

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques(S)

Juin-Juillet 2022

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de grandes qualités de logique et de présentation. Bien sûr, il y a une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 2 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes de cours, de grosses faiblesses en calcul et quasiment aucune connaissance en informatique.

A contrario, les meilleurs candidats brillaient dans leurs connaissances et la finesse de raisonnement. La moyenne est de 11,02 et l'écart-type est de 3,77.

Le jury aimerait insister sur trois points.

- **L'informatique** : Beaucoup de candidats avaient manifestement délaissé la matière et ne comprenaient rien au programme.
Nous rappelons que presque un sujet sur deux comporte des questions d'informatiques. Ces questions, nous permettent d'évaluer leurs esprits pratiques et de relier les mathématiques à des cas concrets.
- **Les dessins** : Beaucoup de candidats ne savent pas dessiner le graphe d'une fonction ou le dessin d'une projection dans \mathbb{R}^2 ou illustrer un raisonnement.
- **La journée de l'oral** il est très utile d'assister, en temps réel ou en différé, aux diverses présentations de cette journée. Ces présentations détaillent l'organisation et les attendus de chaque oral et elles donnent le point de vue des membres du jury et d'anciens candidats sur les épreuves.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET S1

Exercice principal S1

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes et de même loi et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $U_n = \frac{S_n^4}{n^4}$.

1. Énoncer l'inégalité de Markov
2. Calculer $\mathbb{E}(S_n^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{E}(S_n^4) = 3n^2 - 2n$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mathbb{P}(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$$

5. Montrer que $Z_n = \{\omega \in \Omega, \exists k \geq n, U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\} \in \mathcal{A}$ et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0.$$

6. En déduire qu'il existe $Z \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(Z) = 0$ et

$$\forall \omega \in \Omega \setminus Z, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0.$$

Solution :

1. Cours. Programme ECS1 page 24.
2. Comme $\mathbb{E}(X_k) = 0$, on a $\mathbb{E}(S_n) = 0$. Ainsi $\mathbb{E}(S_n^2) = V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$. (indépendance des variables)

Or, $V(X_k) = 1$, ainsi $\mathbb{E}(S_n^2) = n$

3. On développe S_n^4 . Les termes du type X_i^4 ont une espérance égale à 1, ceux en $X_i^2 X_k^2$ ont une espérance égale à $\mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_k^2) = 1$ par indépendance et tous les autres ont une espérance nulle.

* Il y a n termes du type $\mathbb{E}(X_i^4)$

* Pour une paire d'indices $\{i, k\}$, on peut compter le nombre de termes $X_i^2 X_k^2$ avec i et k fixés, on choisit deux facteurs qui vaudront X_i , les deux autres valant X_k^2 , $\binom{4}{2} = 6$ choix.

* Mais il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ paires d'indices $\{i, k\}$

Au final,

$$\mathbb{E}(S_n^4) = n + 3n(n-1) = 3n^2 - 2n$$

4. C'est une application directe de Markov avec la majoration $3n^2 - 2n \leq 3n^2$.

$$\mathbb{P}\left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \sqrt{n} \mathbb{E}(U_n) \leq \frac{\sqrt{n}(3n^2 - 2n)}{n^4}$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ on a } \mathbb{P}(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

5. On a

$$Z_n = \bigcup_{k \geq n} \left\{ \omega \in \Omega, \quad U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right\} \in \mathcal{A}$$

et donc

$$P(Z_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{3}{k^{\frac{3}{2}}}$$

C'est le reste d'une série convergente, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n) = 0}$

6. On prend

$$Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$$

On a $Z \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{P}(Z) = 0$ avec la question précédente et le théorème de la limite monotone

(pour $K_n = \bigcap_{k=1}^n Z_k$).

Soit ensuite $\omega \notin Z$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n$, on a

$$\left| \frac{S_k(\omega)}{k} \right| = U_n(\omega)^{1/4} \leq \frac{1}{k^{\frac{1}{8}}}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{S_k(\omega)}{k} = 0}$$

Exercice sans préparation S1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

On note $\mathcal{E}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } AMA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

Déterminer la dimension de \mathcal{E}_A .

Solution :

\mathcal{E}_A est bien un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f et g les endomorphismes de \mathbb{R}^n induit par respectivement M et A dans la base canonique et

$M \in \mathcal{E}_A$ ssi $g \circ f \circ g = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}^n, (g \circ f \circ g)(x) = 0$ ssi $\forall y \in \text{Im}(g), f(y) \in \text{Ker}(g)$

On construit une deux bases (e_1, \dots, e_n) et (e'_1, \dots, e'_n) de \mathbb{R}^n telle que (e_1, \dots, e_r) soit une base de $\text{Im}(g)$ et $(e'_1, \dots, e'_{n-r+1})$ une base de $\text{Ker}(g)$

" $\forall y \in \text{Im}(g), f(y) \in \text{Ker}(g)$ " ssi la matrice de f a pour allure : $\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0_{\mathcal{M}_{r,r}} & D \end{array} \right)$,

où $B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$.

Donc \mathcal{E}_A est isomorphe (par un isomorphisme de changement de base) à G ,

où $G = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{\mathcal{M}_{r,r}} & C \end{array} \right), A \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \right\}$.

Cet espace est lui même isomorphe à $\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$.

Il est donc de dimension $(n-r)^2 + 2r(n-r) = n^2 + r^2 - 2nr + 2nr - 2r^2 = n^2 - r^2$.

$$\boxed{\dim(\mathcal{E}_A) = n^2 - r^2.}$$

SUJET S2

Exercice principal S2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

* On dira qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale propre si et seulement si elle est semblable à la matrice $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée à partir des propres coefficients diagonaux de A . Autrement dit, vérifiant :

$$\forall i \in [1, n], d_{i,i} = a_{i,i} \text{ et } \forall (i, j) \in [1, n]^2, \text{ si } i \neq j \text{ alors } d_{i,j} = 0.$$

* On note \mathcal{E}_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

1. Question de cours : propriétés de la trace.
2. On suppose dans cette question seulement que $n \geq 2$. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non diagonale à diagonale propre.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Exprimer la trace de A^2 à l'aide des coefficients $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
 - (b) A quelle condition A est-elle à diagonale propre?
4. (a) Que renvoie la fonction Scilab K suivante, si on rentre x un réel, n un entier naturel non nul et B une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?

```
function K(x,n,B)
  S = 0;
  for i=1:n
    if x==B(i,1) then S = S+1
    end
  K = S;
endfunction
```

- (b) Compléter la fonction Scilab suivante, qui si on lui donne n un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ renvoie 1 si la matrice A est à diagonale propre et 0 sinon. On pourra utiliser la fonction K ainsi que la fonction `rank`.

```
function diagpropre(n,A);
  C = 1;
  I = eye(n,n);
  for i=1:n

  diagpropre=C
endfunction
```

5. \mathcal{E}_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
6. Déterminer le plus grand entier $p \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension p vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$.

Solution :

1. Programme ECS 2 page 5

2. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure se lisent sur sa diagonale. Si ces valeurs sont toutes distinctes, la matrice est diagonalisable et est semblable à une matrice diagonale dont les valeurs sont égales à ses propres coefficients diagonaux. Il suffit de choisir une telle matrice.

Toute matrice triangulaire supérieure non diagonale avec des coefficients diagonaux distincts convient.

3. (a) Si l'on note $A^2 = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

On obtient pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $b_{i,i} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} a_{j,i} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.

Ainsi $\text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.

- (b) Soit A une matrice à diagonale propre, elle est donc semblable à une matrice D diagonale dont les coefficients valent $a_{i,i}$.

Mais alors A^2 est semblable à D^2 , donc $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2)$.

Ainsi $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2$, donc $\sum_{i \neq j} a_{i,j}^2 = 0$.

Comme tous les coefficients sont positifs, ils sont tous nuls.

$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$. Autrement dit A est diagonale.

Réciproquement, si A est diagonale, elle est semblable à elle-même et elle est à diagonale propre.

Une matrice symétrique est à diagonale propre si et seulement si elle est diagonale.

4. (a) K renvoie le nombre de fois où l'élément x apparaît dans la matrice B .

- (b) fonction `diagpropre(n,A)` ;

```

C = 1;
I = eye(n,n);
for i=1:n
    if rank(A-A(i,i)*I) >> n-K(A(i,i),n,A) then C = 0
    end
diagpropre = C

```

Remarque : Cette fonction utilise "rank" qui fait du calcul approché et peut parfois proposer une valeur inférieure au rang réel. On peut poser la question au candidat, mais on n'insiste pas si cela ne lui dit rien.

5. Si $n = 1$, la réponse est oui. ($\mathcal{E}_1 = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$)

Si $n = 2$, il suffit de considérer $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ces deux matrices sont à diagonale propre d'après 3.

Mais $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (une seule valeur propre 0 et $A + B$ n'est pas la matrice nulle), donc encore moins à diagonale propre.

Ainsi \mathcal{E}_2 ne peut pas être un sous-espace vectoriel

Si $n \geq 2$, il suffit de considérer des matrices A' et B' construites avec les coefficients de A et de B sur leurs deux premières lignes et colonnes et complétées avec des 0 pour voir que \mathcal{E}_n n'est pas non plus un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sauf si $n = 1$.

6. L'ensemble \mathcal{D}_n des matrices diagonales est inclus dans \mathcal{E}_n .

Il existe donc un sous-espace vectoriel F de dimension n tel que $F \subset \mathcal{E}_n$.

En notant $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{D}_n = \text{vect}(E_{i,i}, 1 \leq i \leq n)$ et ces vecteurs, issus de la base canonique forment une famille libre.

Et si l'on note $\mathcal{G}_n = \text{vect}((E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j})$, c'est un sous-espace de dimension $n^2 - n$. Mais toute matrice de \mathcal{G}_n a ses coefficients diagonaux nuls, donc toute matrice de $\mathcal{G}_n \cap \mathcal{E}_n$ est semblable à la matrice nulle.

Donc $\mathcal{G}_n \cap \mathcal{E}_n = \{0\}$.

Donc si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans \mathcal{E}_n , $\mathcal{G}_n \cap F = \{0\}$.

Donc $\dim(\mathcal{G}_n) + \dim(F) \leq n^2$, donc $\dim(F) \leq n^2 - (n^2 - n) = n$.

La dimension maximale pour un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans \mathcal{E}_n est n .

Exercice sans préparation S2

Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans \mathbb{N} , on appelle fonction génératrice de Z la fonction

$$G_Z : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(Z = n).$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} , définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

1. Montrer que $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ pour tout réel t pour lequel cette égalité a un sens.
2. Montrer que si $X + Y$ suit une loi binomiale, alors X et Y suivent aussi des lois binomiales (pas nécessairement de même paramètre).

Solution :

1. Soit t un réel appartenant simultanément aux ensembles de définition de G_X , G_Y et G_{X+Y} . Puisque X et Y sont indépendantes, t^X et t^Y le sont aussi par le lemme des coalitions. D'après le théorème du transfert, on a :

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X) \mathbb{E}(t^Y) \boxed{= G_X(t)G_Y(t)}.$$

2. Supposons que Z suive la loi binomiale de paramètres n et p . Puisque Z est finie, t^Z admet une espérance pour tout réel t . D'après le théorème du transfert,

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_{X+Y}(t) = \sum_{k=0}^n t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (tp + 1 - p)^n.$$

La fonction G_{X+Y} est donc polynômiale. Puisque Z est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, X et Y le sont aussi, assurant alors que G_X et G_Y sont des fonctions polynômiales. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = a(tp + 1 - p)^\ell.$$

Puisque $G_X(1) = 1$, $a = 1$.

Or, pour $t \in \mathbb{R}$, et $k \in \llbracket 0, \ell \rrbracket$, $G_X^{(k)}(t) = \frac{\ell!}{(\ell - k)!} p^k (tp + 1 - p)^{\ell - k}$.

On en déduit alors la loi de X en appliquant la formule de Taylor au polynôme G_X (Taylor pour les polynômes n'est pas explicitement au programme, on peut utiliser Taylor-Lagrange ou identifier les DL.)

$$\forall k \in \llbracket 0, \ell \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\ell!}{k!(\ell - k)!} p^k (1 - p)^{\ell - k}.$$

Si $k > \ell$, la même formule donne $\mathbb{P}(X = k) = 0$.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètre ℓ et p . On conclut de même pour Y .

Si $X + Y$ suit une loi binomiale, alors X et Y suivent aussi des lois binomiales.

SUJET S3

Exercice principal S3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, 1]$ et S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x .

On pose $X_n = \frac{S_n}{n}$.

1. Question de cours : inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Montrer que

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - x| \geq \alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On introduit $Y_n = f(X_n)$ et on pose alors $B_n(f)(x) = \mathbb{E}(Y_n)$. On définit ainsi une fonction $B_n(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(f)$ est une fonction polynomiale en x .
- (b) On pose $P_0 : x \mapsto 1$, $P_1 : x \mapsto x$ et $P_2 : x \mapsto x^2$.

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(P_0)$, $B_n(P_1)$ et $B_n(P_2)$.

4. Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq M$.
5. Soit maintenant $\varepsilon > 0$ fixé. On admet le résultat suivant :

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall (x, y) \in [0, 1]^2 \quad |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

- (a) Avec les notations précédentes, montrer que :

$$\left| \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n\alpha^2}$$

et que :

$$\left| \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

- (b) Conclure qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\forall x \in [0, 1] \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Commenter le résultat obtenu et illustrer par un dessin.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS2 2014 p. 22.
2. De manière immédiate : $\mathbb{E}(X_n) = x$ et $V(X_n) = \frac{x(1-x)}{n}$.

Soit $\alpha > 0$ fixé. En vertu de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|X_n - x| \geq \alpha) = \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X_n)}{\alpha^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}$$

Or, pour tout $x \in [0, 1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. On obtient donc finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(|X_n - x| \geq \alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}}$$

3. (a) Par la formule de transfert, pour $x \in [0, 1]$, en revenant à la définition de $B_n(f)$:

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E} \left(f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right) = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Il est alors immédiat que $B_n(f)$ est un polynôme en x comme somme de polynômes.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reprenant la formule précédente dans les cas particuliers respectivement de P_0 , P_1 et P_2 , on remarque que, pour $x \in [0, 1]$:

$$B_n(P_0)(x) = \mathbb{E}(P_0(X_n)) = \mathbb{E}(1) = 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{\forall x \in [0, 1] \quad B_n(P_0)(x) = 1 = P_0(x)}$$

De même :

$$B_n(P_1)(x) = \mathbb{E}(P_1(X_n)) = \mathbb{E}(X_n) \quad \text{soit} \quad \boxed{\forall x \in [0, 1] \quad B_n(P_1)(x) = x = P_1(x)}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} B_n(P_2)(x) &= \mathbb{E}(P_2(X_n)) \\ &= \mathbb{E}(X_n^2) \\ &= V(X_n) + \mathbb{E}(X_n)^2 \text{ par la formule de Koenig-Huygens} \\ &= \frac{x(1-x)}{n} + x^2 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } \boxed{\forall x \in [0, 1] \quad B_n(P_2)(x) = x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2)}.$$

On peut notamment remarquer que cette fois : $B_n(P_2) \neq P_2$.

4. D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est bornée d'où l'existence de $M \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq M$.

5. (a) On montre la première inégalité demandée. Par inégalité triangulaire, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $x \in [0, 1]$:

$$\left| f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right| \leq \left| f \left(\frac{k}{n} \right) \right| + |f(x)| \leq M + M = 2M$$

par la question précédente. Alors :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ |\frac{k}{n} - x| > \alpha}} \left(f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right) \mathbb{P}(X_n = k/n) \right| &\leq \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ |\frac{k}{n} - x| > \alpha}} \left| f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right| \mathbb{P}(X_n = k/n) \\ &\leq 2M \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ |\frac{k}{n} - x| > \alpha}} \mathbb{P}(X_n = k/n) \\ &\leq 2M \mathbb{P}(|X_n - x| > \alpha) \\ &\leq 2M \frac{1}{4n\alpha^2} \text{ par la question 2} \\ &\leq \frac{M}{2n\alpha^2} \end{aligned}$$

En ce qui concerne la deuxième inégalité, on remarque que pour $|k/n - x| \leq \alpha$, alors $\left| f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon$ par la propriété admise. Ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ |\frac{k}{n} - x| \leq \alpha}} \left(f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right) \mathbb{P}(X_n = k/n) \right| &\leq \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ |\frac{k}{n} - x| \leq \alpha}} \left| f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right| \mathbb{P}(X_n = k/n) \\ &\leq \varepsilon \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ |\frac{k}{n} - x| \leq \alpha}} \mathbb{P}(X_n = k/n) \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k/n) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

(b) En utilisant la question précédente, on obtient, pour $x \in [0, 1]$:

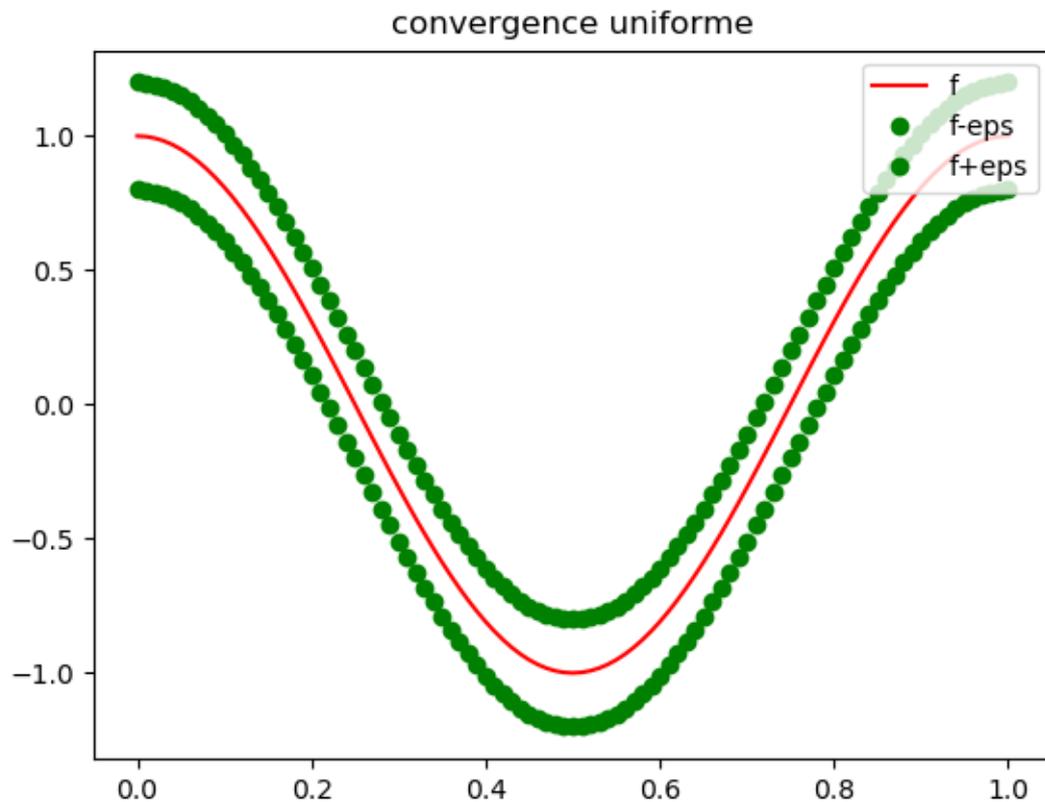
$$\begin{aligned}
 |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(X_n = k/n) \right| \\
 &= \left| \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(X_n = k/n) \right| + \left| \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(X_n = k/n) \right| \\
 &\leq \varepsilon + \frac{M}{2n\alpha^2}
 \end{aligned}$$

Or $\frac{M}{2n\alpha^2} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{M}{2n\alpha^2} \leq \varepsilon$. Alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \geq n_0 \implies \forall x \in [0, 1] \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon}$$

En terme de commentaires, on attend bien sûr que le candidat remarque qu'on approxime ainsi f par une fonction polynomiale et que l'on a même mieux qu'une convergence simple de $B_n(f)$ vers f .

Remarquons d'ailleurs que la convergence simple peut se déduire de la loi faible des grands nombres mais, sauf erreur, en utilisant un résultat hors programme : X_n converge en probabilité vers x par la loi faible des grands nombres donc $Y_n = f(X_n)$ vers $f(x)$ par continuité de f et enfin, $B_n(f)(x) = \mathbb{E}(Y_n)$ converge alors vers $\mathbb{E}(f(x)) = f(x)$ – mais on utilise lors de cette dernière étape des propriétés de la convergence en loi qui ne sont pas au programme des ECS.



Exercice sans préparation S3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^t M M^t M M = I_n$.
2. Pouvez-vous trouver des solutions supplémentaires à cette équation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui ne soient pas des multiples de l'identité?

Solution :

1. Soit M une solution. On en déduit immédiatement que M est inversible d'inverse égal à la fois à ${}^t M M^t M M$ et $M^t M M^t M$.

On en déduit que M^{-1} est symétrique, donc M aussi.

On en déduit que $M^5 = I_5$.

La matrice M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable en vertu du théorème spectral. Il existe donc une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $M = P D P^{-1}$. Ainsi $I_n = M^5 = P D^5 P^{-1}$ donc $D = I_n$ et ainsi $M = I_n$.

Réciproquement la matrice I_n est solution de l'équation.

L'unique solution recherchée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est I_n .

2. Si $n = 1$, c'est impossible, puisque toute matrice est un multiple de I_n .

On cherche des solutions en plus parmi les matrices diagonalisables : on cherche alors des matrices symétriques telles il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible $M = P D P^{-1}$ et $D^5 = I$

Il suffit donc de prendre D composée de racine cinquième de l'unité (avec au moins deux coefficients distincts) et d'avoir ${}^t P = P^{-1}$.

* M est bien symétrique (on a bien ${}^t M = M$), et l'on a bien $M^5 = I_n$

* M n'est pas un multiple de l'identité car M a plusieurs valeurs propres complexes.

Les matrices de

$\{ P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \mid P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ inversibles et vérifiant } {}^t P = P^{-1} \text{ et } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in U_5^n \text{ non tous égaux } \}$

conviennent

SUJET S4

Exercice principal S4

Soient x_0 un réel fixé et f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x - x_0)^2)}$$

1. **Question de cours** : convergence en probabilité.
2. (a) Justifier le fait que f est bien une densité, et calculer la fonction de répartition d'une variable X admettant f comme densité.
On dit qu'une telle variable aléatoire suit une loi de Cauchy de paramètre x_0 .
- (b) Une variable suivant une loi de Cauchy de paramètre x_0 admet-elle une espérance ?
3. Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que le réel m est une médiane de la variable X si et seulement si m vérifie

$$\mathbb{P}(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(X \leq m)$$

Déterminer le ou les réels qui sont des médianes de X dans les cas suivants :

- (a) X suit une loi de Cauchy de paramètre x_0 .
 - (b) X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.
4. Ecrire une fonction Scilab qui, ayant pour argument un paramètre $a > 0$, et renvoyant une médiane d'une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre a .
 5. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à densité mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Cauchy de paramètre x_0 .
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $Y_{n,x}$ la variable aléatoire définie par le nombre d'entiers k de $[[1, n]]$ tels que $[X_k \leq x]$ soit réalisé.
 - (a) Donner la loi de $Y_{n,x}$.
 - (b) Montrer que $\frac{Y_{n,x}}{n}$ converge en probabilité vers un réel que l'on précisera.
 6. On définit \hat{m}_n une médiane empirique de $\{X_1, \dots, X_n\}$ comme étant une variable aléatoire vérifiant
 - (*) Il y a au moins $\frac{n}{2}$ indices i dans $[[1, n]]$ tels que $X_i \leq \hat{m}_n$.
 - (**) Il y a au plus $\frac{n}{2}$ indices i dans $[[1, n]]$ tels que $X_i < \hat{m}_n$.On admet qu'une telle variable aléatoire \hat{m}_n existe.
 - (a) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}(\hat{m}_n < x_0 - \varepsilon) \leq \mathbb{P}(Y_{n,x_0-\varepsilon} \geq \frac{n}{2}) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\hat{m}_n > x_0 + \varepsilon) \leq \mathbb{P}(Y_{n,x_0+\varepsilon} \leq \frac{n}{2})$$
 - (b) Montrer que \hat{m}_n converge en probabilité vers x_0
-

Solution :

1. Cours ECS1 page 24.

2. (a) f est continue sur \mathbb{R} et positive.

De plus $\int_y^z f(x)dx = \frac{\arctan(z - x_0) - \arctan(y - x_0)}{\pi}$ qui tend bien vers 1 quand $y \rightarrow -\infty$ et $z \rightarrow +\infty$

f définit bien une densité de probabilité, une fonction de répartition est donnée par : $F(z) = \frac{\arctan(z - x_0)}{\pi} + \frac{1}{2}$.

(b) Comme $xf(x) \sim \frac{1}{\pi x}$ au voisinage de l'infini, donc l'intégrale donnant $\mathbb{E}(X)$ diverge.

X n'admet pas d'espérance.

3. (a) Comme la variable X est à densité, $\mathbb{P}(X < m) = \mathbb{P}(X \leq m)$.

On résout donc $F(x) = \frac{1}{2}$ ssi $\arctan(x - x_0) = 0$ ssi $x = x_0$.

x_0 est l'unique médiane de X .

(b) Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$ si $x < 0$, puis $\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{2}{3}$ ou 1.

En revanche $\mathbb{P}(X < x) = 0$ si $x \leq 0$, puis $\mathbb{P}(X < x) = \frac{2}{3}$ pour $x \in]0, 1[$.

Donc l'unique médiane de X est $m = 0$.

4. `function x = mediane(a)`

`P=exp(-a);`

`S=P`

`k = 0;`

`while S<1/2`

`k = k+1;`

`P=P*a/k`

`S = S+P;`

`end;`

`x = k;`

`endfunction`

5. (a) Comme les événements $[X_k \leq x]$ sont indépendants et ont chacun une probabilité $F(x)$, on a un schéma de loi binomiale.

$Y_{n,x}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $F(x)$.

(b) Donc d'après la loi des grands nombres, comme $Y_{n,x}$ est une somme de variables de Bernoulli identiques et indépendantes :

$\frac{Y_{n,x}}{n}$ converge en probabilité vers $F(x)$.

6. (a) Soit $\varepsilon > 0$:

Si $\hat{m}_n < x_0 - \varepsilon$, alors il y a au moins $\frac{n}{2}$ indices i de $[[1, n]]$ tel que l'on ait $X_i \leq \hat{m}_n < x_0 - \varepsilon$.

Ainsi, il y a au moins $\frac{n}{2}$ indices i de $[[1, n]]$ tel que l'on ait $X_i \leq x_0 - \varepsilon$.

Ainsi $Y_{n,x_0-\varepsilon} \geq \frac{n}{2}$.

On a une inclusion d'événements et donc une inégalité au niveau des probabilités.

$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(\hat{m}_n < x_0 - \varepsilon) \leq \mathbb{P}(Y_{n,x_0-\varepsilon} \geq \frac{n}{2})$.

De même Si $\hat{m}_n > x_0 + \varepsilon$, alors il y a au moins $\frac{n}{2}$ indices i de $[[1, n]]$ tel que l'on ait $X_i < \hat{m}_n$.

Ainsi, il y a au moins $\frac{n}{2}$ indices i de $[[1, n]]$ tel que l'on ait $X_i \leq x_0 + \varepsilon$.

Ainsi $Y_{n,x_0+\varepsilon} \leq \frac{n}{2}$.

On a une inclusion d'événements et donc une inégalité au niveau des probabilités.

$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(\hat{m}_n > x_0 + \varepsilon) \leq \mathbb{P}(Y_{n,x_0+\varepsilon} \leq \frac{n}{2})$.

(b) Soit $\varepsilon > 0, \mathbb{P}(|\hat{m}_n - x_0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\hat{m}_n > x_0 + \varepsilon) + \mathbb{P}(\hat{m}_n < x_0 - \varepsilon)$.

Or, $\mathbb{P}(\hat{m}_n < x_0 - \varepsilon) \leq \mathbb{P}(Y_{n,x_0-\varepsilon} \geq \frac{n}{2}) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_{n,x_0-\varepsilon}}{n} - F(x_0 - \varepsilon) \geq \frac{1}{2} - F(x_0 - \varepsilon)\right)$.

Or, d'une part $\frac{Y_{n,x_0-\varepsilon}}{n}$ converge en probabilité vers $F(x_0 - \varepsilon)$ et d'autre part comme F est strictement croissante et $F(x_0) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - F(x_0 - \varepsilon) > 0$.

Par définition de la convergence en probabilité : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{Y_{n,x_0-\varepsilon}}{n} - F(x_0 - \varepsilon) \geq \frac{1}{2} - F(x_0 - \varepsilon) \right) = 0$.

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\hat{m}_n < x_0 - \varepsilon) = 0$.

On montrerait de même que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\hat{m}_n > x_0 + \varepsilon) = 0$ et finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\hat{m}_n - x_0| > \varepsilon) = 0$.

\hat{m}_n converge en probabilité vers x_0 .

Exercice sans préparation S4

Soient a, b deux réels vérifiant $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient f_1, \dots, f_n des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$a_{i,j} = \int_a^b f_i(t)f_j(t)dt, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Montrer que les valeurs propres de A sont toutes réelles positives. Sous quelle condition sont-elles toutes strictement positives ?

Solution :

La matrice A est symétrique. Il en résulte que ses valeurs propres sont toutes réelles. Soient λ une valeur propre et $V = {}^t(v_1, \dots, v_n)$ un vecteur propre associé non nul. On a

$$\lambda \|V\|^2 = {}^t V A V = \sum_{i,j=1}^n v_i a_{i,j} v_j = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n v_i f_i(t) \right)^2 dt \geq 0.$$

Il en résulte que $\lambda \geq 0$.

Si 0 est une valeur propre alors il existe $V = {}^t(v_1, \dots, v_n)$ non nul tel que

$${}^t V A V = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n v_i f_i(t) \right)^2 dt = 0$$

Ainsi la fonction $t \mapsto \sum_{i=1}^n v_i f_i(t)^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle.

Donc il existe v_1, \dots, v_n non tous nuls tels que pour tout $t \in [a, b]$ $\sum_{k=1}^n v_k f_k = 0$, autrement dit, la famille de fonctions (f_1, \dots, f_n) est liée.

Réciproquement si la famille est liée, on construit un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

Les valeurs propres de A sont toutes strictement positives ssi f_1, \dots, f_n forment une famille libre dans $\mathcal{C}^0([a, b])$

SUJET S5

Exercice principal S5

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) suivant toutes la loi normale centrée réduite.

On pose, pour tout entier non nul n et tout $\omega \in \Omega$:

$$M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On admet qu'on définit ainsi une variable aléatoire M_n sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Question de cours : définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires. Exemple.
2. Etudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n \geq 1}$.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose : $G(t) = P([X_1 \geq t])$. Etablir que pour tout entier naturel non nul n il existe un unique réel b_n tel que $G(b_n) = \frac{1}{n}$.
4. (a) Etablir, pour tout réel $x > 0$, l'égalité :

$$G(x) = c \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - c \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} dt.$$

pour une certaine constante c (indépendante de x) que l'on précisera.

- (b) En déduire l'équivalent :

$$G(x) \sim c \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

- (c) Proposer un équivalent simple de b_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

5. Etudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(b_n(M_n - b_n))_{n \geq 1}$.

Solution :

1. Programme ECS2 page 22.
2. Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Pour tout réel t on a :

$$F_{M_n}(t) = P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq t]\right) = (\Phi(t))^n$$

par indépendance des v.a. X_1, \dots, X_n .

De l'encadrement $0 < \Phi(t) < 1$ il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{M_n}(t) = 0$$

La fonction nulle n'étant pas une fonction de répartition il en résulte que :

La suite de variables aléatoires $(M_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas en loi.

3. La fonction $G = 1 - \Phi$ réalise une bijection strictement décroissante de \mathbb{R} vers $]0, 1[$. Comme $\frac{1}{n} \in]0, 1[$

Il existe un unique b_n vérifiant $G(b_n) = \frac{1}{n}$.

