([T=2])$.
   (b) Á l'aide du système complet $[N_1, \bar{N_1}]$ calculer $\mathbb{P}([T=k])$ pour $k \in T(\Omega)$.
4. La variable $e^X$ admet-elle une espérance ?
   On note $U$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches au moment où l'on s'arrête. Par exemple, si les tirages ont donné successivement : une boule noire, une boule noire,une boule noire et une boule blanche, alors $T=4$ et $U=1$.
5. (a) Déterminer $U(\Omega)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}([U=1])$. Les variables U et T sont-elles indépendantes ?

---

**Solution :**

1. Protocole ("premier succès" d'expériences identiques et indépendantes), $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X=k]] = (1-p)^{k-1}p$, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$ (programme ECT2 page 5.)
2. Les tirages sont identiques et indépendants. (avec remise)
   $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right),\ \mathbb{E}(X)=3,\ V(X)=6.}$
3. (a) Il faut au minimum deux tirages pour avoir une boule blanche et une boule noire.
   $T(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$
   $[T=2] = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$
   Ces événements sont incompatibles : $\mathbb{P}([T=2]) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2)$
   Par indépendance : $\mathbb{P}([T=2]) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(N_2) + \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \boxed{= \dfrac{4}{9}.}$
   (b) Avec la formule des probabilités totales, pour $k \geqslant 2$ :
   $\mathbb{P}([T=k]) = \mathbb{P}([T=k] \cap N_1) + \mathbb{P}([T=k] \cap B_1)$
   Si $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}([T=k] \cap N_1) = \mathbb{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k)$ et par indépendance : $\mathbb{P}([T=k] \cap N_1) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{3}$
   On fait la même chose pour $\mathbb{P}([T=k] \cap B_1)$.
   $$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.}$$
4. On utilise le théorème du transfert.
   Si cette série converge absolument, $\mathbb{E}(e^X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])e^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times e^k$

La somme partielle donne pour $N \geqslant 0$, $S_N = \dfrac{1}{3} \times e \times \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \left(\dfrac{2e}{3}\right)^k$

Or, $\dfrac{2e}{3} > 1$ donc la série diverge

Ainsi $\boxed{e^X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

5. (a) On s'arrête lorsque après au moins une boule blanche.
   $U(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $[U = k]$ est possible.

$$\boxed{U(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

   (b) Avec la formule des probabilités totales et le système complet $[N_1, B_1]$ :
   $\mathbb{P}([U = 1]] = \mathbb{P}([U = 1] \cap N_1) + \mathbb{P}([U = 1] \cap B_1)$
   $\mathbb{P}([U = 1] \cap B_1) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \dfrac{2}{9}$
   $\mathbb{P}([U = 1] \cap N_1) = \mathbb{P}(N_1)$ (si l'on a $N_1$, nécessairement $U = 1$)
   Ainsi $\boxed{\mathbb{P}([U = 1]) = \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{9}}$
   * Le plus simple est de voir que si $T = 2$, nécessairement, $U = 1$, donc :
   $\mathbb{P}([U = 1]|[T = 2]) = 1 \neq \mathbb{P}([U = 1])$
   $\boxed{\text{Les variables ne sont donc pas indépendantes.}}$

# Exercice sans préparation T1

Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(3-|x|)}$

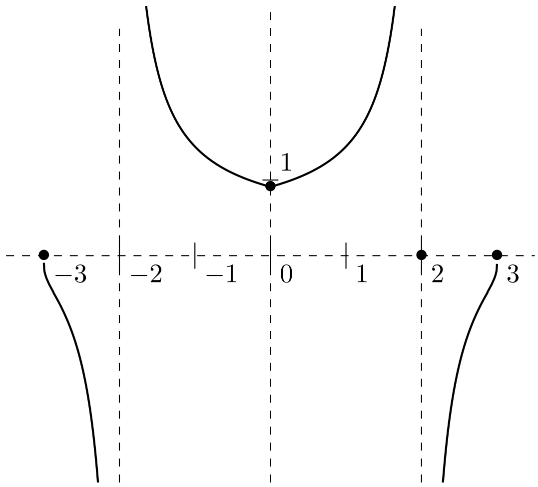
---

**Solution :**

1. On commence par le domaine de définition. Il y a deux conditions : $3-|x|>0$ et $\ln(3-|x|)\neq 0$
   ssi $|x|<3$ et $3-|x|\neq 1$ ssi $|x|\in[0;3[\setminus\{2\}$
   $\boxed{D_f = ]-3;-2[\cup]-2;2[\cup]2;3[}$
2. On peut noter que $\boxed{f \text{ est paire.}}$
3. Si $x>0$ $|x|=x$
   Donc pour $x\in]0;2[\cup]2;3[$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln(3-x)}$. et $f'(x)=\dfrac{-1}{3-x}\times\dfrac{-1}{\ln^2(3-x)}=\dfrac{1}{(3-x)\ln^2(3-x)}>0$
4. On trace alors le tableau de variation que l'on complète avec les limites (pas de forme indéterminée) et qui permet de tracer la courbe

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\|\|$ $0$ | | $\|\|$ $+\infty$ | | | | $+\infty$ $\|\|$ | | $0$ $\|\|$ |
| | $\|\|$ | $\searrow$ | $\|\|$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $\|\|$ | $\nearrow$ | $\|\|$ |
| | $\|\|$ | $-\infty$ | $\|\|$ | | $\dfrac{1}{\ln(3)}$ | | $\|\|$ $-\infty$ | | $\|\|$ |

*Note : le prolongement par continuité n'est pas au programme*




5. Question supplémentaire soit $n\in\mathbb{N}$, déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x)=n$.
   On énonce le théorème de la bijection
   L'équation admet deux solutions si $y\in\mathbb{R}_-^*\cup]\dfrac{1}{\ln(3)};+\infty[$ et une seule si $y=\dfrac{1}{\ln(3)}$
   Sauf qu'on nous précise qu'ici, $n$ est un entier naturel.
   Comme $3>e$, $\ln(3)>\ln(e)=1$ et donc $\dfrac{1}{\ln(3)}\in]0;1[$
   $\boxed{\text{Si } n\in\mathbb{N}^*\text{, l'équation } f(x)=n \text{ admet deux solutions, l'équation } f(x)=0 \text{ n'admet pas de solution}}$

