Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECG Maths approfondies

Juin 2023

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de belles qualités de logique et de présentation. On trouve bien sûr une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 1 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes dans la connaissance du cours, de grosses faiblesses en calcul et quasiment aucune connaissance en informatique.

A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances et faisaient preuve de finesse et de recul dans le maniement des concepts.

La moyenne est de 11,04 et l'écart-type est de 4,27.

Le jury aimerait insister sur les points suivants.

- Avec la dernière réforme du programme, l'informatique a encore gagné en importance. Si plusieurs candidats ont su bien traiter les questions d'informatique, encore trop de candidats s'étaient contentés d'un survol rapide de la matière, quand ils ne l'avaient pas délaissée totalement.
  Presque tous les sujets comportaient une question d'informatique lors de cette session et cette proportion devrait continuer de croître l'an prochain, le but étant que tous les candidats soient interrogés sur une partie du programme d'informatique. Ces questions nous permettent d'évaluer l'esprit pratique et de relier les mathématiques à des cas concrets.
- Le jury a apprécié les candidats attentifs à la cohérence de leurs raisonnements et de leurs calculs. Cela est la preuve d'un certain recul sur les notions. Ainsi, par exemple, un candidat aboutissant à une espérance négative pour une variable aléatoire positive et remarquant aussitôt qu'il y a nécessairement une erreur a été récompensé.
- Le jury attend des candidats qu'ils sachent tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction ou soient capables d'illustrer un raisonnement par un petit schéma.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.
  Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrit à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET Maths Approfondies 1

Exercice principal Maths Approfondies 1

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ soient des ensembles finis et telles que X ne soit pas une variable constante.

On considère la fonction $g : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \mathbb{E}((Y-(aX+b))^2) \end{array} \right.$

1. Question de cours : condition suffisante d'extremum global pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie de $\mathbb{R}^n$.
2. (a) Montrer que la fonction g est correctement définie et montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que g admet un unique point critique que l'on notera (a_0, b_0).
   On exprimera a_0 à l'aide de $\mathbb{V}(X)$ et de $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et b_0 à l'aide de a_0, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
   (c) g atteint-elle en son point critique un minimum absolu ?

   On suppose jusqu'à la fin de l'exercice X et Y construits de la manière suivante :
   - n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   - On suppose connus n points $A_1 = (x_1, y_1)$,...,$A_n = (x_n, y_n)$ du plan où les réels $x_1, ..., x_n$ ne sont pas tous égaux.
   - La variable aléatoire I suit une loi uniforme sur $[|1, n|]$.
   - On construit le couple de variables aléatoires (X,Y) en posant pour tout $\omega \in \Omega$, $(X(\omega), Y(\omega)) = A_{I(\omega)}$.

   Autrement dit, on choisit un point au hasard dans $\{A_1, ...A_n\}$ et (X,Y) donne les coordonnées de ce point.
3. On suppose dans cette question seulement que $n = 3$, $A_1 = (1,1)$, $A_2 = (2,1)$, $A_3 = (3,4)$.
   (a) Calculer $\mathbb{V}(X)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
   (b) Placer sur un même graphe la droite d'équations $y = a_0 x + b_0$ et les trois points A_1, A_2 et A_3. Commentez.

   On se place maintenant dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle et l'on considère les vecteurs $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ et $\vec{z} = (1, \cdots, 1)$.
4. On admet provisoirement que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad g(a,b) = \dfrac{1}{n} ||\vec{y} - (a\vec{x} + b\vec{z})||^2$.
   On pourra poser pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{z}$.
   (a) Montrer d'une deuxième manière que g admet un minimum global que l'on interprétera géométriquement.
   (b) Montrer que ce minimum global est atteint en un unique point (a_0, b_0).
   (c) Montrer que $< \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}), \vec{x} >= 0$ et $< \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}), \vec{z} >= 0$ et retrouver les équation ayant conduit à la détermination de (a_0, b_0) à la question 2.
5. Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad g(a,b) = \dfrac{1}{n} ||\vec{y} - (a\vec{x} + b\vec{z})||^2$.

Solution :

1. Programme deuxième année page 20.
   Si Ω est un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ et si x_0 est un point critique de f :
   - si pour tout $x \in \Omega, \mathrm{Sp}\left(\nabla^2 f(x)\right) \subset \mathbf{R}^+$, alors f admet un minimum global en x_0,
   - si pour tout $x \in \Omega, \mathrm{Sp}\left(\nabla^2 f(x)\right) \subset \mathbf{R}_-$, alors f admet un maximum global en x_0.
2. (a) Les variables étant bornées, elles admettent des moments de tout ordre.
   Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $g(a,b) = \mathbb{E}(Y^2 + a^2X + b^2 - 2aXY - 2bY + 2abX)$
   Par linéarité $g(a,b) = \mathbb{E}(X^2)a^2 + b^2 + 2\mathbb{E}(X)ab - 2a\mathbb{E}(XY) - 2b\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y^2)$
   g est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que $\boxed{\text{fonction polynômiale}}$

(b) La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert. On cherche ses points critiques.

$\nabla g((a,b)) = \begin{pmatrix} 2a\mathbb{E}(X^2) + 2b\mathbb{E}(X) - 2\mathbb{E}(XY) \\ 2a\mathbb{E}(X) + 2b - 2\mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}$

$\nabla g((a,b)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $\begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(XY) \\ \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}$

ssi $\begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) & 0 \\ \mathbb{E}(X) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}$

ssi $\begin{cases} V(X)a & & = & Cov(X,Y) \\ \mathbb{E}(X)a & +b & = & \mathbb{E}(Y) \end{cases}$

Comme X n'est pas constante, $V(X) \neq 0$ et le système admet une solution unique.

On a un unique point critique (a_0, b_0) : $\boxed{a_0 = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)} \text{ et } b_0 = \mathbb{E}(Y) - a_0\mathbb{E}(X)}$

(c) La fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert convexe ($\mathbb{R}^2$).

$\nabla^2 g((a,b)) = 2\begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & 1 \end{pmatrix} = 2M$ ne dépend pas de (a,b).

On cherche les valeur propres de M, $M - \lambda I = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) - \lambda & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & 1-\lambda \end{pmatrix}$.

λ est une valeur propre de M ssi $(\mathbb{E}(X^2) - \lambda)(1-\lambda) - \mathbb{E}^2(X) = 0$ ssi $\lambda^2 - (\mathbb{E}(X^2)+1)\lambda + V(X) = 0$.
M étant symétrique, elle est diagonalisable, le polynôme admet deux racines (éventuellement confondues).
Le produit des deux valeurs propres vaut $V(X) > 0$, les deux valeurs propres sont de même signe.
Leur somme vaut $\mathbb{E}^2(X) + 1$, elles sont toutes les deux strictement positives.
Les valeurs propres de $\nabla^2 g((a,b))$ sont donc strictement positives pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Donc g atteint un minimum global en son unique point critique d'après le cours.

$\boxed{g \text{ atteint un unique minimum global.}}$

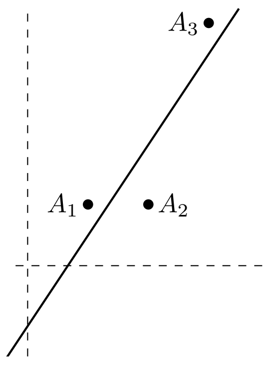
3. (a) • X suit une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$, donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = 2}$, $V(X) = \dfrac{3^2-1}{12} \boxed{= \dfrac{2}{3}}$.

• $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 2.}$

• $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{1}{3}(1+2+12) = 5$, $Cov(X,Y) = 5 - 4 \boxed{= 1}$.

• $a_0 = \dfrac{3}{2}$, $b_0 = \mathbb{E}(Y) - a_0\mathbb{E}(X) = -1$. La droite admet pour équation $\boxed{y = \dfrac{3}{2}x - 1}$.

(b) On trace le graphe, et l'on remarque que la droite semble "au plus proche" des trois points.



C'est logique. a_0 et b_0 ont été choisis pour minimiser $\mathbb{E}((Y - (aX+b))^2)$, donc à rendre "petit" l'écart entre y_i et $ax_i + b$.

4. (a) On note $F = \text{vect}(\vec{x}, \vec{z})$
On note p le projecteur orthogonal sur F
On a $||\vec{y} - p(\vec{y})|| = \min\limits_{\vec{u} \in F} ||\vec{y} - \vec{u}||$
Or, $p(\vec{y}) \in F$, il existe donc $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tel que $p(\vec{y}) = a_0\vec{x} + b_0\vec{z}$
$\forall \vec{u} \in F$, $||\vec{y} - p(\vec{y})|| \leqslant ||\vec{y} - \vec{u}||$,
ie $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $g((a_0,b_0)) \leqslant g((a,b))$

$\boxed{g \text{ atteint en } (a_0, b_0) \text{ un minimum global.}}$

(b) $\vec{y} - \vec{v} = \vec{y} - p(\vec{y}) + p(\vec{y}) - \vec{v}$
Or, $\vec{y} - p(\vec{y}) \in F^{\perp}$ et $p(\vec{y}) - \vec{v} \in F$
Donc d'après Pythagore
$||\vec{y} - \vec{v}||^2 = ||\vec{y} - p(\vec{y})||^2 + ||p(\vec{y}) - \vec{v}||^2$
Ainsi $||\vec{y} - \vec{v}|| = ||\vec{y} - p(\vec{y})||$ ssi $\vec{v} = p(\vec{y})$
Autrement dit $g((a,b)) = g((a_0, b_0))$ ssi $a\vec{x} + b\vec{z} = a_0\vec{x} + b_0\vec{z}$.
Or, les réels $x_1 ... x_n$ ne sont pas tous égaux, donc $\vec{x}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires, et forment une famille libre.
Ainsi $g((a,b)) = g((a_0, b_0))$ ssi $a = a_0$ et $b = b_0$.
$\boxed{\text{Le minimum de } g \text{ est atteint un unique point}}$

(c) Comme $\vec{x}, \vec{z} \in F$, $\vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}) = \vec{y} - p(\vec{y}) \in F^{\perp}$, on a bien :
$\boxed{< \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}), \vec{x} >= 0 \text{ et } < \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{y}), \vec{z} >= 0.}$
La première équation donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - a_0 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - b_0 \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$
ie $n\left(\mathbb{E}(XY) - a_0\mathbb{E}(X^2) - b_0\mathbb{E}(X)\right) = 0$ ie $\boxed{\mathbb{E}(XY) - a_0\mathbb{E}(X^2) - b_0\mathbb{E}(X) = 0}$
La deuxième équation donne $\boxed{\mathbb{E}(Y) - a_0\mathbb{E}(X) - b_0 = 0}$
Ce sont bien les équations du premier ordre trouvées lors de l'étude de g.

5. Par théorème du transfert (avec la fonction $h : i \mapsto (y_i - (ax_i + b))^2$ et la variable I.)
$$g(a,b) = \sum_{i=1}^{n} h(i)\mathbb{P}([I = i]) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(y_i - (ax_i + b))^2$$
$$g(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((y_i - (ax_i + b))^2 \boxed{= \frac{1}{n}\,||\vec{x} - (a\vec{y} + \vec{z})||^2}.$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 1

On considère la suite (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Calculer F_n. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{F_{2^n}}$ converge et calculer sa somme. On pourra exprimer $\dfrac{1}{F_{2^n}}$ sous la forme $u_n - u_{n+1}$ où u_n est une suite à déterminer.