4. (a) On a, pour tout réel x :

$$G(x) = c \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Pour $x > 0$ en écrivant

$$G(x) = c \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} (te^{-\frac{t^2}{2}}) dt$$

une intégration par parties donne l'égalité :

$$G(x) = c \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - c \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} dt.$$

(b) On remarque que

$$c \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} dt \leq c \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{x^2} dt = \frac{1}{x^2} G(x)$$

Il en résulte que, au voisinage de $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} dt = o(G(x))$$

De l'égalité du 4a) on obtient :

$$c \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = G(x) + o(G(x))$$

d'où l'équivalent :

$$G(x) \underset{+\infty}{\sim} c \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$$

(c) Puisque la fonction G tend vers 0 en $+\infty$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ et ainsi :

$$G(b_n) = \frac{1}{n} \sim c \frac{e^{-\frac{b_n^2}{2}}}{b_n}$$

Il existe donc une suite $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ de limite nulle telle que :

$$c \frac{e^{-\frac{b_n^2}{2}}}{b_n} = \frac{1}{n} (1 + \epsilon_n)$$

En passant au logarithme on a :

$$\underbrace{\ln(c) - \frac{b_n^2}{2} - \ln(b_n)}_{\sim -\frac{b_n^2}{2} \text{ car } \ln(t) = o(t^2)} = \underbrace{-\ln(n) + \ln(1 + \epsilon_n)}_{\sim -\ln(n)}$$

Ainsi :

$$\frac{b_n^2}{2} \sim \ln(n)$$

et il en résulte que :

$$b_n \sim \sqrt{2 \ln(n)}$$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et quelconque. On a :

$$P([b_n(M_n - b_n) \leq t]) = P([M_n \leq b_n + \frac{t}{b_n}]) = \left(\Phi(b_n + \frac{t}{b_n})\right)^n = \left(1 - G(b_n + \frac{t}{b_n})\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - G\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)\right)\right)$$

Or :

$$G\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right) \sim c\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)^2\right)$$

et

$$c\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)^2\right) = c\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{b_n^2}{2}\right) \exp(-t) \exp\left(-\frac{t^2}{b_n^2}\right)$$

d'où

$$G\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right) \sim \underbrace{cb_n^{-1} \exp\left(-\frac{b_n^2}{2}\right)}_{\sim \frac{1}{n}} \exp(-t)$$

Finalement :

$$G\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right) \sim \frac{e^{-t}}{n}$$

et il s'ensuit que :

$$n \ln\left(1 - G\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)\right) \sim -e^{-t}$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([b_n(M_n - b_n) \leq t]) = \exp(-e^{-t})$$

Le fonction $F : t \mapsto \exp(-e^{-t})$ étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , croissante et de limite nulle en $-\infty$ et de limite égale à 1 en $+\infty$, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y (à densité).

Conclusion :

$$\boxed{(b_n(M_n - b_n))_{n \geq 1} \xrightarrow{\text{loi}} Y}$$

où Y admet pour fonction de répartition $F_Y : t \mapsto \exp(-e^{-t})$

Exercice sans préparation S5

Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble

$$\{(x, g(x))/x \in [0, 1] \text{ et } g \in \mathcal{G}\}$$

lorsque \mathcal{G} est l'un des ensembles suivants :

1. $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 = \{g : [0, 1] \mapsto [0, 1] \text{ dérivable } / g(0) = 0 \text{ et } \forall x \in [0, 1], |g'(x)| \leq 1\}$
2. $\mathcal{G} = \mathcal{G}_2 = \{g : [0, 1] \mapsto [0, 1] \text{ dérivable } / g(0) = 0, g(1) = \frac{1}{2} \text{ et } \forall x \in [0, 1], |g'(x)| \leq 1\}$.

Solution :

1. Soit $(x, y) \in [0; 1]^2$.

Si $(x, y) \in \mathcal{G}_2$ alors $|g(x) - g(0)| \leq |x - 0|$ (par l'IAF).

Soit $|g(x)| \leq x$, soit $0 \leq y \leq x \leq 1$.

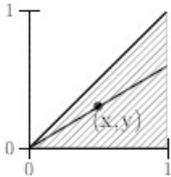
Réciproquement, soit (x, y) tel que $0 \leq y \leq x \leq 1$.

Si $x = y = 0$, pas de problème (on prend g la fonction nulle par exemple).

On considère la fonction g affine passant par $(0, 0)$ et (x, y) $g(t) = \frac{y}{x} \cdot t$

On a alors $|g(t) - g(t')| = \frac{y}{x} |t - t'|$ pour tous $t, t' \in [0; 1]$. Comme $\frac{y}{x} \leq 1$, la fonction g convient, et $(x, y) \in \mathcal{G}_2$.

$\mathcal{G}_1 = \{(x, y) \text{ tel que } 0 \leq y \leq x \leq 1\}.$



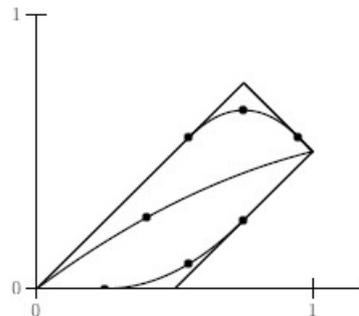
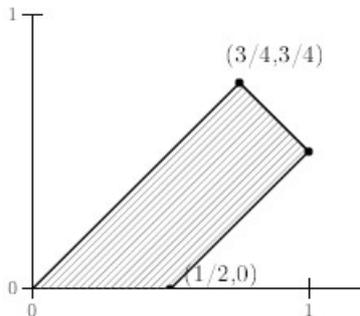
2. Conditions nécessaires : Soit $(x, y) \in \mathcal{G}_2$. En utilisant l'IAF on obtient :

$|g(x) - g(0)| \leq |x - 0|$, soit $0 \leq y \leq x$ ($y \geq 0$) d'une part

et $|g(x) - g(1)| \leq |x - 1|$, soit $x - 1 \leq y - 1/2 \leq 1 - x$.

Soit $y \geq x - 1/2$ et $y \leq 3/2 - x$ (et $y \leq 1$ pour $x \in [0; \frac{1}{2}]$).

Ce qui nous donne le domaine suivant :



Réciproque :

Si (x, y) est dans ce domaine et n'est pas égal à $(1/2, 0)$ ou $(3/4, 3/4)$, on peut facilement construire une fonction g dérivable passant par (x, y) , et de dérivée toujours inférieure ou égale à 1 en valeurs absolues. (en collant par exemple la courbe à la frontière du domaine et en la "décollant" de façon dérivable).

En revanche si $(x, y) = (3/4, 3/4)$, ou $(1/2, 0)$, on ne peut pas construire de fonction g "convenable", car on aurait "un point anguleux" où la fonction g ne serait pas dérivable.

Soit par exemple une fonction g convenable passant par $(3/4, 3/4)$, $g(3/4) = 3/4$.

pour $x \in [0; 3/4]$, pour avoir $|g(x) - 3/4| \leq |x - 3/4|$ et $|g(x)| \leq x$, nécessairement on doit avoir $g(x) = x$ (sinon, on a une pente supérieure à 1 d'un côté ou de l'autre. Donc $g(x) = x$ sur $[0; 3/4]$)

De même $g(x) = 3/2 - x$ sur $[3/4; 1]$. Donc la fonction g n'est pas dérivable en $\frac{3}{4}$.

Et donc $(3/4, 3/4) \notin \mathcal{G}_2$.

De même $(0, 1/2) \notin \mathcal{G}_2$.

SUJET S6

Exercice principal S6

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(T > n) > 0.$$

On appelle *taux de panne* associé à T la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_n = \mathbb{P}(T = n | T \geq n).$$

1. Question de cours : théorème de la limite monotone dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. Si T est une variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe en panne, comment interpréter la quantité θ_n pour $n \in \mathbb{N}$?
3. (a) On suppose que T suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer le taux de panne $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associé à T . Commenter le résultat obtenu.
(b) Soit T une variable aléatoire définie sur \mathbb{N}^* dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{\lambda}{k(k+1)},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Déterminer la valeur de λ .
 - ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T > n) > 0$ et déterminer le taux de panne $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associé à T . Commenter le résultat obtenu.
4. (a) Justifier que $\theta_n \in [0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T \geq n)$ en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(c) En déduire que la série $\sum \theta_n$ diverge.
 5. On veut montrer la réciproque du résultat précédent. Soit donc $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \theta_n \in [0, 1[\quad \text{et} \quad \sum \theta_n \text{ diverge}$$

Montrer que la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T .

6. Soit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le taux de panne d'une variable aléatoire T . On suppose déjà programmée une fonction Scilab `theta(n)` qui pour $n \in \mathbb{N}$ renvoie θ_n . Ecrire une fonction Scilab `SimuT()` qui simule la variable aléatoire T .

Solution :

1. Question de cours : programme ECS1 2013 p. 21.
2. La probabilité θ_n est la probabilité de tomber en panne à l'instant n alors que le matériel est encore en état de marche à cet instant.
3. (a) Remarquons d'abord que le choix d'un paramètre p dans $]0, 1[$ assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T > n) > 0$ et qu'ainsi la suite (θ_n) associée à T est bien définie. On note $q = 1 - p$.
Alors, par définition des probabilités conditionnelles, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\theta_n = \frac{\mathbb{P}(\{T = n\} \cap \{T \geq n\})}{\mathbb{P}(T \geq n)} = \frac{\mathbb{P}(T = n)}{\mathbb{P}(T \geq n)}$$

Or

$$\mathbb{P}(T \geq n) = \sum_{k \geq n} pq^{k-1} = \frac{pq^{n-1}}{1-q} = q^{n-1}$$

et donc finalement :

$$\boxed{\theta_n = p}$$

Le taux de panne est constant en ce cas. Le résultat était relativement prévisible car une loi géométrique correspond à la répétition d'épreuve de Bernoulli indépendantes de même loi et est donc un processus sans mémoire – c'est l'analogie discret d'une loi exponentielle. Ainsi la probabilité de tomber en panne à l'instant n , sachant que l'on fonctionne encore à cette date, ne dépend pas de n , et est simplement la probabilité de succès à l'épreuve de Bernoulli réalisée à l'instant n .

(b) i. On doit avoir comme condition de normalisation :

$$\lambda \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Or :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

par télescopage et donc : $\boxed{\lambda = 1}$.

ii. Toujours par télescopage, pour $n > 0$:

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(T \geq n+1) = \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k \geq n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} > 0$$

On peut alors calculer, pour $n > 0$:

$$\theta_n = \frac{\mathbb{P}(T = n)}{\mathbb{P}(T \geq n)} = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

tandis que $\theta_0 = 0$.

On remarque que dans ce cas-là, la suite $(\theta_n)_{n \geq 1}$ est décroissante : plus le matériel fonctionne depuis longtemps, moins il a de chances de tomber en panne. Cela correspond par exemple à un matériel ayant besoin d'une période de rodage avant de fonctionner correctement.

4. (a) De manière immédiate $\theta_n \in [0, 1]$. Il reste à voir que $\theta_n < 1$. Or :

$$\mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{P}(T = n) + \mathbb{P}(T > n) > \mathbb{P}(T = n)$$

car $\mathbb{P}(T > n) > 0$ par hypothèse, d'où :

$$\theta_n = \frac{\mathbb{P}(T = n)}{\mathbb{P}(T \geq n)} < 1$$

(b) Par définition de θ_k , $\mathbb{P}(T = k) = \theta_k \mathbb{P}(T \geq k)$ et dans le même temps :

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T \geq k) - \mathbb{P}(T \geq k+1)$$

d'où :

$$\frac{\mathbb{P}(T \geq k+1)}{\mathbb{P}(T \geq k)} = 1 - \theta_k$$

puisque $\mathbb{P}(T \geq k) = \mathbb{P}(T > k-1) > 0$ par hypothèse pour $k \in \mathbb{N}^*$, tandis que $\mathbb{P}(T \geq 0) = 1$. On en déduit en faisant le produit de ces expressions pour $0 \leq k \leq n-1$ que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(T \geq k+1)}{\mathbb{P}(T \geq k)} = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$$

ce qui par télescopage et compte-tenu de ce que $\mathbb{P}(T \geq 0) = 1$ donne :

$$\boxed{\mathbb{P}(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)}$$

- (c) Par continuité décroissante des probabilités : $\lim_n \mathbb{P}(T \geq n) = 0$ d'où, en passant au logarithme dans le résultat de la question précédente, puisque $1 - \theta_k > 0$ pour tout k :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \theta_k) = \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k) \right) \rightarrow -\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

Ainsi la série $\sum \ln(1 - \theta_n)$ est divergente.

Il faut maintenant distinguer deux cas : si (θ_n) ne converge pas vers 0, la série $\sum \theta_n$ diverge grossièrement. Si la suite (θ_n) converge vers 0 alors :

$$\theta_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(1 - \theta_n)$$

et donc par comparaison de séries à termes de signe constant, on en déduit que la série $\sum \theta_n$ est divergente.

Dans tous les cas, la série $\sum \theta_n$ est divergente.

5. On procède par analyse-synthèse. Si T est une variable aléatoire solution, nécessairement, compte-tenu des calculs précédents, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \geq n) - \mathbb{P}(T \geq n + 1) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k) - \prod_{k=0}^n (1 - \theta_k) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$$

$\mathbb{P}(T = 0) = \theta_0$ Ainsi, la donnée du taux de panne détermine entièrement la loi de T .

Il reste donc à faire la synthèse en montrant qu'en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k) \text{ et } u_0 = \theta_0$$

la suite (u_n) permet bien de définir la loi d'une variable aléatoire T en posant $\mathbb{P}(T = n) = u_n$. Pour cela, il faut vérifier que $u_n \geq 0$ pour tout n ainsi que : $\sum_{n \geq 0} u_n = 1$.

Le premier point est immédiat car $\theta_n \in [0, 1[$ pour tout n .

Pour le second, on note $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$ et $v_0 = 1$.

Alors, pour $n \geq 0$, $u_n = v_n - v_{n+1}$ d'où par télescopage :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1} = 1 - v_{n+1}$$

Or, en passant au logarithme dans l'expression de v_n , ce qui est possible car $1 - \theta_k > 0$ pour tout k :

$$\ln(v_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \theta_k)$$

Comme précédemment de deux choses l'une : si (θ_n) ne converge pas vers 0, la série $\sum \ln(1 - \theta_n)$ diverge grossièrement, si (θ_n) converge vers 0, $1 - \theta_n \underset{+\infty}{\sim} -\theta_n$ et la série $\sum \ln(1 - \theta_n)$ diverge par comparaison de séries à termes de signe constant.

Dans tous les cas : $\lim_n \ln(v_n) = -\infty$ d'où $v_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Cela prouve que la série $\sum u_n$ converge et :

$$\sum_{n \geq 0} u_n = 1$$

On peut donc définir une variable aléatoire T à valeurs dans \mathbb{N} dont la loi vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(T = n) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$$

Alors :

$$\mathbb{P}(T \geq n) = \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k \geq n} u_k = \sum_{k \geq n} (v_k - v_{k+1}) = v_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$$

par télescopage. En particulier $\mathbb{P}(T \geq n) > 0$, on peut donc définir le taux de panne associé à T et ce dernier vaut :

$$\frac{\mathbb{P}(T = n)}{\mathbb{P}(T \geq n)} = \theta_n$$

La réciproque est bien démontrée.

```
6. T = simulT();
stop = 0;
n = -1;
while stop == 0
    n = n+1
    if rand() < theta(n) then stop = 1
    end
end
T=n
endfunction
```

Exercice sans préparation S6

Soient x et y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E .

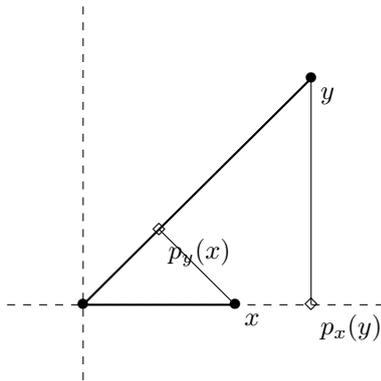
À quelle condition sur x et y , le projeté orthogonal du vecteur x sur la droite $\text{Vect}(y)$ est-il égal au projeté orthogonal de y sur la droite $\text{Vect}(x)$?

On commencera par faire un dessin avec deux vecteurs quelconques de \mathbb{R}^2

Solution :

Un dessin est exigé.

Dessin avec deux vecteurs non orthogonaux :



Le projeté orthogonal de x sur $\text{Vect}(y)$ est $\frac{\langle x; y \rangle}{\|y\|^2} y$. Le projeté orthogonal de y sur $\text{Vect}(x)$ est $\frac{\langle x; y \rangle}{\|x\|^2} x$. Ces deux projetés sont égaux si, et seulement si $\frac{\langle x; y \rangle}{\|y\|^2} y = \frac{\langle x; y \rangle}{\|x\|^2} x$, c'est-à-dire si et seulement si x et y sont orthogonaux ou si $\|x\|^2 y = \|y\|^2 x$.

La deuxième condition implique que x et y sont colinéaires et ainsi que $\text{Vect}(x) = \text{Vect}(y)$. Le projeté de chacun des vecteurs x et y sur la droite $\text{Vect}(x) = \text{Vect}(y)$ est donc lui-même. On en déduit donc que :

les projetés orthogonaux sont égaux si, et seulement si, x et y sont orthogonaux ou égaux.

SUJET S7

Exercice principal S7

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. On considère N une variable aléatoire, indépendante des X_i , suivant une loi de Poisson de paramètre $n \geq 1$.

On pose $S_0 = 0$ et pour tout entier $k \geq 1$:

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

On définit également la variable aléatoire $T = S_N = X_1 + \dots + X_N$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega),$$

et enfin, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$: $D_n = T - S_n$.

1. **Question de cours** : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Rappeler la loi de S_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, son espérance et sa variance.
3. Montrer que T suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
4. Déterminer $\mathbb{E}(D_n)$.
5. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(D_n^2 | [N = k])$ est égale à :

$$\mathbb{E}(D_n^2 | [N = k]) = p(1-p) \cdot |k-n| + |k-n|^2 \cdot p^2$$

(b) Montrer alors que :

$$\mathbb{E}(D_n^2) \leq np$$

6. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(n^\alpha \left| \frac{T}{n} - \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

7. (a) Montrer que si $k \in \mathbb{N}$ et $k \neq n$, $\mathbb{P}_{N=k}(D_n \neq 0) \geq 1-p$
- (b) Soient $\alpha \geq 1$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. A-t-on

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(n^\alpha \left| \frac{T}{n} - \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon\right) = 0 ?$$

On pourra utiliser l'équivalent de Stirling, quand $n \rightarrow +\infty$, $n! \sim \frac{n^n}{e^n \sqrt{2\pi n}}$

Solution :

1. Pour Y une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|Y - \mathbb{E}[Y]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}[Y]}{\varepsilon^2}$$

2. • Par définition S_0 suit une loi certaine égale à 0 : $S_0(\Omega) = \{0\}$, $\mathbb{P}(S_0 = 0) = 1$, $\mathbb{E}[S_0] = \mathbb{V}[S_0] = 0$.

- Pour tout $k \geq 1$, en tant que somme de k variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de même paramètre p , S_k suit une loi binomiale de paramètre (k, p) , à savoir :

$$S_k(\Omega) = \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}, \quad \mathbb{E}[S_k] = kp, \quad \mathbb{V}[S_k] = kp(1-p).$$

Remarquons que le cas $k = 0$ vérifie les mêmes formules.

3. On a $T = S_N$.

Remarquons que, pour tout $k \geq 0$, sachant $[N = k]$, alors T suit la même loi que S_k .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{[N=k]}(T = i) = \mathbb{P}_{[N=k]}(S_k = i) = \mathbb{P}(S_k = i) \quad (\text{car } S_k \text{ est indépendante de } N)$$

Fixons $i \in \mathbb{N}$. Alors, en utilisant le système complet d'événements $([N = k])_{k \geq 0}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = i) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}_{[N=k]}(T = i) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}(S_k = i) \\ &= \sum_{k=i}^{+\infty} e^{-n} \frac{n^k}{k!} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \\ &= \frac{e^{-n} p^i}{i!} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{n^k (1-p)^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= \frac{e^{-n} (np)^i}{i!} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{(n(1-p))^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= e^{-n} \frac{(np)^i}{i!} e^{n(1-p)} \\ &= e^{-np} \frac{(np)^i}{i!} \end{aligned}$$

Ainsi, T suit une loi de Poisson de paramètre np .

4. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}[D_n] = \mathbb{E}[T - S_n] = \mathbb{E}[T] - \mathbb{E}[S_n] = np - np = 0$.

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Si $k = n$, alors $[N = n]$ est réalisé, et donc $D_n = S_n - S_n = 0$, donc $D_n^2 = 0$ également :

$$\mathbb{E}[D_n^2 | [N = n]] = 0$$

- Supposons $n < k$, et supposons $[N = k]$ réalisé. Alors :

$$D_n = S_k - S_n = \sum_{i=1}^k X_i - \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=n+1}^k X_i$$

Ainsi, sachant $[N = k]$, D_n suit une loi binomiale de paramètre $(k - n, p)$.

Or, si Z suit une loi binomiale de paramètre $(k - n, p)$, alors $\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{V}[Z] + (\mathbb{E}[Z])^2$, on a alors :

$$\mathbb{E}[D_n^2 | [N = k]] = (k - n)p(1-p) + (k - n)^2 p^2$$

- Supposons $n > k$, et supposons $[N = k]$ réalisé. Alors :

$$D_n = S_k - S_n = \sum_{i=1}^k X_i - \sum_{i=1}^n X_i = - \sum_{i=k+1}^n X_i$$

d'où : $-D_n$ suit encore une loi binomiale de paramètre $(n - k, p)$. Donc de même, on a :

$$\mathbb{E}[D_n^2 | [N = k]] = \mathbb{E}[(-D_n)^2 | [N = k]] = p(1-p)(n - k) + (n - k)^2 p^2$$

On a donc bien démontré que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[D_n^2 | [N = k]] = p(1-p) \cdot |k-n| + |k-n|^2 \cdot p^2$$

(b) Par le théorème de l'espérance totale,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_n^2] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}[D_n^2 | [N = k]] \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (p(1-p) \cdot |k-n| + |k-n|^2 \cdot p^2) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \mathbb{E}[p(1-p)|N-n| + p^2|N-n|^2] \quad \text{par théorème de transfert} \\ &= p(1-p)\mathbb{E}[|N-n|] + p^2\mathbb{E}[|N-n|^2] \quad \text{par linéarité de l'espérance} \end{aligned}$$

Remarquons ensuite que, puisqu'on a toujours $|N-n| \leq |N-n|^2$ (puisque $|N-n|$ prend des valeurs entières positives), on a par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}(|N-n|) \leq \mathbb{E}[|N-n|^2]$$

d'où :

$$\mathbb{E}[D_n^2] \leq (p(1-p) + p^2)\mathbb{E}[|N-n|^2] = p\mathbb{E}[|N-n|^2]$$

Et enfin remarquons que :

$$\mathbb{E}[|N-n|^2] = \mathbb{E}[(N - \mathbb{E}[N])^2] = \mathbb{V}[N] = n$$

D'où :

$$\boxed{\mathbb{E}[D_n^2] \leq np}$$

6. Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et soit $\varepsilon > 0$.

La variable aléatoire D_n admet bien une espérance et une variance (et $\mathbb{V}[D_n] = \mathbb{E}[D_n^2] - 0 \leq np$). On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(n^\alpha \left| \frac{T}{n} - \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|D_n - \mathbb{E}[D_n]| \geq \varepsilon n^{1-\alpha}) \leq \frac{\mathbb{V}[D_n]}{(\varepsilon n^{1-\alpha})^2} \leq \frac{np}{\varepsilon^2 n^{2-2\alpha}} = \frac{p}{\varepsilon^2 n^{1-2\alpha}}$$

Par encadrement, on a donc bien que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(n^\alpha \left| \frac{T}{n} - \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon\right) = 0.}$$

7. (a) Sachant $N = k$, si $|D_n|$ est une somme de $|k-n|$ variables de Bernoulli.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \neq n$, $\mathbb{P}_{N=k}(|D_n| = 0) = p^{|k-n|} \leq p$.

Donc, $\boxed{\text{si } n \geq k, \mathbb{P}_{N=k}(D_n \neq 0) \geq 1-p}$

(b) On pose $\alpha = 1$. A-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|T - S_n| \geq \varepsilon) = 0$?

Note : on ne peut pas parler de convergence en probabilité, car la loi de T dépend de n

• La question a. est une indication. On va montrer que $\mathbb{P}(D_n \neq 0)$ ne tend pas vers 0.

En effet si $\varepsilon \in]0, 1[$, comme la variable D_n est à valeur dans \mathbb{Z} , $\mathbb{P}(|T - S_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(D_n \neq 0)$

$$\bullet \mathbb{P}(D_n \neq 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{N=k}(D_n \neq 0) \mathbb{P}(N = k) \geq \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{+\infty} \mathbb{P}_{N=k}(D_n \neq 0) \mathbb{P}(N = k) \geq \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{+\infty} p \mathbb{P}(N = k)$$

$$\mathbb{P}(D_n \neq 0) \geq (1-p)\mathbb{P}(N \neq n)$$

• $\mathbb{P}(N \neq n) = 1 - \frac{\exp(-n)n^n}{n!}$. D'après Stirling, $\frac{\exp(-n)n^n}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(N \neq n) = 1$

• Par contraposée du théorème d'encadrement $\mathbb{P}(|T - S_n| \geq \varepsilon)$ ne tend pas vers 0

• Si $\alpha \geq 1$, $n^\alpha \left| \frac{T}{n} - \frac{S_n}{n} \right| \geq n \left| \frac{T}{n} - \frac{S_n}{n} \right|$, donc $\mathbb{P}\left(n^\alpha \left| \frac{T}{n} - \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon\right) \geq \mathbb{P}\left(n \left| \frac{T}{n} - \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon\right)$, et donc

$$\boxed{\text{Si } \varepsilon \in]0, 1[\text{ et } \alpha \geq 1, \mathbb{P}\left(n^\alpha \left| \frac{T}{n} - \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon\right) \text{ ne tend pas vers } 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty}$$

Exercice sans préparation S7

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que la suite $(2u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite ℓ . Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ .

Indication : on peut commencer par le cas $\ell = 0$.

Solution :

On note $(v_n)_{n \geq 0} = (2u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0}$

- Supposons que (v_n) converge vers 0.

On a

$$u_n = \frac{v_{n-1} + u_{n-1}}{2}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} |u_n| &\leq \frac{|v_{n-1}|}{2} + \frac{|u_{n-1}|}{2} \\ &\leq \frac{|v_{n-1}|}{2} + \frac{|v_{n-2}|}{2^2} + \frac{|u_{n-2}|}{2^2} \\ &\leq \frac{|v_{n-1}|}{2} + \frac{|v_{n-2}|}{2^2} + \dots + \frac{|v_m|}{2^{n-m}} + \frac{|u_m|}{2^{n-m}} \end{aligned}$$

Soit $] -\varepsilon, \varepsilon[$ un intervalle ouvert autour de 0.

- Il existe $m \geq 1$ tel que $v_n \in] -\varepsilon/2, \varepsilon/2[$ pour $n \geq m$.

On a alors $\frac{|v_{n-1}|}{2} + \frac{|v_{n-2}|}{2^2} + \dots + \frac{|v_m|}{2^{n-m}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \frac{\varepsilon}{2}$

- De plus, pour m ainsi fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_m|}{2^{n+1-m}} = 0$

il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on a $\frac{|u_m|}{2^{n+1-m}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq \max(n_0, m)$ on a bien $|u_n| \leq \varepsilon$

Si (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.

Si (v_n) converge vers ℓ . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - \ell$, et l'on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2w_{n+1} - w_n = 2u_{n+1} - u_n - \ell.$$

$(2w_{n+1} - w_n)$ converge vers 0, ce qui implique avec ce que l'on a montré que (w_n) converge vers 0 et par suite que (u_n) converge vers ℓ .

Si (v_n) converge vers ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ .

SUJET S8

Exercice principal S8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle ici polynôme trigonométrique d'ordre n une fonction à valeurs réelles de la forme

$$f(\theta) = 1 + \lambda_1 \cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta) + \dots + \lambda_n \cos(n\theta) + \mu_n \sin(n\theta)$$

avec $(\lambda_n, \mu_n) \neq (0, 0)$.

1. Énoncer les formules trigonométriques donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
2. Soit $\omega = \frac{2\pi}{n+1}$. Montrer que

$$f(0) + f(\omega) + f(2\omega) + \dots + f(n\omega) = n + 1.$$

On admet que l'on aurait de même $f(0) + f(-\omega) + f(-2\omega) + \dots + f(-n\omega) = n + 1$

3. On suppose dans toute la suite que g est un polynôme trigonométrique d'ordre n prenant toujours des valeurs positives.

Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Montrer que la fonction $\tilde{g} : \theta \rightarrow g(\theta + \theta_0)$ est aussi un polynôme trigonométrique qui a les mêmes propriétés que g .

4. Montrer que $g(\theta) \leq n + 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
5. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $2n$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad g(\theta) = e^{-in\theta} P(e^{i\theta}). \quad (1)$$

6. On suppose que $g(0) = n + 1$. Montrer que dans ce cas, le polynôme P vérifiant (1) possède $2n$ racines à déterminer en fonction de $e^{i\omega}$. Montrer que P est alors uniquement déterminé.
7. Montrer que

$$g(\theta) = \frac{1}{n+1} |1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}|^2.$$

8. On suppose qu'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(\theta_0) = n + 1$. Que devient le résultat précédent?

Solution :

1. cours programme ECS1 page 7
2. On utilise une somme géométrique et une inversion de somme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n f(k\omega) &= \sum_{k=0}^n \left(1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \cos(kj\omega) + \sum_{j=1}^n \mu_j \sin(kj\omega) \right) \\ &= (n+1) + \sum_{j=1}^n \left(\lambda_j \left(\sum_{k=1}^n \cos(kj\omega) \right) + \mu_j \left(\sum_{k=1}^n \sin(kj\omega) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \sum_{k=1}^n e^{ikj\omega} = \sum_{k=1}^n \left(\exp\left(\frac{2i\pi j}{n+1}\right) \right)^k = \frac{1 - \exp(2i\pi j)}{1 - \exp\left(\frac{2i\pi j}{n+1}\right)} = 0$$

(somme géométrique de raison différente de 1 car $\frac{2\pi j}{n+1} \in]0, 2\pi[$ pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$)

Ainsi la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme sont nulles, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n f(k\omega) = n + 1}$$

3. On utilise les formules trigonométriques, qui donne pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{g}(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos(k\theta_0) + \mu_k \sin(k\theta_0)) \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^n (-\lambda_k \sin(k\theta_0) + \mu_k \cos(k\theta_0)) \sin(k\theta)$$

La positivité de \tilde{g} est évidente.

$$\boxed{\tilde{g} \text{ est aussi un polynôme trigonométrique d'ordre } n \text{ positif sur } \mathbb{R}}$$

4. Grâce aux questions précédentes, comme $\sum_{k=0}^n g(k\omega) = n+1$, et que tous les termes sont positifs, $\boxed{g(0) \leq n + 1}$

Puis, pour $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}(0) = g(\theta_0) \leq n + 1$.

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, g(\theta) \leq n + 1}$$

5. On utilise le fait que $\cos(k\theta) = \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2}$ et $\sin(k\theta) = \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i}$.

$$\text{Ainsi } g(\theta) = \exp(-in\theta) \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{\mu_k}{2i} \right) (e^{i\theta})^{n+k} + \exp(in\theta) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda_k}{2} - \frac{\mu_k}{2i} \right) (e^{i\theta})^{n-k} + (e^{i\theta})^n \right)$$

On a un polynôme en $e^{i\theta}$ de coefficient dominant $\left(\frac{\lambda_n}{2} + \frac{\mu_n}{2i} \right) X^{2n}$, ce terme est non nul car $(\lambda_n, \mu_n) \neq (0, 0)$

$$\boxed{\text{il existe } P \in \mathbb{C}[X] \text{ de degré } 2n \text{ tel que } \forall \theta \in \mathbb{R}, g(\theta) = e^{-in\theta} P(e^{i\theta}).}$$

On peut aussi remarquer que le terme de degré n du polynôme P vaut X^n .