# SUJET T2

## Exercice principal T2

1. **Question de cours** : fonction continue en un point.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cc} x(\ln(x))^n & \text{si } x \in [1;2] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

   On donne l'approximation numérique suivante $\ln(2) \approx 0.7$.
2. Tracer l'allure de la courbe de $f_1$. Est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$ ?
3. On note maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^2 x.(\ln(x))^n \, dx$.
   (a) Calculer $I_0$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.
4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - \dfrac{n+1}{2} I_n$.
   (b) Compléter le programme SCILAB de manière à afficher un entier N tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N$, alors $I_n \leqslant \dfrac{1}{1000}$

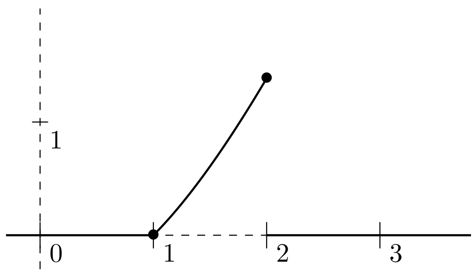
```
 n=0;
 I=
 P=
WHILE (I>0.001)
    P=P*log(2);
    I=

   end;
 disp( );
```

5. Montrer qu'il existe un réel $C_n \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $C_n f_n$ soit une densité de probabilité.

---

**Solution :**

1. $f$ est continue en un point $a$ de son domaine de définition ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. (programme ECT1 page 7.)
2. On note que $f_1$ est dérivable sur $]1;2[$.
   $\forall x \in ]1;2[$, $f_1'(x) = 1 + \ln(x) > 1$. $f_1''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$
   La fonction est convexe et croissante sur $[1;2]$,
   $f_1(1) = 0$, $f_1'(1) = 1$, $f_1(2) = 2\ln(2) \approx 1,4$, $f''(2) = 1 + \ln(2) \approx 1,7$
   On peut placer les demi-tangentes
   $f$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ sauf en 2.




3. (a) $I_0 = \displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\ \frac{x^2}{2}\ \right]_1^2 \boxed{= \frac{3}{2}}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

   $\forall x \in [1;2]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2) \leqslant 1$, donc $(\ln(x))^{n+1} \leqslant (\ln(x))^n$

   donc $x(\ln(x))^{n+1} \leqslant x(\ln(x))^n$ et par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} \leqslant I_n$ $\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$

   (c) $\forall x \in [1;2]$, $0 \leqslant x(\ln(x))^n \leqslant x(\ln(2))^n$

   Par positivité de l'intégrale : $0 \leqslant I_n \leqslant (\ln(2))^n \displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{3(\ln(2))^n}{2}$

   Comme $|\ln(2)| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln(2))^n = 0$ et donc par encadrement :

   $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

4. (a) On va faire une intégration par partie :

   $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^2 x(\ln(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x.$

   On pose $u'(x) = x$, $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $v(x) = (\ln(x))^{n+1}$, $v'(x) = \dfrac{(n+1)}{x}(\ln(x))^n$

   Ainsi $I_{n+1} = \left[\ \dfrac{x^2.(\ln(x))^{n+1}}{2}\ \right]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2(n+1)(\ln(x))^n}{2x}\,\mathrm{d}x$

   Donc $\boxed{I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - \dfrac{n+1}{2} I_n}$

   (b) Comme la suite $(I_n)$ est décroissante, il suffit de trouver N tel que $I_N \leqslant \dfrac{1}{1000}$.

```
 n=0;
 I=1.5;
 P=1;
WHILE (I>0.001)
    P=P*log(2);
    I=2*P-(n+1)*I/2;
    n=n+1;
   end;
 disp(n)
```

5. La fonction $C_n f_n$ est bien continue sauf en 2 (et admet des limites finies à gauche et à droite en ce point)
   Elle est bien positive si l'on choisit $C_n \geqslant 0$.

   De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} C_n f_n(x)\,\mathrm{d}x = C_n \int_1^2 x(\ln(x))^n\,\mathrm{d}x = C_n I_n.$

   Comme l'intégrale est strictement positive, on pose alors $C_n = \dfrac{1}{I_n}$, et l'on a bien

   $\boxed{C_n f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$

## Exercice sans préparation T2

Soient $p$ un réel de $]0;1[$, $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{P}([Y=k]) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}$

On considère la matrice définie aléatoirement par $\forall \omega \in \Omega,\ \ M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega)-3 \\ X(\omega) & 3X(\omega)-2 \end{pmatrix}$.

Autrement dit $M = \begin{pmatrix} X & Y-3 \\ X & 3X-2 \end{pmatrix}$.

Calculer la probabilité que cette matrice soit inversible.

---

**Solution :**

1. La matrice est non inversible ssi $X(3X-2) - X(Y-3) = 0$ ssi $X(3X - Y + 1) = 0$ ssi $X = 0$ ou $Y = 3X+1$.
   Or, $\mathbb{P}([X=0] \cup [Y=3X+1]) = \mathbb{P}([X=0]) + \mathbb{P}([Y=3X+1]) - \mathbb{P}([Y=3X+1] \cap [X=0])$
   $$\mathbb{P}([X=0] \cup [Y=3X+1]) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=3k+1]) - \mathbb{P}([Y=3] \cap [X=0]).$$
   $$\mathbb{P}([X=0] \cup [Y=3X+1]) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=3k+1]).$$
   Or $\mathbb{P}([X=k] \cup [Y=3k+1]) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3k+2} = \dfrac{1}{8} \times \left(\dfrac{1}{16}\right)^{k}$ et $\dfrac{1}{16} \in ]0;1[$, la série converge.
   *Dans le programme officiel, ils n'ont pas la formule* $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k$
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=3k+1]) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{1-\frac{1}{16}} - 1\right) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{16}{15} - 1\right) = \frac{1}{8 \times 15} = \frac{1}{120}$$
   Finalement $\boxed{\mathbb{P}([\text{M est inversible}]) = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{120} = \dfrac{59}{120}}$
2. Question supplémentaire : On suppose que $X = 1$ et $Y = 3$. Calculer alors $M^n$.
   $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Par récurrence ou binôme de Newton, $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}}$