Solution :

Les racines de l'équation caractéristiques $r^2 - r - 1 = 0$ sont $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Avec les conditions initiales, on trouve

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$$

La convergence de la série est assurée car $\sqrt{5}F_n \sim r_1^n$.

puis pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{5}F_{2^n}} = \frac{1}{r_1^{2^n} - r_2^{2^n}} = \frac{r_1^{2^n}}{r_1^{2^{n+1}} - 1}$$

car $r_1 r_2 = -1$, soit :

$$\frac{1}{\sqrt{5}F_{2^n}} = \frac{r_1^{2^n} + 1}{r_1^{2^{n+1}} - 1} - \frac{1}{r_1^{2^{n+1}} - 1} = \frac{1}{r_1^{2^n} - 1} - \frac{1}{r_1^{2^{n+1}} - 1}$$

Par une somme en cascade, on trouve finalement que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = 1 + \sqrt{5}\frac{1}{r_1^2 - 1} = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$$

SUJET Maths Approfondies 2

Exercice principal Maths Approfondies 2

1. Définition de la divergence d'une suite vers $+\infty$.
2. On considère l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par leurs deux premiers termes $u_0 = a$ et $u_1 = b$ dans $\mathbb{R}$ puis par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n \tag{1}$$

On suppose dans un premier temps que $a > 0$ et $b > 0$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$u_n < u_{n+1}$$

et pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{u_{n+1}}{(n+1)^2} < \frac{u_n}{n^2}$$

En déduire que la suite (u_n) admet une limite finie ou égale à $+\infty$ et que la suite $(\frac{u_n}{n^2})$ admet une limite finie.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+2} = u_1 + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k+2}$$

puis que

$$u_{n+2} \geq u_0 + u_1 + 2u_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. On suppose à présent que a et b ne sont plus forcément positifs mais sont quelconques dans $\mathbb{R}$. On note $u_n^{a,b}$ la suite vérifiant la relation de récurrence (1) telle que $u_0 = a$ et $u_1 = b$.
   (a) Montrer qu'il existe des réels λ et μ tels que

   $$(a,b) = \lambda(1,1) + \mu(1,2)$$

   (b) En déduire en relation entre $u_n^{a,b}$, $u_n^{1,1}$ et $u_n^{1,2}$.
   (c) Montrer que la suite $u_n^{a,b}$ admet une limite (éventuellement infinie) et que la suite $(\frac{u_n^{a,b}}{n^2})$ admet une limite finie.

Solution :

1. p9 EC1
2. On observe tout d'abord que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui permet de montrer aisément la première inégalité. Pour la 2ème, on remarque que pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}(1 + \frac{2}{n+2}) = u_{n+1}(\frac{n+4}{n+2})$$

puis

$$\frac{u_{n+2}}{(n+2)^2} < u_{n+1}\frac{n+4}{(n+2)^3} < \frac{u_{n+1}}{(n+1)^2}$$

car $(n+4)(n+1)^2 = n^3 + 6n^2 + 9n + 4$ et $(n+2)^3 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$.

La suite (u_n), croissante, admet donc une limite finie ou égale à $+\infty$ et la suite $(\frac{u_n}{n^2})$, décroissante et minorée par 0, admet une limite finie.

3. La première relation s'obtient par une sommation en cascade à partir de la relation

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{2}{n+2} u_n$$

La deuxième relation s'en déduit en utilisant $u_1 \leq u_k$ pour $k \geq 1$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = +\infty$ (série harmonique), on a donc a fortiori $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

4. (a) λ et μ vérifient exactement $a = \lambda + \mu$ et $b = \lambda + 2\mu$, c'est à dire $\mu = b - a$ et $\lambda = 2a - b$.

   (b) La relation de récurrence étant linéaire, on démontre par récurrence que

$$u_n^{a,b} = \lambda u_n^{1,1} + \mu u_n^{1,2} = (2a-b) u_n^{1,1} + (b-a) u_n^{1,2}$$

   (c) Immédiat en utilisant les résultats des questions 2 et 3 pour les suites $u_n^{1,1}$ et $u_n^{1,2}$ et la relation linéaire de 4b).

Exercice sans préparation Maths Approfondies 2

Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de même loi.
Soit Y une variable aléatoire indépendante des deux autres telle que $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in]0, 1[$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}.$$

1. On suppose pour cette question que $X_1 + 1$ suit une loi géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   Quelle est la probabilité que M soit inversible ?
2. On suppose pour cette question que X_1 suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

Solution :

1. Notons I l'événement M est inversible.
   M est non inversible ssi $det(M) = 0$ ssi $X_1^2 = YX_2^2$

$$\mathbb{P}(X_1^2 = YX_2^2) = \mathbb{P}([X_1 = X_2] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X_1 = X_2 = 0] \cap [Y = -1])$$

$$\overset{\text{indépendance}}{=} p \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = k]) + (1-p)\frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(X_1^2 = YX_2^2) = \frac{1}{9}\left(p \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} \ + \ (1-p)\right)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(I) = 1 - \left(p\frac{1}{5} + (1-p)\frac{1}{9}\right)}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
   $M - \lambda I_2$ non inverssible ssi $(\lambda - X_1)^2 - YX_2^2 = 0$ ssi $Y = 1$ et $(\lambda - X_1)^2 = X_2^2$ ou $Y = -1$ et $(\lambda - X_1) = X_2 = 0$
   Si $Y = 1$ alors $Sp(M) = \{X_1 \pm X_2\}$ et M est diagonalisable (dans le cas où $X_2 = 0$, M est déjà diagonale !).
   Si on note D l'événement M est diagonalisable alors

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}(D \cap [Y = -1]) = \mathbb{P}([Y = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [Y = -1]) = \boxed{p + (1-p)e^{-\lambda}}$$

SUJET Maths Approfondies 3

Exercice principal Maths Approfondies 3

On définit deux suites $(x_k)_{k\geqslant 0}$ et $(y_k)_{k\geqslant 0}$ par

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{array}\right. \quad \text{et pour tout } k \in \mathbb{N} \quad \left\{\begin{array}{l} x_{k+1} = 3x_k + 4y_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 3y_k \end{array}\right.$$

1. Question de cours : somme des n premiers entiers.
2. (a) Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $x_k > y_k \geqslant k$.
   (b) En déduire les limites des suites $(x_k)_{k\geqslant 0}$ et $(y_k)_{k\geqslant 0}$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k^2 - 2y_k^2 = 1$.
4. Pour $k \geqslant 1$, on pose $r_k = \dfrac{x_k}{y_k}$.
   Justifier que la suite $(r_k)_{k\geqslant 1}$ est bien définie et que c'est une suite convergente de limite $\sqrt{2}$.
5. (a) Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
   $$|r_k - \sqrt{2}| < \frac{1}{2y_k^2}$$
   (b) Ecrire le code d'une fonction Python `approx2(n)` qui prend en entrée un entier n et renvoie un terme de la suite $(r_k)_{k\geqslant 1}$ qui soit une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près.
6. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $1+2+\ldots+n$ soit un carré parfait, c'est-à-dire tels que $1+2+\ldots+n = p^2$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. Programme ECG1 Maths approfondies p. 6.
2. (a) On procède par récurrence sur k.
   Pour $k = 0$, le résultat est immédiat.
   Soit donc $k \geqslant 0$ avec $x_k > y_k \geqslant k$.
   Alors, d'une part $x_{k+1} = 3x_k + 4y_k > 2x_k + 3y_k = y_{k+1}$ car $x_k > 0$ et $y_k \geqslant 0$. D'autre part, $y_{k+1} = 2x_k + 3y_k \geqslant x_k > k$ par l'hypothèse de récurrence, d'où $y_{k+1} \geqslant k+1$. Cela prouve donc la propriété voulue par récurrence.
   (b) Par théorème de comparaison, on obtient immédiatement que $\lim\limits_n x_n = \lim\limits_n y_n = +\infty$.
3. On procède encore par récurrence sur k. Le résultat est évident pour $k = 0$.
   On suppose le résultat vrai au rang $k \geqslant 0$. On calcule alors :
   $$\begin{aligned} x_{k+1}^2 - 2y_{k+1}^2 &= (3x_k + 4y_k)^2 - 2(2x_k + 3y_k)^2 \\ &= 9x_k^2 + 24x_ky_k + 16y_k^2 - 2(4x_k^2 + 12x_ky_k + 9y_k^2) \\ &= x_k^2 - 2y_k^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$
   Cela prouve la propriété au rang $k+1$. Cela achève le pas de la récurrence et prouve le résultat demandé par récurrence.
4. La question 2.(a) prouve que pour $k \geqslant 1$, $y_k \neq 0$. Ainsi r_k est bien défini.
   De plus, pour $k \geqslant 1$, $x_k^2 - 2y_k^2 = 1$ d'où $r_k^2 = \dfrac{x_k^2}{y_k^2} = 2 + \dfrac{1}{y_k^2}$. De plus, comme $\lim\limits_k y_k = +\infty$, on obtient que (r_k^2) est convergente avec $\lim\limits_k r_k^2 = 2$ et comme par ailleurs $r_k > 0$ pour tout $k \geqslant 1$, on en déduit finalement que (r_k) est convergente de limite $\sqrt{2}$.

5. (a) De la relation $x_k^2 - 2y_k^2 = 1$, on déduit en divisant par y_k^2 (qui est non nul) :

$$r_k^2 - 2 = \frac{1}{y_k^2} \quad \text{soit} \quad (r_k + \sqrt{2})(r_k - \sqrt{2}) = \frac{1}{y_k^2}$$

En passant aux valeurs absolues, on obtient alors

$$|r_k + \sqrt{2}| \times |r_k - \sqrt{2}| = \frac{1}{y_k^2}$$

Remarquons que $r_k = x_k/yk > 1$ par la question 2.(a) d'où $|r_k + \sqrt{2}| = r_k + \sqrt{2} > 2$ car $\sqrt{2} > 1$ également. Alors

$$|r_k - \sqrt{2}| = \frac{1}{r_k + \sqrt{2}} \times \frac{1}{y_k^2} < \frac{1}{2y_k^2}$$

ce qui est le résultat demandé.

(b) Une solution est le code suivant :

```
def appro2(n):
    x,y=1,0
    while (2*y**2)<10**n:
        x,y=3*x+4*y,2*x+3*y
    return x/y
```

6. On remarque tout d'abord que :

$$1 + 2 + \ldots + n = p^2 \iff \frac{n(n+1)}{2} = p^2 \iff (2n+1)^2 - 2 \times (2p)^2 = 1$$

Autrement dit, le couple $(2n+1, 2p)$ est solution de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.
L'application $(n, p) \mapsto (2n+1, 2p)$ étant injective, il suffit donc de montrer qu'il existe une infinité de couples $(2n+1, 2p)$, avec n et p entiers naturels, solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.
Or les points (x_k, y_k) fournissent de telles solutions en nombre infini car les suites divergent vers $+\infty$, et il s'agit de solutions dans $\mathbb{N}$ par une récurrence immédiate.
Il reste à voir que si $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ vérifie $x^2 - 2y^2 = 1$, alors nécessairement x est impair et y pair. Or $x^2 = 2y^2 + 1$ donc x^2 est impair et donc x également. Alors $x = 2k+1$ et $x^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ d'où $2y^2 = 2(2k^2 + 2k)$ et finalement $y^2 = 2k^2 + 2k = 2(k^2 + k)$. Donc y^2 est pair et donc y également.
Ainsi $x_k = 2n_k + 1$ et $y_k = 2p_k$. Comme x_k et y_k prennent une infinité de valeurs distinctes, il en est de même pour les valeurs de n_k et p_k et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $1 + 2 + \ldots + n_k = p_k^2$.
On a bien une infinité de solutions au problème posé.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 3

Alice et Bob jouent au jeu suivant : Bob choisit deux nombres réels distincts comme il veut (il peut les choisir au hasard mais il n'est pas obligé). Ensuite Bob tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, il communique à Alice la valeur du plus petit des deux nombres ; si elle tombe sur face, il lui communique le plus grand des deux nombres. Bob demande alors à Alice si le nombre restant est plus grand ou plus petit que le nombre communiqué. Elle gagne si elle donne la bonne réponse.

Alice utilise alors la méthode suivante pour répondre. Elle choisit un nombre X_0 suivant une loi normale centrée réduite. Si le nombre communiqué par Bob est plus petit que X_0, elle répond que le nombre restant est le plus grand ; si le nombre communiqué par Bob est plus grand que X_0, elle répond que le nombre restant est le plus petit.