6. On déduit de la question 2. que $g(\omega) = \dots = g(n\omega) = 0$ (car $g(0) = n + 1$ et que chacun des termes est positif

On a de même $g(-\omega) = \dots = g(-n\omega) = 0$

$$\boxed{\text{Le polynôme } P \text{ possède donc } 2n \text{ racines distinctes qui sont } \{e^{\pm i\omega}, e^{\pm 2i\omega}, \dots, e^{\pm ni\omega}\}.}$$

Donc P est un multiple de $\prod_{k=1}^{2n} ((X - e^{ik\omega})(X + e^{-ik\omega}))$

Mais comme on sait que son coefficient de degré n vaut 1, $\boxed{P \text{ est uniquement déterminé.}}$

7. On note $h(\theta) = \frac{1}{n+1} |1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}| = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n e^{ij\theta} \overline{\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}}$

$$h(\theta) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n e^{i(j-k)\theta} \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=-n}^n \alpha_m e^{im\theta}$$

où $\alpha_m = \text{card}\{(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \text{ tel que } j - k = m\}$

On a bien $\alpha_0 = n + 1$ et $\alpha_m = \alpha_{-m}$

$$h(\theta) = \frac{1}{n+1} \left((n+1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m (e^{im} + e^{-im}) \right) \text{ avec } \alpha_m \in \mathbb{N}$$

Ainsi, h est bien un polynôme trigonométrique, h est positive et $h(0) = n + 1$

$$\boxed{\text{Comme la fonction } g \text{ précédente est uniquement déterminée, on a bien } g = h.}$$

8. Dans ce cas, on utilise \tilde{g} qui vérifie bien les propriétés et donc $\tilde{g} = h$ et on trouve que

$$\boxed{g(\theta) = \frac{1}{n+1} |1 + z + \dots + z^n|^2}$$

avec $z = e^{i(\theta - \theta_0)}$.

Exercice sans préparation S8

On considère la fonction Scilab suivante :

```
function S = simul(p)
stop = 0
n = 0
while stop == 0
    A = grand(1,1,'bin',1,p);
    B = grand(1,1,'bin',1,p);
    n = n+2
    if A <> B then stop = 1
    end
end
S = (n,B)
endfunction
```

On appelle cette fonction avec $p \in]0, 1[$

On considère une suite de variable aléatoire $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que pour $k \in \mathbb{N}^*$, X_k donne le résultat du k -ième appel de `grand(1,1,'bin',1,p)` s'il a lieu.

1. On note alors (N, Y) le couple de variable aléatoire renvoyé par l'appel de la fonction. Ces variables sont-elle correctement définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. Déterminer la loi de Y .

Solution :

1. N détermine le nombre d'appels de `grand(1,1,'bin',1,p)`, donc le nombre de variable X_1, \dots, X_N considérées.

On peut constater que N est pair, et que on a $N = 2k$ si et seulement si $\forall j \in [1, k-1] X_{2j-1} \neq X_{2j}$ et $X_{2k-1} = X_{2k}$

$$(N = 2k) = \bigcap_{j=1}^{k-1} \{X_{2j-1} = X_{2j}\} \cap \{X_{2k} \neq X_{2k-1}\}$$

Ainsi on calcule $\mathbb{P}(N = 2k) = (p^2 + q^2)^{k-1}(2pq)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

On peut vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = 2k) = 1$ (par le calcul, on en constatant que $\frac{1}{2}N$ suit une loi géométrique de paramètre $2pq \in]0, 1[$)

La boucle s'arrête presque sûrement, on peut donc presque sûrement définir le couple de variable aléatoire. (et l'on a la loi de N au passage)

2. Y suit une loi de Bernoulli. On peut voir ici sans calcul que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 0)$

Sinon, avec la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = 2k\} \cap \{Y = 1\})$$

$$\{N = 2k\} \cap \{Y = 1\} = \bigcap_{j=1}^{k-1} \{X_{2j-1} = X_{2j}\} \cap \{X_{2k-1} = 0\} \cap \{X_{2k} = 1\}$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(Y = 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} (p^2 + q^2)^{k-1} pq = \frac{1}{2} \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Question bonus : quel est l'intérêt de cet algorithme?

Simuler une pièce équilibrée lorsque l'on a une pièce biaisé, et donc être certain de faire un tirage équitale.

Question bonus 2 : calculer $\text{Cov}(N, Y)$: les variables sont indépendantes, la covariance est nulle.

Question bonus 3 : $\rho(Y, X_{N-1})$? $Y = 1 - X_{N-1}$, le coefficient de corrélation linéaire vaut -1 .

SUJET S9

Exercice principal S9

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique de E .

u étant symétrique, on note (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de vecteurs propres et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, et l'on suppose que :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

1. Question de cours : caractérisations des fonctions es de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I .
2. Justifier que u est inversible et montrer alors que :

$$\forall x \in E \quad \langle u(x); x \rangle \langle u^{-1}(x); x \rangle \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \|x\|^4$$

3. On pose $\alpha = \sqrt{\lambda_1 \lambda_n}$. Soit alors $f_\alpha : x \mapsto \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x}$.

(a) Montrer que f_α est convexe sur \mathbb{R}_+^* .

(b) En déduire que :

$$\forall x \in [\lambda_1, \lambda_n] \quad f_\alpha(x) \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}$$

4. (a) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

(b) En déduire que :

$$\forall x \in E \quad \sqrt{\langle u(x); x \rangle \langle u^{-1}(x); x \rangle} \leq \frac{1}{2} \langle \frac{1}{\alpha} u(x) + \alpha u^{-1}(x); x \rangle$$

(c) Conclure que :

$$\forall x \in E \quad \langle u(x); x \rangle \langle u^{-1}(x); x \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2 \|x\|^4$$

Comparer avec le résultat de la question 2.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS1 2013 p. 21.

2. Les valeurs propres de u sont toutes non nulles par hypothèse et donc u est inversible.

De plus le théorème spectral donne que u est diagonalisable en base orthonormée, ce qui signifie exactement que l'on peut trouver une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u .

On décompose x dans la base (e_1, \dots, e_n) : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors la base étant formée de vecteurs propres de

u : $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$, puis, la base étant orthonormée :

$$\langle u(x); x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

par définition de λ_n .

De même u^{-1} est également symétrique et ses valeurs propres sont alors $\lambda_1^{-1} \geq \lambda_2^{-1} \geq \dots \lambda_n^{-1} > 0$ donc pour $x \in E$:

$$\langle u^{-1}(x); x \rangle \leq \frac{1}{\lambda_1} \|x\|^2$$

puis de manière immédiate en multipliant membre à membre les deux inégalités obtenues :

$$\boxed{\forall x \in E \quad \langle u(x); x \rangle \langle u^{-1}(x); x \rangle \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \|x\|^4 .}$$

3. (a) La fonction f_α est définie et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et, pour $x > 0$:

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{x^2}$$

Comme $\alpha > 0$, il est immédiat que f'_α est croissante et donc, par la caractérisation des fonctions \mathcal{C}^1 convexe, on en déduit que f_α est convexe.

(b) Si $x \in [\lambda_1, \lambda_n]$, alors il existe $t \in [0, 1]$ tel que $x = (1-t)\lambda_1 + t\lambda_n$. Alors par convexité de f_α :

$$f_\alpha(x) \leq (1-t)f_\alpha(\lambda_1) + tf_\alpha(\lambda_n)$$

Or $f_\alpha(\lambda_1) = f_\alpha(\lambda_n) = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}$ d'où finalement :

$$\boxed{f_\alpha(x) \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}}$$

4. (a) Il suffit de remarquer que, pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \iff (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

(b) Pour $x \in E$, on peut calculer :

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle u(x); x \rangle \langle u^{-1}(x); x \rangle} &= \sqrt{\langle \frac{1}{\alpha}u(x); x \rangle \langle \alpha u^{-1}(x); x \rangle} \text{ par linéarité} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\langle \frac{1}{\alpha}u(x); x \rangle + \langle \alpha u^{-1}(x); x \rangle \right) \text{ par la question précédente} \\ &\leq \frac{1}{2} \langle \frac{1}{\alpha}u(x) + \alpha u^{-1}(x); x \rangle \text{ par linéarité} \end{aligned}$$

(c) L'endomorphisme $\frac{1}{\alpha}u + \alpha u^{-1}$ est symétrique et la base \mathcal{B} est formée de vecteurs propres pour cet endomorphisme puisque :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{\alpha}u + \alpha u^{-1} \right) = \text{Diag} (f_\alpha(\lambda_1), f_\alpha(\lambda_2), \dots, f_\alpha(\lambda_n))$$

Alors, par un calcul analogue à celui de la première question si $x \in E$ se décompose dans E en $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors :

$$\langle \frac{1}{\alpha}u(x) + \alpha u^{-1}(x); x \rangle = \sum_{i=1}^n f_\alpha(\lambda_i) x_i^2$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i \in [\lambda_1, \lambda_n]$ et donc, par la question 3. (b) :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad f_\alpha(\lambda_i) \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}$$

On en déduit que :

$$\langle \frac{1}{\alpha}u(x) + \alpha u^{-1}(x); x \rangle \leq \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right) \|x\|^2$$

puis finalement, avec l'inégalité de la question précédente, en l'élevant au carré :

$$\boxed{\langle u(x); x \rangle \langle u^{-1}(x); x \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2 \|x\|^4}$$

L'inégalité obtenue à cette question est meilleure qu'à la question 2.(c). En effet, en raisonnant par équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2 \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1} &\iff \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + 2 + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \\ &\iff \frac{\lambda_1}{\lambda_n} + 2 \leq 3 \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est vraie car $\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \leq 1 \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$.

On peut en fait montrer, via un calcul de multiplicateurs de Lagrange, que l'inégalité obtenue en 4.(c) est optimale et qu'il existe des points de E pour lesquels c'est une égalité.

Exercice sans préparation S9

On considère deux jeux de dés décrits par le programme Scilab suivant (répétés ici 10000 fois) :

```
Njeux=10000;
compteur1=0;compteur2=0;
for i=1:Njeux
    jeux1=floor(6*rand(4,1)+1);
    if (jeux1(1)==6)|(jeux1(2)==6)|(jeux1(3)==6)|(jeux1(4)==6) then
        compteur1=compteur1+1;
    end
    ok2=0;
    for j=1:24
        if floor(6*rand(2,1)+1)==[6;6] then
            ok2=1;
        end
    end
    compteur2=compteur2+ok2;
end
disp(compteur1/Njeux)
disp(compteur2/Njeux)
```

1. En quoi consistent ces deux jeux ?
2. Les deux résultats affichés par le programme, une fois exécuté, sont deux valeurs très proches de 0.5, l'une étant supérieure légèrement à 0.5 et l'autre inférieure légèrement. Donner une expression exacte de ces deux valeurs (correspondant à des probabilités de succès aux deux jeux).
3. Compléter le code afin de tracer la convergence en fonction du nombre de parties jouées vers cette valeur moyenne.

Solution :

1. Le premier jeu consiste à parier sur la sortie d'un 6 au cours de 4 lancers de dés. Le second jeu consiste à parier sur la sortie d'un double 6 au cours de 24 lancers de deux dés simultanément.

2. La valeur exacte de la première probabilité est $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$ (0.517 environ) et la seconde est égale à

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \text{ (0.491 environ).}$$

3. On rajoute les trois lignes (avant, dans et après la boucle respectivement) :

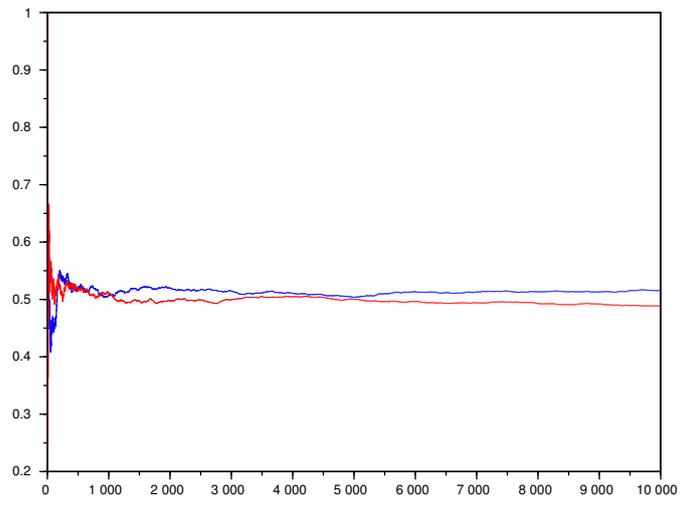
```
P1=[];P2=[];
```

```
P1(i)=compteur1/i; P2(i)=compteur2/i;
```

```
plot(1:Njeux,P1,'b-');plot(1:Njeux,P2,'r-')
```

Note : les arguments 'b-' et 'r-' ne sont pas exigibles des étudiants.

On trouve par exemple :



SUJET S10

Exercice principal S10

Soit $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (u, v)$.

Pour tous vecteurs $x = x_1u + x_2v$ et $y = y_1u + y_2v$ de E (avec $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$), on note :

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1) \cos(\theta) + x_2y_2.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. **Question de cours :** Développement de $\|a + b\|^2$ lorsque a et b sont deux vecteurs d'un même espace vectoriel euclidien, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\| \cdot \|$.
2. (a) Montrer que Φ définit un produit scalaire sur E .
On notera $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.
(b) Calculer $\|u\|$, $\|v\|$ et $\Phi(u, v)$.
3. Montrer que pour tout vecteur x de E , on a :

$$\|f(x)\| = \|x\|.$$

4. En déduire que $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.

5. f est-elle diagonalisable ?

6. On note $w = \frac{v - \cos(\theta)u}{\sin(\theta)}$.

Montrer que $\mathcal{B}_0 = (u, w)$ est une base orthonormée de E (pour le produit scalaire Φ) et déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B}_0 .

Solution :

1. Pour a et b vecteurs de E , on a : $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2\langle a, b \rangle + \|b\|^2$. Programme ECS2 page 7.
2. (a) • On a clairement $\forall (x, y) \in E^2$, $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$, donc Φ est symétrique.
De plus, pour $x = x_1u + x_2v$, $y = y_1u + y_2v$, $z = z_1u + z_2v$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda x + z, y) &= (\lambda x_1 + z_1)y_1 + ((\lambda x_1 + z_1)y_2 + (\lambda x_2 + z_2)y_1) \cos(\theta) + (\lambda x_2 + z_2)y_2 \\ &= \lambda(x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1) \cos(\theta) + x_2y_2) + (z_1y_1 + (z_1y_2 + z_2y_1) \cos(\theta) + z_2y_2) \\ &= \lambda\Phi(x, y) + \Phi(z, y) \end{aligned}$$

Ainsi Φ est linéaire par rapport à la 1ère variable, et puisque Φ est symétrique, Φ est bilinéaire.

- Soit $x = x_1u + x_2v \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \Phi(x, x) &= (x_1)^2 + 2 \cos(\theta)x_1x_2 + (x_2)^2 \\ &= (x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 - \cos^2(\theta)(x_2)^2 + (x_2)^2 \\ &= (x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 + \underbrace{(1 - \cos^2(\theta))}_{>0}(x_2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

- De plus, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc, pour tout $x \in E$,

$$\Phi(x, x) = 0 \iff \begin{cases} x_1 + \cos(\theta)x_2 = 0 \\ (1 - \cos^2(\theta))x_2 = 0 \end{cases} \stackrel{1 - \cos^2(\theta) \neq 0}{\iff} x_1 = x_2 = 0 \iff x = 0$$

Ainsi, Φ est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc Φ définit un produit scalaire sur E .

(b) On a clairement $\|u\| = 1 = \|v\|$ et : $\Phi(u, v) = \cos(\theta)$.

3. Soit $x = x_1u + x_2v$. Alors remarquons déjà que :

$$\|x\|^2 = \|x_1u + x_2v\|^2 = (x_1)^2\|u\|^2 + 2x_1x_2\Phi(u, v) + (x_2)^2\|v\|^2 = (x_1)^2 + 2x_1x_2\cos(\theta) + (x_2)^2$$

En représentant x dans la base \mathcal{B} par la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, le vecteur $f(x)$ est représenté dans la base \mathcal{B} par :

$$MX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 + 2\cos(\theta)x_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $f(x) = (-x_2)u + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2)v$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= (-x_2)^2\|u\|^2 + 2(-x_2)(x_1 + 2\cos(\theta)x_2)\Phi(u, v) + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2)^2\|v\|^2 \\ &= (x_2)^2 + 2(-x_2)(x_1 + 2\cos(\theta)x_2)\cos(\theta) + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2)^2 \\ &= (x_2)^2 - 2x_1x_2\cos(\theta) - 4(x_2)^2\cos^2(\theta) + (x_1)^2 + 4x_1x_2\cos(\theta) + 4\cos^2(\theta)(x_2)^2 \\ &= (x_1)^2 + 2x_1x_2\cos(\theta) + (x_2)^2 \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

Comme les normes sont positives, on a bien que : $\text{Pour tout } x \in E, \|f(x)\| = \|x\|.$

4. Si f admet une valeur propre λ , alors il existe un réel x non nul tel que $f(x) = \lambda x$.

Mais alors :

$$\|f(x)\| = \|x\| \implies \|\lambda x\| = \|x\| \implies |\lambda| \cdot \|x\| = \|x\|$$

Or, x est non nul, donc $\|x\| \neq 0$, d'où $|\lambda| = 1$, ainsi : $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Ainsi :

$$\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$$

5. λ est valeur propre de f ssi $M - \lambda I_2$ non inversible ssi $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1 = 0$

$$P(1) = 2(1 - \cos(\theta)) \text{ et } P(-1) = 2(1 + \cos(\theta))$$

Comme $\theta \in]0, \pi[$, ni 1, ni -1 sont valeurs propres.

Le spectre est vide et f n'est pas diagonalisable.

6. On a déjà vu que $\|u\| = 1$ donc u est bien normé.

De plus,

$$\Phi(u, w) = \Phi\left(u, \frac{v - \cos(\theta)u}{\sin(\theta)}\right) = \frac{1}{\sin(\theta)}\Phi(u, v) - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Phi(u, u) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 0$$

Donc u et w sont bien orthogonaux.

Enfin, on a :

$$\|w\|^2 = \Phi(w, w) = \frac{\|v - \cos(\theta)u\|^2}{\sin^2(\theta)} = \frac{\|v\|^2 - 2\cos(\theta)\Phi(u, v) + \cos^2(\theta)\|u\|^2}{\sin^2(\theta)} = \frac{1 - \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = 1$$

Ainsi, on a bien $\|w\| = 1$, et donc w est bien normé.

Les vecteurs u et w étant orthogonaux et non nuls (de norme 1), ils forment une famille libre, de cardinal $2 = \dim(E)$, donc $\mathcal{B}_0 = (u, w)$ forme bien une base de E qui est orthonormée.

Remarquons que puisque $w = \frac{v - \cos(\theta)u}{\sin(\theta)}$, on a $\sin(\theta)w = v - \cos(\theta)u$, d'où :

$$f(u) = v = \cos(\theta)u + \sin(\theta)w$$

et

$$\begin{aligned} f(w) &= f\left(\frac{v - \cos(\theta)u}{\sin(\theta)}\right) \\ &= \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}f(u) + \frac{1}{\sin(\theta)}f(v) \\ &= \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}v + \frac{1}{\sin(\theta)}(-u + 2\cos(\theta)v) \\ &= \frac{-1}{\sin(\theta)}u + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}v \\ &= \frac{-1}{\sin(\theta)}u + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}(\cos(\theta)u + \sin(\theta)w) \\ &= \frac{\cos^2(\theta) - 1}{\sin(\theta)}u + \cos(\theta)w \\ &= -\sin(\theta)u + \cos(\theta)w \end{aligned}$$

Donc la matrice de f dans la base \mathcal{B}_0 est :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}$$

Exercice sans préparation S10

On considère pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire Z_n qui est simulée dans la fonction Scilab ci-dessous.

```
function c = Z(n,lambda)
X = grand(2,n,"exp",1/lambda);
c = 0;
for k = 1:n
if X(1,k) <= X(2,k) then
    c = c+1
end
end
c = c/n
```

1. Montrer que la suite de variables aléatoires (Z_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
2. Pouvez-vous montrer la même convergence en probabilité si on remplace `if X(1,k)<=X(2,k)` par `if X(1,1)<=X(2,k)` dans le script Scilab?

Solution :

1. Dans le programme, la commande `X=grand(2,n,"exp",1/lambda)` génère deux lignes de n coefficients chacune où chaque composante suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Le vecteur X simule donc la matrice aléatoire $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \end{pmatrix}$.

La fonction compte alors le nombre de colonnes j de la matrice où $X_j \leq Y_j$, et renvoie ce compteur divisé par n .

$$Z_n = \frac{1}{n} W_n \quad \text{où} \quad W_n = \text{Card}(j \in \llbracket 1, n \rrbracket / X_j \leq Y_j)$$

Notons pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq Y_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Les variables aléatoires B_i sont toutes indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(X_1 \leq Y_1)$, possèdent donc une même espérance p et une même variance $p(1-p)$.

Comme $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n B_i$, la loi faible des grands nombres affirme que la suite de variables aléatoires (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\mathbb{E}[B_1] = p = \mathbb{P}(X_1 \leq Y_1)$.

Les variables Y_1 et X_1 étant à densité et indépendantes, la variable aléatoire $Y_1 - X_1$ est une variable aléatoire à densité (dont la densité est donnée par un produit de convolution).

Ainsi, $\mathbb{P}(Y_1 - X_1 = 0)$. Et par symétrie évidente, on a $\mathbb{P}(X_1 < Y_1) = \mathbb{P}(Y_1 < X_1) = \frac{1}{2}$, ainsi, $p = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la suite de variables aléatoires (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à $1/2$.

2. En changeant la ligne de code, on peut toujours écrire $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n B_i$ avec des loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ mais les variables B_i ne sont plus indépendantes.

On peut montrer que (Z_n) ne converge pas en probabilité vers $\frac{1}{2}$, mais ce n'est pas évident du tout avec les outils du programme. On va plutôt suggérer de calculer $V(Z_n)$

$$V(Z_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n V(B_i) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \text{Cov}(B_i, B_j) \right)$$

Or, $\text{Cov}(B_i, B_j) = \mathbb{E}(B_i B_j) - \mathbb{E}(B_i)\mathbb{E}(B_j)$

$\mathbb{E}(B_i B_j) = \mathbb{P}(Y_i \geq X_1 \cap Y_j \geq X_1) = \mathbb{P}(X_1 = \min(X_1, Y_i, Y_j))$

Comme les variables $Y_i - X_1$, $Y_j - X_1$ et $Y_j - Y_i$ sont à densité, les cas d'ex-aequo sont de probabilité nulle

et donc $\mathbb{P}(X_1 = \min(X_1, Y_i, Y_j)) = \frac{1}{3}$

Donc $\text{Cov}(B_i, B_j) = \frac{1}{3} - \frac{1}{14} = \frac{1}{12}$

Ainsi $V(Z_n) = \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{12n}$

Comme la variance ne converge pas vers 0, ce n'est pas suffisant pour conclure, Bienaymé-Tchebychev ne nous donne pas la convergence en probabilité.

SUJET S11

Exercice principal S11

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $\{X\} = X - \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière de X et on note $p = 1 - e^{-\lambda}$ et $q = 1 - p$.

1. Question de cours : définition d'un système complet d'événements.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n) = pq^n$.
(b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(\lfloor X \rfloor)$ puis celle de $\mathbb{E}(\{X\})$.
3. Montrer que $\{X\}$ est une variable à densité sur \mathbb{R} et donner une densité de la variable.
4. (a) On définit une suite de variable aléatoire $(X_n)_{n \geq 1}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{n}\right)$. Etudier la convergence en loi de la suite $(\{X_n\})_{n \geq 1}$.
(b) On définit ensuite une suite de variable aléatoire $(Y_n)_{n \geq 1}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n \sim \mathcal{E}(n)$. Etudier la convergence en loi de la suite $(\{Y_n\})_{n \geq 1}$.
5. Les variables $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ sont-elles indépendantes ?
6. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant toutes deux des lois exponentielles de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \max(X_1, X_2)$.
(a) Conditionnellement à l'événement $[\lfloor X_1 \rfloor > \lfloor X_2 \rfloor]$, les variables $\lfloor Y \rfloor$ et $\{Y\}$ sont-elles indépendantes ? Commenter ce résultat.
(b) Prouver que $\lfloor Y \rfloor$ et $\{Y\}$ ne sont pas indépendantes.

Solution :

1. Question de cours : ESC1 2013 p. 21.
2. (a) Par définition de la partie entière, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n) = \mathbb{P}(n \leq X < n+1) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda(n+1)} + e^{-\lambda n} = pq^n$$

- (b) La variable $\lfloor X \rfloor + 1$ suit donc une loi géométrique de paramètre p d'où :

$$\mathbb{E}(\lfloor X \rfloor + 1) = \frac{1}{p}$$

puis par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(\lfloor X \rfloor) = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$$

Enfin, toujours par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(\{X\}) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\lfloor X \rfloor) = \frac{1}{\lambda} - \frac{q}{p}$$

3. La variable $\{X\}$ est à valeurs dans $[0, 1[$. En notant $F_{\{X\}}$ sa fonction de répartition, on a donc : $F_{\{X\}}(t) = 0$ pour $t < 0$ et $F_{\{X\}}(t) = 1$ pour $t \geq 1$. Soit maintenant $t \in [0, 1[$. Alors, comme la famille $(\lfloor X \rfloor = n)_{n \geq 0}$

forme un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
 F_{\{X\}}(t) &= \mathbb{P}(0 \leq \{X\} \leq t) \\
 &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(0 \leq \{X\} \leq t, \lfloor X \rfloor = n) \\
 &= \sum_{n \geq 0} P(n \leq X \leq n+t) \text{ par la question 2.(a)} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \int_n^{n+t} \lambda e^{-\lambda u} du \\
 &= \sum_{n \geq 0} (e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+t)}) \\
 &= (1 - e^{-\lambda t}) \sum_{n \geq 0} q^n \\
 &= (1 - e^{-\lambda t}) \frac{1}{1 - q} \\
 &= \boxed{\frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}}}
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$F_{\{X\}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition de $\{X\}$, continue sur \mathbb{R} , est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, c'est donc une variable à densité et par dérivation de la fonction de répartition sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on en déduit de manière immédiate qu'une densité pour $\{X\}$ est donnée par la fonction :

$$f : t \mapsto \begin{cases} \lambda \frac{e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. (a) Par les calculs précédents, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition $F_{\{X_n\}}$ de $\{X_n\}$ vérifie, pour $t \in [0, 1[$:

$$F_{\{X_n\}}(t) = \frac{1 - e^{-t/n}}{1 - e^{-1/n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t/n}{1/n} = t$$

et donc, à t fixé dans $[0, 1[$, $F_{\{X_n\}}(t) \rightarrow t$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Cela prouve que $\boxed{\text{la suite } (\{X_n\}) \text{ converge en loi vers une loi uniforme sur } [0, 1[}$.

(b) Cette fois, pour $t \in [0, 1[$:

$$F_{\{Y_n\}}(t) = \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-n}} \rightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

Comme $F_{\{Y_n\}}(t) = 0$ pour $t < 0$, on en déduit qu'alors :

En tout t de \mathbb{R}^* , $F_{\{Y_n\}}(t)$ converge vers $F(t)$ où F est la fonction de répartition d'une variable nulle. Comme F n'est pas continue en 0 :

$\boxed{\text{La suite } (\{Y_n\}) \text{ converge en loi vers la variable certaine égale à 0.}$ Cela correspond graphiquement au fait que lorsque n tend vers $+\infty$, la densité de Y_n se concentre en 0

5. On a quasiment calculé la loi conjointe de $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ à la question 2.(a). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n, \{X\} \leq t) &= \mathbb{P}(n \leq X \leq n+t) \\
 &= \int_n^{n+t} \lambda e^{-\lambda u} du \\
 &= e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+t)} \\
 &= q^n (1 - e^{-\lambda t}) \\
 &= pq^n F_{\{X\}}(t) \\
 &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n) \mathbb{P}(\{X\} \leq t)
 \end{aligned}$$

Et donc, pour $m \in \mathbb{R}$, on a bien :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor \leq m, \{X\} \leq t) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \leq m}} \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k, \{X\} \leq t) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \leq m}} \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k) \mathbb{P}(\{X\} \leq t) \\ &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor \leq m) \mathbb{P}(\{X\} \leq t)\end{aligned}$$

Les variables $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ sont donc indépendantes.

6. (a) L'argument est le suivant : si $\lfloor X_1 \rfloor > \lfloor X_2 \rfloor$ on a à fortiori $X_1 > X_2$. En ce cas : $\lfloor Y \rfloor = \lfloor X_1 \rfloor$ tandis que $\{Y\} = \{X_1\}$. Or $\lfloor X_1 \rfloor$ et $\{X_1\}$ sont indépendantes. La réponse semble donc être oui.

Plus précisément :

$\mathbb{P}_{\lfloor X_1 \rfloor < \lfloor X_2 \rfloor}(\lfloor Y \rfloor = k) = \mathbb{P}(\lfloor X_2 \rfloor = k)$ tandis que $\mathbb{P}_{\lfloor X_1 \rfloor < \lfloor X_2 \rfloor}(\{Y\} \leq t) = \mathbb{P}(\{X_2\} \leq t)$ et enfin : $\mathbb{P}_{\lfloor X_1 \rfloor < \lfloor X_2 \rfloor}(\lfloor Y \rfloor = k, \{Y\} \leq t) = \mathbb{P}(\lfloor X_2 \rfloor = k, \{X_2\} \leq t)$. ce qui nous ramène bien à la propriété d'indépendance citée.

Conditionnellement à $\lfloor X_1 \rfloor < \lfloor X_2 \rfloor$, $\lfloor Y \rfloor$ et $\{Y\}$ sont indépendantes.

On a aussi, par symétrie l'indépendance de $\lfloor Y \rfloor$ et $\{Y\}$ conditionnellement à $\lfloor X_1 \rfloor > \lfloor X_2 \rfloor$

Compte-tenu du fait que $\lfloor Y \rfloor$ et $\{Y\}$ ne sont pas indépendantes, ce qui peut a priori sembler contre-intuitif, le résultat ci-dessus nous permet de préciser en un sens d'où vient l'absence d'indépendance : du fait que les variables X_1 et X_2 peuvent avoir la même partie entière.

- (b) On détermine rapidement les lois de Y , $\lfloor Y \rfloor$ et $\{Y\}$.

Par indépendance de X_1 et X_2 , pour $t \geq 0$, en notant F_Y la fonction de répartition de Y :

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(Y_1 \leq t) \mathbb{P}(Y_2 \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^2 = (1 - q^t)^2$$

où l'on note toujours $q = e^{-\lambda}$.

De même, pour $k \in \mathbb{N}$, puisque $\lfloor Y \rfloor = \max(\lfloor X_1 \rfloor, \lfloor X_2 \rfloor)$ et que X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lfloor Y \rfloor = k) &= \mathbb{P}(k \leq Y < k+1) \\ &= \mathbb{P}(Y < k+1) - \mathbb{P}(Y < k) \\ &= F_Y(k+1) - F_Y(k) \quad (F_Y \text{ est continue.}) \\ &= (1 - q^{k+1})^2 - (1 - q^k)^2\end{aligned}$$

Enfin, par un calcul analogue à celui de la question 3.(a), pour $t \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned}F_{\{Y\}}(t) &= \mathbb{P}(0 \leq \{Y\} < t) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(k \leq Y < k+t) \\ &= \sum_{k \geq 0} (F_Y(k+t) - F_Y(k)) \quad (F_Y \text{ est continue.}) \\ &= \sum_{k \geq 0} (1 - q^{k+t})^2 - (1 - q^k)^2 \\ &= \sum_{k \geq 0} (q^k - q^{k+t})(2 - q^k - q^{k+t}) \\ &= \sum_{k \geq 0} 2(1 - q^t)q^k - (1 - q^{2t})q^{2k} \\ &= 2 \frac{1 - q^t}{1 - q} - \frac{1 - q^{2t}}{1 - q^2}\end{aligned}$$

Enfin, pour étudier l'indépendance, il reste à calculer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lfloor Y \rfloor = k, \{Y\} \leq t) &= \mathbb{P}(k \leq Y \leq k+t) \\ &= (1 - q^{t+k})^2 - (1 - q^k)^2\end{aligned}$$

Supposons que l'égalité $\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k, \{Y\} \leq t) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k) \mathbb{P}(\{Y\} \leq t)$ ait lieu pour tout $t \in]0, 1[$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On aurait alors, en posant $k = 0$, pour tout $t \in]0, 1[$

$$(1 - q^t)^2 = p^2 \frac{2(1 - q^t) - (1 + q)(1 - q^{2t})}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{(p(2(1 - q^t) - (1 + q)(1 - q^{2t})))}{1 + q}$$

L'égalité est équivalente à $(1 + q)(1 - q^t)^2 = p(2(1 - q^t) - (1 + q)(1 - q^{2t}))$. Comme q^t prend une infinité de valeurs quand $t \in]0, 1[$, on peut alors identifier des polynômes :

On a alors $(1 + q)(X - 1)^2 = p((1 - X) + (1 + q)(1 - X^2))$.