# SUJET T3

## Exercice principal T3

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

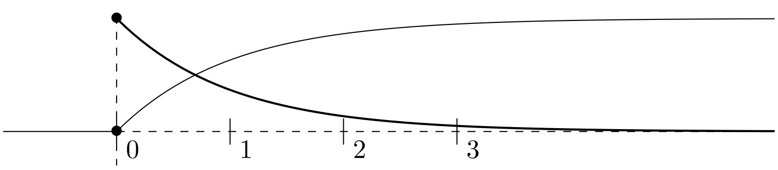
1. **Question de cours** : loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
2. On suppose, dans cette question seulement que $\lambda = 1$. Tracer sur un même graphe une densité et la fonction de répartition de $X_1$.
   On note $Y = \exp(X_1)$
3. Sur quel intervalle Y prend-elle ses valeurs ? Déterminer la fonction de répartition de Y.
4. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \dfrac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$.
   (a) Déterminer $\mathbb{E}(M_n)$.
   (b) Montrer que $V(M_n) = \dfrac{1}{n\lambda^2}$.
   (c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchébytchev, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $a > 0$ :
   $$\mathbb{P}\left(\left[-a < M_n - \frac{1}{\lambda} < a\right]\right) \geqslant 1 - \frac{1}{n(a\lambda)^2}.$$
5. Soit $\alpha \in ]0;1[$.
   (a) Choisir $a > 0$ tel que $\forall \lambda \geqslant 1$, $1 - \dfrac{1}{n(a\lambda)^2} \geqslant 1 - \dfrac{1}{na^2} \geqslant 1 - \alpha$.

   On admet que l'on sait que $\lambda \geqslant 1$.
   (b) Déduire de 4.c et de 5.a que l'intervalle $\left]M_n - \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}; M_n + \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}\right[$ est un intervalle de confiance pour $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de risque $\alpha$.

---

**Solution :**

1. Une variable X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ssi sa fonction de répartition vérifie $F(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ si $x > 0$
   Densité, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ (programme ECT2 page 9.)
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \exp(-x)$ et $F(x) = 1 - \exp(-x)$




   $F(0) = 1$, $F'_d(0) = f(0) = 1$, $f'_d(0) = -1$, on peut placer les tangentes.
3. Comme $X_1$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\boxed{\text{Y prend ses valeurs dans } [1;+\infty[}$
   *la notation $X(\Omega)$ n'est pas dans le programme officiel*
   Si $x \leqslant 1$, $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = 0$, car l'événement $[Y \leqslant x]$ est impossible.
   Si $x > 1$, $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\exp(X_1) \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant \ln(x))$ (la fonction ln est strictement croissante)
   Ainsi $\boxed{F_Y(x) = F_X(\ln(x)) = 1 - \exp(-\lambda \ln(x)) = 1 - \dfrac{1}{x^\lambda}}$

4. (a) Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(M_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n\mathbb{E}(X_k) \boxed{= \dfrac{1}{\lambda}}$

(b) $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2}V(\sum_{k=1}^{n} X_k)$

Comme les variables sont indépendantes :

$V(M_n) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{n}{n^2\lambda^2} \boxed{= \dfrac{1}{n\lambda^2}}$

(c) On applique l'inégalité à la variable $M_n$, qui admet une espérance et une variance, et à $a > 0$

$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{a^2}$

On a $\mathbb{E}(M_n) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(M_n) = \dfrac{1}{n\lambda^2}$

On passe à l'événement contraire : $\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < a) \leqslant 1 - \dfrac{V(M_n)}{a^2}$

Or, $|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < a$ ssi $-a < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < a$. On retrouve bien $\boxed{\mathbb{P}\left(-a < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < a\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{n\lambda^2 a^2}}$

5. (a) Pour $\lambda \geqslant 1$, on a déjà la première inégalité car $n(a\lambda)^2 \geqslant na^2$ donc $\dfrac{1}{n(a\lambda)^2} \leqslant \dfrac{1}{na^2}$ et $1 - \dfrac{1}{n(\lambda a)^2} \geqslant 1 - \dfrac{1}{na^2}$

Pour la deuxième inégalité $\dfrac{1}{na^2} \geqslant 1 - \alpha$ ssi $na^2\alpha \geqslant 1$ ssi $a \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}$

Il suffit de prendre $\boxed{a = \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}}$

(b) En utilisant 4.$c$ et 5.$a$ avec $a = \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}$

$\mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}\right]\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{n\lambda^2 a^2} \geqslant 1 - \alpha$

Il suffit de traduire l'événement $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}\right]$ en $[M_n \in I]$ avec I un intervalle.

$-\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}$ ssi $-\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} - M_n < -\dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} - M_n$

ssi $\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} + M_n > \dfrac{1}{\lambda} > -\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} + M_n$ ssi $\dfrac{1}{\lambda} \in \left]M_n - \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}; M_n + \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}\right[$.

$\boxed{\left]M_n - \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}; M_n + \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}\right[ \text{ est un intervalle de confiance pour } \dfrac{1}{\lambda} \text{ au niveau de risque } \alpha.}$

# Exercice sans préparation T3

Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On définit une suite $(u_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{q^n}{n!}$
Donner la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et prouvez le résultat proposé.