1. Proposer le code d'une fonction Python simulant le jeu entre Alice et Bob.
2. Quel est l'intérêt de la méthode utilisée par Alice pour répondre ?

Solution :

1. On note x_1 et x_2 les deux nombres choisis par Bob. Le programme ci-dessous répond à la question. Il renvoie `True` quand Alice répond correctement, `False` sinon.

```
import numpy.random as rd

def jeu(x1,x2):
    p=rd.randint(0,2)
    if p==0: # Pile
        x=min(x1,x2)
    else: # Face
        x=max(x1,x2)
    x0=rd.normal()
    if x<x0:
        return p==0
    else:
        return p==1
```

2. Alors que l'on pourrait s'attendre à ce que l'on ne puisse faire mieux que répondre avec une probabilité de gagner égale à $\frac{1}{2}$ – car le choix du nombre communiqué se décide à pile ou face – avec sa stratégie, Alice a une probabilité de gagner *strictement* supérieure à $\frac{1}{2}$.
Notons x_1 et x_2 les deux nombres choisis par Bob, avec $x_1 < x_2$. Soit alors x le nombre communiqué à Alice par Bob.
Comme Alice choisit le nombre X_0 suivant une loi normale centrée réduite, en notant $p = \mathbb{P}(x_1 < X_0 < x_2)$, alors $p > 0$. C'est le point important ici : X_0 a une probabilité non nulle d'être dans un intervalle non réduit à un point (on pourrait ainsi choisir une autre loi que la loi normale centrée réduite, pourvue qu'elle ait encore cette propriété).
Notons G l'événement « Alice a gagné ». Alors, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(G|x_1 < X_0 < x_2)\mathbb{P}(x_1 < X_0 < x_2) + \mathbb{P}(G|\{X_0 \leqslant x_1\} \cup \{X_0 \geqslant x_2\})\mathbb{P}(\{X_0 \leqslant x_1\} \cup \{X_0 \geqslant x_2\}) \\ &= p\mathbb{P}(G|x_1 < X_0 < x_2) + (1-p)\mathbb{P}(G|\{X_0 \leqslant x_1\} \cup \{X_0 \geqslant x_2\})\end{aligned}$$

Or, compte-tenu de la méthode choisie par Alice, si $x_1 < X_0 < x_2$, alors elle donne forcément la réponse correcte, ce qui signifie exactement que $\mathbb{P}(G|x_1 < X_0 < x_2) = 1$.
Par ailleurs, quand $X_0 \leqslant x_1$, nécessairement $X_0 \leqslant x$, tandis que si $X_0 \geqslant x_2$, nécessairement $X_0 \geqslant x$. Dans tous les cas, elle a une chance sur deux d'avoir bien répondu, et donc : $\mathbb{P}(G|\{X_1 \leqslant x_0\} \cup \{X_2 \geqslant x_2\}) = \frac{1}{2}$.

Finalement :

$$\mathbb{P}(G) = p + \frac{1}{2}(1-p) \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{1+p}{2} > \frac{1}{2}} \quad \text{car } p > 0$$

On peut remarquer que la borne que l'on obtient par rapport à $\frac{1}{2}$ dépend, sans surprise, de x_1 et de x_2 : plus x_1 et x_2 sont proches, plus p est petit.

Question supplémentaire : on peut demander de compléter le programme Python de la question 1 par une estimation de la probabilité de gagner pour Alice.

Un code qui convient est alors le suivant :

```
def test(n,x1,x2):
    s=0
    for i in range(n):
        if jeu(x1,x2):
            s=s+1
    return s/n
```

SUJET Maths Approfondies 4

Exercice principal Maths Approfondies 4

On dispose d'un stock infini d'ampoules. A l'instant 0, on allume une ampoule. Dès qu'elle s'éteint, on la remplace en allumant une nouvelle ampoule. On note T_1, T_2,... le temps de vie des ampoules successives. On définit ainsi une famille de variables aléatoires réelles $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

On suppose que la famille $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre 1.

On note $S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$ pour $n \geqslant 1$.

On pose $S_0 = 0$.

1. Question de cours : théorème de la limite monotone pour des probabilités.
2. Déterminer la loi de S_n.
3. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On définit N_t par la formule :

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}|\ S_n \leqslant t\}$$

   (a) Montrer que, presque sûrement, N_t est bien défini et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   (b) Justifier l'assertion suivante : « N_t est le nombre d'ampoules consommées entre l'instant 0 et l'instant t ».

4. (a) Justifier que $\{S_n \leqslant t\} = \{N_t \geqslant n\}$.

   (b) En déduire que N_t suit une loi de Poisson de paramètre t.

5. On admet plus généralement que :

$$\forall t \geqslant 0 \quad \forall s \geqslant 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = k) = e^{-s}\frac{s^k}{k!}$$

   Dit autrement : le nombre d'ampoules qui s'éteignent dans un intervalle de temps de longueur s quelconque suit une loi de Poisson de paramètre s.

   On observe le temps de vie de l'ampoule allumée à l'instant t. Cela revient donc à s'intéresser à la variable aléatoire T_{N_t+1}.

   (a) Justifier que $t \in [S_{N_t}, S_{N_t+1}]$.
   On pose alors $T' = S_{N_t+1} - t$.

   (b) Déterminer la loi de T'. Commenter le résultat obtenu.

Solution :

1. Question de cours : programme Maths approfondies ECG1 p. 21.
2. La variable S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant toutes une loi exponentielle de paramètre 1. Elle suit donc une loi γ de paramètre n : $\boxed{S_n \hookrightarrow \gamma(n)}$.
3. (a) L'ensemble $\{n|S_n \leqslant t\}$ est non vide car il contient 0. Pour montrer que N_t est, presque sûrement, bien défini et à valeurs dans $\mathbb{N}$, il suffit donc de montrer que presque sûrement l'ensemble $\{n|S_n \leqslant t\}$ est majoré, ce qui assurera l'existence du sup. Le sup sera alors un maximum et bien à valeurs dans $\mathbb{N}$. De plus, comme les variables aléatoires T_k sont à valeurs positives, de manière immédiate : $S_n \leqslant S_{n+1}$ et donc $\{n|S_n \leqslant t\}$ est majoré si et seulement si il n'est pas égal à $\mathbb{N}$, c'est-à-dire si et seulement il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n > t$.
   Soit A l'événement :

$$A : \text{« } \exists n \in \mathbb{N} \quad S_n > t \text{ »}$$

On veut donc montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$, soit encore, en passant à l'événement contraire : $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$. Or :

$$\overline{A} = \bigcap_{n \geqslant 1} \{S_n \leqslant t\}$$

et comme $S_n \leqslant S_{n+1}$, $\{S_{n+1} \leqslant t\} \subset \{S_n \leqslant t\}$. Ainsi, par limite monotone des probabilités :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geqslant 1} \{S_n \leqslant t\}\right) = \lim_n \mathbb{P}(S_n \leqslant t)$$

Or, par définition des lois γ :

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t e^{-x} x^{n-1} \, \mathrm{d}x$$

Soit $n \geqslant 2$. Par intégration par parties, en dérivant la fonction polynomiale sous l'intégrale, on obtient, toutes les fonctions étant $\mathcal{C}^1$:

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant t) = \left[-e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right]_0^t + \frac{1}{(n-2)!} \int_0^t e^{-x} x^{n-2} \, \mathrm{d}x = -e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \mathbb{P}(S_{n-1} \leqslant t)$$

car $n - 1 \geqslant 1$.
Ainsi, pour $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_{n-1} \leqslant t) = -e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Remarquons que la relation reste valable pour $n = 1$ car $S_0 = 0$, d'où $\mathbb{P}(S_0 \leqslant t) = 1$ et que $S_1 = T_1$ suit une loi exponentielle de paramètre 1, d'où $\mathbb{P}(S_1 \leqslant t) = 1 - e^{-t}$.

Alors, en sommant l'égalité $\mathbb{P}(S_k \leqslant t) - \mathbb{P}(S_{k-1} \leqslant t) = -e^{-t} \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}$ pour k variant de 1 à n, on obtient par téléscopage :

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_0 \leqslant t) = -e^{-t} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = -e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant t) = \mathbb{P}(S_0 \leqslant t) - e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} = 1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$$

Or : $\displaystyle\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} = e^t$ d'où :

$$\lim_n \mathbb{P}(S_n \leqslant t) = 0$$

et donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$. Ainsi $\underline{N_t \text{ est presque sûrement bien défini et à valeurs dans } \mathbb{N}}$.

(b) Par définition de N_t, $S_{N_t} \leqslant t$ et $S_{N_t+1} > t$. La première inégalité signifie qu'au moins N_t ampoules ont été remplacées entre l'instant 0 et l'instant t. La deuxième signifie qu'à l'instant t, l'ampoule $N_t + 1$ est toujours en fonction. Ainsi, entre l'instant 0 et l'instant t, le nombre d'ampoules consommées est exactement N_t.

4. (a) Si $S_n \leqslant t$, alors, il est immédiat par définition de N_t que $N_t \leqslant n$ d'où $\{S_n \leqslant t\} \subset \{N_t \geqslant n\}$. De même, si $N_t \geqslant n$, par croissance de la suite (S_n) : $S_n \leqslant S_{N_t} \leqslant t$ et donc $\{N_t \geqslant n\} \subset \{S_n \leqslant t\}$ et donc par double inclusion : $\boxed{\{S_n \leqslant t\} = \{N_t \geqslant n\}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente :

$$\mathbb{P}(N_t \geqslant n) = \mathbb{P}(S_n \leqslant t)$$

Or, on a calculé à la question précédente :

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant t) = 1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$$

Alors :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geqslant n) - \mathbb{P}(N_t \geqslant n+1) = \left(1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}\right) - \left(1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right) = e^{-t} \frac{t^n}{n!}$$

et donc $\underline{N_t \text{ suit bien une loi de Poisson de paramètre } t}$.

5. (a) On a déjà remarqué que, par définition de N_t, $S_{N_t} \leqslant t$ tandis que $S_{N_t+1} > t$ et donc : $\boxed{t \in [S_{N_t}, S_{N_{t+1}}]}$.

En ce qui concerne, l'introduction de la variable T', il est fortement conseillé de représenter la situation sur l'axe du temps : T' est le temps de vie résiduel de l'ampoule en fonctionnement à l'instant t.

(b) La variable T' est à valeurs dans $[0, +\infty[$. De plus, pour $s \geqslant 0$, par définition de T' : $\mathbb{P}(T' > s) = \mathbb{P}(S_{N_t+1} > s + t) = \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = 0)$ puisque l'événement $S_{N_t+1} > s + t$ signifie qu'aucune ampoule ne s'éteint entre l'instant t, où exactement N_t ampoules ont déjà été consommées et l'instant $t + s$, où la $(N_t + 1)^{\text{e}}$ ampoule fonctionne encore. D'après le résultat admis, on a donc :

$$\mathbb{P}(T' > s) = e^{-s} \quad \text{soit} \quad \mathbb{P}(T' \leqslant s) = 1 - e^{-s}$$

et donc : $\boxed{T' \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$.

Il peut sembler étonnant que T' suive la même loi que T_1 car T' est par définition plus court que le temps s'écoulant entre deux changements d'ampoules. Cela peut se voir comme traduisant l'absence de mémoire de la loi exponentielle.