C'est absurde, il suffit de considérer le terme en X^2 .

Ainsi les variables $[Y]$ et $\{Y\}$ ne sont donc pas indépendantes.

Exercice sans préparation S11

Soit u_0 une fonction dérivable sur \mathbb{R} et soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 vérifiant le système

$$(S) \begin{cases} \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 u(x, t) + \partial_2 u(x, t) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $f_{y_0} : y \mapsto u(y + y_0, y)$ est constante sur \mathbb{R} .
 2. En déduire que (S) admet une unique solution qu'on exprimera en fonction de u_0 .
-

Solution :

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. La fonction f_{y_0} est dérivable sur \mathbb{R} par composition et :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f'_{y_0}(y) = \partial_1 u(y + y_0, y) + \partial_2 u(y + y_0, y) = 0.$$

La fonction f_{y_0} est donc constante sur \mathbb{R} .

2. D'après la question précédente,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, u(x, t) = u(t + (x - t), t) = f_{x-t}(t) = f_{x-t}(0) = u(x - t, 0) = u_0(x - t).$$

On a ainsi démontré que si u est solution de (S) alors u est la fonction $(x, t) \mapsto u_0(x - t)$.

Réciproquement, il est facile de vérifier que la fonction $(x, t) \mapsto u_0(x - t)$ admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 et vérifie (S).

(S) admet comme unique solution $(x, t) \mapsto u_0(x - t)$.

SUJET S12

Exercice principal S12

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : donner la définition d'une fonction convexe.
2. Soit X une variable aléatoire réelle centrée telle que $|X| \leq 1$.

(a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in [-1, 1], e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

(b) En déduire les inégalités suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|X_n| \leq c_n$ (où $c_n > 0$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(\exp(tS_n)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2\right)$.

(b) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t > 0, \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2\right).$$

(c) En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

(d) Montrer alors l'inégalité suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

Solution :

1. Programme ECS 1 (page 20)
2. (a) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$. Puisque la fonction \exp est convexe et puisque :

$$\frac{1-x}{2} \in [0, 1], \frac{1+x}{2} \in [0, 1] \text{ et } \frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = 1,$$

il vient que :

$$\boxed{\frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t \geq \exp\left(\frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t\right) = e^{tx}.$$

- (b) Puisque X est une variable aléatoire bornée, elle admet une espérance. D'après la question précédente, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t.$$

Par croissance de l'espérance, on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Remarquons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n)! \geq 2^n n!$ (peut se prouver par récurrence), donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).}$$

3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées telles que $|X_n| \leq c_n$ (où $c_n > 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\exp(tS_n) = \exp(tX_1) \dots \exp(tX_n)$ et puisque les variables aléatoires $\exp(tX_1), \dots, \exp(tX_n)$ sont indépendantes, $\exp(tS_n)$ admet une espérance (les X_k sont bornés donc admettent une espérance, donc les $\exp(tX_k)$ aussi) et :

$$\mathbb{E}(\exp(tS_n)) = \mathbb{E}(\exp(tX_1)) \dots \mathbb{E}(\exp(tX_n)).$$

En appliquant la formule précédente à toutes les variables aléatoires $\frac{X_k}{c_k}$ (elles sont bien centrées et bornées par 1), on trouve :

$$\forall k \in [1, n], \mathbb{E}(\exp(tX_k)) = \mathbb{E}\left(\exp\left((tc_k)\frac{X_k}{c_k}\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2 c_k^2}{2}\right).$$

On en déduit le résultat en multipliant ces n inégalités.

$$\boxed{\mathbb{E}(\exp(tS_n)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2\right).}$$

- (b) Soit $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Remarquons que $[S_n > \varepsilon] \subset [\exp(tS_n) \geq \exp(t\varepsilon)]$ par croissance de \exp sur \mathbb{R}_+^* . L'inégalité de Markov ($\exp(tS_n) \geq 0$) assure que :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\exp(tS_n) \geq \exp(t\varepsilon)) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2\right).}$$

- (c) L'étude de la fonction du second degré $f : t \mapsto at^2 - \varepsilon t$ où $a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2$ montre qu'elle atteint un minimum en $t = \frac{\varepsilon}{2a}$. Par croissance de la fonction \exp sur \mathbb{R} , on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(f\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4a}\right) = \boxed{\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right)}.$$

- (d) Puisque les $-X_k$ vérifient les mêmes propriétés que les X_k , la propriété précédente est encore vraie en remplaçant la variable aléatoire S_n par $-S_n$. Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n > \varepsilon) \leq \boxed{2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right)}.$$

Exercice sans préparation S12

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r avec $0 \leq r < n$.

Déterminer le plus petit entier p tel qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang p telle que $A+B$ soit inversible.

Solution :

Réponse $p = n - r$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r .

Il existe donc une famille libre de r colonnes de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notons-les $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_r}$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_r$

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_r}))$$

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille $(C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_r})$ en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe donc des colonnes $C'_{r+1}, C'_{r+2}, \dots, C'_n$ telles que :

$$(C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_r}, C'_{r+1}, C'_{r+2}, \dots, C'_n) \text{ soit une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Pour obtenir une matrice B de rang $n - r$ telle que $A + B$ soit de rang n , il suffit de prendre une matrice B ayant des colonnes nulles en positions i_1, i_2, \dots, i_r , et sur $n - r$ autres colonnes quelconques placer des colonnes de type $C'_k - C_k$ où C_k est la colonne k de A , et C'_k est la colonne issue de la base précédente, les $n - r$ colonnes restantes étant nulles.

La matrice $M + M'$ aura alors parmi ses colonnes exactement n colonnes qui forment une famille libre donc $A + B$ est de rang n .

- Soit B est une matrice de rang strictement inférieur à $n - r$. Si l'on note f et g les applications linéaires induites par A et B dans la base canonique

$\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ (Si $y \in \text{Im}(f+g)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x) + g(x) \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$)

Ainsi $\dim(\text{Im}(f+g)) \leq \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) \leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g))$

On obtient donc que $\text{rg}(A+B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B) < n$, donc $A+B$ n'est pas inversible.

- Conclusion Le rang minimal de B pour que $A+B$ soit inversible vaut $n - r$.

SUJET S13

Exercice principal S13

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle *norme* sur E une application N de E dans \mathbb{R}_+ vérifiant les trois conditions suivantes :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (Séparation)
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$; (Semi-homogénéité positive ou simplement homogénéité)
- $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$. (Inégalité triangulaire)

On pourrait montrer facilement que :

- la valeur absolue est une norme sur \mathbb{R} .
- Dans un espace euclidien $\|x\| = \sqrt{\langle x; x \rangle}$ est une norme, appelée norme euclidienne.
- N_∞ définie, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $N_\infty((x, y)) = \sup(|x|, |y|)$ est une norme sur \mathbb{R}^2 .

Soit une application $\varphi : E \rightarrow F$ où (E, N_E) et (F, N_F) sont deux espaces vectoriels et N_E et N_F sont deux normes sur respectivement E et F .

On dit que φ est une isométrie si et seulement si $\forall (x_1, x_2) \in E^2, N_F(\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) = N_E(x_1 - x_2)$.

1. **Cours** Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace euclidien.
2. On munit \mathbb{R}^2 de la norme N_∞ définie plus haut et \mathbb{R} de la norme définie par la valeur absolue usuelle.
Montrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, \sin(t)) \end{cases}$ est une isométrie non linéaire.
3. Soient \mathbb{H} un espace euclidien munie de la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\langle x; x \rangle}$ et φ une isométrie de \mathbb{R} dans \mathbb{H} s'annulant en 0.

(a) Soit $(x_1, x_2) \in (\mathbb{H} \setminus \{0\})^2$ tel que $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_1 = \lambda x_2$.

(b) Montrer que $\forall t \in [1, +\infty[, \varphi(t) = t\varphi(1)$.

(c) En déduire que φ est linéaire et commenter.

4. Soient \mathbb{H} un espace euclidien munie de la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\langle x; x \rangle}$ et ψ une application de \mathbb{H} dans \mathbb{H} .

On suppose que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{H}^2 \quad \langle \psi(x); \psi(y) \rangle = \langle x; y \rangle$$

(a) Soit $(x, y) \in \mathbb{H}^2$. Déterminer $\|\psi(x + y) - \psi(x) - \psi(y)\|$.

(b) En déduire que ψ est linéaire.

(c) Montrer que ψ est une isométrie.

Solution :

1. ECS2 p7
2. Soit $(t, x) \in \mathbb{R}^2$

$$N_\infty(f(t) - f(x)) = \sup(|\sin t - \sin x|, |t - x|)$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, le cos étant borné par 1, nous avons

$$|\sin t - \sin x| \leq |t - x| \quad \text{et donc}$$

$$N_\infty(f(t) - f(x)) = |t - x|.$$

De plus f n'est pas linéaire, par exemple $f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

f est une isométrie non linéaire

3. (a) Soit $(x_1, x_2) \in (\mathbb{H} - \{0\})^2$.

$$\|x_1 + x_2\|^2 = (\|x_1\| + \|x_2\|)^2 \Leftrightarrow \langle x_1; x_2 \rangle = \|x_1\| \|x_2\|$$

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$P(t) = \|x_1 + tx_2\|^2 = \|x_1\|^2 + 2t\langle x_1; x_2 \rangle + t^2 \|x_2\|^2$$

P est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est nul donc $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(t_0) = 0$ ie $\|x_1 + t_0x_2\| = 0$.

Ainsi $x_1 = -t_0x_2$. De plus $\langle x_1; x_2 \rangle = \|x_1\| \|x_2\| \Rightarrow -t_0 \|x_2\|^2$, donc $t_0 < 0$ (x est non nul).

donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_1 = \lambda x_2$.

(b) $\forall t \in [0, +\infty[$

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| = \|\varphi(t)\| = |t| = t$$

Soit $t \in]1, +\infty[$ $\|\varphi(t) - \varphi(1)\| = |t - 1| = t - 1 > 0$ donc les vecteurs sont non nuls et nous avons

$$\|\varphi(t)\| = \|\varphi(t) - \varphi(1)\| + \|\varphi(1)\| \text{ donc } \exists \lambda > 0$$

$$\varphi(t) - \varphi(1) = \lambda\varphi(1) \Rightarrow \varphi(t) = (1 + \lambda)\varphi(1)$$

or

$$\|\varphi(t)\| = t = (1 + \lambda) \|\varphi(1)\| \Rightarrow t = (1 + \lambda)$$

Ainsi

$$\forall t \in [1, +\infty[, \varphi(t) = t\varphi(1).$$

(c) De même si $t \in]0, 1[$ $\|\varphi(1)\| = \|\varphi(1) - \varphi(t)\| + \|\varphi(t)\|$ vecteurs non nuls et cas d'égalité dans 3.a.
si $t \in \mathbb{R}^{-*}$ $\|\varphi(1) - \varphi(t)\| = \|\varphi(1)\| + \|-\varphi(t)\|$ vecteurs non nuls et cas d'égalité de 3.a

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = t\varphi(1).$$

L'égalité étant triviale en 0 et 1, φ est ainsi linéaire Les isométries de \mathbb{R} dans \mathbb{H} sont linéaires

4. (a)

$$\begin{aligned} \|\psi(x+y) - \psi(x) - \psi(y)\|^2 &= \langle \psi(x+y) - \psi(x) - \psi(y); \psi(x+y) - \psi(x) - \psi(y) \rangle \\ &= \langle \psi(x+y); \psi(x+y) \rangle - \langle \psi(x+y); \psi(x) \rangle - \langle \psi(x+y); \psi(y) \rangle - \langle \psi(x); \psi(x+y) \rangle + \\ &= \langle \psi(x); \psi(x) \rangle + \langle \psi(x); \psi(y) \rangle - \langle \psi(y); \psi(x+y) \rangle + \langle \psi(y); \psi(x) \rangle + \langle \psi(y); \psi(y) \rangle \\ &= \langle x+y; x+y \rangle - \langle x+y; x \rangle - \langle x+y; y \rangle - \langle x; x+y \rangle \\ &= \langle x; x \rangle + \langle x; y \rangle - \langle y; x+y \rangle + \langle y; x \rangle + \langle y; y \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$$

(b) Soit $(x, \lambda) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \|\psi(\lambda x) - \lambda\psi(x)\|^2 &= \langle \psi(\lambda x) - \lambda\psi(x); \psi(\lambda x) - \lambda\psi(x) \rangle \\ &= \langle \psi(\lambda x); \psi(\lambda x) \rangle - \lambda\langle \psi(\lambda x); \psi(x) \rangle - \lambda\langle \psi(x); \psi(\lambda x) \rangle + \lambda^2\langle \psi(x); \psi(x) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ψ est linéaire

(c) Soit $(x, y) \in \mathbb{H}^2$

$$\|\psi(x) - \psi(y)\|^2 = \|\psi(x-y)\|^2 = \langle \psi(x-y); \psi(x-y) \rangle = \|x-y\|^2$$

ψ est une isométrie.

Exercice sans préparation S13

Soient X et Y deux variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{N}^* indépendantes, ayant la même loi et vérifiant :

$$\mathbb{P}(XY = 27) = \mathbb{P}(XY = 11) = \mathbb{P}(X + Y = 12) > 0.$$

Montrer que $\mathbb{P}(X = 11) = \mathbb{P}(X = 27)$.

Solution :

$$\bullet \mathbb{P}(XY = 11) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 11) + \mathbb{P}(X = 11 \text{ et } Y = 1) = 2\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(X = 11).$$

$$\begin{aligned} \bullet \mathbb{P}(X + Y = 12) &= \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 11) + \mathbb{P}(X = 11 \text{ et } Y = 1) + \sum_{k=2}^{10} \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = 12 - k) \\ &= 2\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(X = 11) + \sum_{k=2}^{10} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(X = 12 - k). \end{aligned}$$

L'égalité $\mathbb{P}(X + Y = 12) = \mathbb{P}(XY = 11)$ implique donc que $\sum_{k=2}^{10} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(X = 12 - k) = 0$.

Comme c'est une somme de réels positifs, cela donne $\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(X = 12 - k) = 0$ pour $2 \leq k \leq 10$.

En particulier $\mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(X = 9) = 0$.

$$\bullet \mathbb{P}(XY = 27) = 2\mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(X = 9) + 2\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(X = 27) = 2\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(X = 27).$$

Par égalité de $\mathbb{P}(XY = 27) = \mathbb{P}(XY = 11)$ on en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(X = 27) = \mathbb{P}(X = 11)}$ ($\mathbb{P}(X = 1) \neq 0$).

SUJET S14

Exercice principal S14

Soit \mathcal{E} l'ensemble des fonctions continues par morceaux, continues à gauche et bornées sur $[0, 1[$.
Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit \mathcal{H}_δ l'ensemble des fonctions f définies sur $[0, 1[$ telles que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\delta.$$

On considère les applications $\phi : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x) \, dx \quad \text{et} \quad \psi : (f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x) \, dx .$$

1. Question de cours : projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel, définition, caractérisation par la distance.
2. Montrer que ψ définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$. On admet que ϕ définit un produit scalaire \mathcal{E} . On suppose l'espace \mathcal{E} muni de ce produit scalaire.
On notera désormais $\phi(f, g) = \langle f, g \rangle$.
3. (a) Montrer que pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{H}_\delta \subset \mathcal{E}$.

(b) Caractériser \mathcal{H}_δ si $\delta > 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé.

On note \mathcal{E}_k le sous-ensemble de \mathcal{E} formé des fonctions constantes sur chaque intervalle de la forme $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}[$, où $j \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$.

4. Montrer que \mathcal{E}_k est un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} et proposer une base orthonormée de cet espace.
5. On pose alors :

$$h = \mathbb{1}_{[0, 1[}, \quad g = \mathbb{1}_{[0, 1/2[} - \mathbb{1}_{[1/2, 1[}$$

et pour $\ell \geq 0$ et $j \in \{0, \dots, 2^\ell - 1\}$,

$$g_{\ell, j} : x \in [0, 1[\mapsto 2^{\ell/2} g(2^\ell x - j) .$$

Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $g_{\ell, j}(x)$ est non nul ?

6. Montrer que

$$\mathcal{B} = \{h\} \cup \bigcup_{\ell=0}^{k-1} \{g_{\ell, 0}, \dots, g_{\ell, 2^\ell - 1}\}$$

est une base orthonormée de \mathcal{E}_k .

7. Soit $f \in \mathcal{H}_\delta$. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathcal{E}_k$ tel que $\| \gamma - f \| \leq 2^{-k\delta}$.

8. En déduire que $\left\| \langle h, f \rangle h + \left(\sum_{\ell=0}^k \sum_{j=0}^{2^\ell - 1} \langle f, g_{\ell, j} \rangle g_{\ell, j} \right) - f \right\| \leq 2^{-k\delta}$.

Solution :

1. Programme ECS2, page 17.

2. ϕ est bien bilinéaire et symétrique.

$$\text{Si } \langle \phi(f), \phi(f) \rangle = 0. \quad \int_0^1 f^2(x) \, dx = 0.$$

Si l'on suppose que f est continue, comme f^2 est positive et continue, on obtient bien $f^2 = 0$ puis $f = 0$.

ϕ définit un produit scalaire.

3. (a) Soit $\delta > 0$ et $f \in \mathcal{H}_\delta$.

Soit x fixé de $[0, 1]$ Par encadrement $\lim_{y \rightarrow x} |f(x) - f(y)| = 0$, donc f est continue en tout point y de \mathbb{I} .

Pour $\delta > 0$, $\mathcal{H}_\delta \subset \mathcal{E}$.

(b) Si $\delta > 1$, soit $f \in \mathcal{H}_\delta$. $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq |x - y|^{\delta-1}$. Donc par encadrement la limite du taux d'accroissement est nulle, et donc la dérivée est nulle en tout point y . Ainsi, f est constante.

Réciproquement, toute fonction de \mathcal{H}_δ est constante.

Pour $\delta > 1$, \mathcal{H}_δ est l'ensemble des fonctions constantes sur $[0, 1[$.

4. On a bien $\mathcal{E}_k \subset \mathcal{E}$.

Soit $f_{j,k}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}[$.

$\mathcal{E}_k = \text{vect}\{f_{j,k}, 0 \leq j \leq 2^{k-1}\}$.

En effet toute fonctions constante sur ces intervalles disjoints se décompose en la somme d'indicatrices.

Donc \mathcal{E}_k est un sous espace vectoriel de \mathcal{E} .

Et cette famille est bien orthogonale (puisque si $i \neq j$, $\forall x \in [0, 1]$, $f_{j,k}(x)f_{i,k}(x) = 0$).

On a de plus $\|f_{i,k}^2(x)\| = \int_0^1 f_{i,k}^2(x) dx = \int_{i2^{-k}}^{(i+1)2^{-k}} 1 dx = \frac{1}{2^k}$.

On propose comme base orthonormée la famille $\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2^k}} \mathbb{1}_{[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}[}, 0 \leq j \leq 2^{k-1} \right\}$.

$\dim(\mathcal{E}_k) = 2^k$.

5. La fonction g est nulle sur \mathbb{R}_- et sur $[1, +\infty[$ (et vaut soit 1 soit -1 sur $[0, 1]$).

Or, $0 \leq 2^\ell x - j < 1$ ssi $j2^{-\ell} \leq x < (j+1)2^{-\ell}$. $g_{\ell,j}(x) \neq 0$ ssi $x \in [j2^{-\ell}, (j+1)2^{-\ell}[$.

6. * $g^2(x) = 1$ pour tout x de $[0, 1[$, donc h^2 est constant sur son support et vaut $(2^{\ell/2})^2 = 2^\ell$.

Ainsi $\langle g_{\ell,j}, g_{\ell,j} \rangle = \int_{j2^{-\ell}}^{(j+1)2^{-\ell}} 2^\ell dx = 1$.

* De même $\langle h, h \rangle = 1$.

* Sinon, $\langle h, g_{\ell,j} \rangle = \int_{j2^{-\ell}}^{(j+1)2^{-\ell}} g_{\ell,j}(x) dx = 0$. (on intègre une fonction qui vaut 1 et -1 sur des intervalles de longueurs identiques)

* Pour calculer $\langle g_{\ell,j}, g_{\ell',j'} \rangle$:

Si $\ell = \ell'$ et $j \neq j'$, les supports des fonctions sont disjoints, $\langle g_{\ell,j}, g_{\ell',j'} \rangle = 0$.

Si $\ell > \ell'$, on a deux possibilités :

Ou bien les supports de $g_{\ell',j'}$ et de $g_{\ell,j}$ sont disjoints, et dans ce cas $\langle g_{\ell,j}, g_{\ell',j'} \rangle = 0$.

Ou bien le support de $g_{\ell,j}$ est entièrement dans celui de $g_{\ell',j'}$, et dans une des deux moitiés du support.

Dans ce cas là, la fonction $g_{\ell',j'}$ est constante sur le support de $g_{\ell,j}$, et vaut soit 1, soit -1.

Et dans ce cas $\langle g_{\ell,j}, g_{\ell',j'} \rangle = \int_{j2^{-\ell}}^{(j+1)2^{-\ell}} g_{\ell',j'} g_{\ell,j}(x) dx = \pm 2^{\ell'/2} \int_{j2^{-\ell}}^{(j+1)2^{-\ell}} g_{\ell,j}(x) dx = 0$.

(car sur son support $g_{\ell,j}$ vaut -1, puis 1)

Finalement la famille proposée est bien orthonormée.

Son cardinal vaut $1 + \sum_{\ell=0}^{k-1} 2^\ell = 1 + \frac{1-2^k}{1-2} = 2^k$.

Elle est bien incluse dans \mathcal{E}_k , les fonctions proposées sont bien constantes sur les intervalle proposés (car $j2^{-\ell-1} = 2^{-k}(j2^{k-1-\ell})$ est bien un multiple de 2^{-k} quand $\ell \leq k-1$).

On a une base orthonormée de \mathcal{E}_k .

7. Soit $f \in \mathcal{H}_\delta$.

On construit la fonction γ de la manière suivante :

$\gamma(x) = f(j2^{-k})$ pour tout $x \in [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}[$.

On a alors, pour tout $x \in [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}[$, $|\gamma(x) - f(x)| \leq |x - j2^{-k}|^\delta \leq (2^{-k})^\delta$.

Finalement, pour tout $x \in [0, 1[$, $|\gamma(x) - f(x)| \leq 2^{-k\delta}$.

Donc $\|\gamma - f\|^2 = \int_0^1 (\gamma(x) - f(x))^2 dx \leq \int_0^1 (2^{-k\delta})^2 dx$.

Finalement $\|\gamma - f\|^2 \leq 2^{-k\delta}$.

8. On a une base orthonormée de \mathcal{E}_k .

On reconnaît la formule du projecteur orthogonal dans cette base orthonormée :

$$p(f) = \langle f, h \rangle h + \sum_{\ell=0}^k \sum_{j=0}^{2^\ell-1} \langle f, g_{\ell,j} \rangle g_{\ell,j}.$$

Comme γ est dans \mathcal{H}_δ , on a bien $\|p(f) - f\| \leq \|\gamma - f\| \leq 2^{-k\delta}$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left\| \langle h, f \rangle h + \left(\sum_{\ell=0}^k \sum_{j=0}^{2^\ell-1} \langle f, g_{\ell,j} \rangle g_{\ell,j} \right) - f \right\| \leq 2^{-k\delta}$.

Exercice sans préparation S14

Une expérience consiste à effectuer dans une urne de n boules distinctes (numérotées de 1 à n) des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on décide de s'arrêter.

Le programme scilab suivant reproduit cette expérience N_{exp} fois :

```
Nexp = 1000; n = 100; Tot = 0;
for k = 1:Nexp
    time = 0;
    obt = [];
    while (length(obt)<n)
        time = time+1;
        i = int(n*rand()+1);
        U = find(obt==i);
        if (length(U)==0) then
            obt=[obt,i]
        end
    end
    Tot = Tot+time;
end
disp(Tot/Nexp)
```

On rappelle les commandes Scilab suivantes :

`find(L==i)` renvoie pour une la matrice des indices k tels que $L(k)$ soit égal à i .

`length(A)` renvoie le nombre d'éléments de la matrice A .

1. Déterminer, pour chaque expérience, un protocole expliquant la condition d'arrêt des tirages. Que représente la valeur affichée à l'issue du programme?
2. Montrer que cette valeur est équivalente à $n \ln n$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. Pour chaque expérience, on arrête les tirages quand tous les numéros ont été obtenus (les numéros déjà obtenus sont stockés dans le tableau `obt`)

Le programme Scilab proposé reproduit l'expérience indiquée 1000 fois pour une valeur de n égal à 10.

La valeur affichée à l'issue du programme représente

la valeur moyenne du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules.

2. Soit alors V la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois et soit T_i le numéro de tirage lorsque i boules différentes ont été tirées au moins une fois. En notant $V_i = T_i - T_{i-1}$ et $V_1 = 1$, on a $V = V_1 + \dots + V_n$. Or, V_i est égal au nombre de tirage pour tirer une des $n - (i - 1)$ boules qui n'ont pas encore été tirées. V_i suit donc une loi géométrique de paramètre

$$p_i = \frac{n - (i - 1)}{n}$$

D'où

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(V_1) + \dots + \mathbb{E}(V_n) = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n - i + 1} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Par une comparaison série intégrale classique En particulier $\mathbb{E}(V) \sim n \ln n$ quand n tend vers l'infini.

SUJET S15

Exercice principal S15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soient A et B deux matrices de E . On définit une application u de E dans E par

$$u : M \mapsto AM - MB.$$

On suppose dans toute la suite que A et B sont diagonalisables à valeurs propres respectivement égales à $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(\mu_i)_{1 \leq i \leq p}$.

1. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation pour un endomorphisme.
2. Vérifier que u est un endomorphisme de E .
3. Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}$, $\lambda_i - \mu_j$ est une valeur propre de u .
Indication : on pourra commencer par montrer que μ_j est aussi une valeur propre de ${}^t B$
4. Montrer que $(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_m I) = 0$.
5. Soit λ une valeur propre de u et T un vecteur propre associée.
 - (a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(A)T = TP(\lambda I + B)$.
 - (b) En déduire qu'il existe $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}$ tel que $\lambda = \lambda_i - \mu_j$.
6. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de u .
7. Montrer que u est diagonalisable.

Solution :

1. Cours ECS2 page 7.
2. Aisé
3. Comme $\text{rg}((B - \mu_j I_n)) = \text{rg}({}^t(B - \mu_j I_n)) = \text{rg}({}^t B - \mu_j I_n)$, μ_j est aussi une valeur propre de ${}^t B$.
Soit $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nul tel que $YB = \mu_j Y$ (on utilise le fait que \cdot Soit également $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda_i X$. En posant $T = XY$, on constate alors que

$$u(T) = AT - TB = \lambda_i XY - \mu_j XY$$

Comme $T = (x_{i,1}y_{j,1})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$, en choisissant un coefficient de X et un coefficient de Y non nuls, on obtient que T n'est pas la matrice nulle.

Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}$, $\lambda_i - \mu_j$ est une valeur propre de u

4. On constate que $(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0$ lorsque $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale. Le résultat reste vrai lorsque A est semblable à $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ par les propriétés usuelles de la similitude.

$$(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0$$

5. (a) On a $AT = T(\lambda I + B)$ puis par récurrence sur k , la formule demandée est vraie pour $P(X) = X^k$. Elle est ensuite vraie pour tous les polynôme par linéarité.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(A)T = TP(\lambda I + B)$.

- (b) On applique ensuite le résultat de la question précédente au polynôme

$$P(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_m)$$

ce qui donne

$$T(\lambda I + B - \lambda_1 I) \dots (\lambda I + B - \lambda_m I) = 0$$

En particulier, la matrice

$$S = (B + (\lambda - \lambda_1)I) \dots (B + (\lambda - \lambda_n)I)$$

n'est pas inversible (car $T \neq 0$).

Donc, il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $B + (\lambda - \lambda_i)I$ soit non inversible.

Donc $\lambda_i - \lambda$ est une valeur propre de B et donc il existe $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\lambda_i - \lambda = \mu_j$

Il existe $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}$ tel que $\lambda = \lambda_i - \mu_j$.

6. $\text{sp}(u) = \{\lambda_i - \mu_j, (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}\}.$

7. On ne peut pas conclure avec le nombre de valeurs propres. Construisons une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres.

Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A

B étant diagonalisable, ${}^t B$ l'est aussi.

On note $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tel que ${}^t Y_j$ soit un vecteur propre de ${}^t B$.

Avec les calculs de 3. $X_i Y_j$ est un vecteur propre de u .

Il suffit de montrer que la famille $(X_i Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est libre (elle est bien de cardinal n^2)

Si $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} X_i Y_j = 0$ alors $\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_i) Y_j = 0$

On a envie de dire que chacun des $(\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_i) = 0$ car la famille des Y_j est libre. Mais cela ne marche à priori qu'avec des scalaires.

On note alors $x_{i,k}$ la k -ième coordonnée de X_i

La k ième ligne de $\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_i) Y_j = 0$ vaut donc $\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} x_{i,k}) Y_j$

Cette ligne est nulle, et donc comme les Y_j forment une famille libre :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} x_{i,k} = 0$$

Ce qui donne $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_i = 0$ et finalement :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_{i,j} = 0.$$

On a construit une base de vecteurs propres pour u .

Ainsi u est bien diagonalisable.

Exercice sans préparation S15

On considère une expérience consistant à lancer une pièce équilibrée n fois de manière consécutive. L'expérience en question est simulée par le programme Scilab ci-dessous pour la valeur $n = 10$ (et répétée ici 1000 fois) :

```
Nexp = 1000;
n = 10;
u = floor(2*rand(n,Nexp))+1;
test = 0;
for k = 1:Nexp
    ok = 1;
    for i = 2 : n
        if (u(i-1,k)==1) & (u(i,k)==1) then
            ok = 0;
        end
    end
    test = test+ok;
end
Pn = test/Nexp;
disp(Pn)
```

1. De quel évènement E_n la variable Pn représente-t-elle la fréquence d'apparition ?
2. On note pour $n \geq 1$, P_n la probabilité de l'évènement E_n .
Soit $n \geq 3$, trouver une relation entre P_n , P_{n-1} et P_{n-2} .
3. Montrer que (P_n) est décroissante et trouver sa limite quand n tend vers l'infini.

Solution :

1. Cette expérience consiste à calculer la probabilité que sur $n = 10$ tirages, il n'y ait pas deux piles consécutifs.
2. Soit S_n le résultat du lancer n et E_n l'évènement 'deux piles successifs n'apparaissent pas dans les n lancers'.
Pour $n \geq 3$:

$$\mathbb{P}(E_n \cap \{S_n = F\}) = \mathbb{P}(E_{n-1} \cap \{S_n = F\}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(E_{n-1})$$

et

$$\mathbb{P}(E_n \cap \{S_n = P\}) = \mathbb{P}(E_{n-2} \cap \{S_{n-1} = F\} \cap \{S_n = P\}) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(E_{n-2})$$

On a donc, par la formule des probabilités totales la relation

$$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2}$$

avec $P_1 = 1$ et $P_2 = 3/4$

3. On peut montrer ensuite que P_n est décroissante (et minorée). En effet,

$$P_{n-1} = \frac{1}{2}P_{n-2} + \frac{1}{4}P_{n-3} \geq \frac{1}{2}P_{n-2}$$

ce qui implique que

$$P_n \leq \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}(2P_{n-1}) = P_{n-1}$$

(On peut aussi montrer $P_{n+1} \leq P_n$ par récurrence double, voire calculer la suite explicitement.)

Par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient alors nécessairement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$
vaut 0.

SUJET S16

Exercice principal S16

1. Question de cours : énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Déterminer trois réels a , b , et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}, \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)}.$$

4. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs.