---

**Solution :**

* Une réponse utilisant la convergence de la série exponentielle est bien sûr possible.
* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{q}{n+1}$, donc $(u_n > 0)$ la suite est décroissante à partir du rang $N = \lfloor q \rfloor$
La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc. Et si elle converge vers $\ell \neq 0$,par unicité de la limite $\dfrac{\ell}{\ell} = 0$
C'est absurde
Question supplémentaire : faire la preuve avec une autre méthode.
* On peut aussi remarquer que pour $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{q}{N+1}\right) u_n$
Par récurrence immédiate, $u_n \leqslant u_N \left(\dfrac{q}{N+1}\right)^{n-N}$ et comme $\dfrac{q}{N+1} \in ]0;1[$, on peut conclure par encadrement.

# Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (BL)

Juin-juillet 2021

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de grandes qualités d'expression et de logique. Bien sûr, il y a une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 2 à 19.
Les candidats les plus faibles ont montré de grosses faiblesses en calcul.
A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs intuitions et la finesse de leurs raisonnements. La moyenne est de $11,44$ et l'écart-type est de $4,22$.
Le jury aimerait insister sur certaines fautes récurentes :

— L'usage des quantificateurs est parfois difficile pour les candidats : par exemple la définition précise d'une valeur propre est souvent compliquée à obtenir.

— Le jury insiste sur le rôle du tableau : il doit être utilisé comme un support et doit permettre à l'étudiant de commenter son travail mais il n'est pas nécessaire d'y voir tous les calculs. Un juste équilibre doit être trouvé, certains candidats veulent recopier l'intégralité de leur brouillon, d'autre ne rien écrire.

— Les étudiants pensent souvent, à tort, qu'une limite existe toujours et utilise le symbole lim a mauvais escient.

— Il est utile de connaitre les lettres grecques. Il est parfois difficile de suivre les étudiants lorsqu'ils confondent deux lettres de leur énoncé.

— Il est important qu'un étudiant sache étudier une fonction et en dessiner le graphe.

— Il est inutile de demander au jury de sauter une question graphique, il ne le fera pas.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.
L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de sauver des oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, qu'ils ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

# SUJET BL2

## Exercice principal BL2

Soient $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
On dit que la fonction $f$ vérifie la propriété $\mathcal{L}_k$ sur $I$ s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^{+^*}$ tel que

$$\forall\,(x,y) \in I^2, \qquad |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

1. Question de cours.
   Rappeler l'égalité et l'inégalité des accroissements finis.
2. (a) Montrer que les fonctions sinus et valeur absolue vérifient la propriété $\mathcal{L}_1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'on ne peut pas trouver de réel $k \in \mathbb{R}^{+^*}$ tel que la fonction racine carrée vérifie la propriété $\mathcal{L}_k$ sur $[0,1]$.
   (c) Montrer que s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f$ vérifie la propriété $\mathcal{L}_k$ sur $I$, alors $f$ est continue sur $I$.
3. Soient un réel $k \in ]0,1[$, $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété $\mathcal{L}_k$ sur $\mathbb{R}$ et $(u_n)$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

   (a) Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1}-u_n| \leqslant k^n|u_1-u_0|.$$

   (b) En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers une limite notée $\ell$ et vérifiant $f(\ell)=\ell$.

4. Soient un réel $k \in ]0,1[$, $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété $\mathcal{L}_k$ sur $\mathbb{R}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à densité définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad T_{n+1} = f(T_n).$$

   Soit $\ell$ la limite trouvée à la question 3.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = [k^n|T_0-\ell| \geqslant \varepsilon]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

   (b) Montrer que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T_n-\ell| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_{T_n}$ la fonction de répartition de la variable $T_n$.
   Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}-\{\ell\}, \qquad \lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = F(x)$$

   où $F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ dont on reconnaitra la loi.

---

**Solution :**

1. Question de cours.
   Egalité et inégalité des accroissements finis. Voir le programme officiel, page 11.

2. (a) Soit $f : x \mapsto \sin(x)$ la fonction sinus. Soit $y \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Si $x \in ]-\infty, y[$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $]x, y[$, on trouve

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \max_{t\in[x,y]} |\cos(t)|\, |x - y| \leqslant |x - y|.$$

L'inégalité se démontre de même si $x \in ]y, +\infty[$.
Si $x = y$, la formule reste vérifiée.
On conclut que la fonction sin vérifie la propriété $\mathcal{L}_1$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $f : x \mapsto |x|$ la fonction valeur absolue. Alors, par un corollaire de l'inégalité triangulaire,

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leqslant |x - y|.$$

Ainsi, la fonction $f$ vérifie la propriété $\mathcal{L}_1$ sur $\mathbb{R}$.
*Remarque :* dans le programme officiel, apparait la mention "inégalité triangulaire" sans plus de précision. La seconde forme de l'inégalité triangulaire pourra donc être ici redémontrée.

(b) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ la fonction racine carrée. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f$ vérifie la propriété $\mathcal{L}_k$ sur $[0, 1]$. Alors,

$$\forall\,(x, y) \in [0, 1]^2, \qquad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant k|x - y|.$$

Comme $k > 0$, il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $0 < \dfrac{1}{n^2k^2} \leqslant \dfrac{1}{nk^2} \leqslant 1$. On pose $x = \dfrac{1}{n^2k^2}$ et $y = 0$.
Il suit que

$$|\sqrt{x}| = \frac{1}{nk} \leqslant k|x| = \frac{1}{n^2k}$$

ce qui est une contradiction, du fait que $k > 0$ et $n \geqslant 2$.

(c) Soit $f$ une fonction vérifiant la propriété $\mathcal{L}_k$ sur $I$, avec $k \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $a \in I$ un réel fixé. Alors,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|.$$

En faisant tendre $x$ vers $a$ et en utilisant la continuité de la valeur absolue et le théorème d'encadrement, on conclut que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Ceci prouve que $f$ est continue au point $a$.

3. (a) On prouve la propriété par récurrence sur $n$.

(b) Comme $k \in ]0, 1[$, la série géométrique $\sum k^n$ converge. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge absolument, donc converge. On montre classiquement que la convergence de la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ implique la convergence de la suite $(u_n)$ vers une limite finie. On note $\ell$ cette limite. On passe à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Par continuité de la fonction $f$ (question 2(d)), on obtient $\ell = f(\ell)$.

4. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $F_{T_0}$ la fonction de répartition de la variable $T_0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(k^n|T_0 - \ell| \geqslant \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(-\varepsilon \leqslant k^n(T_0 - \ell) \leqslant \varepsilon) = 1 - F_{T_0}\left(\ell + \frac{\varepsilon}{k^n}\right) + F_{T_0}\left(\ell - \frac{\varepsilon}{k^n}\right).$$

Comme $k \in ]0, 1[$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\varepsilon}{k^n}\right) = +\infty.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} F_{T_0}\left(\ell + \frac{\varepsilon}{k^n}\right) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} F_{T_0}\left(\ell - \frac{\varepsilon}{k^n}\right) = 0.$$

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1 - 1 + 0 = 0.$$

(b) Pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|T_{n+1}(\omega) - \ell| = |f(T_n)(\omega) - f(\ell)| \leqslant k|T_n(\omega) - \ell|.$$

Par récurrence sur $n$, on montre que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |T_n(\omega) - \ell| \leqslant k^n|T_0(\omega) - \ell|.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad [|T_n - \ell| \geqslant \varepsilon] \subset [k^n |T_0 - \ell|] \geqslant \varepsilon] = A_n.$$

Par croissance de la probabilité, $0 \leqslant \mathbb{P}(|T_n - \ell| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(A_n)$.
Par théorème d'encadrement,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|T_n - \ell| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

**Remarque** : on en déduit au passage que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|T_n - \ell| > \varepsilon) = 0$$

du fait que $[|T_n - \ell| > \varepsilon] \subset [|T_n - \ell| \geqslant \varepsilon]$.
On dit que la suite de variables $(T_n)$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\ell$, mais cette notion n'est pas au programme de la BL.

(c) • Si $x > \ell$, on pose $\varepsilon = x - \ell > 0$ de sorte que $x = \ell + \varepsilon$.
Alors,

$$1 \geqslant F_{T_n}(x) = \mathbb{P}(T_n \leqslant x) = \mathbb{P}(T_n \leqslant \ell + \varepsilon) = \mathbb{P}(T_n - \ell \leqslant \varepsilon) \geqslant \mathbb{P}(|T_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Par passage au complémentaire dans la question précédente (cf. remarque), on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|T_n - \ell| \leqslant \varepsilon) = 1.$$

Par théorème d'encadrement, on conclut que

$$\lim_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = 1.$$

• Si $x < \ell$, on pose $\varepsilon = \ell - x > 0$ de sorte que $x = \ell - \varepsilon$.
Alors,

$$0 \leqslant F_{T_n}(x) = \mathbb{P}(T_n \leqslant x) = \mathbb{P}(T_n - \ell \leqslant -\varepsilon) = \mathbb{P}(\ell - T_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|\ell - T_n| \geqslant \varepsilon)$$

Par théorème d'encadrement et en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$\lim_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = 0.$$

On conclut que

$$\lim_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \ell \\ 0 & \text{si } x < \ell \end{cases}$$

On reconnait en $F$ la fonction de répartition de la variable certaine égale à $\ell$.
On dit que la suite de variables $(T_n)$ converge en loi vers la variable certaine égale à $\ell$, mais cette notion n'est pas au programme de la BL.

# Exercice sans préparation BL2

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On dit que deux matrices $M_1$ et $M_2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont <u>semblables</u> s'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M_1 = QM_2Q^{-1}.$$

On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Les matrices $A$ et $B$ sont-elles semblables ?
2. (a) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$ ?
   (b) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ soit semblable à $B$ ?

---

**Solution :**
*La notion de "matrices semblables" n'apparait pas au programme de la voie BL.*

1. Raisonnons par l'absurde et supposons que $A$ et $B$ sont semblables. Ainsi, il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$. Alors, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{C}$,

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\},\ AX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\},\ QBQ^{-1}X = \lambda X$$

   Donc,

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\},\ BQ^{-1}X = \lambda Q^{-1}X \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, Y = Q^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\},\ BY = \lambda Y$$

   On conclut que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda \in \mathrm{Sp}(B).$$

   Or, les matrices $A$ et $B$ étant triangulaires supérieures, leur spectre se lit sur la diagonale. Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\} \neq \mathrm{Sp}(B) = \{0\}$. On conclut que $A$ et $B$ ne sont pas semblables.
   **Variante :** on pouvait aussi remarquer que $A$ est diagonalisable (puisque déjà diagonale), alors que $B$ ne l'est pas. En effet, comme $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$, si $B$ était diagonalisable, ce serait la matrice nulle. Les matrices $A$ et $B$ ne sont donc pas semblables.
2. (a) Comme la matrice $A$ est diagonale, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $A^k$ est aussi diagonale. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)$, qui est une combinaison linéaire de matrices diagonales, est diagonale. Comme $B$ n'est pas diagonale, il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.
   (b) Comme mentionné ci-avant, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)$ est une matrice diagonale.
   Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ et $B$ sont semblables : il existe alors une matrice $R$ inversible telle que $B = RP(A)R^{-1}$. Ainsi, la matrice $B$ est diagonalisable, ce qui est une contradiction. On conclut qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ et $B$ sont semblables.

**Question supplémentaire éventuelle.**

Recommencer l'exercice avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

C'est le même principe que ce qui précède et, par suite, les mêmes réponses.
En effet, $A$ est diagonalisable puisque $A$ a $n$ valeurs propres deux à deux distinctes alors que $B$ ne l'est pas puisque $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ et $B \neq O_n$.
On note que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)$ reste diagonalisable. En effet, s'il existe une matrice inversible $Q$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = QDQ^{-1}$, alors $P(A) = QP(D)Q^{-1}$, où $P(D) = \mathrm{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$ est diagonale.
Ainsi, il n'existe aucun polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ et $B$ soient identiques ou semblables.