Une autre remarque : si on raisonne en moyenne, autrement dit au niveau des espérances, le temps de vie moyen restant à l'ampoule fonctionnant à l'instant t est égal au temps de vie moyen d'une ampoule quelconque, ce qui peut sembler là encore contre-intuitif : entre deux ampoules qui s'éteignent le temps moyen est $\mathbb{E}(T_1) = 1$, mais le calcul de $\mathbb{E}(T') = 1$ laisse penser que la longueur de l'intervalle moyen autour d'un instant t quelconque donné est sans doute strictement plus grande (on peut effectivement le prouver mais cela fait intervenir une loi exponentielle tronquée, non absolument continue). On peut comprendre ce phénomène de la manière suivante : si on divise un intervalle borné donné en un nombre fini d'intervalles, la longueur moyenne d'un intervalle n'est pas la même chose que la longueur moyenne de l'intervalle dans lequel se trouve un point aléatoire (pour s'en convaincre, il suffit de penser à un cas limite où il y a deux intervalles, un très grand et l'autre très petit : un point aléatoire a beaucoup plus de chances de se trouver dans le grand intervalle que dans le petit et donc la longueur moyenne de l'intervalle où se trouve le point aléatoire est plus grande que la la longueur moyenne des intervalles).

Exercice sans préparation Maths Approfondies 4

On considère la fonction Python suivante, où n est un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$.

```
def simul(n,p):
    X=rd.geometric(p,n);
    M=min(X);
    C=0;
    for i in range(n):
        if X[i]==M :
            C=C+1;
    return C
```

Déterminer la loi de la variable N simulée par cette fonction `simul`.

Solution :

1. • On considère n variables X_1,...,X_n n variables indépendantes suivant chacune une loi géométrique de paramètre p.
   On note Z la valeur de leur minimum, N désigne alors le nombre de variables $X_1, ..., X_n$ prenant la valeur de ce minimum.
   On a déjà $N(\Omega) = [|1, n|]$.
   • A ce stade (si l'élève est perdu), on peut « raconter » l'histoire suivante : n joueurs ont à chaque manche une probabilité p de gagner à un jeu. Le premier joueur à gagner interrompt le jeu. N désigne le nombre d'ex-aequo.
   Avec la formule des probabilités totales :
   $\mathbb{P}(N = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{N = k\})$.
   $\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{N = k\}) = \mathbb{P}(\{Z \geqslant j\} \cap \{Z = j \cap N = k\}) = \mathbb{P}(\{Z \geqslant j\} \, \mathbb{P}_{Z \geqslant j}(Z = j \cap N = k)$
   $\mathbb{P}(Z \geqslant j) = (1-p)^{n(j-1)}$ (car $\{Z \geqslant j\} = \bigcap_{j=1}^{n} \{X_i \geqslant j\}$)
   • $\mathbb{P}_{\{Z \geqslant j\}}(\{Z = j \cap N = k\})$?
   sachant $Z \geqslant j$, on a sait que chacune des variables X_i est supérieure ou égal j.
   Et $\mathbb{P}(X_i = j | X_i \geqslant j) = p$ selon le protocole de la loi géométrique [probabilité que le joueur i gagne à la j-ième manche s'il la joue.]
   Sachant $X_i \geqslant j$, pour avoir $Z = j$ et$N = k$, il faut et il suffit que k variables valent exactement j (ie k joueurs gagnent la j-ième manche)
   Les variables X_i étant indépendantes, on reconnait un protocole de binomiale.
   Ainsi $\mathbb{P}_{Z \geqslant j}(Z = j \cap N = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$
   Ainsi $\mathbb{P}(N = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} (((1-p)^n)^{j-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}) = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{i=0}^{+\infty} ((1-p)^n)^i = \dfrac{\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}}{1-(1-p)^n}$
   $$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \, \mathbb{P}(N = k) = \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}}{1-(1-p)^n}}$$
2. Question Bonus : espérance de N ?
   $\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{n} k \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}}{1-(1-p)^n} = \dfrac{1}{1-(1-p)^n} \sum_{k=0}^{n} k \mathbb{P}(Y = k)$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(N) = \dfrac{np}{1-(1-p)^n}}$

SUJET Maths Approfondies 5

Exercice principal Maths Approfondies 5

1. Question de cours : Donner la définition de la convergence en probabilité et énoncer la loi faible des grands nombres.

   Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (X_n) une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant des moments d'ordre 2 et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant aussi un moment d'ordre 2.
   — On dit que (X_n) converge L_1 vers X ssi $\lim\limits_{n \to +\infty} E(|X_n - X|) = 0$
   — On dit que (X_n) converge L_2 vers X ssi $\lim\limits_{n \to +\infty} E\left(|X_n - X|^2\right) = 0$
   — On dit que (X_n) converge vers X ps (ou pp) ssi
   $$P\left(\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$
   Le but de l'exercice est d'établir des liens entre les différentes convergences.
2. Montrer que si (X_n) converge L_1 vers X alors (X_n) converge en probabilité vers X.
3. Montrer que si (X_n) converge L_2 vers X alors (X_n) converge L_1 vers X.
4. Un exemple : soit X une v.a.r. suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ et, pour $n \in \mathbb{N}$:
   $$X_n = \sqrt{n+1}\, \mathbb{1}_{X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]}$$
   (a) Montrer que (X_n) converge L_1 vers 0.
   (b) Qu'en est-il de la convergence L_2 ? Conclure.
5. Supposons que (X_n) converge vers X ps, notons $C = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \lim\limits_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que
   $$C \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geqslant k} \left[|X_n - X| \leqslant \varepsilon\right]$$
   (b) En déduire que (X_n) converge vers X en probabilité.
6. Un autre exemple : X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.
   $X_1 = \mathbb{1}_{X \in]0,1]}$,
   $X_2 = \mathbb{1}_{X \in]0, \frac{1}{2}]}$, $X_3 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{1}{2}, 1]}$,
   $X_4 = \mathbb{1}_{X \in]0, \frac{1}{3}]}$, $X_5 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}$, $X_6 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{2}{3}, 1]}$
   $X_7 = \mathbb{1}_{X \in]0, \frac{1}{4}]}$, $X_8 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]}$, $X_9 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{2}{4}, \frac{3}{4}]}$, $X_{10} = \mathbb{1}_{X \in]\frac{3}{4}, 1]}$
   ...

   (a) Donner l'univers image des X_n et montrer que
   $$\forall k \geqslant \frac{n(n+1)}{2} + 1 \qquad P(X_k = 0) \geqslant \frac{n}{n+1}$$
   (b) En déduire que X_n converge en probabilité vers 0
   (c) Montrer que (X_n) ne converge pas ps vers 0.

Solution :

1. p21 EC2
2. *Montrer que si (X_n) converge L_1 vers X alors (X_n) converge en proba vers X.*
   Les variables admettent un moment d'ordre 2 donc d'ordre 1 ($|X_n| \leqslant 1+X_n^2$). Supposons que (X_n) converge L_1 vers X :
   Soit $\epsilon > 0$, d'après l'inégalité de Markov
   $$0 \leqslant P(|X_n - X| > \epsilon) \leqslant E(|X_n - X|)$$
   Par encadrement on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$, d'où $\boxed{(X_n) \text{ converge en proba vers } X.}$
3. *Montrer que si (X_n) converge L_2 vers X alors (X_n) converge L_1 vers X.*
   Supposons que (X_n) converge L_2 vers X. Comme la variance est positive, nous avons
   $$0 \leqslant E(|X_n - X|)^2 \leqslant E(|X_n - X|^2)$$
   Par encadrement on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|X_n - X|) = 0$, d'où $\boxed{(X_n) \text{ converge } L_1 \text{ vers } X.}$
4. *Un exemple : X une v.a.r. suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et*
   $$X_n = \sqrt{n+1}\,\mathbb{1}_{X\in\left[0,\frac{1}{n+1}\right]}$$

   (a) *Montrer que si (X_n) converge L_1 vers 0.*
   X_n est positive donc
   $$E(|X_n|) = E(X_n) = \sqrt{n+1}\ P\left(X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|X_n|) = 0$, d'où $\boxed{(X_n) \text{ converge } L_1 \text{ vers } 0.}$

   (b) *Qu'en est-il de la convergence L_2 ? Conclure*
   $$E(X_n^2) = (n+1)P\left(X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]\right) = \sqrt{n+1} \to +\infty$$
   $\boxed{(X_n) \text{ ne converge pas } L_2 \text{ vers 0. Nous n'avons pas équivalence entre les deux convergences.}}$

5. *Soit (X_n) converge vers X ps, notons $C = \{w \in \Omega | \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(w) = X(w)\}$*

   (a) *Soit $\epsilon > 0$. Montrer que*
   $$C \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n\geqslant k} \Big[|X_n - X|\Big] \leqslant \epsilon$$
   C'est la définition de la limite !
   Soit $w \in C$ $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n(w) = X(w)$ donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant k$ $|X_n - X| \leqslant \epsilon$
   donc $w \in \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{n\geqslant k} [|X_n - X| \leqslant \epsilon]$ d'où l'inclusion demandée.

   (b) *En déduire que (X_n) converge vers X en proba.*
   Comme $P(C) = 1$, alors $P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{n\geqslant k} [|X_n - X| \leqslant \epsilon]\right) = 1$
   Comme l'union est croissante, nous avons
   $$\lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcap_{n\leqslant k} [|X_n - X| \leqslant \epsilon]\right) = 1$$
   Or
   $$P\left(\bigcap_{n\geqslant k} [|X_n - X| \leqslant \epsilon]\right) \leqslant P([|X_n - X| \leqslant \epsilon]) \leqslant 1$$
   Par encadrement on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \leqslant \epsilon) = 1$, d'où $\boxed{(X_n) \text{ converge en proba vers } X.}$

6. Un autre exemple : X une var suivant une uniforme sur $[0,1]$.
$X_1 = \mathbb{1}_{X\in]0,1]}$,
$X_2 = \mathbb{1}_{X\in]0,\frac{1}{2}]}$, $X_3 = \mathbb{1}_{X\in]\frac{1}{2},1]}$,
$X_4 = \mathbb{1}_{X\in]0,\frac{1}{3}]}$, $X_5 = \mathbb{1}_{X\in]\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}$, $X_6 = \mathbb{1}_{X\in]\frac{2}{3},1]}$
$X_7 = \mathbb{1}_{X\in]0,\frac{1}{4}]}$, $X_8 = \mathbb{1}_{X\in]\frac{1}{4},\frac{2}{4}]}$, $X_9 = \mathbb{1}_{X\in]\frac{2}{4},\frac{3}{4}]}$, $X_{10} = \mathbb{1}_{X\in]\frac{3}{4},1]}$ ...

   (a) *Donner l'univers image des X_n et montrer que*

$$\forall k \geqslant \frac{n(n+1)}{2} + 1 \qquad P(X_k = 0) \geqslant \frac{n}{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad X_n(\Omega) = \{0,1\}$$

   Nous avons à chaque fois i intervalles de longueur $\frac{1}{i}$.
   $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ donc pour $k \geqslant \frac{n(n+1)}{2} + 1$ l'intervalle associé à X_k est de longueur inférieure à $\frac{1}{n+1}$,
   d'où $P(X_k = 1) \leqslant \frac{1}{n+1}$ et donc $\boxed{P(X_k = 0) \geqslant \frac{n}{n+1}}$

   (b) *En déduire que X_n converge en probabilité*

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = 1 \text{ d'où } (X_n) \text{ converge en probabilité vers } 0$$

   (c) *Montrer que (X_n) ne converge pas ps vers* 0.

   $\forall w \in \Omega$ $(X_n(w))$ admet une sous-suite constante égale à 0 et une autre constante égale à 1. $(X_n(w))$ ne converge pas vers 0.
   $P\left(\left\{w \in \Omega | \lim_{n\to+\infty} X_n(w) = 0\right\}\right) = 0$ et donc $\boxed{(X_n) \text{ ne converge pas ps vers } 0}$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 5

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.

Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que : $\exists \alpha \in \mathbb{R}^* \quad f \circ g - g \circ f = \alpha f$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression de $f^n \circ g - g \circ f^n$.
2. En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$.

Solution :

1. On va montrer par récurrence sur n que :

$$f^n \circ g - g \circ f^n = \alpha n f^n$$

Le résultat est vrai pour $n = 0$ de manière triviale. Par ailleurs l'hypothèse de l'énoncé est exactement le résultat annoncé pour $n = 1$.