- (a) On suppose qu'on dispose d'une fonction Scilab \mathbf{a} telle que pour tout entier naturel n non nul, $\mathbf{a}(n)$ soit égal à a_n . Écrire en Scilab une fonction prenant en argument un entier n et renvoyant la somme

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k}. \text{ On cherchera à limiter au maximum le nombre d'appels à la fonction } \mathbf{a}.$$

- (b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^2(n+1)^2}{4} \leq (a_1 + \dots + a_n) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}.$$

- (c) On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$ est convergente. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{a_1 + \dots + a_n}$ converge et qu'il existe un réel $K > 0$ ne dépendant pas de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leq K \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Solution :

1. Programme ECS 2 (page 7)
2. On trouve sans difficulté que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}, \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

La série converge $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)^2}$ par comparaison à la série de Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$. D'après la question précédente, on a (les deux autres séries ci-dessous convergent) :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \int_{k+1}^{+\infty} \frac{dx}{t^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

On a fait une comparaison série-intégrales, en remarquant que $\frac{1}{(n+1)^2} \geq \int_{n+2}^{n+1} \frac{dt}{t^2}$

Ainsi $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)}$

```

4. (a) fonction s = somme(n)
      denominateur = 0
      s = 0
      for k = 1:n
        denominateur = denominateur + a(k)
        s = s + k/denominateur
      end
    endfunction

```

(b) On considère les vecteurs $x = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ et $y = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{n}{\sqrt{a_n}}\right)$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve que $\langle x; y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$, i.e. :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k} \frac{k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k} \right).$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

On obtient $\frac{n}{(\sum_{k=1}^n a_k)} \leq \frac{4}{n(n+1)^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k} \right)$.

On somme alors

$$\sum_{n=1}^N \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leq \sum_{n=1}^N \left(\frac{4}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{4k^2}{a_k} \sum_{n=k}^N \frac{1}{n(n+1)^2}$$

(inversion de somme)

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)^2}$ est à termes positifs, $\sum_{n=k}^N \frac{1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On trouve alors :

$$\sum_{n=1}^N \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leq \sum_{k=1}^N \frac{4k}{a_k(k+1)} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k} \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Puisque la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n}{a_1 + \dots + a_n}$ est à termes positifs, elle converge (en vertu du théorème de la limite monotone), et par passage à la limite, on trouve bien le résultat attendu avec $K = 4$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Exercice sans préparation S16

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soient F_X et F_Y leurs fonctions de répartition. On dit que Y domine stochastiquement X lorsque :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Y(t) \leq F_X(t)$$

On note alors :

$$X \prec Y$$

1. Montrer que si $0 < \lambda < \mu$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ alors on a : $X \prec Y$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $0 \leq p < q \leq 1$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$ alors on a : $X \prec Y$.

Solution :

1. On remarque d'abord que pour des variables aléatoires à valeurs entières on a

$$X \prec Y \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad F_Y(n) \leq F_X(n)$$

En effet : Si $X \prec Y$ alors $\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Y(t) \leq F_X(t)$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_Y(n) \leq F_X(n)$$

Réciproquement :

La v.a. X étant supposée à valeurs entières on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad [X \leq t] = [X \leq [t]]$$

Il en résulte que pour tout réel t positif (en posant $n = [t]$) :

$$F_Y(t) = F_Y(n) \leq F_X(n) = F_X(t)$$

et comme par ailleurs $F_Y(t) = F_X(t) = 0$ pour tout réel $t < 0$ on a finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Y(t) \leq F_X(t)$$

Soit donc n un entier fixé quelconque. On a :

$$F_X(n) = P([X \leq n]) = \sum_{k=0}^n P([X = k]) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Soit f_n la fonction définie pour tout réel t par :

$$f_n(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$$

On a ainsi

$$F_X(n) = f_n(\lambda) \quad \text{et} \quad F_Y(n) = f_n(\mu)$$

f_n est dérivable sur \mathbb{R} et on a, pour tout réel t :

$$f'_n(t) = -e^{-t} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + e^{-t} \sum_{k=1}^n \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

soit, après un glissement d'indice :

$$f'_n(t) = -e^{-t} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} = -e^{-t} \frac{t^n}{n!}$$

Il s'ensuit que pour tout réel t positif :

$$f'_n(t) = -e^{-t} \frac{t^n}{n!} \leq 0$$

La fonction f_n est donc décroissante sur \mathbb{R}^+ et puisque par hypothèse $0 < \lambda < \mu$ on a $f_n(\mu) \leq f_n(\lambda)$ soit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_Y(n) \leq F_X(n)$$

Bilan :

$$\boxed{X \prec Y}$$

2. Une idée (par couplage) est de construire deux variables aléatoires X et Y telles que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p), \quad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q) \quad \text{et} \quad P([X \leq Y]) = 1$$

Pour cela on peut considérer des v.a. X_1, \dots, X_n indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p .

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on construit alors la v.a. Y_i en posant :

- Si $X_i = 1$ alors $Y_i = 1$.
- Si $X_i = 0$ alors $Y_i = 1$ avec probabilité $\frac{q-p}{1-p} \in [0, 1]$ (car $p \leq q$).

Formellement on peut poser :

$$Y_i = X_i + (1 - X_i) \mathbf{1}_{[U_i \leq \frac{q-p}{1-p}]}$$

où U_i est indépendante de X_i et suit la loi uniforme à densité sur $[0, 1]$.

On a alors $Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P([Y_i = 1]) = p + (1-p) \frac{q-p}{1-p} = q$.

Il s'ensuit que Y_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(q)$ et on a : $P([X_i \leq Y_i]) = 1$.

On pose alors :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i$$

et on a bien :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p), \quad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q) \quad \text{et} \quad P([X \leq Y]) = 1$$

En effet $(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq Y_i\}) \subset \{X \leq Y\}$, donc $\prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq Y_i) \leq \mathbb{P}(X \leq Y)$

Or, les événements $\{X_i \leq Y_i\}$ sont indépendants par le lemme des coalitions donc $1 \leq \mathbb{P}(X \leq Y)$

Il en résulte que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Y(t) \leq F_X(t) \quad \text{et ainsi} \quad X \prec Y}$$

SUJET S17

Exercice principal S17

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note \mathcal{E} l'ensemble des variables aléatoires X à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k) \neq 0$ et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective et soit a un réel. On considère l'ensemble \mathcal{E}_a des variables aléatoires de \mathcal{E} telles que $\mathbb{E}(f(X)) = a$, qu'on suppose non vide.

Pour toute variable aléatoire X de \mathcal{E} , on note :

$$H(X) = - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \ln(\mathbb{P}(X = k)).$$

Soit U une variable aléatoire de \mathcal{E} suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Question de cours : énoncer le théorème du transfert pour les variables aléatoires discrètes infinies.
2. Calculer $H(U)$.
3. Justifier que la fonction \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* .
4. En déduire que, pour tout $X \in \mathcal{E}$, $H(X) \leq H(U)$.
5. Montrer que la fonction ci-dessous est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=1}^n (f(k) - a) e^{(f(k)-a)x} \end{aligned}$$

6. Pour tout $X \in \mathcal{E}_a$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. En considérant H comme une fonction de (p_1, \dots, p_n) , déterminer la hessienne de H .
7. En déduire que si H admet un extremum local sur \mathcal{E}_a , c'est en un unique point. Est-ce un maximum ou un minimum ?

Solution :

1. Programme ECS 1 (page 23)
2. $H(U) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln n \boxed{= \ln n}$.
3. Puisque \ln est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\ln'' < 0$ sur cet intervalle, $\boxed{\ln \text{ est concave sur cet intervalle.}}$
4. Soit X une variable aléatoire de \mathcal{E} . Par concavité du logarithme sur \mathbb{R}_+^* et puisque $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = 1$, on a :

$$\begin{aligned} H(U) - H(X) &= \ln n + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \ln(\mathbb{P}(X = k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) (\ln(\mathbb{P}(X = k)) + \ln(n)) = - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \ln \left(\frac{1}{n\mathbb{P}(X = k)} \right) \\ &\geq - \ln \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \times \frac{1}{n\mathbb{P}(X = k)} \right) = 0 \quad (-\ln \text{ est convexe.}) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour toute variable aléatoire } X \text{ de } \mathcal{E}, H(U) \geq H(X)}$

5. La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} par théorèmes opératoires et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \sum_{k=1}^n (f(k) - a)^2 e^{(f(k)-a)x} \geq 0.$$

De plus :

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(k) = a,$$

ce qui est absurde puisque f est injective. On en déduit que $\varphi' > 0$ sur \mathbb{R} , et ainsi que φ est strictement croissante sur \mathbb{R} . Puisque la fonction φ est continue sur \mathbb{R} , elle réalise une bijection strictement croissante entre \mathbb{R} et $\varphi(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} \varphi, \lim_{+\infty} \varphi[$.

Puisque \mathcal{E}_a est non-vidé, le théorème du transfert assure qu'il existe une variable aléatoire $X \in \mathcal{E}_a$ telle que :

$$\sum_{k=1}^n f(k) \mathbb{P}(X = k) = a, \quad \text{i.e.} \quad \sum_{k=1}^n (f(k) - a) \mathbb{P}(X = k) = 0.$$

Puisque par hypothèse $\mathbb{P}(X = k) \neq 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les $f(k) - a$ ne peuvent être tous de même signe, ni même tous nuls, par injectivité de f . On en déduit donc que :

$$\lim_{-\infty} \varphi = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} \varphi = +\infty$$

Ainsi, φ réalise une bijection strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

6. En écrivant $H : (p_1, \dots, p_n) \mapsto -\sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k)$, on trouve que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial H}{\partial p_k}(p_1, \dots, p_n) = -\ln p_k - 1.$$

La hessienne de H en un point (p_1, \dots, p_n) est donc la matrice $\text{diag} \left(-\frac{1}{p_1}, \dots, -\frac{1}{p_n} \right)$.

7. Si la fonction H admet un extremum local $p = (p_1, \dots, p_n)$ sur l'ouvert $(]0, 1])^n$ sous les contraintes linéaires $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ et $\sum_{k=1}^n f(k)p_k = a$, alors $\nabla H(p) \in \text{Vect}((1, \dots, 1), (f(1), \dots, f(n)))$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, -\ln(p_k) - 1 = \lambda + \mu f(k), \quad \text{i.e.} \quad p_k = e^{-1-\lambda-\mu f(k)}.$$

Or :

$$0 = \sum_{k=1}^n (f(k) - a)p_k = e^{-1-\lambda} \sum_{k=1}^n (f(k) - a)e^{-\mu f(k)} = e^{-1-\lambda-a\mu} \varphi(-\mu).$$

On en déduit que $\varphi(-\mu) = 0$, i.e. $\mu = -\varphi^{-1}(0)$ par bijectivité de φ de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

Puisque $\sum_{k=1}^n p_k = e^{-1-\lambda} \sum_{k=1}^n e^{-\mu f(k)} = 1$, on trouve que $\lambda = -1 + \ln \left(\sum_{k=1}^n e^{-\mu f(k)} \right)$. L'unicité de μ assure alors l'unicité de λ .

On en déduit donc que si H admet un extremum local sous les contraintes précédentes, cet extremum est unique.

Les valeurs propres de la hessienne de H étant toujours strictement négatives

Si H atteint un extremum local sous contrainte, c'est un maximum

Exercice sans préparation S17

Déterminer toutes les fonctions f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telles que :

- $f(0) = 0$
 - $f'(0) = 1$
 - $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{f'(f(x))}$
-

Solution :

- Supposons qu'il existe une telle fonction.
Remarquons que avec la troisième hypothèse, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f'(f(x)) = 1$$

D'où en primitivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Comme $f(0) = 0$, on a nécessairement $k = 0$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x$$

Remarquons que f' ne peut pas s'annuler sur \mathbb{R} pour que la troisième hypothèse ait un sens. Comme f' est continue (f est de classe \mathcal{C}^1), elle doit être de signe strict constant, donc strictement positive puisque $f'(0) = 1$.

Ainsi, f est nécessairement strictement croissante sur \mathbb{R} .

Enfin s'il existait x tel que $f(x) > x$, alors en appliquant f on aurait $f(f(x)) > f(x)$, donc $x > f(x)$, ce qui est absurde.

(De même, c'est absurde d'avoir $f(x) < x$ pour un réel x).

Ainsi nécessairement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x.$$

- Réciproquement, la fonction identité $x \mapsto x$ vérifie bien les hypothèses proposées.

La fonction identité est donc la seule fonction répondant au problème.

SUJET S18

Exercice principal S18

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

On considère deux familles de vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de E .

On note $A = \text{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)$ et $B = \text{Mat}_e(y_1, \dots, y_n)$.

1. Question de cours : donner les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée d'un espace euclidien.
2. Écrire en Scilab une fonction calculant le produit scalaire usuel de deux vecteurs colonnes.
3. Déterminer les coefficients de la matrice tAB .
4. On suppose ici que (x_1, \dots, x_n) est une base de E . Montrer qu'il existe une unique famille (y_1, \dots, y_n) de E telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle y_i; x_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer alors que (y_1, \dots, y_n) est une base de E et exprimer la matrice de passage P de la base (x_1, \dots, x_n) à la base (y_1, \dots, y_n) à l'aide de la matrice :

$$M = (\langle x_i; x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$$

5. On suppose ici que la famille (x_1, \dots, x_n) vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|x_i\| = 1, \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \langle x_i; x_j \rangle < 0, \\ \exists v \in E, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x_i; v \rangle > 0. \end{cases}$$

- (a) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$. Notons $I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_i > 0\}$.

- i. Montrer que $I = \emptyset$ en calculant $\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2$.

- ii. En déduire que (x_1, \dots, x_n) est une base de E .

- (b) Montrer que la matrice $S = I_n - \frac{1}{n}M$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $]0; 1[$.

Indication : on pourra considérer un vecteur propre X de M et calculer $\|AX\|^2$ de deux manières.

Solution :

1. Programme ECS 2 (page 7)

```
2. function s = prodscal(u,v)
    s = 0;
    n = max(size(u));
    for k = 1:n
        s = s + u(k)*v(k);
    end
endfunction
```

3. Puisque e est une base orthonormée de E , $A = (\langle e_i; x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (\langle e_i; y_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Ainsi, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient à la i -ème ligne et j -ème colonne de la matrice tAB est :

$$({}^tAB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n \langle e_k; x_i \rangle \langle e_k; y_j \rangle = \langle x_i; y_j \rangle.$$

4. La condition de l'énoncé est vérifiée si, et seulement si, ${}^tAB = I_n$. Il existe donc une unique famille solution (y_1, \dots, y_n) , entièrement déterminée par sa matrice dans la base e :

$$\boxed{\text{Mat}_e(y_1, \dots, y_n) = B = ({}^tA)^{-1} .}$$

Puisque B est inversible, (y_1, \dots, y_n) est une base de E . De plus :

$$P = \text{Mat}_x(y) = \text{Mat } y, x(\text{Id}_E) = \text{Mat } e, x(\text{Id}_E) \text{ Mat } y, e(\text{Id}_E) = A^{-1}B = ({}^tAA)^{-1} = \boxed{M^{-1}} .$$

5. On suppose ici que la famille (x_1, \dots, x_n) vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|x_i\| = 1, \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \langle x_i; x_j \rangle < 0, \\ \exists v \in E, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x_i; v \rangle > 0. \end{cases}$$

- (a) i. Notons $J = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I$. On a alors :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = - \sum_{j \in J} \lambda_j x_j .$$

Ainsi :

$$\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = - \left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i x_i; \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \right\rangle = - \sum_{(i, j) \in I \times J} \lambda_i \lambda_j \langle x_i; x_j \rangle \leq 0 .$$

On en déduit que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$. Ainsi :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \langle x_i; v \rangle = 0 ,$$

ce qui est impossible à moins que $\boxed{I = \emptyset}$.

- ii. On peut montrer de même que l'ensemble $I' = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_i < 0\}$ est vide, assurant ainsi la liberté de la famille (x_1, \dots, x_n) . Par argument de cardinalité, $\boxed{(x_1, \dots, x_n)$ est bien une base de E .

- (b) Remarquons que $\boxed{S = I_n - \frac{1}{n} {}^tAA}$ est symétrique réelle donc diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de M associée à un vecteur propre X . On a alors ${}^tAAX = \lambda X$ puis :

$$\|AX\|^2 = {}^tX {}^tAAX = \lambda \|X\|^2 .$$

On en déduit que $\lambda > 0$ puisque $\|X\| > 0$ et $\|AX\| > 0$ (A est inversible). En notant $X = {}^t(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, on a aussi :

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \alpha_j \right)^2 .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée n fois) assure que :

$$\|AX\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i; x_j \rangle^2 \|X\|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \|X\|^2 = n \|X\|^2 .$$

Remarquons que cette inégalité est stricte car sinon X serait colinéaire à chaque ligne de la matrice A , ce qui est impossible puisque A est inversible. Ainsi : $\|AX\|^2 < n \|X\|^2$. On en déduit donc que $\lambda < n$, puis que $\text{Sp}(M) \subset]0, n[$.

Soit λ une valeur propre de S associée à un vecteur propre X . Ainsi $X - \frac{1}{n} MX = \lambda X$, i.e. $MX = n(1 - \lambda)X$. On en déduit que $n(1 - \lambda) \in \text{Sp}(M) \subset]0, n[$ donc $\boxed{\lambda \in]0, 1[}$.

Exercice sans préparation S18

Soit N une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite et X une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ indépendante de N , définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On pose $R = 1 - 2X$.

1. Déterminer la loi de R .
2. On pose $Y = RN$. Montrer que $\text{Cov}(N, Y) = 0$.
3. Les variables N et Y sont-elles indépendantes?

Solution :

1. De manière immédiate $\mathbb{P}(R = 1) = \mathbb{P}(R = -1) = \frac{1}{2}$.

2. On commence par déterminer la loi de Y .

On peut calculer, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(N \leq x \text{ et } R = 1) + \mathbb{P}(-N \leq x \text{ et } R = 1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N \leq x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(-N \leq x) \text{ car } N \text{ et } R \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N \leq x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N \leq x) \text{ car } N \text{ et } -N \text{ ont même loi} \\ &= \mathbb{P}(N \leq x)\end{aligned}$$

Ainsi Y et N ont même loi et Y suit donc une loi normale centrée réduite. Alors :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(N, Y) &= \mathbb{E}(NY) - \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(RN^2) \\ &= \mathbb{E}(R)\mathbb{E}(N^2) \text{ par indépendance de } R \text{ et } N \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\text{Cov}(N, Y) = 0$$

3. Si N et Y étaient indépendantes, comme elles suivent des lois normales, ce serait également le cas de $N + Y$. Or :

$$\mathbb{P}(N + Y = 0) = \mathbb{P}(R = -1) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Ainsi $N + Y$ ne suit pas une loi normale.

On peut aussi voir que $|N| = |Y|$, donc par exemple les événements $\mathbb{P}(|N| \leq 1)$ et $\mathbb{P}(|Y| \leq 1)$ ne sont pas indépendants.

$$N \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

SUJET S19

Exercice principal S19

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application ϕ par :

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto u \circ v \end{cases}$$

On note $Id_{\mathcal{L}(E)}$ et Id_E les fonctions identité des espaces $\mathcal{L}(E)$ et E .

1. **Cours** Rappeler la définition d'un projecteur et ses propriétés.
2. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
3. Montrer que $\text{Sp}(\phi) \subset \text{Sp}(u)$
4. En considérant des endomorphismes particuliers de E , montrer que $\text{Sp}(\phi) = \text{Sp}(u)$.
5. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

(a) Montrer que

$$v \in \text{Ker}(\phi - \lambda Id_{\mathcal{L}(E)}) \Leftrightarrow \text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u - \lambda Id_E)$$

(b) En déduire $\dim(\text{Ker}(\phi - \lambda Id_{\mathcal{L}(E)}))$

6. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si v est diagonalisable.

Solution :

1. ECS1 p16
2. Soit $(v_1, v_2, \lambda) \in \mathcal{L}(E)^2 \times \mathbb{K}$, en utilisant la linéarité de u , nous avons

$$\phi(v_1 + \lambda v_2) = u \circ (v_1 + \lambda v_2) = u \circ v_1 + \lambda u \circ v_2$$

De plus $\phi(v_1) \in \mathcal{L}(E)$ donc ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

3. Soit $\lambda \in \text{Sp}(\phi)$, il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ non nulle tel que $\phi(v) = \lambda v$.
Comme v est non nulle, il existe $x \in E$ tel que $v(x) \neq 0$. De plus $\phi(v)(x) = u(v(x)) = \lambda v(x)$
Donc $v(x)$ est un vecteur propre de u et $\lambda \in \text{Sp}(u)$

$$\text{Sp}(\phi) \subset \text{Sp}(u)$$

4. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$, il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

Considérons p_x une projection sur $\text{Vect } x$ parallèlement à un supplémentaire de $\text{Vect } x$.

Soit $y \in E$.

$p_x(y) \in \text{Vect } x$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $p_x(y) = \alpha x$

$$\phi(p_x)(y) = u(p_x(y)) = u(\alpha x) = \alpha \lambda x = \lambda p_x(y)$$

p_x est un vecteur propre de ϕ associé à λ .

$$\text{Sp}(\phi) = \text{Sp}(u)$$

5. (a) Soit $v \in E_\lambda(\phi)$ et soit $y \in E$

$\phi(v)(y) = u(v(y)) = \lambda v(y)$ donc $v(y) \in E_\lambda(u)$ et $\boxed{\text{Im}(v) \subset E_\lambda(u)}$

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im}(v) \subset E_\lambda(u)$ alors

soit $y \in E$, $v(y) \in E_\lambda(u)$ et donc $u(v(y)) = \lambda v(y)$ et finalement $\phi(v) = \lambda v$.

$$\boxed{v \in E_\lambda(\phi) \Leftrightarrow \text{Im}(v) \subset E_\lambda(u)}$$

(b) Donc $\dim(E_\lambda(\phi)) = \dim(\mathcal{L}(E, E_\lambda(u))) = n \dim(E_\lambda(u))$

6. ϕ est diagonalisable ssi $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\phi)} \dim(E_\lambda(\phi)) = \dim(\mathcal{L}(E))$

ssi $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\phi)} n \dim(E_\lambda(u)) = n^2$ ssi $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n$

D'où $\boxed{u \text{ est diagonalisable ssi } v \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice sans préparation S19

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On cherche à déterminer la probabilité qu'il soit possible de dessiner un triangle dont les trois côtés soient de longueurs respectives X, Y et Z .

1. Compléter le programme Scilab, pour qu'il donne une valeur approchée de cette probabilité.

```
n=1000;
X=
Y=
Z=
N=0;
for i=1:n
```

```
end;
p=
disp(p);
```

2. Calculez cette probabilité.

Solution :

1. Il est en fait plus simple de simuler la probabilité qu'il ne soit pas possible de dessiner le triangle :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(X + Y < Z) - \mathbb{P}(X + Z < Y) - \mathbb{P}(Y + Z < X) = 1 - 3\mathbb{P}(X + Y < Z).$$

```
n=1000;
X=grand(n,1,"exp",1);
Y=grand(n,1,"exp",1);
Z=grand(n,1,"exp",1);
N=0;
for i=1:n if X(i,1)+Y(i,1)<Z(i,1) then N=N+1
end
end;
p=1-3*N/n;
disp(p);
```

2. On cherche alors la loi de $X + Y$ avec la formule de convolution, les variables sont indépendantes

$$f_{X+Y}(x) = x \exp(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{simple calcul})$$

Une densité de $-Z$ est donnée par $x \mapsto \exp(x)$ pour $x \leq 0$.

Donc une densité f_U de $U = X + Y - Z$ est donnée par :

$$\text{Pour tout } u \in \mathbb{R}, f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X+Y}(t) f_Z(u-t) dt.$$

$$f_{X+Y}(t) f_Z(u-t) \neq 0 \text{ ssi } t \geq 0 \text{ et } u-t \leq 0 \text{ ie } t \geq u.$$

Seules les valeurs u négatives nous intéressent :

$$\text{si } u < 0, f_U(u) = \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-t} e^{u-t} dt = e^u \int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt = \frac{1}{4} e^u.$$

(on reconnaît $\frac{1}{2} \mathbb{E}(T)$ avec $T \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$.)

$$\text{Et finalement } \mathbb{P}(X + Y < Z) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{4} e^u du = \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.}$$

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques(E)

Juin-Juillet 2022

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de grandes qualités de logique et de présentation. Bien sûr, il y a une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 2 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes de cours, de grosses faiblesses en calcul et quasiment aucune connaissance en informatique.

A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances et dans leur finesse de raisonnement. La moyenne est de 9,63 et l'écart-type est de 3,96.

Le jury aimerait insister sur quatre points.

- **L'informatique** : Beaucoup de candidats avaient manifestement délaissé la matière et ne comprenaient rien au programme.
Nous rappelons que tous les sujets ou presque comportent des questions d'informatiques. Ces questions, nous permettent d'évaluer leurs esprits pratiques et de relier les mathématiques à des cas concrets. Le nouveau programme particulièrement riche en informatique permettra de proposer des questions variées en Python et en SQL.
- **Les dessins** : Beaucoup de candidats ne savent pas dessiner le graphe d'une fonction, le dessin d'une projection dans \mathbb{R}^2 ou illustrer un raisonnement.
- **La journée de l'oral** il est très utile d'assister, en temps réel ou en différé, aux diverses présentations de cette journée. Ces présentations détaillent l'organisation et les attendus de chaque oral et elles donnent le point de vue des membres du jury et d'anciens candidats sur les épreuves.
- **La prestation** : Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation : au cours de la présentation de l'exercice préparé, le jury pose des questions pour aiguiller le candidat vers la solution. Il convient d'y être attentif. Il est souvent utile d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Par ailleurs, une prestation peut être jugée excellente sans que le candidats ne traite beaucoup de questions, alors qu'un candidat traitant de manière approximative un grand nombre de questions en maltraitant au passage les théorèmes de son cours risque d'être déçu par sa note finale.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrit à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET E1

Exercice principal E1

Soit a un réel de $]0, 2[$ et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Question de cours : Donner l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètres 0 et a .
2. (a) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f définie sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
(c) Donner le tableau des variations des courbes de f et de F_X pour $a \in]0; 2[$ quelconque et tracez-les pour $a = 1$.
(d) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \frac{X^2}{2a}$.

Déterminer la loi de Y .

4. On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X .

On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2$.

- (a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais et convergent de a .
 - (b) Proposer un intervalle de confiance de a au niveau de risque $\alpha \in]0, 1[$ à l'aide de S_n .
5. Soit la variable aléatoire Z définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

Pour $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \frac{1}{X(\omega) - 1}$ si $X(\omega) \neq 1$ et $Z(\omega) = 0$ si $X(\omega) = 1$.

Déterminer la fonction de répartition de Z .

Solution :

1. Programme ECE2 page 16. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres 0 et a . Alors $\mathbb{E}(Z) = 0$ et $V(Z) = a$.

Z admet donc un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}(Z^2) = V(Z) + (\mathbb{E}(Z))^2 = a$.

D'autre part, $\mathbb{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-t^2/2a} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi a}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt$

2. (a) f est continue et positive sur \mathbb{R} .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ car } f \text{ est nulle sur }]-\infty; 0].$$

Soit alors $A > 0$:

$$\int_0^A f(t) dt = \int_0^A \frac{t}{a} e^{-t^2/2a} dt = \left[-e^{-t^2/2a} \right]_0^A = 1 - e^{-A^2/2a} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\text{Ainsi, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$$

f est bien une densité de probabilité.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Ainsi, $\forall x \in]-\infty; 0], F_X(x) = 0$

$\forall x \geq 0, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x \frac{t}{a} e^{-t^2/2a} dt = 1 - e^{-x^2/2a}$

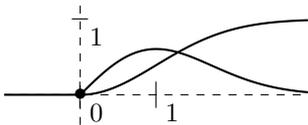
(c) f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{-x^2}{a}\right) - \frac{2x^2}{2a^2} \exp\left(\frac{-x^2}{a}\right) = \frac{a - x^2}{a^2} \exp\left(\frac{-x^2}{a}\right)$

$f'(0) = \frac{1}{a}$, cela donne l'équation de la tangente en 0, $y = \frac{1}{a}x$. La tangente à F_X en 0 est horizontale

On a donc un maximum en $x = \sqrt{a}$, qui vaut $\frac{1}{\sqrt{a}} \exp(-1/2)$

F_X est croissante, concave sur $[0, \sqrt{a}]$ et convexe sur $[\sqrt{a}, +\infty[$

On trace la courbe pour $a = 1$.



(d) X admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument (donc converge).

Or, sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a} e^{-t^2/2a} dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt.$$

Or d'après la question 1, $\mathbb{E}(Z^2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi a}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt = a$

Donc $\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt$ converge et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt = \frac{\sqrt{2\pi a}}{2a} \times \frac{2}{\sqrt{2\pi a}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt = \frac{\sqrt{2\pi a}}{2a} \times a = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}.$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X^2}{2a} \leq x\right) = P(X^2 \leq 2ax)$

Si $x < 0, F_Y(x) = 0$

Si $x \geq 0, F_Y(x) = \mathbb{P}(X^2 \leq 2ax) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{2ax}) = F_X(\sqrt{2ax}) = 1 - e^{-2ax/2a} = 1 - e^{-x}$

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

4. (a) S_n est une fonction de n variables aléatoires indépendantes de même loi, qui dépend de a donc S_n est un estimateur de a . Montrons que cet estimateur est sans biais :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k^2\right) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_k^2) \text{ par linéarité de l'espérance.}$$

Or chaque X_i suit la même loi que X et son moment d'ordre 2 vaut $2a$ d'après la question 3.b). Ainsi,

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} 2a = \frac{1}{2n} \times n \times 2a = a.$$

Donc S_n est un estimateur sans biais de a .

En appliquant la loi faible des grands nombres, on a S_n est un estimateur convergent de a .

(b) Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Avec Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}(|S_n - a| > \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{a^2}{n\varepsilon^2} \leq \frac{4}{n\varepsilon^2}$

$$\alpha = \frac{4}{n\varepsilon^2} \text{ ssi } \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}$$

Ainsi $\mathbb{P}\left(|S_n - a| \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}\right) \geq 1 - \alpha$

On a donc comme intervalle de confiance $\left[S_n - \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}, S_n + \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}\right]$, ou même

$$\left[\max\left(0, S_n - \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}\right), \min\left(2, S_n + \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}\right)\right]$$

5. Le support de Z vaut \mathbb{R}

On détermine pour z fixé $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X-1} \leq z\right)$ (puisque $\mathbb{P}(X=1) = 0$)

Premier cas : si $z < 0$, $\frac{1}{X-1} \leq z$ ssi $\frac{1}{z} \leq X-1 < 0$ ssi $\frac{z+1}{z} \leq X < 1$

Ainsi, comme X est à densité, $\mathbb{P}(Z \leq z) = F_X(1) - F_X\left(\frac{z+1}{z}\right) = \exp\left(\frac{-(z+1)^2}{2az^2}\right) - \exp\left(\frac{-1}{2a}\right)$

Deuxième cas : si $z = 0$, $\mathbb{P}(Z \leq 0) = \mathbb{P}(X-1 \leq 0) = F_X(1) = 1 - \exp\left(\frac{-1}{2a}\right)$

Troisième cas : si $z > 0$, $\frac{1}{X-1} \leq z$ ssi $X-1 \leq 0$ ou $X-1 > \frac{1}{z}$

Ainsi $F_Z(z) = F_X(1) + 1 - F_X\left(\frac{z+1}{z}\right) = 1 - \exp\left(\frac{-1}{2a}\right) + \exp\left(\frac{-(z+1)^2}{2az^2}\right)$

Exercice sans préparation E1

Soient a et b deux réels.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2).$$

Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur a et b pour que la série de terme général u_n converge.

Ecrire un script Scilab indiquant si la série converge et permettant, en cas de divergence, de déterminer le plus petit entier n tel que $\left| \sum_{k=1}^n u_k \right| > 100$.

En cas de convergence, calculer sa somme.

Solution :

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n &= \ln n + a \ln \left(n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) + b \ln \left(n \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right) \\ u_n &= (a+b+1) \ln n + a \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + b \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) \\ u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (a+b+1) \ln n + a \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) + b \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} \right) + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (a+b+1) \ln n + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

— Si $a+b+1 \neq 0$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (a+b+1) \ln n$: donc, la série diverge grossièrement.

— Si $a+b+1 = 0$,

— 1er cas : $a+2b \neq 0$. Alors,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a+2b}{n}.$$

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs (resp. négatifs), la série diverge.

— 2nd cas : $a+2b = 0$, alors $a = -2b$ et $a+b+1 = 0$, donc $a = -2$ et $b = 1$.

Il suit que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a+4b}{n^2} = \frac{2}{n^2}.$$

Par critère d'équivalence des séries à termes de signe constant, la série converge.