# SUJET BL3

## Exercice principal BL3

On considère une suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$P_0(X)=1 \qquad P_1(X)=X \qquad \text{et} \qquad \forall\, k\geqslant 2,\quad P_k(X)=\frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. Question de cours : rappeler la définition d'une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\mathcal{B}=(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$,

$$P_n'(X)=P_{n-1}(X-1).$$

   (b) Montrer que pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$ et tout entier $n\geqslant k$,

$$P_n^{(k)}(X)=P_{n-k}(X-k).$$

   On rappelle que $P_n^{(k)}$ désigne la dérivée $k$-ième du polynôme $P_n$.

   (c) Soit $Q\in\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $Q(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}Q^{(k)}(k)P_k(X)$.
4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $\varphi$ l'application telle que, pour tout $Q\in\mathbb{R}_n[X]$,

$$\varphi(Q)(X)=Q(X)-Q'(X+1).$$

   (a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$. L'endomorphisme $\varphi$ est-il diagonalisable ?

   (b) Montrer que l'endomorphisme $\varphi$ est bijectif et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, écrire la décomposition de $\varphi^{-1}(P_k)$ dans la base $\mathcal{B}$.
5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On cherche à déterminer tous les polynômes $Q\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$Q(X)-Q'(X+1)=\frac{X^n}{n!} \qquad (\star)$$

   (a) Montrer que si $Q$ est un polynôme solution du problème, son degré vaut $n$.

   (b) Montrer que le problème admet un unique polynôme solution $Q$ dont on écrira la décomposition dans la base $\mathcal{B}$.

---

**Solution :**

1. Définition d'une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   Voir le programme officiel page 14.
2. Chaque polynôme $P_k$ est de degré $k$. En tant que famille de polynômes à degré échelonné, $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme cette propriété n'apparait pas dans le programme officiel, le candidat pourra faire un test de liberté. Comme cette famille contient (n+1) polynômes, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) On note que $P_1'(X)=1=P_0(X-1)$. Pour tout $n\geqslant 2$, $P_n'(X)=\dfrac{\left((X-n)^{n-1}+(n-1)X(X-n)^{n-2}\right)}{n!}=\dfrac{(X-n)^{n-2}(nX-n)}{n!}=\dfrac{(X-1)(X-1-(n-1))^{n-2}}{(n-1)!}=P_{n-1}(X-1)$.

(b) On procède par récurrence sur $k$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\wp(k)$ : " pour tout entier $n \geqslant k$, $P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X-k)$." La propriété $\wp(1)$ est vraie d'après la question 3(a). Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $n \geqslant k+1$, $P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X-k)$. En dérivant et en utilisant 2(a), on obtient $P_n^{(k+1)}(X) = P'_{n-k}(X-k) = P_{n-k-1}(X-k-1)$, ce qui prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

(c) Par la question 2, pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ uniques tels que $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i P_i$.

Soit $(i,k) \in \mathbb{N}^2$. On note que si $i > k$, $P_i^{(k)}(k) = P_{i-k}(0) = 0$, si $i = k$, $P_k^{(k)}(k) = P_0(0) = 1$ et si $i < k$, $P_i^{(k)} = 0$ car $P_i$ est de degré $i$. Ainsi, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $Q^{(k)}(k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i P_i^{(k)}(k) = a_k$. On en déduit que $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k) P_k$.

4. (a) • L'application $\varphi$ est linéaire par linéarité de la dérivation. De plus, pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q'(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$, d'où $\varphi(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Comme $\varphi(P_0) = P_0$ et comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(P_k)(X) = P_k(X) - P'_k(X+1) = P_k(X) - P_{k-1}(X)$, la matrice représentative de $\varphi$ dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• La matrice $M$ étant triangulaire supérieure, on lit directement que $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1\}$. Comme $\varphi$ n'est pas l'application identité ($M$ n'est pas la matrice identité car $n \geqslant 1$), l'endomorphisme n'est pas diagonalisable.

(b) Comme $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$, $M$ est inversible, donc $\varphi$ est bijectif. On écrit $M = I_{n+1} - N$, où $N \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients au-dessus de la diagonale tous égaux à 1. La matrice $N$ est nilpotente d'ordre $n+1$. Ainsi,

$$(I_{n+1} - N)(I_{n+1} + N + N^2 + \cdots + N^n) = I_{n+1} - N^{n+1} = I_{n+1}.$$

Il suit que $M^{-1} = I_{n+1} + N + \cdots + N^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $M^{-1}$ est la matrice représentative de $\varphi^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$, on lit que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi^{-1}(P_k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} P_j$.

5. (a) On remarque tout d'abord que le polynôme nul n'est pas solution du problème. Posons alors $d = \deg(Q) \in \mathbb{N}$. Comme $\deg\left(Q'(X+1)\right) < d$, alors $\deg\left(Q(X) - Q'(X+1)\right) = d$. Comme $\deg\left(\dfrac{X^n}{n!}\right) = n$, l'égalité des degrés dans $(\star)$ donne $d = n$.

(b) • On note que $Q$ est solution du problème si et seulement si $\varphi(Q) = \dfrac{X^n}{n!}$. Comme $Q$ et $\dfrac{X^n}{n!}$ sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme $\varphi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\varphi(Q) = \frac{X^n}{n!} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \varphi^{-1}\left(\frac{X^n}{n!}\right).$$

Le problème posé admet donc une seule et unique solution.

• Posons $T(X) = X^n$. Par la question 3(c), $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} T^{(k)}(k) P_k$.

Or, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $T^{(k)}(X) = \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$.