Soit donc $n \geqslant 0$ tel que le résultat est vrai au rang n. On peut alors calculer :

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g &= f^n \circ f \circ g \\ &= f^n \circ (\alpha f + g \circ f) \\ &= \alpha f^{n+1} + f^n \circ g \circ f \\ &= \alpha f^{n+1} + \alpha n f^{n+1} + g \circ f^{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \alpha(n+1) f^{n+1} + g \circ f^{n+1} \end{aligned}$$

et le résultat est prouvé au rang $n + 1$. On en déduit par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad f^n \circ g - g \circ f^n = \alpha n f^n}$$

2. On introduit l'application $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E),\ h \mapsto h \circ g - g \circ h$. Le résultat de la question précédente se réécrit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(f^n) = \alpha n f^n$$

Ainsi, si $f^n \neq 0$, f^n est vecteur propre de φ, associé à la valeur propre αn. Or φ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres car E est de dimension finie, et $\alpha n \neq \alpha m$ pour $n \neq m$. Donc nécessairement : $\boxed{\exists n \in \mathbb{N} \quad f^n = 0}$.

Question supplémentaire : montrer que $f^d = 0$ où $d = \dim E$.

Soit $n_0 = \min\{n | f^n = 0\}$. Alors $f^{n_0 - 1} \neq 0$ d'où $x \in E$ tel que $f^{n_0-1}(x) \neq 0$. Alors la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n_0-1}(x))$ est libre et donc nécessairement $n_0 \leqslant d$ d'où $f^d = 0$.

SUJET Maths Approfondies 6

Exercice principal Maths Approfondies 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $<,>$.
Soit u un endomorphisme symétrique de E dont on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (éventuellement répétées) et rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de u dans la base canonique de E.
Pour tout $x \in E$ on pose

$$q(x) = < u(x), x >$$

et on note

$$S = \{x \in E \text{ tels que } < x, x > = 1\}$$

Dans la suite de l'exercice on considère une base orthonormée de E, notée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad u(e_i) = \lambda_i e_i$$

et on pose, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$F_k = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$$

1. Question de cours : réduction des endomorphismes symétriques.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in S$ on a :
$$\lambda_1 \leqslant q(x) \leqslant \lambda_n$$
   (b) En déduire que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :
$$\lambda_1 \leqslant a_{kk} \leqslant \lambda_n$$
   (c) Justifier que si x élément de S vérifie l'égalité $q(x) = \lambda_n$ alors x est un vecteur propre de u.

3. (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Etablir que q atteint un maximum sur $F_k \cap S$.

   (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :
$$\max_{x \in F_k \cap S} q(x) = \lambda_k$$
   (c) Montrer que, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a :
$$\min_{x \in F_{k-1}^{\perp} \cap S} q(x) = \lambda_k$$

4. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on note $\mathcal{V}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k.

   (a) Etablir que si F est dans $\mathcal{V}_k$ alors $F \cap F_{k-1}^{\perp}$ n'est pas réduit au vecteur nul.

   (b) En déduire que :
$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{V}_k} \left(\max_{x \in F \cap S} q(x) \right)$$

5. Soient a et b deux endomorphismes symétriques de E dont on note $\lambda_1(a) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(a)$ (*resp.* $\lambda_1(b) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(b)$ pour l'endomorphisme b) les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant.
   On suppose que pour tout $x \in E$ on a :
$$< a(x), x > \leqslant < b(x), x >$$
   Comparer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k(a)$ et $\lambda_k(b)$.

Solution :

1. EC2 p17
2. (a) Posons $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

   On a alors : $q(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$ et, par définition de λ_1 et λ_n, l'encadrement :

   $$\lambda_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant q(x) \leqslant \lambda_n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

   Soit : $\lambda_1 \leqslant q(x) \leqslant \lambda_n$ du fait que x appartient à S.

   (b) Si on note $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ la base canonique de E on a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

   $$a_{kk} = < u(\epsilon_k), \epsilon_k > = q(\epsilon_k)$$

   L'encadrement : $\lambda_1 \leqslant a_{kk} \leqslant \lambda_n$ résulte alors du résultat de la question précédente.

   (c) D'après ce qui précède si $x \in S$ vérifie l'égalité $q(x) = \lambda_n$ alors on a :

   $$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\lambda_k - \lambda_n)}_{<0 \text{ si } \lambda_k \neq \lambda_n} x_k^2 = 0$$

   On a donc : $x_k = 0$ dès que $\lambda_k \neq \lambda_n$ et donc $x \in E_{\lambda_n}(u)$.

3. (a) $F_k \cap S$ est un fermé borné de E et donc l'application continue q y admet un maximum.

   N.B. : Pour voir que F_k est un fermé on peut écrire $F_k = \{x \in E : \ x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$.

   (b) En procédant comme en 1.a) on obtient, pour tout $x \in F_k \cap S$: $q(x) \leqslant \lambda_k$ et puisque $q(e_k) = \lambda_k$ et $e_k \in F_k \cap S$ on a bien :

   $$\max_{x \in F_k \cap S} q(x) = \lambda_k$$

   (c) On remarque que $F_{k-1}^{\perp} = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$ et donc, par le même raisonnement qu'en 1.a) on obtient, pour tout $x \in F_{k-1}^{\perp} \cap S$: $q(x) \geqslant \lambda_k$ et puisque $q(e_k) = \lambda_k$ et $e_k \in F_{k-1}^{\perp} \cap S$ on a bien :

   $$\min_{x \in F_{k-1}^{\perp} \cap S} q(x) = \lambda_k$$

4. (a) On a :

   $$\dim\left(F \cap F_{k-1}^{\perp}\right) = \underbrace{\dim(F) + \dim(F_{k-1}^{\perp})}_{k+(n-k+1)=n+1} - \dim\left(F + F_{k-1}^{\perp}\right) \geqslant 1$$

   Il en résulte que le sous-espace vectoriel $F \cap F_{k-1}^{\perp}$ n'est pas réduit au vecteur nul.

   (b) Soit $x \in F \cap F_{k-1}^{\perp}$ de norme égale à 1.
   On a :

   $$q(x) \geqslant \min_{y \in F_{k-1}^{\perp} \cap S} q(y) = \lambda_k$$

   et donc : $\max_{x \in F \cap S} q(x) \geqslant \lambda_k$ puisque pour $F = F_k$ on a l'égalité finalement on a bien :

   $$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{V}_k} \left(\max_{x \in F \cap S} q(x) \right)$$

5. D'aprè ce qui précède pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a

   $$\lambda_k(a) \leqslant \lambda_k(b)$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 6

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Le code Python ci-dessous simule une variable aléatoire T_N. Décrire une expérience aléatoire correspondant à cette simulation.

```python
import numpy.random as rd

def T(N):
    X1,X2,X3=N+1,N+1,N+1
    t=0
    while X1*X2*X3>0:
        x=rd.rand()
        if x<1/3:
            X1=X1-1
        elif x<2/3:
            X2=X2-1
        else:
            X3=X3-1
        t=t+1
    return t
```

2. Déterminer la loi de T_N.

Solution :

1. Le code ci-dessus simule l'expérience aléatoire suivante : on dispose de trois urnes, chacune remplie de $N+1$ boules indiscernables au toucher. On fait des tirages successifs sans remise : à chaque tirage, on choisit une urne au hasard parmi les trois et on retire une boule. Le processus s'arrête quand une urne se retrouve vide pour la première fois. Ainsi T_N est le numéro du premier tirage à l'issue duquel une urne est vide.

   Une autre expérience possible, si on préfère trois urnes remplie de N boules, est de considérer que la condition d'arrêt de l'expérience n'est pas de vider une urne, mais de rencontrer pour la première fois une urne vide : on n'est alors plus en mesure de tirer une boule dans l'urne choisit et le processus s'arrête.

2. La variable T_N est clairement à valeurs dans $[\![N+1, 3N+1]\!]$.

   On numérote les urnes de 1 à 3 et, pour $i \in [\![1,3]\!]$ et $r \in [\![1, 2N+1]\!]$, on note $A_{i,r}$ l'événement « l'urne n° i est la première vidée, et cela au $(N+r)$-ème tirage ».

   On a bien alors, par incompatibilité, puis par symétrie des urnes entre elles : $\mathbb{P}(T_N = N+r) = \mathbb{P}(A_{1,r}) + \mathbb{P}(A_{2,r}) + \mathbb{P}(A_{3,r}) = 3\mathbb{P}(A_{1,r})$.

   On peut décrire l'événement $A_{1,r}$ à l'aide d'un schéma de Bernoulli. Un succès est obtenu avec probabilité $1/3$ quand on tire une boule dans l'urne 1, un échec avec probabilité $2/3$ quand on tire une boule dans une des deux autres urnes. L'événement $A_{1,r}$ est réalisé quand le $(N+1)$-ème succès est obtenu lors du tirage n° $N+r$. Cela signifie que lors des $N+r-1$ premiers tirages, on a exactement N succès et $r-1$ échecs d'où :

$$\mathbb{P}(A_{1,r}) = \binom{N+r-1}{N} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}$$

   d'où finalement, comme $\mathbb{P}(T_N = N+r) = 3\mathbb{P}(A_{1,r})$:

$$\boxed{\forall r \in [\![1, 2N+1]\!] \quad \mathbb{P}(T_N = N+r) = 3\binom{N+r-1}{N} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}}$$

SUJET Maths Approfondies 7

Exercice principal Maths Approfondies 7

On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des densités f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, strictement positives et telles que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \prod_{i=1}^{n} f(x_i - \overline{x}_n) \geqslant \prod_{i=1}^{n} f(x_i - \theta)$$

où $\quad \overline{x}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i.$

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{G}$ on pose $\Phi = \ln(f)$ et $\varphi = \Phi'$.

1. Question de cours : dérivée et extrema des fonctions d'une variable réelle .

2. Soit $f \in \mathcal{G}$. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i - \overline{x}_n) = 0 \quad (\star)$

3. Etablir que si g est une densité de classe $\mathcal{C}^2$ d'une loi normale d'espérance nulle alors g appartient à $\mathcal{G}$.

4. En écrivant $(\star)$ lorsque $n = 2$, établir que pour tout $f \in \mathcal{G}$ la fonction φ est impaire.

5. Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que : $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad h(x_1, x_2, x_3) = (\dfrac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}, \dfrac{2x_2 - x_1 - x_3}{3})$.
Déterminer le noyau et l'image de h.

6. (a) En écrivant $(\star)$ lorsque $n = 3$, établir que pour tout $f \in \mathcal{G}$: $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(u + v)$.
Montrer alors que φ' est une fonction constante.

   (b) En déduire l'expression générale des fonctions f appartenant à $\mathcal{G}$.

Solution :

1. EC1p11

2. Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ fixé, soit L la fonction définie par $L(\theta) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} f(x_i - \theta)$.

L'appartenance de f à $\mathcal{G}$ est équivalente à ce que la fonction L admette un maximim global en $\theta = \overline{x}_n$ ce qui, par croissance stricte de la fonction logarithme, équivaut à ce que la fonction $\ln(L)$ admette un maximum global en $\theta = \overline{x}_n$.

Il s'ensuit que $(\ln(L))'(\overline{x}_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i - \overline{x}_n) = 0$.

3. Il existe $\sigma > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{1}{2\sigma^2} x^2)$.

$L(\theta) = (2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} \exp(-\dfrac{1}{2\sigma^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2)$.

$\ln(L(\theta)) = \dfrac{-n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \dfrac{1}{2\sigma^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2$ et $(\ln(L))'(\theta) = \dfrac{1}{\sigma^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta) = \dfrac{n}{\sigma^2} (\overline{x}_n - \theta)$.

Il en résulte que le trinôme $\ln(L(\theta))$ est bien maximal lorsque $\theta = \overline{x}_n$.