On conclut que la série converge si et seulement si $a = -2$ et $b = 1$.

```
a=input('Donner la valeur de a')
b=input('Donner la valeur de b')
if (a==-2) & (b==1) then disp('la série converge')
else
S=a*log(2)+b*log(3)
k=1
while abs(S)<=100
k=k+1
S=S+log(k)+a*log(k+1)+b*log(k+2)
end
disp(k)
end
```

• Dans le cas où $a = -2$ et $b = 1$:

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N [\ln(n) - \ln(n+1)] + \sum_{n=1}^N [\ln(n+2) - \ln(n+1)] \sum_{n=1}^N u_n = -\ln(N+1) + \ln(N+2) - \ln 2 = \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln 2.$$

Par passage à la limite, on conclut que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2.}$

SUJET E2

Exercice principal E2

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E .

Soit F l'espace vectoriel des applications numériques f telles que il existe $P \in E$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x}P(x).$$

On pose $f_k : x \mapsto e^{-x}x^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

- Question de cours** : soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
 - Donner la définition d'un isomorphisme ϕ de E sur F .
 - Donner une condition nécessaire pour qu'il existe un isomorphisme de E sur F .
 - Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ soit un isomorphisme quand la condition de la question b) est vérifiée.
- Montrer que $\mathcal{C} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est une base de F .
- Soit φ l'application définie sur E par : $\forall P \in E \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(P)(x) = e^{-x}(P(x) - xP'(x + 1))$.
 - Montrer que φ est une application linéaire de E dans F .
 - Écrire la matrice de φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} de E et F .
 - φ est-elle un isomorphisme de E sur F ? φ est-elle diagonalisable ?
- Soit E' le sous espace vectoriel de E engendré par $1, X^2$ et X^3 . Soit ψ l'application définie sur E' par : $\forall P \in E' \quad \psi(P) = \varphi(P)$.
Déterminer un espace F' tel que ψ établisse un isomorphisme entre E' et F' .
- Résoudre dans E l'équation d'inconnue $P : \forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(P)(x) = e^{-x}(1 + \alpha x + x^2)$ où α est un paramètre réel.

Solution :

- Programme officiel ECE2 page 6. Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
 - Il existe un isomorphisme de E sur F ssi $\dim(E) = \dim(F)$
 - Si $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\dim(E) = \dim(F)$, alors :
 ϕ est un isomorphisme ssi $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$ ssi $\text{Im}(\phi) = F$ ssi $\text{rg}(\phi) = \dim(E)$.

- $\forall k, f_k \in F$.

Et par définition de $F, \forall f \in F \exists (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^3 \mu_k x^k = \sum_{k=0}^3 \mu_k f_k(x)$.

Donc la famille \mathcal{C} est génératrice de F . Montrons que cette famille est libre

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\sum_{k=0}^3 \lambda_k f_k = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^3 \lambda_k f_k(x) = 0 \text{ donc } \sum_{k=0}^3 \lambda_k x^k = 0 \text{ et donc } \sum_{k=0}^3 \lambda_k X^k = 0$$

Ainsi $\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}, \lambda_k = 0$

(on identifie dans la base canonique de E)

Donc \mathcal{C} est libre. Conclusion : \mathcal{C} est une base de F .

- La linéarité est immédiate.

Et si $P \in \mathbb{R}_3[X], P(X)$ et $XP'(X + 1)$ sont bien des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$, donc $f(P) \in E$.

- (b) Si $P(X) = X^0$, $P'(X) = 0$ et $P'(X+1) = 0$ ainsi $\varphi(X^0) = f_0$.
 Si $P(X) = X$, $P'(X) = 1$ et $P'(X+1) = 1$ ainsi $\varphi(X) = 0$.
 Si $P(X) = X^2$, $P'(X) = 2X$ et $P'(X+1) = 2X+2$ ainsi $\varphi(X^2) = -f_2 - 2f_1$.
 Si $P(X) = X^3$, $P'(X) = 3X^2$ et $P'(X+1) = 3X^2 + 6X + 3$. Ainsi $\varphi(X^3) = -2f_3 - 6f_1 - 3f_1$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) M n'est pas inversible (une colonne nulle) donc φ n'est pas un isomorphisme de E sur F .

M est diagonalisable : elle est triangulaire supérieure et l'on peut lire qu'elle admet 4 valeurs propres distinctes.

4. $(1, X^2, X^3)$ est une base de E' .

On pose $F' = \text{vect}(\varphi(X^0), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$

φ est linéaire donc ψ est linéaire.

L'image de la base $(1, X^2, X^3)$ par ψ est $(\varphi(X^0), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$.

C'est une famille libre (étagée dans la base des f_k)

On pose donc $F' = \text{vect}(\varphi(X^0), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$.

On a alors $\dim(F') = \dim(E')$ et $\text{Im}(\psi) = F'$

ψ est un isomorphisme de E' dans F'

5. On pose le problème avec la matrice M

Soit $P = aX^0 + bX + cX^2 + dX^3$

$\varphi(P) = e^{-x}(1 + \alpha x + x^2)$

$$\text{ssi} \begin{cases} a & = 1 \\ & - 2c & - 3d & = \alpha \\ & - c & - 6d & = 1 \\ & & - 2d & = 0 \end{cases} \text{ssi} \begin{cases} a & = 1 \\ & 2 & = \alpha \\ & c & = -1 \\ & d & = 0 \end{cases}$$

Premier cas si $\alpha \neq 2$, il n'y a pas de solutions.

Si $\alpha = -2$ tout polynôme de la forme $X^0 + \lambda X - X^2 = 0$, où λ est un réel.

Exercice sans préparation E2

Soit le script Scilab suivant :

```
function y=X(p)
    y=0
    u=1
    while u>p
        y=y+1
        u=rand()
    end
endfunction

p=input('p=');
q=input('q=') // 0<p<1 et 0<q<1
Y=X(p);
Z=X(q);
M=[1,2;Y,Z];
disp(M)
```

1. Expliquer le script.
2. On exécute le script.
Quelle est la probabilité que M soit inversible?

Solution :

1. Les différents appels de `rand()` sont supposés indépendants donc X simule le temps d'attente d'un succès de probabilité p . X suit la loi géométrique de paramètre p .

M est une matrice carrée d'ordre 2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ Y & Z \end{pmatrix}$ où Y et Z sont deux variables géométriques de paramètres respectifs p et q . Y et Z sont indépendantes car les différents appels de `rand()` sont indépendants.

2. M est non inversible si et seulement si les colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ Z \end{pmatrix}$ sont liées donc si et seulement si l'évènement $[Z = 2Y]$ est réalisé.

$$[Z = 2Y] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ([Y = k] \cap [Z = 2k]) \quad \text{union disjointe.}$$

$$\mathbb{P}(Z = 2Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \times q(1-q)^{2k-1} = \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^k (1-q)^{2k}.$$

$$\mathbb{P}(Z = 2Y) = \frac{pq(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)^2}.$$

Donc la probabilité que M soit inversible est $1 - \frac{pq(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)^2}$

SUJET E3

Exercice principal E3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction H_n sur \mathbb{R} par $H_n : x \mapsto (-1)^n e^{x^2} f^{(n)}(x)$,
où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de la fonction f .

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on admet que si g et h sont deux fonctions n fois dérivables sur \mathbb{R} , alors le produit $g \times h$ est n fois dérivable sur \mathbb{R} avec

$$(g \times h)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}. (**)$$

1. Question de cours : rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable.

2. Déterminer H_0 et H_1 .

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer une relation simple entre H_{n+1} , H_n et H'_n .

(b) Montrer que H_n est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant et la parité.

4. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+2)}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) = -2(n+1)f^{(n)}(x).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit φ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $2XP'(X) - P''$. On admet que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(a) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que H_i est un vecteurs propre de φ .

(b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

6. (a) Compléter la fonction Scilab suivante qui si on lui donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ une matrice de

$\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ contenant les coefficients d'un polynôme $P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k X^{k-1}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ renverra une matrice de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ contenant les coefficients de $P'(X)$.

```
function D=deriv(M,n)
D=zeros(n+1,1)
for ....
....
end;
endfunction
```

(b) Compléter alors la fonction Scilab suivante, qui si on lui donne $n \in \mathbb{N}^*$ renverra une matrice de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ contenant les coefficients de H_n .

```
function H=coeff(n)
H=zeros(n+1,1);
H(1,1)=1;
for k=1:n
HH=H
Hderiv=deriv(H,n)
....
for j=...
...
end
end
endfunction
```

Solution :

- Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f (programme officiel ECE2, page 7).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_0(x) = e^{x^2} e^{-x^2} = 1$ et $H_1(x) = (-1)e^{x^2}(-2x)e^{-x^2} = 2x$.
- (a) On dérive la relation qui définit H_n . Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H'_n(x) = (-1)^n 2x e^{x^2} f^{(n)}(x) + (-1)^n e^{x^2} f^{(n+1)}(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x).$$

- (b) On démontre par récurrence sur n que H_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^n . La question 2 montre que la propriété est vraie au rang $n = 0$. On suppose la propriété vérifiée pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Comme $H_{n+1} = 2XH_n - H'_n$ (question 3) et comme on a supposé que H_n est un polynôme, alors H_{n+1} est lui aussi un polynôme. Son degré est celui de $2XH_n$, donc son degré est $n + 1$. Puisque H_n a pour coefficient dominant 2^n , le coefficient dominant de H_{n+1} est $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. On a donc démontré la propriété au rang $n + 1$.

On conclut par récurrence que H_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction f est infiniment dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2xf(x)$. On calcule la dérivée $(n + 1)$ -ième de ce produit par la formule (de Leibniz) rappelée par l'énoncé en prenant $g : x \mapsto -2x$ et $h : x \mapsto f(x)$. Comme pour tout $k \geq 2$, $g^{(k)} = 0$ (fonction nulle), on obtient alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}(-2)f^{(n)}(x).$$

D'où,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+2)}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) + 2(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$

- (a) La famille (H_0, H_1, \dots, H_n) est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ puisque c'est une famille de polynômes échelonnés en degré, ne contenant pas le polynôme nul (voir question 4). Comme cette famille contient $n + 1$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour calculer $\varphi(H_k)$, on utilise 6.

$$H'_k(x) = (-1)^k e^{x^2} (2xf^{(k)}(x) + f^{(k+1)}(x))$$

$$\begin{aligned} H''_k(x) &= (-1)^k e^{x^2} (4x^2 f^{(k)}(x) + 2xf^{(k+1)}(x) + 2f^{(k)}(x) + 2xf^{(k+1)}(x) + f^{(k+2)}(x)) \\ &= (-1)^k e^{x^2} ((4x^2 + 2)f^{(k)}(x) + 4xf^{(k+1)}(x) + f^{(k+2)}(x)). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(H_k)(x) &= (-1)^k e^{x^2} ((4x^2 - 4x^2 - 2)f^{(k)}(x) + (2x - 4x)f^{(k+1)}(x) - f^{(k+2)}(x)) \\ &= (-1)^k e^{x^2} (-2 + 2(k+1))f^{(k)}(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(H_k) = 2XH'_k - H''_k = 2kH_k$, ce qui prouve que H_k est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $2k$.

- (b) L'endomorphisme φ est diagonalisable puisque l'on vient de trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de φ . Le spectre de φ est $\{2k, 0 \leq k \leq n\}$: on a en effet trouvé $n + 1$ valeurs propres distinctes et il ne peut pas y en avoir davantage.

- (a) Si $P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k X^{k-1} = a_0 X^0 + \sum_{k=2}^{n+1} a_k X^{k-1}$, $P'(X) = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)a_k X^{k-2} = \sum_{j=1}^n j a_{j+1} X^{j-1}$.

Donc le $n + 1$ -ième coefficient de la matrice que renvoie la fonction doit être nul, et le j -ième doit valoir $j \times a_{j+1}$.

```
for j=1:n
    D(j,1)=j*M(j+1,1)
```

$$(b) \quad H_{k-1}(X) = \sum_{j=1}^k a_j X^{j-1} \text{ et } H'_{k-1}(X) = \sum_{j=1}^k b_j X^{j-1},$$

$$H_k(X) = 2XH_{k-1}(X) - H'_{k-1}(X) = \sum_{j=1}^k 2a_j X^j - \sum_{j=1}^k b_j X^{j-1} = \sum_{i=2}^{k+1} 2a_{i-1} X^{i-1} - \sum_{j=1}^k b_j X^{j-1}.$$

Donc le premier coefficient de $H_k(X)$ vaut $-b_1$, les coefficients pour j entre 2 et $k+1$: $2a_{j-1} - b_j$ (même pour $j = k+1$ car $b_{k+1} = 0$)

```
function H=coeff(n)
    H=zeros(n+1,1);
    H(1,1)=1;
    for k=1:n
        HH=H
        Hderiv=deriv(H,n)
        H(1,1)=-Hderiv(1,1)
        for j=2:k+1
            H(j,1)=2*HH(j-1,1)-Hderiv(j,1)
        end
    end
endfunction
```

Exercice sans préparation E3

Soit a et b deux réels non nuls.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X(\Omega) = \{0, a\}$ et $Y(\Omega) = \{0, b\}$.

1. Montrer que X , Y et XY admettent une espérance et déterminer ces espérances.
 2. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\text{cov}(X, Y) = 0$.
-

Solution :

1. Remarquons que $XY(\Omega) = \{0, ab\}$.

X , Y et XY sont des variables aléatoires finies, elles admettent donc une espérance.

Et $\mathbb{E}(X) = a\mathbb{P}(X = a)$, $\mathbb{E}(Y) = b\mathbb{P}(Y = b)$ et $\mathbb{E}(XY) = ab\mathbb{P}((X = a) \cap (Y = b))$.

2. (\implies) Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X, Y) = 0$.

(\impliedby) Si $\text{cov}(X, Y) = 0$, alors $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$.

Or d'après la question précédente, $ab\mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b) = ab\mathbb{P}((X = a) \cap (Y = b))$.

Or $ab \neq 0$. Donc $\mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b) = \mathbb{P}((X = a) \cap (Y = b))$.

Donc $(X = a)$ et $(Y = b)$ sont indépendants.

Alors $(X = 0)$ et $(Y = b)$ sont indépendants. Ou encore $(X = 0)$ et $(Y = 0)$ sont indépendants.

De même $(X = a)$ et $(Y = 0)$ sont indépendants et $(X = 0)$ et $(Y = 0)$ sont indépendants.

Ainsi X et Y sont indépendants.

X et Y sont indépendantes si et seulement si $\text{cov}(X, Y) = 0$.

SUJET E4

Exercice principal E4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soit φ l'application qui à tout polynôme P élément de E associe la matrice colonne $\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$.

1. Question de cours : nombre de racines d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que φ est un isomorphisme de E dans $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.
3. On suppose dans cette question seulement que $n = 2$.

Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que pour tout $P \in E$:

$$\text{Si } P(X) = a + bX + cX^2, \text{ alors } \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

4. On revient au cas général.

(a) Montrer qu'il existe une matrice $V \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que pour tout $P \in E$:

$$\text{Si } P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i, \text{ alors } \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Justifier que V est inversible.

(b) Pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\begin{cases} L_i(i) = 1 \\ L_i(j) = 0 \text{ pour tout } j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\} \end{cases}.$$

(c) On pose pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $L_i(X) = \sum_{k=0}^n c_{k,i} X^k$ l'on note et $C_i = \begin{pmatrix} c_{0,i} \\ c_{1,i} \\ \vdots \\ c_{n,i} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Calculer VC_i et en déduire l'expression de V^{-1} .

5. A l'aide de la question 4, retrouver A^{-1} .

Solution :

1. Question de cours :

Un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui a au moins $n + 1$ racines distinctes est le polynôme nul.

Un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$ a au plus n racines distinctes

Programme ECE1 page 10.

2. $\dim(E) = n + 1$. φ est une application linéaire de E dans $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ d'après les opérations sur les polynômes et les opérations sur les matrices.

Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ $P(i) = 0$. Or, $\deg(P) \leq n$ et P a au moins $n + 1$ racines donc $P = 0$

Ainsi $\text{Ker} \varphi = \{0\}$ et φ est injective. De plus, par théorème du rang,

$\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(E) = \dim(\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}))$ et donc φ est surjective.

φ est un isomorphisme de E sur $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

3.

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ a+2b+4c \end{pmatrix}, \text{ donc } \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ donc } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On résout le système :
$$\begin{cases} a & = x \\ a+b+c & = y \\ a+2b+4c & = z \end{cases}$$
 d'inconnue (x, y, z) .

$$\begin{cases} a & = x \\ a+b+c & = y \\ a+2b+4c & = z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a & = x \\ b+c & = -x+y \\ 2b+4c & = -x+z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a & = x \\ b+c & = -x+y \\ 2c & = x-2y+z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a & = x \\ b & = -\frac{3}{2}x - 2y - \frac{1}{2}z \\ c & = \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Le système a une unique solution donc A est inversible et
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4. (a)
$$\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ où } V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^n \end{pmatrix}.$$

(b) φ est bijective, il existe donc un unique polynôme L_i tel que $\varphi(L_i) = E_i$, où E_i est le $i+1$ -ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, ce qui donne la propriété demandée

(c) Soit $i \in [0, n]$, on a alors $VC_i = \begin{pmatrix} L_i(0) \\ L_i(1) \\ \vdots \\ L_i(n) \end{pmatrix}$

Ainsi $VC_i = E_i$ où E_i est le $(i+1)$ -ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

On a donc $C_i = V^{-1}E_i$, C_i est la $(i+1)$ -ième colonne de V^{-1} .

On peut aussi voir, comme en b), que $\varphi^{-1}(L_i) = E_i$.

V^{-1} est la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ formée en juxtaposant les colonnes C_0, C_1, \dots, C_n .

5.
$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2} = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2.$$

$$L_1 = \frac{X(X-2)}{-1} = 2X - X^2.$$

$$L_3 = \frac{X(X-1)}{2} = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2.$$

En écrivant les coordonnées de ces trois polynômes dans la base canonique dans trois colonnes, on retrouve bien A^{-1} .

Exercice sans préparation E4

Deux urnes A et B contiennent initialement chacune deux boules numérotées 0 et 1. Leur contenu évolue lors d'une expérience aléatoire et est simulé par un vecteur ligne Scilab.

Ainsi la ligne de code `A=[0,1]` permet de voir qu'initialement, l'urne A contient une boule numérotée 0 et une autre numérotée 1.

On considère la fonction Scilab suivante qui permet de simuler une variable aléatoire X :

```
function k=simulX()
  A=[0,1]
  B=[0,1]
  Y=grand(4,2,"uin",1,2)
  k=0;
  while (sum(A)>0)&(k<4)
    k=k+1
    i=Y(k,1)
    j=Y(k,2)
    c=A(i)
    A(i)=B(j)
    B(j)=c
  end
endfunction
```

Expliquer le protocole ainsi simulé et donner la loi de X .

Solution :

A chaque étape, on choisit une boule au hasard dans A et une boule au hasard dans B et on les change d'urnes. On effectue au maximum trois étapes.

Le résultat de la fonction donne

* le nombre d'échanges nécessaires pour que A contienne les deux boules numérotées 0 si cela se produit en trois étapes ou moins.

* 4 si au bout de trois échanges on n'a pas obtenu les deux boules 0 dans A.

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

On note Y_k le nombre de boules 0 dans A à l'issue de k échanges

$$[X = 1] = [Y_1 = 0]. \text{ Or } \mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(\text{"choisir 1 dans A et 0 dans B"}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}}$$

$[X = 2] = [Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 2]$ (on peut écrire une formule des probabilités totales avec $(Y_1 = n)_{0 \leq n \leq 2}$ mais seul le terme en $n = 1$ apporte une contribution non nulle.)

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) \times \mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2 = 2)$$

Or $[Y_1 = 1] = [\text{"choisir les deux boules 0 ou les deux boules 1 et les échanger"}]$

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$[X = 3] = ([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1] \cap [Y_3 = 2]) \cup ([Y_1 = 0] \cap [Y_2 = 1] \cap [Y_3 = 2])$$

Union d'événements incompatibles : $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) \times \mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2 = 2) \times \mathbb{P}_{[Y_1=0] \cap [Y_2=1]}(Y_3 = 2) + \dots$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$[X = 4] = \overline{[X \leq 3]} \text{ donc } \boxed{\mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{2}}$$

SUJET E5

Exercice principal E5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de \mathbb{R}^{2n+1} dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n+1}$ où pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket^2$: $m_{i,j} = 1$ si $j = i$ ou $i + j = 2n + 2$ et $m_{i,j} = 0$ sinon.

1. **Question de cours** : Donner la définition d'une matrice diagonalisable et une caractérisation.
2. (a) Justifier que M est diagonalisable.
 (b) Justifier que e_{n+1} est un vecteur propre de f et déterminer la valeur propre associée.
3. Notons pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $F_k = \text{Vect}(e_k, e_{2n+2-k})$.
 (a) Soit g_k l'application définie sur F_k qui à tout élément x de F_k associe $f(x)$.
 Montrer que g_k est un endomorphisme de F_k et donner sa matrice, A_k , dans la base (e_k, e_{2n+2-k}) .
 (b) Diagonaliser A_k
 (c) En déduire une base de F_k dans laquelle la matrice de g_k est diagonale.
4. Déterminer les valeurs propres de f et ses sous-espaces propres associés à partir des questions précédentes.
5. Pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$,
 (a) Soit B une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A_k$.
 On admettra que B admet les même vecteurs propres que A_k . Déterminer toutes les matrices B qui conviennent.
 (b) En déduire qu'il existe un endomorphisme h_k de F_k tels que $h_k^2 = g_k$.
6. Proposer à partir des questions précédentes une matrice H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $H^2 = M$. Combien de telles matrices pourraient être proposées ici ?

Solution :

1. M est dite diagonalisable quand il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.
 M est diagonalisable si et seulement si la somme des dimension des sous-espaces propres est égale à la taille de la matrice. Programme ECE2, pages 7-8
2. (a) M est symétrique réelle donc diagonalisable.
 (b) $f(e_{n+1}) = e_{n+1}$ et $e_{n+1} \neq 0$ donc e_{n+1} est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.
3. (a) g_k est linéaire car f est linéaire.
 Soit $x \in F_k$. Il existe alors des réels α et β tels que $x = \alpha e_k + \beta e_{2n+2-k}$.
 Par linéarité de f , $g_k(x) = f(x) = \alpha f(e_k) + \beta f(e_{2n+2-k}) = (\alpha + \beta)(e_k + e_{2n+2-k})$. Donc $g_k(x) \in F_k$.

Donc $g_k \in \mathcal{L}(F_k)$ et $\text{mat}(g_k, (e_k, e_{2n+2-k})) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $Sp(A_k) = \{0, 2\}$ et $E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Alors $\dim E_0 + \dim E_2 = 2 = \dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Donc A_k est diagonalisable et il existe une matrice P par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1}A_kP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. P est inversible car P est la matrice de passage de la base canonique vers une base composée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

(c) En utilisant la diagonalisation de A : $\text{mat}(g_k, (e_k - e_{2n+2-k}, e_k + e_{2n+2-k})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. D'après ce qui précède $f(e_{n+1}) = e_{n+1}$, $f(e_1 + e_{2n+1}) = 2(e_1 + e_{2n+1})$ et $f(e_1 - e_{2n+1}) = 0$ et $e_{n+1} \neq 0$, $e_1 + e_{2n+1} \neq 0$ et $e_1 - e_{2n+1} \neq 0$. Donc $\{0, 1, 2\} \subset Sp(f)$.
Et $\text{Vect}(e_{n+1}) \subset E_f(1)$, $\text{Vect}(e_k + e_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \subset E_f(2)$ et $\text{Vect}(e_k - e_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \subset E_f(0)$.

Les familles de vecteurs trouvées sont libres (car naturellement étagées)
Donc $\dim E_0 \geq 1$, $\dim E_f(2) \geq n$ et $\dim E_f(0) \geq n$.

Or $\dim E_f(0) + \dim E_f(1) + \dim E_f(2) \leq 2n + 1$. Alors les inégalités précédentes sont des égalités et l'on a toutes les valeurs propres :

$$Sp(f) = \{0, 1, 2\}$$

$$\text{Vect}(e_{n+1}) = E_f(1) \quad \text{Vect}(e_k + e_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket) = E_f(2) \quad \text{Vect}(e_k - e_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket) = E_f(0)$$

5. (a) \diamond Comme B admet les mêmes vecteurs propres que A , $B' = P^{-1}BP$ est diagonale or $B'^2 = (P^{-1}BP)^2 = P^{-1}AP = D$.

$$\diamond \text{ Ainsi } B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ ou } B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(b) On cherche un endomorphisme de F_k dont la matrice B_k dans la base (e_k, e_{2n+2-k}) vérifie $B_k^2 = A$.

D'après 3-b) une telle matrice existe (il suffit de poser $B_k = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$)

$$\text{Il existe } h_k \text{ un endomorphisme de } F_k \text{ vérifiant } h_k^2 = g_k.$$

6. Notons P la matrice de passage de la base canonique vers la base $(e_{n+1}, e_1 - e_{2n+1}, e_1 + e_{2n+1}, e_2 - e_{2n}, e_2 + e_{2n}, \dots, e_{n-1} - e_{n+1}, e_{n-1} + e_{n+1})$.

$$\text{On propose les matrices } H = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On a proposé 2^{n+1} matrices différentes.

7. S'il vous reste du temps et que vous souhaitez occuper un peu le candidat, vous pouvez lui demander si toutes les matrices "racine carrée" de M ont été trouvées ici. Séparer alors le cas $n = 1$ et les cas $n \geq 2$. Dans le cas $n = 2$, remarquez que la matrice

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable (donc n'est pas du type des matrices considérées précédemment) et convient.

Exercice sans préparation E5

Soit le script Scilab :

```
clf()
plot2d([-1,0.01],[0,0])
x = 0:0.01:3
y = x^2/2
y = 1-exp(-y)
plot2d(x,y)
```

L'exécution de ce script permet d'obtenir la représentation graphique sur $[-1, 3]$ d'une fonction F . On suppose que l'expression de F proposée sur $[-1, 0]$ est en fait valable sur \mathbb{R}_- et que celle proposée sur $]0, 3]$ est valable sur \mathbb{R}_{+*} .

1. Tracer la courbe représentative de F . On donne $\exp\left(\frac{-1}{2}\right) \approx 0.6$.
2. F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ?
Si oui, quelle est l'espérance de X si elle existe?
3. On suppose connue une fonction Scilab nommée `simul` permettant de simuler X . Ecrire un script donnant une valeur approchée de π .

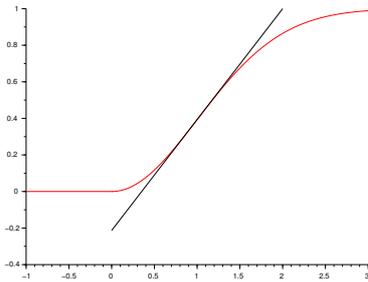
Solution :

1. $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ si $x \geq 0$.

F est continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* de dérivée $f(x) = 0$ sur \mathbb{R}_- et $f(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ sur \mathbb{R}_{+*} .

F est croissante sur \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$.

On peut marquer une tangente en 0 ($f'(0) = 0$) et même calculer $F''(x) = (1 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ pour trouver un point d'inflexion en $(1, 1 - e^{-1/2})$ avec une dérivée qui vaut $e^{-1/2}$.



2. F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité f (elle est même \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}).

Soit $A > 0$, en prenant $F - 1$ comme primitive de f .

$$\int_0^A x f(x) dx = [x(F(x) - 1)]_0^A - \int_0^A (F(x) - 1) dx = \left[-x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^A + \int_0^A \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est absolument convergente, $\mathbb{E}(X)$ existe et $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

```
3. n = 1000;          S = S/n;
   S = 0;             T = 2*S^2;
   for i = 1:n        disp(T);
       S = S+simul()
   end
```

SUJET E6

Exercice principal E6

Soit a un nombre réel fixé. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note φ l'application qui à tout élément $f \in E$ associe la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad g(x) = \frac{1}{x-a} \int_x^{2x-a} f(t) dt \quad \text{et} \quad g(a) = f(a).$$

- Énoncer la formule de Taylor-Young.
- (a) Soit $f \in E$. On note $g = \varphi(f)$. Déterminer un DL d'ordre 0 en a de g . En déduire que g est continue en a .
(b) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- On fixe dans cette question $n \in \mathbb{N}^*$, et l'on confond polynôme et fonction polynomiale. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $d_k : x \mapsto (x-a)^k$.
(a) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, exprimer $\varphi(d_k)$ en fonction de d_k .
(b) On définit l'application φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_n(P) = \varphi(P)$$

Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- (c) Montrer que φ_n est bijectif et diagonalisable.
- (a) Soit $f \in E$ et $g = \varphi(f)$. Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et exprimer $g'(x)$ à l'aide des fonctions f et g pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.
(b) On pose ici $f : t \mapsto |t-a|$. Expliciter dans ce cas $g = \varphi(f)$. Cette fonction g est-elle dérivable en a ?
(c) L'endomorphisme φ est-il surjectif?

Solution :

- Programme officiel ECE page 9. Seuls les ordres 1 et 2 sont au programme.

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de x_0 :

$$\text{Quand } x \rightarrow x_0 : f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + o((x-x_0)^2)$$

La formule de Taylor n'est exigible qu'à l'ordre 2 selon le programme.

- (a) Comme la fonction f est continue sur \mathbb{R} , elle admet des primitives sur \mathbb{R} . Notons F l'une d'entre elles.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{a\}$, $g(x) = \frac{F(2x-a) - F(x)}{x-a}$. Si $x = a$, $g(a) = f(a) = F'(a)$.

En posant $x = a + h$, $2x - a = a + 2h$, donc $\forall h \in \mathbb{R}_+^*, g(a+h) = \frac{F(a+2h) - F(a+h)}{h}$

On écrit un DL à l'ordre 1 de F (qui est bien de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de a)

$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + o(h)$ et $F(a+2h) = F(a) + 2hF'(a) + o(h)$. Or, $F'(a) = f(a)$, donc :

$$g(a+h) = \frac{hf(a) + o(h)}{h} = f(a) + o(1). \text{ Or, } g(a) = f(a), \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = g(a)$$

g est continue en a

- (b) La fonction F est dérivable sur \mathbb{R} , donc continue sur \mathbb{R} . Par composition et produit, g est continue sur $\mathbb{R} - \{a\}$. Donc $g \in E$. Par linéarité de l'intégrale, pour tout $(f_1, f_2) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{a\}$, $\varphi(\lambda f_1 + f_2)(x) = \lambda \varphi(f_1)(x) + \varphi(f_2)(x)$.

De plus, $\varphi(\lambda f_1 + f_2)(a) = (\lambda f_1 + f_2)(a) = \lambda f_1(a) + f_2(a)$. L'application φ est donc linéaire.

De plus, si $f \in E$, alors $g = \varphi(f)$ est continue en a d'après b. et est continue sur $\mathbb{R} - \{a\}$. Donc $g \in E$.

On conclut que φ est un endomorphisme de E .

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{a\}$,

$$\varphi(d_k)(x) = \frac{1}{x-a} \left[\frac{(t-a)^{k+1}}{k+1} \right]_x^{2x-a} = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} (x-a)^k.$$

De plus, $\varphi(d_k)(a) = d_k(a) = 0$.

Ainsi, $\varphi(d_k) = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} d_k$.

- (b) La famille (d_0, \dots, d_n) est une famille de $(n+1)$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnés en degré (comme cette propriété n'est pas officiellement au programme, le candidat pourra ou pas faire un test de liberté à votre convenance).

On en déduit que la famille est libre, puis qu'elle constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

La linéarité de φ_n est issue de celle de φ

Comme (d_0, \dots, d_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $\varphi(d_k) \in \mathbb{R}_n[X]$,

$\text{Im}(\varphi_n) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- (c) Comme (d_0, \dots, d_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres pour φ_n , l'endomorphisme φ_n est diagonalisable.

Attention, si l'on veut utiliser les valeurs propres, il faut montrer qu'elles sont deux à deux distinctes.

Si l'on note $h : x \mapsto \frac{2^{x+1}-1}{x}$, $h'(x) = \frac{(x \ln(2) - 1)2^{x+1} + 1}{x^2}$, h est strictement croissante sur $[2; +\infty[$,

$h(0) = \frac{1}{2}$, $h(1) = 1$ et $h(2) = \frac{7}{4}$, on a bien $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes.

Puisque $0 \notin \text{Sp}(\varphi_n)$, φ_n est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. (a) La fonction F est dérivable sur \mathbb{R} . Par composition et produit, g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{a\}$ avec :

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2} \int_x^{2x-a} f(t) dt + \frac{2f(2x-a) - f(x)}{x-a} = \frac{-g(x)}{x-a} + \frac{2f(2x-a) - f(x)}{x-a}.$$

- (b) Si $x > a$, alors $a < x < 2x - a$, d'où $g(x) = \frac{1}{x-a} \int_x^{2x-a} (t-a) dt = \frac{1}{2(x-a)} [(t-a)^2]_x^{2x-a} = \frac{3}{2}(x-a)$.