Ainsi, par linéarité de $\varphi^{-1}$,

$$Q = \frac{1}{n!}\varphi^{-1}(T) = \frac{1}{n!}\varphi^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} T^{(k)}(k) P_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^{n-k}}{(n-k)!}\varphi^{-1}(P_k)$$

En utilisant le résultat de la question 4(b) et par permutation de deux sommes finies, on obtient

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{k^{n-k}}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{k} P_i \right) = \sum_{i=0}^{n} \left( \sum_{k=i}^{n} \frac{k^{n-k}}{(n-k)!} \right) P_i.$$

## Exercice sans préparation BL3

Soit $X$ une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit $f$ une densité de $X$.
Pour tout réel $x$ tel que l'intégrale est définie, on pose

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant xt) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $G$.
2. Montrer que $G$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

---

**Solution :**

1. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Ainsi, $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.
   Ainsi,
   $$G(x) = \int_{0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant xt) f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} F_X(xt) f(t)\, \mathrm{d}t$$
   en notant $F_X$ la fonction de répartition de la variable $X$.
   Pour tout réel $x$, la fonction $t \mapsto F_X(xt)f(t)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $\lim\limits_{t \to 0^+} F_X(xt)f(t) = 0$, l'intégrale est faussement impropre en 0.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,
   $$0 \leqslant F_X(xt) f(t) \leqslant f(t)$$
   Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$, on conclut que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant xt) f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.
   Ainsi, le domaine de définition de $G$ est $\mathbb{R}$.
2. • Si $x < 0$,
   $$G(x) = \int_{0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant xt) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t.$$
   Or, pour $x < 0$ et $t \geqslant 0$, $xt \leqslant 0$, donc $\mathbb{P}(X \leqslant xt) = 0$. Ainsi, $G(x) = 0$.
   • Si $x \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant xt) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda xt}$. Ainsi,
   $$G(x) = \int_{0}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda xt}) dt = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt - \int_{0}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x+1)t}\, \mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x+1}.$$
   On conclut que
   $$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
   • $G$ admet pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.
   • On note que la fonction $G$ est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$, sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que
   $$\lim_{x \to 0^-} G(x) = G(0) = 0 = \lim_{x \to 0^+} G(x).$$
   La fonction $G$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.
   • La fonction $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec
   $$\forall\, x < 0, \quad G'(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, x > 0, \quad G'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$
   • On remarque que $G$ est croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $G$ est continue en 0, $G$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
   On conclut que $G$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité $Y$ dont une densité est donnée par
   $$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

# Sujet BL4

## Exercice principal BL4

Soient $n \geqslant 2$ un entier naturel et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$, à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note $I_n$ la matrice identité d'ordre $n$ et $O_n$ la matrice nulle d'ordre $n$.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$.

1. Question de cours : rappeler la définition d'une matrice inversible.
2. Une matrice nilpotente peut-elle être inversible ? Justifier.
3. On suppose dans cette question seulement $n = 2$ et on pose

$$d : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc. \end{array} \right.$$

   (a) L'application $d$ est-elle linéaire ? Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
   (b) Montrer que pour tout couple $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$, $d(AB) = d(A)d(B)$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Trouver deux constantes $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ telles que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.
   (d) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A$ est inversible si et seulement si $d(A) \neq 0$.
4. On revient au cas d'un entier $n \geqslant 2$ quelconque et l'on considère $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application non constante telle que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \qquad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

   On admet la propriété suivante. Si $M$ et $N$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant le même rang $r$, il existe deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $P$ et $Q$ telles que

$$M = PNQ.$$

   (a) Montrer que $\varphi(I_n) = 1$ et que $\varphi(O_n) = 0$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Calculer $\varphi(A)$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer

$$\exists (\alpha, N_r) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tels que } N_r \text{ soit nilpotente de rang } r \text{ et } \varphi(A) = \alpha\varphi(N_r).$$

   (d) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A \text{ est inversible si et seulement si } \varphi(A) \neq 0.$$

---

**Solution :**

1. Pour la définition d'une matrice inversible, voir programme officiel page 9.
2. Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$. On raisonne par l'absurde en supposant que la matrice $A$ est inversible. Alors en multipliant l'égalité précédente $A^p = O_n$ par $A^{-1}$ $p$ fois, on obtient $I_n = O_n$, ce qui est absurde. On conclut qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.
3. (a) • L'application $d$ n'est pas linéaire. En effet, $= d(2I_2) = 4 \neq 2 = 2d(I_2)$.
   • Comme $d$ n'est pas linéaire, on ne peut pas considérer son noyau. Pour prouver que $d$ n'est pas injective, il suffit de remarquer que $d\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   • L'application $d$ est surjective. En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\alpha = d(A)$.

(b) Posons $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors, $AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$.
Après calculs,

$$d(A)d(B) = (a_1a_4 - a_2a_3)(b_1b_4 - b_2b_3) = a_1a_4b_1b_4 + a_2a_3b_2b_3 - a_2a_3b_1b_4 - b_2b_3a_1a_4 = d(AB).$$

(c) Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$.
En écrivant $A^2 = \alpha A + \beta I_2$, on trouve un syst`eme de quatre équations dont les inconnues sont $\alpha$ et $\beta$ :

$$\begin{cases} a^2 + bc = \alpha a + \beta \\ (a+d)\,b = \alpha b \\ (a+d)\,c = \alpha c \\ bc + d^2 = \alpha d + \beta \end{cases}$$

En pensant à traiter à part le cas $b = c = 0$, on trouve que la solution de ce système est $\alpha = a+d = \mathrm{tr}(A)$ et $\beta = bc - ad = -d(A)$.
*Remarque :* on ne demandait pas ici de prouver l'unicité de la solution, mais seulement de trouver des valeurs de $\alpha$ et $\beta$ qui conviennent.

(d) • Si $d(A) \neq 0$, alors $A^2 - \alpha A = \beta I_2$ avec $\beta$ non nul. Donc, $A\left(\dfrac{1}{\beta}(A - \alpha I_2)\right) = I_2$, ce qui prouve que $A$ est inversible avec $A^{-1} = \dfrac{1}{\beta}(A - \alpha I_2)$.
• Réciproquement, supposons $A$ inversible. Raisonnons par l'absurde et supposons que $d(A) = 0$. Alors, on déduit de la question précédente que $A^2 = \alpha A$. En multipliant par $A^{-1}$, on trouve $A = \alpha I_2$. Comme $d(A) = 0$, on doit avoir $\alpha = 0$. Mais alors $A = O_2$ et n'est pas inversible : contradiction. Ainsi, $d(A) \neq 0$.