4. Lorsque $n = 2$ la condition $(\star)$ devient : $\varphi(x_1 - \overline{x}_2) + \varphi(x_2 - \overline{x}_2) = 0$ soit $\varphi(\dfrac{x_1 - x_2}{2}) + \varphi(\dfrac{x_2 - x_1}{2}) = 0$.
En posant $t = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$ on obtient : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) + \varphi(-t) = 0$
et la fonction φ est impaire.

5. $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$.

6.a) Lorsque $n = 3$ la condition $(\star)$ devient : $\varphi(x_1 - \overline{x}_3) + \varphi(x_2 - \overline{x}_3) + \varphi(x_3 - \overline{x}_3) = 0$
soit :
$\varphi(\dfrac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}) + \varphi(\dfrac{2x_2 - x_1 - x_3}{3}) + \varphi(\dfrac{2x_3 - x_1 - x_2}{3}) = 0$ et par imparité de φ :
$\varphi(\dfrac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}) + \varphi(\dfrac{2x_2 - x_1 - x_3}{3}) = \varphi(\dfrac{x_1 + x_2 - 2x_3}{3})$

En posant $u = \dfrac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}$ et $v = \dfrac{2x_2 - x_1 - x_3}{3}$ on a $u + v = \dfrac{x_1 + x_2 - 2x_3}{3}$ et la surjectivité de h garantit que :
$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(u+v)$.

En dérivant l'égalité ci-dessus par rapport à la variable u on obtient : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi'(u) = \varphi'(u+v)$
et donc :
$\forall v \in \mathbb{R} \quad \varphi'(v) = \varphi'(0) = \text{constante}$.

6.b) D'après ce qui précède si f est dans $\mathcal{G}$ alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi' = c$ et φ' étant impaire on a : $\forall x \in \mathbb{R}\ \varphi(x) = cx$.
Il s'ensuit quil existe des constantes c et d telles que : $\forall x \in \mathbb{R}\ \Phi(x) = cx^2 + d$.
f étant une densité on a nécessairement $c < 0$ et $f(x) = k\exp(cx^2)$ où k est tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

En utilisant le résultat de la question 3 il en résulte finalment que l'ensemble $\mathcal{G}$ est exactement l'ensemble des densités de classe $\mathcal{C}^2$ d'une loi normale d'espérance nulle.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 7

Soit N une matrice carrée réelle telle que $N^k = 0$ pour un certain entier naturel $k \geqslant 1$ (on dit que N est nilpotente). On suppose de plus que N et ${}^tN$ commutent. Montrer que $N = 0$.
Indication : on pourra considérer la matrice $M = N +^t N$.

Solution :

On pose $M = N +^t N$. Puisque N et ${}^tN$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton à M. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2k$ on a

$$M^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} N^\ell ({}^tN)^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{n}{\ell} N^\ell ({}^tN)^{n-\ell} = 0.$$

Donc M est nilpotente également. Or M est symétrique, donc diagonalisable : $M = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale et P une matrice inversible. Donc $D^n = P^{-1}M^nP = 0$ ce qui implique $D = 0$ et $M = 0$. Ainsi, N est antisymétrique et N^2 est symétrique et nilpotente. Donc N^2 est nulle par le même argument que pour M. D'où $N{}^tN = 0$. En prenant la trace on en déduit que $N = 0$.
remarque : on peut également utiliser une récurrence sur la dimension en observant que $\ker(N)^\perp = \mathrm{Im}({}^tN)$ est stable par N car N et ${}^tN$ commutent.

SUJET Maths Approfondies 8

Exercice principal Maths Approfondies 8

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : calcul des fonctions de répartition et de densité de Z^2 où Z est une variable aléatoire à densité.
2. Donner l'exemple d'une variable aléatoire réelle X telle que X et $-X$ ont la même loi.
3. Soit X une variable aléatoire réelle ayant une densité f_X. Donner une condition suffisante sur f_X pour que X et $-X$ aient la même loi. On justifiera la réponse.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles vérifiant $P(X \neq Y) = 0$. Montrer qu'elles ont la même loi.
5. Est-ce que la réciproque est vraie dans le cas général ?
6. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que
$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}),\ Y \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2}).$$
Déterminer les lois de X^6 et de Y^3 et interpréter le résultat. On admettra que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
7. Donner un exemple de trois variables aléatoires réelles X, Y et Z telles que X et Y ont la même loi mais XZ et YZ n'ont pas la même loi.

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p13
2. Il suffit de choisir une variable aléatoire vérifiant $P(X = 0) = 1$.
3. Il suffit de choisir X à densité f_X paire. En effet, dans ce cas on a pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$P(-X \leqslant x) = P(X \geqslant -x) = \int_{-x}^{+\infty} f(t)dt.$$
Par changement de variable, on obtient
$$P(-X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(-t)dt.$$
Ainsi, $-X$ est une variable aléatoire ayant comme densité la fonction définie par $f_{-X}(t) = f_X(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour que X et $-X$ aient la même loi, il suffit que $f_{-X} = f_X$, c'est-à-dire il suffit que $\boxed{f_X \text{ soit paire}}$. Par exemple, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
4. Supposons $P(X \neq Y) = 0$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{array}{rcl} P(Y \leqslant x) & = & P(Y \leqslant x \text{ et } Y = X) \cup (Y \leqslant x \text{ et } Y \neq X) \\ & = & P(Y \leqslant x \text{ et } Y = X) + P(Y \leqslant x \text{ et } Y \neq X) \\ & = & P(Y \leqslant x \text{ et } Y = X) \text{ car } P(Y \leqslant x \text{ et } Y \neq X) \leqslant P(Y \neq X) = 0, \\ & = & P(X \leqslant x \text{ et } X = Y) \\ & = & P(X \leqslant x). \end{array}$$
5. La réciproque est fausse en général. Il suffit de choisir une variable aléatoire réelle X à densité paire. On a alors X et $-X$ qui ont la même loi et $P(X \neq -X) = P(X \neq 0) = 1$.
6. La fonction $t \mapsto t^3$ est une fonction de classe C^1 strictement croissante. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ Notons g sa fonction réciproque. On a

— si $x \leqslant 0$, alors $P(Y^3 \leqslant x) \leqslant P(Y^3 \leqslant 0) = P(Y \leqslant 0) = 0$. Donc $P(Y^3 \leqslant x) = 0$.
— si $x > 0$,

$$P(Y^3 \leqslant x) = P(Y \leqslant x^{1/3}) = \int_0^{x^{1/3}} f_Y(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{x^{1/3}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

En effectuant le changement de variable $u = t^3$ on obtient

$$P(Y^3 \leqslant x) = \frac{1}{3\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x u^{-5/6} e^{-u^{1/3}} du.$$

Ainsi Y^3 est une variable aléatoire à densité

$$\boxed{f_{Y^3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{3\Gamma(\frac{1}{2})} x^{-5/6} e^{-x^{1/3}} & \text{si } x > 0. \end{cases}}$$

Par ailleurs, on a

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

— si $x \leqslant 0$, $P(X^6 \leqslant x) \leqslant P(X^6 \leqslant 0) = P(X = 0) = 0$. Donc $P(X^6 \leqslant x) = 0$.
— si $x > 0$, alors

$$P(X^6 \leqslant x) = P(-x^{1/6} \leqslant X \leqslant x^{1/6}) = \int_{-x^{1/6}}^{x^{1/6}} f_X(t)dt = 2 \int_0^{x^{1/6}} f_X(t)dt \text{ car } f_X \text{ est paire.}$$

En effectuant le changement de variable $u = t^6$ on obtient

$$P(X^6 \leqslant x) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \int_0^x u^{-5/6} e^{-u^{1/3}} du.$$

On en déduit que X^6 et Y^3 ont la même loi. En effet, X^2 et Y ont la même loi (observation pouvant simplifier le calcul).

7. on peut choisir X une variable aléatoire à densité paire et $Y = Z = -X$. On a X et Y qui ont la même loi, et $XZ = -X^2$ tandis que $YZ = X^2$. Elles n'ont clairement pas la même loi.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 8

Soit σ une injection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

1. Proposer 3 exemples de telles injection . Dans chacun de vos exemples, quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sigma(n)}{n^2}$?
2. Dans le cas générale, donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sigma(n)}{n^2}$?

Solution :

1. $n \mapsto n$; $n \mapsto 2n$; $n \mapsto 2n+1$
2. (*Indication* : On pourra s'intéresser à la quantité $S_{2n} - S_n$ où S_n est la somme partielle d'ordre n associée à la série.)
   Soit
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$$
   On a :
   $$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)$$
   L'ensemble $\Big\{\sigma(k), k \in [\![n+1, 2n]\!]\Big\}$ étant formé de n entiers distincts on a :
   $$\sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$
   Il en résulte que :
   $$S_{2n} - S_n \geqslant \frac{n+1}{8n} > \frac{1}{8}$$
   Il s'ensuit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sigma(n)}{n^2}$ n'est pas convergente (et donc diverge vers $+\infty$ puisque à termes positifs).

SUJET Maths Approfondies 9

Exercice principal Maths Approfondies 9

Á toute fonction f, continue sur $[0,1]$, on associe la suite $(a_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall k \in N,\ a_k(f) = \int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Propriété des fonctions continues sur un intervalle.
2. Montrer que pour toute fonction f, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k(f) = 0$.

   On admet provisoirement la propriété :

   (*) si f est une application continue sur $[0,1]$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k(f) = 0$, alors $f = 0$.
3. Soit f une application continue sur $[0,1]$.
   (a) Calculer $a_k(F)$ où $F : x \mapsto -\displaystyle\int_x^1 f(t)dt$.
   (b) On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant p$ on ait $a_k(f) = 0$. Montrer que $f = 0$.

   On va maintenant démontrer la propriété (*)
4. (a) Soient α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$.
   Construire un polynôme P du second degré satisfaisant aux conditions suivantes :
   (i) $\forall x \in]\alpha,\beta[\quad P(x) < 0$;
   (ii) $\forall x \in [0,\alpha] \cup [\beta,1],\quad 0 \leqslant P(x) \leqslant 1$.
   Tracer un graphe illustrant la construction du polynôme P avec α et β quelconques.
   (b) Un tel polynôme P étant choisi, on choisit a, b vérifiant $\alpha < a < b < \beta$.

   $$\text{Déterminer alors } \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (1-P(x))^n\,\mathrm{d}x.$$
5. (a) Soit f une application continue sur $[0,1]$. On suppose qu'il existe trois constantes $\varepsilon, \alpha, \beta$, avec $\varepsilon > 0$ et $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, telles que l'on ait :

   $$\forall x \in [\alpha,\beta],\quad f(x) \geqslant \varepsilon.$$

   Soit alors P un polynôme satisfaisant aux conditions imposées dans la question précédente. Calculer

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)(1-P(x))^n\,\mathrm{d}x.$$

   (b) Démontrer alors la propriété (*)
6. On suppose que $f(1) \neq 0$. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)$ diverge.

Solution :

1. Programme première année page 16.
   L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).
2. f est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$, il existe donc M tel que $\forall x \in [\,0\,;1\,]$, $|f(x)| \leqslant M$
   Donc par positivité de l'intégrale :
   $|a_k(f)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,x^k\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 M.x^k\,\mathrm{d}x = \frac{M}{k+1}$
   Donc par encadrement $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} a_k(f) = 0}$

3. (a) F est la primitive de f qui s'annule en 1. $u(x) = F(x)$, $v'(x) = x^k$, $u, v \in \mathcal{C}^1([0;1])$

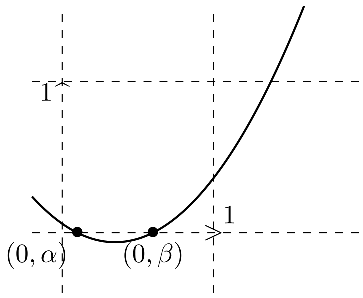
$a_k(F) = \displaystyle\int_0^1 x^k F(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ \frac{x^{k+1}}{k+1}F(x)\ \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x = 0 - 0 - \frac{1}{k+1}a_{k+1}(f)$.