Si $x < a$, alors $2x - a < x < a$, d'où $g(x) = \frac{1}{x-a} \int_x^{2x-a} (a-t) dt = \frac{1}{2(x-a)} [-(t-a)^2]_x^{2x-a} = \frac{3}{2}(a-x)$.

Il suit que $g : x \mapsto \frac{3}{2}|x-a|$, formule encore valable pour $x = a$. Cette fonction g n'est pas dérivable en a .

- (c) Il suffit de trouver une fonction de E qui ne soit pas dérivable en un point de $\mathbb{R} - \{a\}$

La fonction $h : x \mapsto |x - (a+1)|$ appartient à E . Si h admettait un antécédent par φ dans E , h serait dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{a\}$, ce qui est faux car h n'est pas dérivable en $a+1$.

On conclut que l'endomorphisme φ n'est pas surjectif.

Exercice sans préparation E6

On considère la fonction Scilab suivante :

```
function T=simul(n,a)
Y=grand(1,n,"poi",a);
S=0;
x=1:n;
for k=1:n
    S=S+1/(1+Y(1,k));
    T(1,k)=S/k;
end
plot(x,T)
endfunction
```

A quoi peut-on s'attendre sur la courbe tracée lors de l'appel de cette fonction quand $a \in \mathbb{R}_+^*$ et n est entier plus grand que 1000 ?

Solution :

Si l'on considère une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, suivant une loi de Poisson et que l'on note $Z_i = \frac{1}{1+Y_i}$

la matrice S contiendra en k -ième coordonnée $\sum_{i=1}^k Z_i$

la matrice T contiendra en k -ième coordonnée la moyenne empirique $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Z_i$.

Comme les variables Z_i sont bornées, elles admettent une espérance et une variance on peut appliquer la loi des grands nombres :

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(Z)| > \varepsilon) = 0$.

On peut donc s'attendre à ce que la courbe tracée se rapproche de $\mathbb{E}(Z)$ (attention, le programme ne parle pas de "convergence en probabilité" et encore moins de "convergence presque sûre".)

$$\text{Or, } \mathbb{E}\left(\frac{1}{1+Y}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a} \frac{a^k}{(k+1)!} = \frac{e^{-a}}{a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-a}}{a} \times (e^a - 1) = \frac{1 - e^{-a}}{a}$$

La courbe tracée "se rapproche" de $\frac{1 - e^{-a}}{a}$.

Si l'on a fini, montrons que la limite trouvée est inférieure ou égal à 1.

* Par convexité de la fonction exponentielle, on a, pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$.

Ainsi : $1 - e^{-a} \leq a$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+Y}\right) \leq 1$

* Ou en remarquant que $\forall \omega \in \Omega$, $\frac{1}{1+Y(\omega)} \leq 1$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+Y}\right) \leq 1$.

SUJET E7

Exercice principal E7

Soit φ une fonction continue et positive sur $]0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.

On pose $A = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$.

On définit la fonction f sur $]0, +\infty[$ par $f : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^x \varphi(t) dt$.

1. Soit f une fonction continue définie sur $]0, +\infty[$. Donner la définition de la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.
2. Déterminer le signe de f sur \mathbb{R}_+^* .
3. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et préciser la valeur de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donner les variations de f sur \mathbb{R}_+^* .
4. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
5. On suppose dans cette question que φ est définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Justifier que φ est continue, positive sur \mathbb{R}_+^* et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge et préciser sa valeur.
 - (b) Tracer la courbe représentative de φ et préciser l'allure de la courbe au point d'abscisse 1.
 - (c) Tracer la courbe représentative de f et préciser la courbe au point d'abscisse 0 et au point d'abscisse 1.
6. Compléter fonction Scilab qui en utilisant une fonction phi () continue et positive sur $]0, +\infty[$ déjà programmée, renvoie une valeur approchée de $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \varphi(t) dt$ pour $x \in]0, +\infty[$.

```
function f=approche(x)
  n=1000;
  t=1/x;
  pas=...
  S= ...
  for i=1:n
    ...
    ...
    ...
  f=S
endfunction
```

Solution :

1. $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_x^1 f(t) dt$ a une limite finie quand x tend vers 0 et $\int_1^x f(t) dt$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$. (Programme ECE2 page 9)
2. $\forall x > 0 \quad x \in]0, 1] \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 1 \geq x$ et $x \in [1, +\infty[\Rightarrow \frac{1}{x} \leq 1 \leq x$. Donc, comme φ est positive,

f est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.

3. Soit Φ une primitive de φ sur \mathbb{R}_+^* , $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \Phi(x) - \Phi\left(\frac{1}{x}\right)$. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est C^1 sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et Φ est continue sur \mathbb{R}_+^* donc $x \mapsto \Phi\left(\frac{1}{x}\right)$ est C^1 sur \mathbb{R}_+^* et, f est C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \varphi(x) + \frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ φ est positive sur \mathbb{R}_+^* donc $f'(x) \geq 0$ et f est croissante sur \mathbb{R}_+^* .

4. Comme $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \varphi(t) dt = \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x \varphi(t) dt = -\int_0^1 \varphi(t) dt$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{x}}^1 \varphi(t) dt = -\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -A$.

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = -A$.

5. (a) Il est clair que φ est positive sur \mathbb{R}_+^* , que φ est continue sur \mathbb{R}_+^* car continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et a même limite (qui est 1) à droite et à gauche en 1.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \varphi(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x = 1$.

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge (intégrale de Riemann) et $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \varphi(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} [2\sqrt{t}]_x^1 = 2$.

donc $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge et $A = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = 3$.

(b) La courbe représentative de φ est asymptote à l'axe Oy quand x tend vers 0 et asymptote à l'axe Ox quand x tend vers $+\infty$ et présente un point anguleux d'abscisse 1 avec une demi-tangente de coefficient directeur $-1/2$ à gauche et une demi-tangente de coefficient directeur -2 à droite.

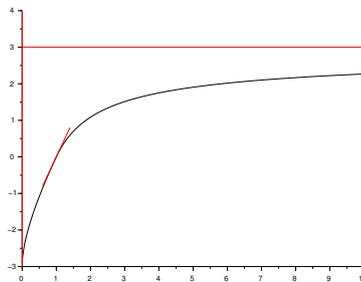
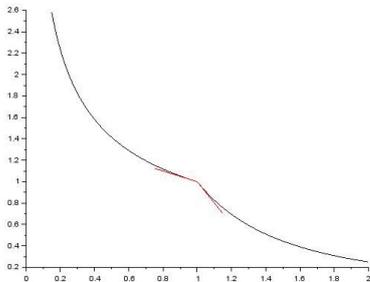
(c) On prolonge f par continuité en 0 par $f(0) = -A = -3$.

f est continue, croissante sur \mathbb{R}_+ , dérivable sur \mathbb{R}_+^* . La courbe est asymptote à la droite d'équation $y = 3$.

$\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \int_{1/x}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 3 - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$. et $\forall x \in]0, 1[$, $f(x) = -3 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$f'(1) = 2$. et $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{2\sqrt{x} + x}{x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0$.

Donc f n'est pas dérivable en 0 et la courbe admet l'axe Oy comme demi-tangente.



N.B. Le théorème de prolongement de la dérivée n'est pas au programme.

6. Méthode des rectangles, on calcule $\left(\frac{x - \frac{1}{x}}{n}\right) \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{1}{x} + k \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{n}\right)\right)$.

```
pas=(x-1/x)/n;
S=0;
for i=1:n
    S=S+phi(t)*pas;
    t=t+pas
end
```

Note : le programme fonctionne aussi quand $\frac{1}{x} > x$ et les bornes sont inversées.

Exercice sans préparation E7

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. A l'aide des matrices élémentaire, trouver les valeurs propres de $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & ab & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi :

$$\mathbb{P}(X = -1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = q = 1 - p \text{ où } p \in]0, 1[.$$

Déterminer la probabilité que les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} X & 0 & Y \\ 0 & XY & 0 \\ Y & 0 & X \end{pmatrix}$ soient toutes positives ou nulles.

3. Même question que pour 2. en supposant que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes telle que

$$X \text{ est à densité de densité } f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ et } Y \text{ suit la même loi que précédemment.}$$

Solution :

1.

$$ME_2 = abE_2 \quad M(E_1 + E_3) = (a + b)(E_1 + E_3) \quad M(E_1 - E_3) = (a - b)(E_1 - E_3)$$

$E_1, E_1 + E_3, E_1 - E_3$ forme une base donc Le spectre de $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & ab & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ est $\{ab, a + b, a - b\}$.

2. La probabilité recherchée est $\mathbb{P}(XY \geq 0, X + Y \geq 0, X - Y \geq 0)$.

$$\text{Or } (XY \geq 0, X + Y \geq 0, X - Y \geq 0) = (X = 1, Y = 1).$$

Donc la probabilité recherchée vaut p^2 .

3. Notons A l'événement $(XY \geq 0, X + Y \geq 0, X - Y \geq 0)$.

D'après la formule des probabilités totales avec les système complet d'événements $(Y = -1, Y = 1)$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap (Y = -1)) + \mathbb{P}(A \cap (Y = 1)).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(X \leq 0, Y = -1, X \geq 1) + \mathbb{P}(X \geq 0, Y = 1, X \geq 1, X \geq -1) \\ &= 0 + \mathbb{P}(X \leq 1, Y = 1) \\ &= p \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x} dx \\ &= \frac{pe^{-1}}{2} \end{aligned}$$

SUJET E8

Exercice principal E8

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soient a, b, c des réels tels que $0 < a < b < 1$ et $c \geq 0$. Soit $f_{a,b,c}$ la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{a,b,c}(x) = \begin{cases} c \left(1 - \frac{x}{a}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \frac{c}{2} \left(1 + \frac{x-1}{1-b}\right) & \text{si } b \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Question de cours. Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers une variable aléatoire Y .
2. Décrire la courbe de $f_{a,b,c}$ dans le cas général et tracer la courbe de $f_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 4}$.
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Déterminer c pour que $f_{\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, c}$ soit une densité de probabilité.
On note désormais pour $n \geq 2$, f_n la densité trouvée et X_n une variable aléatoire admettant f_n comme densité.
4. Montrer que $(X_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y quand n tend vers $+\infty$.
5. Soient a, b, c tels que $f_{a,b,c}$ définisse une densité de probabilité. On suppose que $b = 0.8$ et que la fonction Scilab `simul` permet de simuler une variable X dont une densité serait $f_{a,b,c}$. Que pensez-vous du script suivant ?

```
W=0;
for i=1:1000
    S=simul();
    if (S<0.8) & (S>W)
        then W=S
    end
end
disp(W)
```

6. (a) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(x)$ pour x réel différent de 0 et 1.
(b) Quelle est l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de X_n ? Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$?

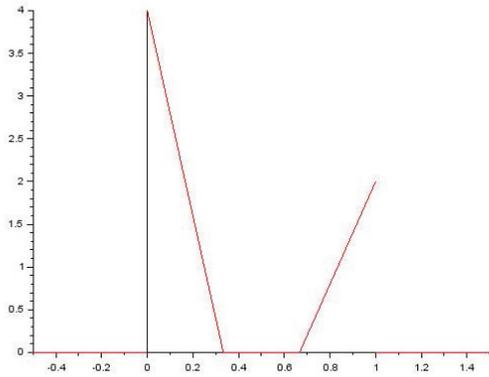
On pourra utiliser le résultat suivant : $\int_b^1 x f_{a,b,c}(x) dx = \frac{c}{12}(1-b)(b+2)$.

- (c) Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$.

Commentez.

Solution :

1. Programme ECE2 page 17.
Soit F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de Y . (X_n) converge en loi vers Y si $F_n(x)$ tend vers $F(x)$ pour tout x où F est continue.
2. $f_{a,b,c}$ est nulle sur $]-\infty, 0[$, $]a, b[$ et $]1, +\infty[$.
Pour tracer le reste de la courbe on relie les points $(0, c)$ et $(a, 0)$ par un segment, ainsi que les points $(b, 0)$ et $(1, c/2)$.



3. $f_{\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, c}$ est continue sur \mathbb{R} sauf en 0 et en 1, positive sur \mathbb{R} .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, c} = \frac{3c}{4n} \text{ (somme des aires de deux triangles)}$$

Donc $f_{\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, c}$ est une densité de probabilité si et seulement si $c = \frac{4n}{3}$.

4. $\forall x \leq 0, \mathbb{P}(X_n \leq x) = 0$ et $\forall x \geq 1, \mathbb{P}(X_n \leq x) = 1$.

$$\forall x \in]0, 1[, \text{ pour } n \text{ assez grand, } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(X_n \leq x) = \int_0^{1/n} \frac{4n}{3}(1-nx) dx = \frac{1}{2} \times \frac{4n}{3} \times \frac{1}{n} = \frac{2}{3} \text{ (aire d'un triangle).}$$

$$\text{Donc } F_n(x) \text{ converge quand } n \text{ tend vers } +\infty \text{ vers } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Cette limite est la fonction de répartition F_Y de la variable Y de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$ sauf en 0, où F_Y n'est pas continue.

(X_n) converge en loi vers Y qui suit de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

5. Ce programme considère un échantillon de 1000 réalisations de X et renvoie la plus grande valeur prise par cet échantillon qui soit inférieure à b . Cette valeur est probablement proche de a .

6. (a) $\forall x \in]0, 1[\exists N$ tel que si $n \geq N, \frac{1}{n} < x$ et $f_n(x) = 0$. donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Ainsi $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ pour x différent de 0 et de 1.

(b) $\forall \omega \in \Omega, 0 \leq X(\omega) \leq 1$ donc $\mathbb{E}(X_n)$ existe et $\mathbb{E}(X_n) \in [0, 1]$.

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_0^{1/n} cx(1-nx) dx + \int_b^1 \frac{c}{2}(nx(x-1) + x) dx \quad \text{où } b = 1 - 1/n.$$

$$\text{Or, } \int_0^{1/n} cx(1-nx) dx = c \left[\frac{x^2}{2} - \frac{nx^3}{3} \right]_0^{1/n} = c \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} \right) = \frac{c}{6n^2} = \frac{2}{9n}.$$

$$\text{Avec la formule admise : } \int_b^1 xf(x) dx = \frac{c}{12}(1-b)(2+b) = \frac{4n}{3 \times 12} \times \frac{1}{n} \times \left(3 - \frac{1}{n} \right) = \frac{3n-1}{9n}.$$

$$\text{Finalement } \mathbb{E}(X_n) = \frac{3n+1}{9n} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{3}.$$

(c) Ainsi $\mathbb{E}(Y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{3} \neq 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$

On ne peut pas intervertir les symboles limites et intégrales.

Il semble bien plus pertinent (au moins sur cet exemple) de définir la convergence en loi en cherchant la limite de la fonction de répartition qu'en cherchant la limite de la densité.

Exercice sans préparation E8

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et à coefficients réels.

On définit sur E l'application φ par :

si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_0x^3$

1. Montrer que φ est un automorphisme de E et préciser φ^{-1} .
2. Déterminer φ^4 .
3. Quels sont les éléments propres de φ (valeurs propres et sous-espaces propres) ? φ est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. $\forall P \in E \quad \varphi(P) \in E$ et φ est linéaire (évident).

Soit $\psi : a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mapsto a_3X^0 + a_0X + a_1X^2 + a_2X^3$

On a bien : $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = Id_E$.

Donc φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$

2. $\varphi^4 = Id_E$.

3. $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de φ . 1 et -1 sont les seules valeurs propres possibles.

- $\varphi(P) = P \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3$ donc 1 est valeur propre et le sous espace propre est $\text{Vect}(1 + X + X^2 + X^3)$.
- $\varphi(P) = -P \Leftrightarrow a_0 = -a_1 = a_2 = -a_3$ donc -1 est valeur propre et le sous espace propre est $\text{Vect}(1 - X + X^2 - X^3)$

Chaque sous-espace propre est de dimension 1 et E est de dimension 4 donc φ n'est pas diagonalisable.

On peut aussi demander de calculer φ^k pour $k \in \mathbb{Z}$ (la suite $(\varphi^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est 4-périodique.)

SUJET E9

Exercice principal E9

Soit $E = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique \mathcal{B} .

Soit φ l'endomorphisme de E admettant dans la base \mathcal{B} la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Question de cours :** Donner une condition suffisante et une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie soit diagonalisable.
- Calculer AP .
- A l'aide du calcul de AP répondre aux questions :
 - * Quelles sont les valeurs propres de φ et les sous espaces propres associés ?
 - * A est-elle diagonalisable ?
 - * A est-elle inversible ?
 - * P est-elle inversible ?
 - * Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
- (a) Soit M une matrice élément de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA$. Soit V une matrice colonne propre de A associée à -1 . Montrer que V est aussi une colonne propre pour M .
(b) Le résultat reste-t-il vrai si V est une matrice colonne propre de A associée à 2 ?
On pourra considérer (sans chercher à la calculer explicitement) la matrice $M = PTP^{-1}$, où T est une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui situé sur la première ligne et la deuxième colonne.
- Soient

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = POP^{-1}$$

- Montrer que N et A commutent.
 - Montrer que 1 est valeur propre de N et que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est au moins de dimension 2 .
 - N est-elle diagonalisable ?
-

Solution :

- Programme officiel ECE2, page 7.

Si un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n est diagonalisable ssi la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égal à n .

- $AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. (a) Soit C_k la k -ième colonne de P , on déduit du calcul de AP que :

$$AC_1 = 2C_1 \quad AC_2 = 2C_2 \quad AC_3 = 0C_3 \quad AC_4 = -C_4.$$

Comme les C_k sont tous non nuls, on en déduit que : 0 est valeur propre de A et C_3 est une colonne propre associée à 0 ; -1 est valeur propre de A et C_4 est une colonne propre associée à -1 ; 2 est valeur propre de A et C_1 et C_2 sont des colonnes propres associées à 2. En notant E_λ le sous espace propre associé à λ : $\dim E_0 \geq 1$ $\dim E_{-1} \geq 1$ $\dim E_2 \geq 2$ car il est clair que (C_1, C_2) est libre.

Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, la somme des dimensions ne peut pas dépasser 4.

$\dim E_0 = 1$ et $E_0 = \text{Vect}(C_3)$ $\dim E_{-1} = 1$ et $E_{-1} = \text{Vect}(C_4)$ $\dim E_2 = 2$ et $E_2 = \text{Vect}(C_1, C_2)$:

(b) La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à $\dim \mathbb{R}^4$ donc A est diagonalisable.

(c) 0 est une valeur propre de A donc A n'est pas inversible.

(d) (C_1, C_2, C_3, C_4) est une base de vecteurs propres donc P est inversible.

(e) $D = \text{Diag}(2, 2, 0, -1)$ est semblable à A et $A = PDP^{-1}$

4. Soit M une matrice élément de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA$.

(a) Soit V colonne propre associée à -1. Alors $AV = -V$. Donc $AMV = MAV = -MV$. D'où $MV \in E_{-1}$ et comme E_{-1} est une droite, $\exists \mu$ tel que $MV = \mu V$. V est aussi un vecteur propre de M .

(b) On considère par exemple le vecteur propre représenté par C_2 la deuxième colonne de A et la matrice M proposée.

$$AM = PDP^{-1}PTP^{-1} = PDTP^{-1} = MA \text{ car } DT = TD.$$

$AC_2 = -2C_2$, donc C_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre -2

$$\text{Et } MC_2 \text{ est la deuxième colonne de } MP = PTP^{-1}P = PT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc C_2 est propre pour A mais pas pour M .

La propriété est fautive pour les vecteurs de E_2

5. (a) O et D commutent donc A et N aussi.

(b) $V = C_4$ est vecteur propre de N , on calcule $NV = V$. 1 est bien une valeur propre de N .
De même $NC_3 = C_3$ donc $\dim(E_1(N)) \geq 2$.

(c) $N(C_1 + C_2) = C_1 + C_2$ et $N(C_1 - C_2) = C_2 - C_1$.

Finalement $\dim(E_1) = 3$ et $\dim(E_{-1}) = 1$ et N est diagonalisable.

Exercice sans préparation E9

Les variables aléatoires intervenant dans l'exercice sont définies dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On considère la fonction Scilab suivante :

```
function y = X(n)
u = rand()
if u<0.5 then
    y = (sqrt(2*u))/n
    else
    y = (2-sqrt(2-2*u))/n
endfunction
```

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire simulée par l'appel de la fonction $X(n)$
Quelle est la fonction de répartition de X_n ?
2. Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que X_n est une variable à densité et représenter graphiquement une densité de X_2 .

N.B. On rappelle que `rand()` simule une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur $[0, 1[$.

SUJET E10

Exercice principal E10

On rappelle que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E , alors pour tout entier naturel k , f^k est l'endomorphisme composé de f par lui-même k -fois.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose Δ_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta_n(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. **Question de cours :** Rappeler le théorème du rang.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 (b) Donner la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]$. Déterminer $\text{Im}(\Delta_n)$.
 (b) A-t-on $\text{Ker}(\Delta_n) \cap \text{Im}(\Delta_n) = \{0\}$?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n^{n+1} = 0$.
5. Soit τ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\tau_n = \Delta_n + \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.
 (a) Montrer que pour tout entier naturel j et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\tau_n^j(P) = P(X+j)$.
 (b) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\Delta_n^k(P)$ en fonction des $\tau_n^j(P)$.
 (c) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} P(j) = 0$.
6. (a) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q(X)$.
 (b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S(X+2) - 2S(X+1) + S(X) = Q(X)$.

Solution :

1. Soit f une application linéaire de E un espace vectoriel de dimension finie vers F un espace vectoriel.
 Alors $\text{rg}(f) = \dim E - \dim \text{Ker}(f)$. (Programme ECE2 page 6)
2. (a) i. $\Delta_n(P + \lambda Q) = \Delta_n(P) + \lambda \Delta_n(Q)$.
 ii. Si P est un polynôme constant alors $\Delta_n(P) = 0$.
 Si P n'est pas un polynôme constant alors $\deg(\Delta_n(P)) = \deg(P) - 1$.
 Donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\Delta_n(P) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$

$$\text{mat}(\Delta_n, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & 2 & & \binom{k}{j} & n \\ & & & & & \vdots \\ & & & & k & n \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3. (a) $\text{rg}(\Delta_n) = n$. Donc d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker}(\Delta_n) = 1$.
 Or $1 \in \text{Ker}(\Delta_n)$ et $\text{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 Donc $\text{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\text{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(b) Non. $\text{Ker}(\Delta_n) \subset \text{Im}(\Delta_n)$

4. On peut soit remarquer qu'en multipliant la matrice par elle-même, la matrice obtenue est triangulaire supérieure avec les coefficients diagonaux et sur-diagonaux nuls. En itérant ce processus, $\Delta_n^{n+1} = 0$.

On peut aussi montrer par récurrence que si P est un polynôme de degré supérieur ou égal à k , $\deg(\Delta_n^k(P)) = \deg(P) - k$ et si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k - 1$ alors $\Delta_n^k(P) = 0$.

Donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta_n^{n+1}(P) = 0$.

5. (a) Par récurrence, $\tau_n^0(P) = P$. Si $\tau_n^j(P(X)) = P(X+j)$ alors $\tau_n^{j+1}(P(X)) = \tau_n(P(X+j)) = P(X+j+1)$.

(b) Comme τ_n et Id commutent, $\Delta_n^k = (\tau_n - \text{Id})^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \tau_n^j$.

(c) Comme $\Delta_n^{n+1} = 0$, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} \tau_n^j(P) = 0$.

Ou encore $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} P(X+j) = 0$.

En particulier en évaluant en 0, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} P(j) = 0$.

6. (a) Pour $Q \in \mathbb{R}[X]$, fixé, on pose $n = \deg(Q+1)$. On a alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Im}(\Delta_n)$

Il existe donc $P \in \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(X) = \Delta_n(P(X)) = P(X+1) - P(X)$

(b) Idée/indication : $S(X+2) - 2S(X+1) + S(X) = \Delta_n^2(S)$ pour $S \in \mathbb{R}_n[X]$

Pour Q fixé on construit P en a), puis on applique le résultat de la question a) à P : il existe $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = S(X+1) - S(X)$

On a alors $P(X+1) - P(X) = S(X+2) - S(X+1) - (S(X+1) - S(X))$

Ainsi pour $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(X) = S(X+2) - 2S(X+1) + S(X)$.

Exercice sans préparation E10

Soient m, μ, s et σ des réels strictement positifs.

1. Une machine A remplit des sacs de graines. La masse de chaque sac rempli par A est une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, s^2)$ d'espérance m et de variance s^2 .

Une machine B remplit des sacs de graines. La masse de chaque sac rempli par B est une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et de variance σ^2 .

On suppose que les variables aléatoires représentant les masses des sacs sont indépendantes.

On achète n sacs produits par A et ν sacs produits par B.

Quelle est la probabilité que la masse moyenne des n sacs produits par A soit supérieure à la masse moyenne des ν sacs produits par B ?

On donne les valeurs numériques suivantes :

$$m = 101, \quad s = \sqrt{6}, \quad \mu = 99, \quad \sigma = \sqrt{5}, \quad n = 4 \quad \nu = 2.$$

$$\text{On donne } \sqrt{6} \approx 2,45 \quad \sqrt{5} \approx 2,24$$

Si Φ étant la fonction de répartition d'une variable gaussienne centrée réduite :

$$\Phi(0,5) \approx 0,69 \quad \Phi(1) \approx 0,84 \quad \Phi(1,5) \approx 0,93 \quad \Phi(2) \approx 0,98$$

2. Compléter la fonction Scilab suivante qui si on lui donne m, μ, s, σ, n et ν renvoie une valeur approchée de la probabilité que la masse moyenne des n sacs produits par A soit supérieure à la masse moyenne des ν sacs produits par B ?

```
function P=proba(m,mu,s,sigma,n,nu)
X=grand(1000,n,"nor",m,s);
Y=grand(1000,nu,"nor",mu,sigma);
...
for i=1:1000
    T=0;
    for j=1:n
        T=T+X(i,j)
    end
    ....
    ....
    ...
    ...
    ...
end
end
...
endfunction
```

Solution :

1. Soient X_1, X_2, \dots, X_n les variables aléatoires représentant les masses des n sacs fournis par A, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

Y_1, Y_2, \dots, Y_ν les variables aléatoires représentant les masses des ν sacs fournis par B et $\bar{Y}_\nu = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} Y_i$.

Comme les X_i sont indépendantes, \bar{X}_n suit une loi normale.

Par linéarité $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = m$ et par indépendance $V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n s^2 = \frac{s^2}{n}$ et $\bar{X}_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{s^2}{n}\right)$.

De même $\bar{Y}_\nu \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}\right)$.

D'après le lemme des coalitions, \bar{X}_n et \bar{Y}_ν sont indépendantes donc $\bar{X}_n - \bar{Y}_\nu$ suit aussi une loi normale. On calcule les espérance et les variances.

$$Z = \bar{X}_n - \bar{Y}_\nu \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m - \mu, \frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}\right).$$

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \bar{Y}_\nu) = \mathbb{P}(Z \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(Z < 0) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0) \text{ (variable à densité)}$$

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \bar{Y}_\nu) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Z - (m - \mu)}{\sqrt{\frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}}} \leq -\frac{(m - \mu)}{\sqrt{\frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{(m - \mu)}{\sqrt{\frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}}}\right) = \Phi\left(\frac{(m - \mu)}{\sqrt{\frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}}}\right)$$

Application numérique :

$$m - \mu = 2$$

$$\sqrt{\frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{5}{2}} = 2$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \bar{Y}_\nu) = \Phi(1) \approx 0,84.$$

```
2. function P=proba(m,mu,s,sigma,n,nu)
X=grand(1000,n,"nor",m,s);
Y=grand(1000,nu,"nor",mu,sigma);
C=0;
for i=1:1000
    T=0;
    for j=1:n
        T=T+X(i,j)
    end
    V=0;
    for j=1:nu
        V=V+Y(i,j)
    end
    if T/n>=V/nu then C=C+1;
end
end
P=C/1000
endfunction
```

Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (T)

Juin-juillet 2022

Le bilan de la session 2022 de mathématiques voie T est satisfaisant

Cette année les notes se sont étalées entre 6 et 19. La moyenne s'établit à 11,33 et l'écart-type à 3,66.

Le niveau d'ensemble des candidats nous a semblé un peu plus homogène que l'année dernière : il n'y a pas eu de prestations catastrophiques, mais aussi un peu moins de prestations brillantes.

Le jury insiste à nouveau sur les points suivants auprès des futur.e.s candidat.e.s et de leurs enseignant.e.s.

— Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes restent incontournables. Le candidat doit vraiment s'attendre à se voir demandé une esquisse qualitative après un tableau de variation.

— Malgré quelques progrès, il faut rester vigilant sur les calculs.

— Les théorèmes du cours doivent être connus précisément, avec leurs hypothèses précises et leurs conclusions.

— Il n'y avait pas cette année de question d'informatique dans les exercices proposés : il est fort probable que l'an prochain elles fassent leur retour l'an prochain.

— Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation : au cours de la présentation de l'exercice préparé, le jury pose des questions pour aiguiller le candidat vers la solution. Il convient d'y être attentif. Il est souvent utile d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Par ailleurs, une prestation peut être jugée excellente sans que le candidats ne traite beaucoup de questions, alors qu'un candidat traitant de manière approximative un grand nombre de questions en déformant au passage les théorèmes de son cours risque d'être déçu par sa note finale.

— La question sans préparation est aussi très importante. Là encore, pour la plupart d'entre elles, le candidat peut tout à fait faire bonne impression sans aller au bout de la question. L'important est de réfléchir et d'écouter les indications du jury. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, qui avaient complètement raté l'exercice préparé ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation, et parfois dans les toutes dernières minutes.

Voici les sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T1

Exercice principal T1

Soient k et n deux entiers naturels supérieur ou égal à 2 fixé.

Une urne contient 3 jetons numérotés de 1 à 3 et l'on effectue n tirages avec remise.

Pour $j \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, on note N_j le nombre de jetons numéroté(s) j tiré(s).

Ainsi, N_1 représente le nombre de jeton n°1 tiré(s) en n tirages.

1. **Question de cours** : loi binomiale : protocole, loi, espérance, variance.
2. (a) Déterminer la loi de N_1 .
(b) Montrer que $N_1 + N_2$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Donner sa variance et son espérance.
(c) Déterminer la covariance de N_1 et de N_2 ainsi que leur coefficient de corrélation linéaire.
3. On note maintenant, pour $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, X_j la variable de Bernoulli qui vaut 1 si au moins un jeton numéroté j est tiré.
(a) Déterminer la loi commune à X_1 et à X_2 .
(b) Calculer la covariance de X_1 et de X_2 .
4. On note $Z = \sum_{j=1}^3 X_j$.
(a) Que représente la variable Z ?
(b) Donner la loi de Z quand $n = 3$.

Solution :

1. Protocole ("nombre de succès" pour n expériences identiques et indépendantes), $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. (Programme ECT1 page 12)
2. (a) Les tirages sont identiques et indépendants (avec remise)
$$N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$$

(b) $N_1 + N_2$ désigne le nombre de fois où l'on a obtenu la boule n°1 ou la boule n°2 : on effectue toujours n expériences, mais on change la définition du succès
$$N_1 + N_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right), \mathbb{E}(N_1 + N_2) = \frac{2n}{3}, V(N_1 + N_2) = \frac{2n}{9}$$

(c) On utilise la formule $V(N_1 + N_2) = V(N_1) + V(N_2) + 2cov(N_1, N_2)$
Ainsi comme $V(N_1) = V(N_2) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}$, on obtient $cov(N_1, N_2) = \frac{-n}{9}$
$$\rho(X_1, X_2) = \frac{-cov(N_1, N_2)}{\sigma(N_1)\sigma(N_2)} = \frac{-n/9}{2n/9} = \frac{-1}{2}$$
3. (a) $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \mathbb{P}(N_1 = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

(b) Il faut calculer $\mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$

Mais $X_1 X_2$ est aussi une variable de Bernoulli.