4. (a) • L'application $\varphi$ n'est pas une application constante. Ce n'est donc pas l'application identiquement nulle.
Il existe donc une matrice $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(A_0) \neq 0$.
Par propriété de l'application $\varphi$,

$$\varphi(A_0) = \varphi(A_0 I_n) = \varphi(A_0)\varphi(I_n).$$

Comme $\varphi(A_0) \neq 0$, on conclut que $\varphi(I_n) = 1$.
• Si $\varphi(O_n) \neq 0$, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(O_n) = \varphi(AO_n) = \varphi(A)\varphi(O_n) \qquad \text{d'où} \qquad 1 = \varphi(A).$$

L'application $\varphi$ serait l'application constante égale à 1. Ceci est exclu par hypothèse.
Donc $\varphi(O_n) = 0$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$. Alors, par propriété de l'application $\varphi$,

$$0 = \varphi(O_n) = \varphi(A^p) = \varphi(A)^p.$$

D'où $\varphi(A) = 0$.

(c) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\forall\, k \in [\![1, n-r]\!], \qquad u(e_k) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in [\![n-r+1, n]\!], \qquad u(e_k) = e_{k-1}.$$

Soit $N_r$ la matrice représentative de $u$ dans la base $\mathcal{B}$. La matrice $N_r$ est de rang $r$ car ses $n-r$ premières colonnes sont nulles et les $r$ suivantes forment une famille libre.
De plus, on peut remarquer que $N_r = O_n$, ce qui prouve que $N_r$ est nilpotente.
Comme $A$ et $N_r$ ont le même rang, la propriété donnée dans l'énoncé dit qu'il existe deux matrices $P$ et $Q$ inversibles telles que

$$A = PN_rQ \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(A) = \varphi(P)\varphi(N_r)\varphi(Q).$$

On pose alors $\alpha = \varphi(P)\varphi(Q) \in \mathbb{R}$.

(d) • Si $A$ est une matrice inversible,

$$1 = \varphi(I_n) = \varphi(AA^{-1}) = \varphi(A)\varphi(A^{-1}).$$

Ainsi, $\varphi(A) \neq 0$ et l'on note que $\varphi(A^{-1}) = (\varphi(A))^{-1}$.
• Supposons à présent que $A$ ne soit pas inversible. On a donc $r = \mathrm{rg}(A) \leqslant n-1$. Si $r = 0$, alors $A = O_n$ et par suite, $\varphi(A) = \varphi(O_n) = 0$ comme vu en 3(a). Si $r \neq 0$, alors $r \in [\![1, n-1]\!]$. Par la question précédente, il existe un réel $\alpha$ et une matrice $N_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente et de rang $r$ tels que $\varphi(A) = \alpha\varphi(N_r)$. Comme $N_r$ est nilpotente, la question 3(b) montre que $\varphi(N_r) = 0$, par suite, $\varphi(A) = 0$.
Par contraposée, si $\varphi(A) \neq 0$, alors $A$ est inversible.

## Exercice sans préparation BL4

Soit $x$ un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$.
L'entier $\lfloor x \rfloor$ est appelé la partie entière de $x$.
Soit $X$ une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$.
On définit deux variables $D_1$ et $D_2$ par :

$$D_1 = \lfloor 10X \rfloor \qquad \text{et} \qquad D_2 = \lfloor 100X - 10D_1 \rfloor.$$

On admet que $D_1$ et $D_2$ ainsi définies sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires $D_1$ et $D_2$.
2. Les variables $D_1$ et $D_2$ sont-elles indépendantes ?

---

**Solution :**
On pourra remarquer que $D_1$ représente la première décimale de $X$ et $D_2$ sa deuxième décimale.

1. • $X(\Omega) = ]0,1[$, donc $(10X)(\Omega) = ]0,10[$, d'où $D_1(\Omega) = [\![0,9]\!]$.
   • Comme $D_1 \leqslant 10X < D_1 + 1$, alors $10D_1 \leqslant 100X < 10D_1 + 10$, d'où $0 \leqslant 100X - 10D_1 < 10$.
   Ainsi, $D_2(\Omega) = [\![0,9]\!]$.
   • Notons $f_X$ une densité de $X$. Pour tout $k \in [\![0,9]\!]$,

   $$\mathbb{P}(D_1 = k) = \mathbb{P}(k \leqslant 10X < k+1) = \mathbb{P}\left(\frac{k}{10} \leqslant X < \frac{k+1}{10}\right) = \int_{k/10}^{(k+1)/10} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}.$$

   • Pour tout $k \in [\![0,9]\!]$, on trouve, en utilisant le système complet d'événements $([D_1 = j])_{j \in [\![0,9]\!]}$,

   $$[D_2 = k] = [k \leqslant 100X - 10D_1 < k+1] = \bigcup_{j=0}^{9} \left([D_1 = j] \cap \left(\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right)\right)$$

   Or, pour tout $(k,j) \in ([\![0,9]\!])^2$,

   $$\left[\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right] \subset \left[\frac{j}{10} \leqslant X < \frac{j+1}{10}\right] = [D_1 = j]$$

   D'où,

   $$\mathbb{P}(D_2 = k) = \sum_{j=0}^{9} \mathbb{P}\left(\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right) = \sum_{j=0}^{9} \frac{1}{100} = \frac{1}{10}.$$

   Ainsi, $D_1$ et $D_2$ suivent la loi uniforme discrète sur $[\![0,9]\!]$.
2. Pour tout $(j,k) \in [\![0,9]\!]^2$,

   $$[D_1 = j \cap D_2 = k] = \left[\frac{j}{10} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{1}{10}\right] \cap \left[\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right]$$

   Comme

   $$\left[\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right] \subset \left[\frac{j}{10} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{1}{10}\right]$$

   il suit que

   $$\mathbb{P}(D_1 = j \cap D_2 = k) = \mathbb{P}\left(\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{100} = \mathbb{P}(D_1 = j)\mathbb{P}(D_2 = k)$$

   Les variables $D_1$ et $D_2$ sont donc indépendantes.