$\boxed{a_k(F) = -\dfrac{1}{k+1}a_{k+1}(f).}$

(b) Montrons la propriété par récurrence sur p.
C'est vrai au rang 0 (C'est *).
Si la propriété est vraie au rang p,
Soit f telle que $\forall k \geqslant p+1$, $a_k(f) = 0$. Donc $\forall j \geqslant p\ a_{j+1}(f) = 0$ donc $a_j(F) = 0$.
On applique l'hypothèse de récurrence à F. Donc F est nulle. En dérivant f est nulle aussi.
L'hypothèse est héréditaire.

$\boxed{\text{Si il existe } p \text{ tel que } \forall k \geqslant p,\ a_k(f) = 0 \text{ alors } f = 0.}$

4. (a) On pose $\boxed{P(X) = (X-\alpha)(X-\beta).}$
On a bien $P(x) < 0$ si $x \in]\,\alpha\,;\beta\,[$.
Et si $x \in [\,0\,;\alpha\,] \cup [\,\beta\,;1\,]$, $P(x) \geqslant 0$ et$|P(x)| = |x-\alpha|\,.\,|x-\beta| \leqslant 1 \times 1$.



(b) $x \mapsto 1-P(x)$ est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$. Il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $\forall x \in [\,a\,;b\,]$, $1-P(x) \geqslant 1-P(c)$.
Ainsi par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b (1-P(x))^n\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b (1-P(c))^n\,\mathrm{d}x = (b-a)(1-P(c))^n$.
Or, $1-P(c) > 1$, donc par encadrement $\boxed{\displaystyle\int_a^b (1-P(x))^n\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.}$

5. (a) Avec Chasles :

$\displaystyle\int_0^1 f(x)(1-P(x))^n dx = \int_0^\alpha f(x)(1-P(x))^n\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^a f(x)(1-P(x))^n\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)(1-P(x))^n\,\mathrm{d}x + \int_b^\beta (1-P(x))^n f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^1 (1-P(x))^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

• $\forall x \in [\,a\,;b\,]$, $f(x)((1-P(x))^n \geqslant \varepsilon((1-P(x))^n$.
Par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b f(x)(1-P(x))^n\,\mathrm{d}x \geqslant \varepsilon \int_a^b (1-P(x))^n\,\mathrm{d}x$.
Donc d'après 4-b, $\displaystyle\int_a^b f(x)(1-P(x))^n\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

• $\forall x \in [\,\alpha\,;a\,]$, $(1-P(x))^n f(x) \geqslant 1 \times \varepsilon \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_a^\alpha f(x)(1-P(x))^n\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
C'est la même chose sur $[\,b\,;\beta\,]$.

•, $\forall x \in [\,0\,;a\,]$,$|f(x)(1-P(x))^n| = |f(x)|\,|1-P(x)|^n \leqslant |f(x)| \times 1$.
Ainsi $\left|\displaystyle\int_0^a f(x)(1-P(x))^n\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
Donc $(\displaystyle\int_0^a f(x)(1-P(x))^n\,\mathrm{d}x)$ est une suite minorée.
Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f(x)(1-P(x))^n\,\mathrm{d}x$ est la somme d'une suite divergent vers $+\infty$ et de 4 suites minorées.

$\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(x)(1-P(x))^n\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.}$

(b) $x \mapsto (1-P(x))^n$ est un polynôme, il existe donc des coefficients $b_0, ..b_{2n}$ tels que :
$\forall x \in [\,0\,;1\,]\ (1-P(x))^n = \sum_{k=0}^{2n} b_k x^k$.
On a donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)(1-P(x))^n \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m} b_k \int_0^1 f(x)x^k \,\mathrm{d}x = 0$.
Il n'existe donc pas d'intervalle $[\,\alpha\,;\beta\,]$ ni de $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \geqslant \varepsilon$ sur l'intervalle.
Mais si il existe x_0 tel que $f(x_0) > 0$, en posant $\varepsilon = f(x_0)/2$, on aurait $f(x) \geqslant \varepsilon$ au voisinage de x_0. C'est absurde!
En appliquant le même raisonnement à $-f$, il n'existe pas non plus de x_0 tel que $f(x_0) < 0$.
$\boxed{\text{Donc } f \text{ est nulle sur } [\,0\,;1\,].}$

6. De la même manière. Si $f(1) \neq 0$, par exemple $f(1) > 0$, il existe α tel que $\forall x \in [\,1-\alpha\,;1\,]$, $f(x) \geqslant \dfrac{f(1)}{2}$.
On écrit alors $a_k(f) = b_k(f) + c_k(f)$ où $b_k(f) = \displaystyle\int_0^{1-\alpha} x^k f(x)\,\mathrm{d}x$ et $c_k(f) = \displaystyle\int_\alpha^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x$.
$|b_k(f)| \leqslant \displaystyle\int_0^{1-\alpha} x^k\,|f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (1-\alpha)^k \int_0^{1-\alpha} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. La série de terme général $b_k(f)$ converge absolument.
Et $c_k(f) \geqslant \displaystyle\int_{1-\alpha}^1 x^k \frac{f(0)}{2}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(0)(1-(1-\alpha)^{k+1})}{2(k+1)} \geqslant \frac{f(0)}{2(k+1)}$
Ainsi la série de terme général $c_k(f)$ diverge.
$\boxed{\text{La série de terme général } a_k(f) \text{ diverge}}$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 9

Soient X_1,..., X_n n variables aléatoires, indépendantes, de même loi et admettant une variance finie. Trouver l'estimateur sans biais de la moyenne $\theta = E(X_1)$ qui soit de variance minimale dans la classe des estimateurs linéaires $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$.

Solution :

Comme l'estimateur est sans biais, on a $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. De plus, par indépèndance des variables

$$V(\tilde{\theta}_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{V}(X_1)$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a

$$1 = (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} 1) = n(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$$

avec cas d'égalité si et seulement si tous les a_i sont égaux. Ainsi, l'estimateur sans biais de variance minimale est la moyenne empirique $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$.

SUJET Maths Approfondies 10

Exercice principal Maths Approfondies 10

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des densités f continues sur $\mathbb{R}$, nulles sur $]-\infty,0]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Question de cours : produit de convolution.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout $(f_1,f_2)\in\mathcal{E}^2$ on a : $\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2 \in \mathcal{E}$.
3. Soit $f\in\mathcal{E}$. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Dans la suite de l'exercice on fixe $f\in\mathcal{E}$ et on pose :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

4. Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, exprimer $g'(x)$ à l'aide de $f(x)$.
5. Etablir que la fonction g est une densité de probabilité.
6. Soit X une variable aléatoire de densité f et Y une variable aléatoire de densité g. Montrer que si X admet une espérance, alors Y aussi et qu'on a alors l'égalité :

$$E(Y) = \frac{1}{2}E(X)$$

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme à densité sur $[0,1]$, indépendante de X.
   (a) Montrer que la variable aléatoire UX admet g comme densité.
   (b) Retrouver ainsi le résultat de la question 6.

Solution :

1. Cours p16 mathématiques approfondies de seconde année
2. On a :

• La fonction $\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2$ est positive par positivité de f_1 et f_2, nulle sur $]-\infty,0]$ et possède les mêmes régularités que f_1 et f_2.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f_1(t) + (1-\lambda)f_2(t)dt = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)dt + (1-\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)dt = \lambda\times 1 + (1-\lambda)\times 1 = 1.$

Reste à montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\lambda f_1(t) + (1-\lambda)f_2(t)\right)^2 dt$ converge ce qui, compte-tenu des hypothèses, revient à montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(t)f_2(t)dt$ converge et cela résulte de l'inégalité :

$$f_1(t)f_2(t) \leqslant \frac{1}{2}\left(f_1^2(t)+f_2^2(t)\right)$$

3. Il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ converge.

• En 0 : $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0)$ et l'intégrale est donc faussement impropre en 0.

• En $+\infty$: $\left|\dfrac{f(t)}{t}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(f^2(t)+\dfrac{1}{t^2}\right)$ et la convergence de l'intégrale impropre en $+\infty$ en résulte.

4. Soit H une primitive de $t \to \dfrac{f(t)}{t}$ sur $]0,+\infty[$. On a :

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt-\int_0^x\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt-(H(x)-H(0))$$

Il en résulte que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\forall x>0 \quad g'(x)=-H'(x)=\frac{-f(x)}{x}$$

5. g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive et pour tout $A>0$ une intégration par parties donne :

$$\int_0^A g(t)dt=\int_0^A 1.g(t)dt=[tg(t)]_0^A-\int_0^A tg'(t)dt=Ag(A)+\int_0^A f(t)dt$$

En remarquant que :

$$0\leqslant Ag(A)=A\int_A^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt\leqslant\int_A^{+\infty}f(t)dt \xrightarrow{A\to+\infty} 0$$

on obtient :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A g(t)dt=\int_0^{+\infty}f(t)dt=1$$

et finalement g est bien une densité.

6. On procède comme à la question 5 :

$$\int_0^A tg(t)dt=\left[\frac{t^2}{2}g(t)\right]_0^A-\int_0^A\frac{t^2}{2}g'(t)dt=\frac{1}{2}A^2g(A)+\frac{1}{2}\int_0^A tf(t)dt$$

avec

$$0\leqslant A^2g(A)\leqslant A^2\int_A^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt\leqslant\int_A^{+\infty}tf(t)dt\xrightarrow{A\to+\infty}0$$

du fait que X admet une espérance.

Il s'ensuit que :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A tg(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}tf(t)dt$$

et finalement on a bien :

$$E(Y)=\frac{1}{2}E(X)$$

7.a) On a $(UX)(\Omega)=[0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$:

$$P(UX\leqslant x)=P\left(\ln(U)+\ln(X)\leqslant\ln(x)\right)$$

On va donc chercher une densité de $\ln(U)+\ln(X)$ en utilisant la formule de convolution.
On a :

• Pour tout réel t : $P(\ln(U)\leqslant t)=P(U\leqslant e^t)=\begin{cases}1 & \text{si } t>0\\ e^t & \text{si } t\leqslant 0\end{cases}$.

Une densité de la variable aléatoire $\ln(U)$ est ainsi donnée par

$$f_{\ln(U)}(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t>0\\ e^t & \text{si } t\leqslant 0\end{cases}$$

• Pour tout réel t : $P(\ln(X)\leqslant t)=P(X\leqslant e^t)=F_X(e^t)$.

Une densité de la variable aléatoire $\ln(X)$ est ainsi donnée par

$$f_{\ln(X)}(t)=e^tf(e^t)$$

Par indépendance une densité de $\ln(U)+\ln(X)$ est donnée par :

$$f_{\ln(U)+\ln(X)}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln(X)}(t)f_{\ln(U)}(x-t)dt=\int_{x}^{+\infty} e^t f(e^t)e^{x-t}dt=e^x\int_{x}^{+\infty} f(e^t)dt$$

Une densité de la variable aléatoire UX est ainsi donnée par :

$$f_{UX}(x)=\frac{1}{x}f_{\ln(U)+\ln(X)}(\ln(x))=\frac{e^{\ln(x)}}{x}\int_{\ln(x)}^{+\infty} f(e^t)dt=\int_{\ln(x)}^{+\infty} f(e^t)dt$$

et le changement de variable $u=e^t$ donne

$$f_{UX}(x)=\int_{x}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=g(x)$$

b) On a ainsi $E(Y)=E(UX)=E(U)E(X)=\frac{1}{2}E(X)$ du fait de l'indépendance de X et U. On retrouve bien le résultat de la question 6.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 10

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_n^2) = 0$$

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

Solution :

non pour la question 1, prendre $u_n = 0$ si n pair et 1 sinon. Oui pour la question 2 : comme il existe $M > 0$ tel que pour n assez grand $-M \leq u_n - u_n^2$, soit $u_n^2 - u_n - M \leq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se situe entre les 2 racines du polynome $X^2 - X - M$ et est donc forcément bornée.