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \mathbb{P}(N_1 + N_2 \neq 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - (\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)) = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2}$$

4. (a) Z représente le nombre de fois où la variable X_j vaut 1 :

$\boxed{\text{c'est le nombre de jetons différents qui vont sortir au cours des } n \text{ tirages.}}$

(b) On n'a pas une binomiale car les variables X_j ne sont pas identiques et indépendantes.

$$Z(\Omega) = \{1; 2; 3\}$$

i. $[Z = 1]$ ssi les 3 tirages donnent le même jeton.

$[Z = 1] = [N_1 = 3] \cup [N_2 = 3] \cup [N_3 = 3]$. 3 événements incompatibles, on somme les probabilités.

$$\mathbb{P}([Z = 1]) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{9}}$$

ii. $[Z = 3]$ ssi les trois tirages donnent des jetons différents.

On peut proposer $[Z = 3] = A_2 \cap A_3$ avec A_i " le i -me tirage donne un jeton qui n'a jamais été tiré."

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}([Z = 3]) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(A_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

$$\text{iii. } \mathbb{P}([Z = 2]) = 1 - \mathbb{P}([Z = 1]) - \mathbb{P}([Z = 3]) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Exercice sans préparation T1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x^2-1} & \text{sinon} \end{cases}$

1. Sur quel(s) intervalle(s) f est-elle continue ?
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans un ensemble à déterminer.

Solution :

1. Par opérations usuelles, f est continue sur $\mathbb{R}_-,]0; 1[$ et $]1, +\infty[$
 Mais comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, f est aussi continue en 0, donc sur $] -\infty; 1[$

f est continue sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1, +\infty[$

2. $\forall x \in] -\infty; 0[, f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$
 $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-1) - 2x \cdot x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0.$

D'où le tableau de variation

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	1		+∞
	↘		↘
			1

Note on a $f(0) = 0$, et f n'est pas dérivable en 0, mais la continuité en 0 suffit pour montrer que f est strictement croissante sur $] -\infty; 1[$

Pour les limites : ils ne connaissent pas la notion d'équivalent, mais on un "truc" sur les fractions de polynômes

Avec le théorème de la bijection monotone f réalise deux bijections respectivement de $] -\infty; 1[$ dans lui même et de $]1; +\infty[$ dans lui même

Comme les deux intervalles d'arrivées ne se recoupent pas, on a bien une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

En effet chaque élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ est bien atteint une et une seule fois.

3. Question supplémentaire : chercher l'expression explicite de la bijection réciproque de f

Donc, d'après le tableau, $f^{-1}(y) > 0$ si $y < 0$ ou $y > 1$

On résout alors l'équation $f(x) = y$, mais quelle expression de $f(x)$ utiliser ? Cela dépend de la valeur de y .

On voit que $x > 0$ ssi $f(x) < 0$ ou $f(x) > 1$

Pour $y < 0$ ou $y > 1$ on résout donc $\frac{x^2}{x^2-1} = y$ ssi $x^2 = \frac{y}{y-1}$

Pour $y < 0$ ou $y > 1$, $\frac{y}{y-1} > 0$ et donc, comme on cherche $x > 0$

Pour $y \in \mathbb{R}_- \cup]1; +\infty[, f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{y-1}}$

De même $x \leq 0$ ssi $f(x) \in]0; 1[$

On résout $\frac{x^2}{x^2+1} = y$ ssi $x^2 = \frac{y}{1-y}$

On a bien $\frac{y}{1-y} \geq 0$ et on cherche $x \leq 0$

Pour $y \in]0; 1[, f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$

SUJET T2

Exercice principal T2

1. **Question de cours** : définition des valeurs propres d'une matrice.

Soit a un réel non nul.

$$\text{On pose alors } M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 3 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M .

3. (a) Exprimer M^2 en fonction de M .

(b) Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de M ?

(c) Montrer que M n'est pas inversible.

4. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = 3^{k-1}M$.

(b) Exprimer B^p en fonction de p , I et M pour $p \in \mathbb{N}$.

5. Trouver deux vecteurs non proportionnels de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solutions de l'équation $x + ay + a^2z = 0$. Que peut-on dire de ces vecteurs?

Solution :

Bien lire le programme officiel, qui proscriit la résolution de système, ne donne pas le théorème de diagonalisation, mais incite à utiliser les polynômes annulateurs

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ ssi il existe une matrice colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle tel que $. (programme ECT2 page 7.)$

2. $M \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur est non nul.

C'est un vecteur propre de M

3. (a) $M^2 = 3M$

(b) Si λ est une valeur propre, alors $\lambda^2 = 3\lambda$: les seules valeurs propres possibles sont 0 et 3.

(c) Comme $M^2 = 3M$, si M était inversible on multiplierait par M^{-1} et l'on aurait $M = 3I$, ce qui n'est pas le cas.

M n'est pas inversible

4. (a) Par récurrence.

Au rang 1, $M^1 = 3^0M$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Si on suppose la propriété vraie au rang n , $M^{n+1} = M^n.M = 3^{n-1}M^2 = 3^n.M$. C'est la propriété au rang $n + 1$.

La propriété est héréditaire

$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = 3^{n-1}M$.

(b) On a $B = M + 2I$, or $M(2I) = 2M = M(2I)$, on peut utiliser le binôme de newton.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, B^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^k (2I)^{n-k}$$

Pour $n \geq 1$, on peut couper la somme :

$$B^n = (2I)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3^{k-1}M)(2I)^{n-k}$$

$$B^n = 2^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} \cdot 2^{n-k} M$$

$$\text{On factorise par la matrice } M : \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} \cdot 2^{n-k} M = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k \cdot 2^{n-k} - 1 \right) M$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^* : B^n = 2^n I + \frac{1}{3}(5^n - 1)M}$$

Remarque : cette formule reste vraie pour $n = 0$

5. On peut proposer $X = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et par exemple $Y = \begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La résolution des systèmes linéaires autre que les systèmes de Cramer n'est pas au programme.

On calcule $MX = 0$ et $MY = 0$, les vecteurs sont non nuls, ce sont des vecteurs propres.

Poser à l'oral la question : à votre avis, M est-elle diagonalisable (habituellement, on leur donne P et D et on leur fait vérifier $PD = MP \dots$)

Exercice sans préparation T2

Soit p un réel de $]0; 1[$. Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) suivant chacune une loi de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

On note $Y = X_1X_2$ et $Z = X_2X_3$.

1. Calculer les coefficients de corrélation linéaire entre Y et Z .
2. Calculer $V(Y + Z)$.

Solution :

1. Comme X_1 et X_2, X_3 sont indépendants :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) = p^2 \text{ et } \mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2^2)\mathbb{E}(X_3)$$

X_2^2 suit aussi une loi de Bernoulli de paramètre p

$\text{Cov}(Y, Z) = p^3 - p^4 = p^3(1 - p)$ (On peut poser à l'oral la question de l'indépendance.)

$$\mathbb{E}(Y^2) = p^2 \text{ et } V(Y) = p^2 - p^4, \text{ donc } \rho(X, Y) = \frac{p^3(1 - p)}{p^2(1 - p)(1 + p)} = \frac{p}{1 + p} \text{ qui est bien dans }] - 1; 1[$$

2. Par bilinéarité de la covariance $V(Y + Z) = V(Y) + V(Z) + 2\text{Cov}(Y, Z) = 2p^3(1 - p) + 2p^2(1 - p)(1 + p)$

$$V(Y + Z) = 2p^2(1 - p)(1 + 2p)$$

3. Question supplémentaire : donner la loi de $Y + Z$.

$$(Y + Z)(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

$$\mathbb{P}([Y + Z = 2]) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]) = p^3$$

* On peut utiliser $2p^2 = \mathbb{E}(Y + Z) = \mathbb{P}([Y + Z = 1]) + 2p^3$

* On peut aussi traduire $[Y + Z = 1] = [X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 0] \cup [X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1]$ (incompatible)

$$\mathbb{P}([Y + Z = 1]) = 2p^2 - 2p^3$$

$$\text{Et donc } \mathbb{P}([Y + Z = 0]) = 1 - 2p^2 + p^3$$

Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (BL)

Juin-juillet 2022

Le bilan de la session 2022 de mathématiques voie BL est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 3 et 18. La moyenne s'établit à 10,23 et l'écart-type à 3,78.

Le jury a fortement apprécié les qualités d'expression et la finesse de raisonnement de certains candidats qui ont fait forte impression.

Par contre certains candidats nous ont semblé approximatifs, au niveau du calcul, mais surtout au niveau de la connaissance des théorèmes du cours.

Le jury aimerait insister sur les points suivants :

— La question de cours n'est pas à négliger. Il faut y répondre précisément.

— Il ne faut pas utiliser de "souvenirs flous " d'exercices vus en classe mais bien répondre aux questions posées en utilisant les outils et théorème du programme.

— Le calcul intégral, même élémentaire a pu poser certains soucis aux candidats.

— On a pu noter certaines confusions entre fonction de répartition et densité chez certains candidats.

Pour terminer sur une note positive, soulignons la combattivité des candidats, qui s'est particulièrement exprimée lors des questions sans préparation, où certains ont pu redresser une situation bien compromise.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, qu'ils ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET BL1

Exercice principal BL1

Soit $n \geq 2$ un entier. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice, on note M^T sa transposée.

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $MM^T = I_n$.

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $M^T = M$.

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si $M^T = -M$.

On confond dans la suite $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec \mathbb{R}^n que l'on munit de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

1. Question de cours : rappeler la définition d'une matrice inversible.
2. (a) Montrer que toute matrice orthogonale est inversible.

(b) Soit $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Préciser pour quelle(s) valeur(s) de l'entier $k \in \mathbb{N}$, la matrice V^k est orthogonale.

3. Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $M = I_n + A$ et $N = I_n - A$.

(a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer $(X^T A X)^T$ et en déduire la valeur de $X^T A X$.

(b) Montrer que la seule valeur propre possible pour A est 0. Dans quel cas la matrice A est-elle diagonalisable?

(c) Montrer que les matrices M et N sont inversibles.

(d) Montrer que les matrices M et N^{-1} commutent.

(e) Montrer que la matrice $\Omega = MN^{-1}$ est orthogonale.

(f) -1 est-il valeur propre de Ω ?

4. Soit U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'admettant pas -1 comme valeur propre. Montrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$U = (I_n + B)(I_n - B)^{-1}.$$

Solution :

1. Le programme officiel dit que A , matrice carrée d'ordre n , est inversible si et seulement si le système $AX = Y$ admet une solution pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou encore si et seulement si il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas, B est l'inverse de A .

Le programme précise aussi (page 9) que toute matrice inversible à droite (resp. à gauche) est inversible.

2. (a) D'après la question 1, si M est une matrice orthogonale, elle est inversible et son inverse est : $M^{-1} = M^T$.

(b) Pour $k = 0$, $V^0 = I_4$ qui est orthogonale.

Pour $k = 1$, on a bien $VV^T = I_4$, donc V est orthogonale et ainsi toutes les matrices V^k sont orthogonales.

3. (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'une part, comme A est antisymétrique,

$$(X^T A X)^T = X^T A^T X = -X^T A X.$$

D'autre part, comme $X^T A X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ (confondu avec un réel), $X^T A X$ est égal à sa transposée, donc

$$(X^T A X)^T = X^T A X.$$

On déduit de ces deux égalités que $X^T A X = 0$.

- (b) • Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et soit X un vecteur propre associé :

$$0 = X^T A X = \lambda^t X X = \lambda \|X\|^2.$$

Comme X n'est pas le vecteur nul, sa norme n'est pas nulle et $\lambda = 0$. La seule valeur propre possible pour A est 0 et $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$.

• Si le spectre de A est vide, A n'est pas diagonalisable (dans le programme officiel, rien n'assure que le spectre complexe n'est pas vide.) Dans le cas où sa seule valeur propre est 0, A est diagonalisable si et seulement si A est la matrice nulle (résultat à démontrer par le candidat).

- (c) Comme 1 n'est pas valeur propre de A , la matrice $N = I_n - A$ est inversible.
Comme -1 n'est pas valeur propre de A , la matrice $M = I_n + A$ est inversible. M et N commutent en tant qu'expression polynomiale en A . En effet,

$$MN = (I_n + A)(I_n - A) = I_n - A^2 = (I_n - A)(I_n + A) = NM.$$

Si M commute avec N , M commute avec son inverse. En effet, par associativité du produit matriciel :

$$MN^{-1} = \underbrace{(N^{-1}N)}_{=I_n} MN^{-1} = N^{-1}(NM)N^{-1} = N^{-1}(MN)N^{-1} = N^{-1}M(NN^{-1}) = N^{-1}M.$$

- (d) Par propriété de la transposition,

$${}^t\Omega\Omega = {}^t(MN^{-1})(MN^{-1}) = {}^t(N^{-1})M^T MN^{-1} = ({}^tN)^{-1}M^T MN^{-1}.$$

Or, comme A est antisymétrique,

$${}^tM = {}^t(I_n + A) = I_n - A = N$$

et

$${}^tN = {}^t(I_n - A) = I_n + A = M.$$

Donc, comme M et N commutent,

$${}^t\Omega\Omega = M^{-1}NMN^{-1} = M^{-1}MNN^{-1} = I_n.$$

Ainsi, Ω est une matrice orthogonale.

- (e) On raisonne par l'absurde en supposant que -1 est une valeur propre de Ω . Il existe donc un vecteur colonne X non nul tel que

$$-X = \Omega X = MN^{-1}X.$$

Comme M et N^{-1} commutent, on obtient

$$-X = N^{-1}MX.$$

On multiplie par N :

$$MX = -NX$$

soit encore

$$(I_n + A)X = -(I_n - A)X = (A - I_n)X.$$

Il suit que $X = 0$, ce qui est une contradiction.

Donc, -1 n'est pas valeur propre de Ω .

4. On raisonne par analyse synthèse.

- Supposons qu'une telle matrice B existe. Alors,

$$U(I_n - B) = I_n + B$$

d'où l'on tire

$$(U + I_n)B = U - I_n$$

Comme -1 n'est pas valeur propre de U , alors $U + I_n$ est inversible et

$$B = (U + I_n)^{-1}(U - I_n).$$

Ainsi, si la matrice B existe, elle est unique.

- Posons réciproquement

$$B = (U + I_n)^{-1}(U - I_n).$$

★ Il faut vérifier que B est antisymétrique.

$${}^tB = {}^t((U + I_n)^{-1}(U - I_n)) = {}^t(U - I_n)({}^t(U + I_n)^{-1}) = {}^t(U - I_n)({}^t(U + I_n))^{-1}.$$

Comme U est orthogonale, ${}^tU = U^{-1}$, donc

$${}^tB = (U^{-1} - I_n)(U^{-1} + I_n)^{-1} = (I_n - U)U^{-1}U(I_n + U)^{-1} = (I_n - U)(I_n + U)^{-1}.$$

Comme $I_n - U$ et $I_n + U$ commutent, alors $I_n - U$ et $(I_n + U)^{-1}$ commutent, si bien que

$${}^t B = (I_n + U)^{-1}(I_n - U) = -(U + I_n)^{-1}(U - I_n) = -B.$$

Donc, B est antisymétrique.

★ Il faut également vérifier que

$$(I_n + B)(I_n - B)^{-1} = U$$

On a

$$B = (U + I_n)^{-1}(U - I_n)$$

donc

$$(U + I_n)B = (U - I_n)$$

En développant,

$$U(I_n - B) = I_n + B$$

donc

$$(I_n + B)(I_n - B)^{-1} = U.$$

La matrice B répond donc à la question.

Exercice sans préparation BL1

Soit c un réel strictement positif. On note v l'application définie sur \mathbb{R} par :

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{x \ln 4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On admet que v est une fonction densité de probabilité, et on note X une variable aléatoire de densité v .

1. Montrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.
2. On note $Y = \sqrt{X}$. On admet que Y est une variable à densité.
Montrer que Y admet une espérance et une variance et donner leurs valeurs.

Solution :

1. v est nulle sur \mathbb{R}_- donc X admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} xv(x) dx$ converge.
Or, si λ est un réel strictement positif, le cours sur les lois exponentielles nous permet d'affirmer que $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$ converge et vaut 1.
Donc $\int_0^{+\infty} e^{-c^2x} dx$ et $\int_0^{+\infty} e^{-4c^2x} dx$ convergent et valent respectivement $\frac{1}{c^2}$ et $\frac{1}{4c^2}$.
Ainsi, d'après la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln 4} (e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}) dx$ converge.
Donc X admet une espérance et $E(X) = \frac{3}{4c^2 \ln 4}$.

2. $Y^2 = X$ et X admet une espérance, donc Y admet un moment d'ordre 2, donc une espérance et une variance.
On note F_Y la fonction de répartition de Y et f_Y une densité de Y .
 $\forall x \in \mathbb{R}_-, F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\sqrt{X} \leq x) = 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}_+, F_Y(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2)$
Ainsi, pour $x > 0$, $F'_Y(x) = 2xF'_X(x^2) = 2xv(x^2)$
Une densité de Y est donc :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x \ln 2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} x f_Y(x) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2} dx$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}_+, e^{-c^2x^2} = e^{-\frac{1}{2} \times (\sqrt{2}cx)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{c} \times \left(\frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \times (\sqrt{2}cx)^2} \right)$$

et $x \mapsto \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \times (\sqrt{2}cx)^2}$ est une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres 0 et

$$\sigma = \frac{1}{c\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ainsi, } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2x^2} dx = 1$$

$$\text{Par parité, on en déduit que } \int_0^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2x^2} dx = \frac{1}{2} \text{ et donc } \int_0^{+\infty} e^{-c^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2c}.$$

$$\text{De la même façon, } \int_0^{+\infty} e^{-4c^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4c}.$$

$$E(Y) = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2c} - \frac{\sqrt{\pi}}{4c} \right)$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{4c \ln 2}}$$

Enfin, d'après la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= E(X) - E(Y)^2 \\ &= \frac{3}{4c^2 \ln 4} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4c \ln 2} \right)^2 \\ &= \frac{6 \ln 2 - \pi}{16c^2 (\ln 2)^2} \end{aligned}$$

SUJET BL2

Exercice principal BL2

Soit p un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$.

1. (a) Question de cours : rappeler les résultats de cours sur la convergence des séries de Riemann.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{T_n}{\ln(n)} \right) = 1.$$

2. Etudier la nature de la série de terme général u_n .

3. On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}.$$

(b) En vous servant d'une somme télescopique, en déduire une formule pour S_n en fonction de n , p et u_n .

4. Déterminer, dans les cas de convergence, la somme de la série de terme général u_n en fonction de p .

Solution :

1. (a) Voir le programme officiel page 6 : si $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \in [k, k+1]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

On intègre cette série d'inégalités pour t variant de k à $k+1$, ce qui donne

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

Remarque : on pouvait aussi obtenir ce résultat en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction \ln entre les points k et $k+1$.

Puis on somme pour k allant de 1 à $n-1$:

$$T_n - 1 \leq \ln(n) \leq T_n - \frac{1}{n}$$

ce qui donne

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq T_n \leq \ln(n) + 1.$$

On conclut par théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n) = +\infty.$$

De plus, en divisant par $\ln(n) > 0$ pour $n \geq 2$, on trouve

$$1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{T_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Par théorème d'existence de limite par encadrement, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{T_n}{\ln(n)} \right) = 1.$$

2. • Si $p = 0$, on a $u_n = \frac{1}{\binom{n}{n}} = 1$ donc la série diverge grossièrement puisque son terme général ne tend pas vers 0.
- Si $p = 1$, on a $u_n = \frac{1}{\binom{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge aussi.
- Si $p \geq 2$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{p!}{n^p}$$

En utilisant une comparaison avec une série de Riemann, nous en déduisons que $\sum u_n$ converge.

3. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+p+2)u_{n+2} = \frac{n+p+2}{\frac{(n+p+2)!}{(n+2)!(p)!}} = \frac{(n+2)(p)!((n+1)!)}{(n+p+1)!}$$

On en déduit que

$$(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$$

- (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(p-1)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1} - (n+3)u_{n+2}$$

$$(p-1) \sum_{k=0}^{n-2} u_{k+2} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)u_{k+1} - (k+3)u_{k+2} = 2u_1 - (n+1)u_n$$

$$(p-1)(S_n - u_1) = 2u_1 - (n+1)u_n \Rightarrow S_n = \boxed{\frac{1}{p-1} - \frac{n+1}{p-1}u_n}$$

- 4.

$$0 \leq u_n \leq \frac{p!}{n^p} \Rightarrow 0 \leq \frac{n+1}{p-1}u_n \leq p(p-2)! \left(\frac{1}{n^p} + \frac{1}{n^{p-1}} \right)$$

Par encadrement la suite $\left(\frac{n+1}{p-1}u_n\right)$ tend vers 0 et donc la somme de terme général u_n vaut $\frac{1}{p-1}$.

Exercice sans préparation BL2

Soit X une variable aléatoire de densité f paire et continue sur \mathbb{R} . On suppose que X^2 suit la loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

1. On note F_X la fonction de répartition de X . Montrer que pour tout réel x , $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.
2. Déterminer f . X admet-elle une espérance?

Solution :

1. f étant paire, on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F_X(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t) dt \text{ on effectue le changement de variable } u = -t \\ &= \int_{+\infty}^x f(-u)(-du) \\ &= \int_x^{+\infty} f(u) du \text{ par parité de } f \\ &= 1 - F_X(x). \end{aligned}$$

2. Soit $x \geq 0$:

$$F_{X^2}(x^2) = P(X^2 \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x) = 2F_X(x) - 1$$

Or $X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$ donc pour tout réel $y \geq 0$, $F_{X^2}(y) = 1 - e^{-ay}$.

$$\text{Ainsi : } \forall x \geq 0, 2F_X(x) - 1 = 1 - e^{-ax^2} \Leftrightarrow \boxed{F_X(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-ax^2}}.$$

On en déduit que pour tout $x \leq 0$, $\boxed{F_X(x) = \frac{1}{2}e^{-ax^2}}$

Enfin, f est donnée par la dérivée de F_X sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* . De plus, f est continue sur \mathbb{R} donc on en déduit :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -axe^{-ax^2} & \text{si } x \leq 0 \\ axe^{-ax^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge. Or f est paire donc $x \mapsto xf(x)$ est impaire, donc pour tout $A > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^A xf(x) dx &= \int_0^A ax^2e^{-ax^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}xe^{-ax^2} \right]_0^A - \int_0^A -\frac{1}{2}e^{-ax^2} dx \text{ par intégration par parties} \\ &= -\frac{1}{2}Ae^{-aA^2} + \frac{1}{2} \int_0^A e^{-ax^2} dx \end{aligned}$$

Or $\varphi : x \mapsto \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2}$ est la densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma^2 = \frac{1}{2a}$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2} dx$ converge et vaut 1, et par parité de φ , $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}$. Ainsi :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A xf(x) dx = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Donc $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$ converge et vaut $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Or $x \mapsto xf(x)$ est impaire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge. $\boxed{E(X) \text{ existe et vaut } 0.}$

Bonus : X admet une variance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge. Or $X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$ donc X^2 admet une espérance, ce qui prouve la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ et $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{a}$.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{a}$$

SUJET BL3

Exercice principal BL3

1. Question de cours : Fonction de répartition et densité d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

2. λ désigne un réel strictement positif. On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(a) Montrer que h peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire X .

(b) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Dans cette question, on considère une variable aléatoire Y de densité f , nulle sur $]-\infty; 0[$, continue sur $[0; +\infty[$ et strictement positive sur $[0; +\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de Y .

(a) Justifier que pour tout réel x , on a $1 - F(x) > 0$.

On définit alors la fonction g par : $g(x) = \begin{cases} -f(x) \ln(1 - F(x)) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(b) Montrer que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Z .

(c) Vérifier que la variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$) vérifie les conditions imposées dans la question 3. Montrer alors que Z suit la même loi que X .

Solution :

1. Si $U \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors :

$F_U(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et une fonction densité de probabilité est : $f_U(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. (a) Une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre λ admet pour densité :

$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

T admet une espérance donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ existe et vaut $\frac{1}{\lambda}$. Ainsi :

$\int_0^{+\infty} h(x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ existe et vaut $\lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$.

h est constante nulle sur $]-\infty; 0]$, donc h est bien continue et positive sur cet intervalle. Comme produit de fonctions positives et continues sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction h est bien continue et positive sur cet intervalle. Donc h est continue et positive sur \mathbb{R} .

$\int_{-\infty}^0 h(x) dx = 0$

D'après ce qui précède, $\int_0^{+\infty} h(x) dx = 1$

D'après la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \int_{-\infty}^0 h(x) dx + \int_0^{+\infty} h(x) dx = 1$

Donc h est bien une densité de probabilité.

(b) Soit X une variable aléatoire de densité h . X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) dx$

converge ssi $\int_0^{+\infty} x h(x) dx$ converge

En nous servant du moment d'ordre 2, d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre

λ , nous savons que cette dernière intégrale converge et que X admet une espérance.

De plus

$$E(X) = \lambda E(T^2) = \lambda(V(T) + E(T)^2) = \frac{2}{\lambda}$$

3. (a) f est strictement positive sur $[0; +\infty[$ donc F est strictement croissante sur cet intervalle. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, donc pour tout réel positif x , $F(x) < 1$, donc $1 - F(x) > 0$. F étant nulle sur $] -\infty; 0[$, ce résultat est vrai sur \mathbb{R} .

(b) D'après ce qui précède, pour tout réel x positif, $0 < 1 - F(x) \leq 1$ donc $\ln(1 - F(x)) \leq 0$. f est une fonction densité donc f est positive, et ainsi : $\forall x \geq 0, -f(x) \ln(1 - F(x)) \geq 0$.

f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0. Comme produit de fonctions continues sur \mathbb{R}^+ , g est continue sur cet intervalle.

g est nulle sur $] -\infty; 0[$ donc g est bien continue positive sur cet intervalle.

$$\int_{-\infty}^0 g(x) dx = 0$$

Soit $A > 0$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A g(x) dx &= \int_0^A -f(x) \ln(1 - F(x)) dx \\ &= \left[-F(x) \ln(1 - F(x)) \right]_0^A - \int_0^A \frac{F(x)f(x)}{1 - F(x)} dx \\ &= -F(A) \ln(1 - F(A)) + \int_0^A \frac{(1 - F(x))f(x)}{1 - F(x)} - \frac{f(x)}{1 - F(x)} dx \\ &= -F(A) \ln(1 - F(A)) + \int_0^A f(x) - \frac{f(x)}{1 - F(x)} dx \\ &= -F(A) \ln(1 - F(A)) + \left[F(x) + \ln(1 - F(x)) \right]_0^A \\ &= -F(A) \ln(1 - F(A)) + F(A) + \ln(1 - F(A)) \\ &= (1 - F(A)) \ln(1 - F(A)) + F(A) \end{aligned}$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - F(A)) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$. Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A g(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = 1$. D'après la

relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ converge et vaut 1.

g définit bien une densité de probabilité.

(c) $Y \leftrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Une densité de Y est : $f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

f_Y est bien nulle sur \mathbb{R}^- , continue et strictement positive sur \mathbb{R}^+ .

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = -\lambda e^{-\lambda x} \ln(e^{-\lambda x}) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} = h(x)$$

Donc Y suit la même loi que X .

Exercice sans préparation BL3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la probabilité que A soit inversible.
2. Soient λ_1 et λ_2 les variables aléatoires égales aux valeurs propres de A . Calculer $\text{Cov}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Solution :

1. Pour tout $\omega \in \Omega$, la matrice $A(\omega)$ est inversible si et seulement si $\det(A(\omega)) = X^2(\omega) - Y^2(\omega) \neq 0$.
Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$,

$$X^2(\omega) \neq Y^2(\omega) \iff X(\omega) \neq Y(\omega).$$

Soit E l'événement " A est inversible". Alors

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y).$$

En posant $q = 1 - p$, on trouve, par indépendance de X et de Y ,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(q^2)^{k-1} = \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p}{1 + q}.$$

On conclut que

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{p}{1 + q} = \frac{2 - 2p}{2 - p}.$$

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, $\lambda(\omega)$ est valeur propre de $A(\omega)$ si et seulement si la matrice

$$A(\omega) - \lambda(\omega)I_2 = \begin{pmatrix} X(\omega) - \lambda(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) - \lambda(\omega) \end{pmatrix}$$

est inversible. Par calcul du déterminant de $\begin{pmatrix} X(\omega) - \lambda(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) - \lambda(\omega) \end{pmatrix}$, on trouve deux valeurs propres

$$\lambda_1(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) \quad \text{et} \quad \lambda_2(\omega) = X(\omega) - Y(\omega).$$

Ainsi,

$$\lambda_1 = X + Y \quad \text{et} \quad \lambda_2 = X - Y.$$

D'où,

$$\text{Cov}(\lambda_1, \lambda_2) = \text{Cov}(X + Y, X - Y) = \text{V}(X) - \text{V}(Y) = 0.$$

On ne peut cependant pas en déduire que les variables λ_1 et λ_2 sont indépendantes. Au contraire, les variables ne sont pas indépendantes... Un candidat rapide pourra essayer de le démontrer.

SUJET BL4

Exercice principal BL4

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. On définit les fonctions e_0, e_1, e_2 par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e_0(t) = 1, e_1(t) = t \text{ et } e_2(t) = t^2$$

On rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E . On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E , associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = \int_0^1 P(x+t)dt$$

1. Question de cours : Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
3. (a) Ecrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) .
(b) Justifier que φ est un automorphisme de E .
(c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?
4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un réel u_n tel que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

- (b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n .

Solution :

1. Question de cours : Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

2. — Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P et Q deux éléments de E .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\alpha P + Q)(x) = \int_0^1 (\alpha P + Q)(x+t)dt = \int_0^1 (\alpha P(x+t) + Q(x+t))dt = \alpha \int_0^1 P(x+t)dt + \int_0^1 Q(x+t)dt$$

On a donc bien, $\varphi(\alpha P + Q) = \alpha\varphi(P) + \varphi(Q)$ donc φ est linéaire.

- Pour tout réel x :

$$\varphi(e_0)(x) = \int_0^1 e_0(x+t)dt = \int_0^1 1dt = 1$$

$$\varphi(e_1)(x) = \int_0^1 e_1(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)dt = \left[xt + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$\varphi(e_2)(x) = \int_0^1 e_2(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)^2 dt = \int_0^1 (x^2 + 2xt + t^2) dt = \left[x^2 \cdot t + x \cdot t^2 + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = x^2 + x + \frac{1}{3}$$

Par conséquent : $\varphi(e_0) = e_0, \varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1$ et $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2$.

Par linéarité, quelque soit P appartenant à E , $\varphi(P)$ est une combinaison linéaire de e_0, e_1, e_2 donc $\varphi(P)$ appartient à E . φ est bien un endomorphisme de E .

3. (a) D'après les résultats précédents, la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc A est inversible. Donc

φ est inversible.

(c) La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : ainsi, A admet 1 comme unique valeur propre. Ainsi, $\text{Spec}(\varphi) = \{1\}$ Raisonnons par l'absurde : si φ était diagonalisable, puisque 1 est la seule valeur propre de φ , il existerait une matrice P inversible telle que $PAP^{-1} = I$ ce qui impliquerait $A = I$ ce qui est absurde.

Ainsi, φ n'est pas diagonalisable.

4. (a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , il existe un réel u_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0/2 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_0 = 0$

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n fixé, il existe un réel u_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Alors } A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} = \boxed{u_n + \frac{1}{6}(3n+2)}$

La propriété est bien vérifiée au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = \frac{1}{6}(3k+2)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3} = \frac{n(n-1)}{4} + \frac{n}{3} = \boxed{\frac{3n^2 + n}{12}}$$

Exercice sans préparation BL4

1. Calculer la valeur de chacune des sommes :

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad I = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

2. Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \text{ est nul ou impair.} \\ X(\omega)/2 & \text{si } X(\omega) \text{ est pair.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y . La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Solution :

1. On remarque que

$$S + I = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{(p)!} = e^\lambda \quad \text{et} \quad S - I = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \lambda^p}{(p)!} = e^{-\lambda}.$$

Donc, par somme et différence,

$$S = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \quad \text{et} \quad I = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}.$$

Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique ne sont pas au programme.

2. • *Loi de Y* . D'une part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 2k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!}.$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2p + 1) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-\lambda} + \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2} = \frac{1}{2} + e^{-\lambda} - \frac{e^{-2\lambda}}{2}.$$

• *Espérance*. La variable Y admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!}$ converge absolument. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} \frac{2k e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} \right).$$

D'après la première question, on reconnaît le terme général d'une série convergente. Donc, Y admet une espérance qui vaut

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) = \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \frac{\lambda}{4} (1 - e^{-2\lambda}).$$