SUJET Maths Approfondies 11

Exercice principal Maths Approfondies 11

On admettra, pour cet exercice, l'équivalent suivant : $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geqslant 1$. On procède à une suite de tirages avec remise et on note X le numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois une boule déjà tirée.

1. Question de cours : théorème central limite.
2. (a) Justifier que la variable aléatoire X est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = n+1)$.
3. (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(X > k)$.
   (b) La formule précédente est-elle encore valable pour $k = 0$?
4. (a) Montrer que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k)$.
   (b) En déduire que :
$$\mathbb{E}(X) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$
5. Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées, suivant toutes une loi de Poisson de paramètre 1. On pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) = \frac{1}{2}$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.
   (c) Conclure que $\mathbb{E}(X) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$

Solution :

1. Programme Maths approfondies ECG2 p. 22.
2. (a) Pour obtenir deux fois le même résultat, il faut effectuer au moins deux lancers d'où $X \geqslant 2$. Par ailleurs, en au plus $n+1$ tirages on est assuré d'obtenir deux boules identiques car il y a n boules dans l'urne – c'est le principe des tiroirs de Dirichlet. Ainsi $X \leqslant n+1$. Finalement, X est bien à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
   (b) L'événement $X = 2$ est réalisé si et seulement si on obtient deux fois la même boule au cours des deux premiers tirages. Comme il y a n boules dans l'urne, choisir un tel tirage revient à choisir une boule et il y a donc n tirages possibles. Par ailleurs, quand on effectue deux tirages successifs avec remise, il y a n^2 tirages possibles et donc par équiprobabilité :
$$P(X = 2) = \frac{n}{n^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{P(X = 2) = \frac{1}{n}}$$
   Si $X = n+1$, cela signifie que l'on tire n boules distinctes lors des n premiers tirages. Cela revient donc à se donner une permutation des n boules et il y a donc $n!$ possibilités. Au dernier tirage, il faut choisir la boule qui est obtenue une seconde fois, d'où n possibilités. Il y a donc $n \times n!$ tirages favorables. Par ailleurs, il y a n^{n+1} tirages possibles. Là encore par équiprobabilité :
$$\mathbb{P}(X = n+1) = \frac{n \times n!}{n^{n+1}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathbb{P}(X = n+1) = \frac{n!}{n^n}}$$

3. (a) Comme X est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$, on peut se limiter à étudier $n+1$ tirages successifs avec remise, ce qui revient à travailler dans l'univers $\Omega = [\![1, n]\!]^{n+1}$. Il y a donc en tout n^{n+1} tirages possibles.
L'événement $\{X > k\}$ est réalisé si et seulement si on obtient k boules distinctes lors des k premiers tirages. Pour se donner un tel tirage, on choisit k boules parmi les n de l'urne, il y a donc $\binom{n}{k}$ possibilités. On a alors $k!$ manières de permuter ces k boules pour déterminer les k premiers. Il reste alors à choisir les $n+1-k$ tirées après les k premières, il y a alors n^{n+1-k} possibilités. On obtient ainsi $k!\binom{n}{k}n^{n+1-k}$ tirages favorables et donc, par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(X > k) = \frac{k!\binom{n}{k}n^{n+1-k}}{n^{n+1}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathbb{P}(X > k) = \frac{1}{n^k}\frac{n!}{(n-k)!}}$$

(b) La formule est encore valable pour $k = 0$ car $P(X > 0) = 1 = \dfrac{1}{n^0}\dfrac{n!}{n!}$

4. (a) Par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n+1} k\mathbb{P}(X = k)$$

car $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 0$. Alors, pour $k \geqslant 0$, $\{X \geqslant k\} = \{X = k\} \cup \{X \geqslant k+1\}$ et l'union écrite étant disjointe, par additivité des probabilités :

$$\mathbb{P}(X \geqslant k) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X \geqslant k+1) \quad \text{soit} \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)$$

On calcule ainsi :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n+1} k(\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)) \text{ car } X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \text{ car } \mathbb{P}(X > n+1) = 0 \text{ et } 0 \cdot \mathbb{P}(X > -1) = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \text{ par décalage d'indice} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k)
\end{aligned}$$

(b) Les deux questions précédentes prouvent alors que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\frac{n!}{(n-k)!}$$

En inversant l'ordre de sommation, ce qui revient à remplacer l'indice k par $n-k$, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^{n-k}}\frac{n!}{k!} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{n!}{n^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}}$$

5. (a) On note $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}S_n$ la moyenne empirique des (X_n). Alors :

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - 1}{1} = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sigma(X_1)}$$

Alors, comme les (X_n) sont indépendantes et identiquement distribuées, en vertu du théorème limite central, la variable aléatoire $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. En particulier :

$$\underline{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \underline{\frac{1}{2}}$$

(b) On remarque que :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) = \mathbb{P}(S_n \leqslant n)$$

Or S_n est la somme de n variables de Poisson indépendantes toutes de paramètre 1. Donc S_n suit une loi de Poisson de paramètre n. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

Alors d'après la question précédente :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}}$$

(c) D'après la question 4.(b) :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\mathbb{E}(X) \underset{+\infty}{\sim} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{2}$$

Enfin, d'après l'équivalent de $n!$ donné dans l'énoncé :

$$n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}$$

d'où finalement :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}}$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 11

On cherche les extrema de la fonction $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2$ sous les contraintes

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \text{ et } \ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1.$$

Écrire la condition nécessaire du premier ordre pour ce système et trouver l'ensemble des points réalisant cette condition.

Solution :
On pose $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2)$, $g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 5$ et $g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \dfrac{1}{2}$ pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. La condition s'écrit : il existe deux nombres réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 \nabla g_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 \nabla g_2(x_1, x_2, x_3).$$

Soit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda_1 + \lambda_2, \\ 2x_2 & = & \lambda_1 + 2\lambda_2, \\ 6x_3 & = & \lambda_1 + 3\lambda_2, \end{array} \right.$$

En tenant compte des contraintes on trouve $\lambda_1 = 17$, $\lambda_2 = -\dfrac{28}{3}$, $x_1 = \dfrac{23}{3}$, $x_2 = -\dfrac{5}{6}$, $x_2 = -\dfrac{11}{6}$. On peut de plus montrer que c'est un minimum global sous ces contraintes.

SUJET Maths Approfondies 12

Exercice principal Maths Approfondies 12

Toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On cherche à mesurer l'indice de perméabilité θ d'un bouclier antiradiation de la manière suivante :

On expose des bactéries protégées par ce bouclier à une radiation.

Si une bactérie protégée par le bouclier est exposée à une radiation, elle subira Y bombardements de neutrons, où Y suit une loi de Poisson de paramètre $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

On observe alors la durée de survie T de la bactérie, qui, si elle a été bombardée par k neutrons, suivra une loi exponentielle de paramètre $k+1$.

Cette expérience est répétée n fois, où n est un entier supérieur ou égal à 2, et l'on suppose que $T_1, ..., T_n$ les durées de survie observées sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que T.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g : x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$. On admet que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) < 0$ et $g''(x) > 0$.

1. Question de cours : formule de l'espérance totale.
   On admet que cette formule se généralise aux variables à densité.
2. (a) Montrer que T admet une espérance que l'on exprimera en fonction de θ.
   (b) Montrer que T admet un moment d'ordre 2 et que $V(T) \leqslant 2$.
3. Déterminer la fonction de répartition de T.
4. On note alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$. Montrer qu'il est possible, à partir de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de construire une variable aléatoire $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge en probabilité vers θ.
5. (a) Soit $\alpha \in \,]\,0\,;1\,[$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébytchev, construire un intervalle de confiance pour $g(\theta)$ au niveau de confiance $1-\alpha$ à l'aide de X_n.
   (b) Proposer alors un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance $1-\alpha$.
   (c) On suppose que l'on a observé que $g(2) \leqslant X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}} \leqslant X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}} \leqslant g(1)$.
   Majorez la largeur de l'intervalle de confiance par une grandeur ne dépendant que de n et de α.

Solution :

1. Programme deuxième année page 12.
   Soit X une variable aléatoire discrète, soit (A_n) un système complet d'événements tels que, pour tout n dans N, $P(A_n) \neq 0$. Alors X admet une espérance pour P si et seulement si :
   - pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'espérance conditionnelle $E(X/A_n)$ existe ;
   - la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} E(|X|/A_n)\,P(A_n)$ converge.

   Dans ce cas, $E(X) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} E(X/A_n)\,P(A_n)$.
2. (a) On considère le système complet d'événements $(Y=n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $\mathbb{E}(|T|\,|Y=n) = \mathbb{E}(T|Y=n) = \dfrac{1}{n+1}$.
   $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}(|T|\,|Y=n)\mathbb{P}(Y=n)$ converge car $\mathbb{E}(|T|\,|Y=n)\mathbb{P}(Y=n) = \dfrac{1}{n+1}\mathbb{P}(Y=n) \leqslant \mathbb{P}(Y=n)$.
   De plus, $\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\theta}\dfrac{\theta^n}{(n+1)!} = e^{-\theta}\sum_{j=1}^{+\infty}\dfrac{\theta^{j-1}}{j!} = \dfrac{e^{-\theta}}{\theta}(e^{\theta}-1) = \dfrac{1-e^{-\theta}}{\theta}\boxed{= g(\theta).}$

(b) Pour Z suivant une loi exponentielle de paramètre a, $E(Z^2) = V(Z) + \mathbb{E}^2(Z) = \dfrac{2}{a^2} \leqslant 2$.

On utilise encore la formule des espérances totales, avec $\mathbb{E}(\left|T^2\right| |Y = n) = \dfrac{2}{(n+1)^2}$.

Ainsi $\mathbb{E}(\left|T^2\right| |Y = n)\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{2}{(n+1)^2}\mathbb{P}(Y = n) \leqslant 2\mathbb{P}(Y = n)$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}(\left|T^2\right| |Y = n)\mathbb{P}(Y = n)$ converge.

et $\mathbb{E}(T^2) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} 2\mathbb{P}(Y = n) \leqslant 2$.

Ainsi , $\boxed{V(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}^2(T) \leqslant 2.}$

3. Sans problème, si $x \leqslant 0$, $\boxed{\mathbb{P}(T \leqslant x) = 0.}$

Et si $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}(T \leqslant x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\{Y = k\} \cap \{T \leqslant x\}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}(1-e^{-(k+1)x}) = 1-e^{-\theta}e^{-x}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(\theta e^{-x})^k}{k!}$

$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ F_T(x) = 1 - \exp(-\theta - x + \theta e^{-x}).}$

4. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de VAR identiques et indépendantes admettant une espérance et une variance. D'après la loi des grands nombres, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(T) = g(\theta)$.
g étant continue et strictement décroissante, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $g(\mathbb{R}_+^*)$.

Au voisinage de 0, $g(x) = \dfrac{1 - (1 - x + o(x))}{x} = 1 + o(1)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

x	0	$+\infty$
$g(x)$	1	$\searrow$ 0

et

y	0	1
$g^{-1}(y)$	$+\infty$	$\searrow$ 0

On souhaite appliquer la fonction g^{-1} qui est continue sur $]\,0\,;1\,[$, mais n'est pas définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (or le support de T est bien $\mathbb{R}_+^*$).

On construit donc $\boxed{h : y \mapsto \begin{cases} g^{-1}(y) & \text{si } y \in\,]\,0\,;1\,[\\ 0 & \text{si } y \geqslant 1 \end{cases}.}$

On a bien $h(g(\theta)) = g^{-1}(g(\theta))$ car $g(\theta) \in\,]\,0\,;1\,[$.
h est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi comme X_n converge en probabilités vers $g(\theta)$, $h(X_n)$ converge en probabilité vers $h(g(\theta))$.

$\boxed{h(X_n) \text{ converge en probabilités vers } \theta.}$

5. (a) Á l'aide de Bienaymé-Tchébytchev, on a $\forall\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$.

Ainsi $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \dfrac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$.

Or, $\mathbb{E}(X_n) = g(\theta)$ (linéarité) et $V(X_n) = \dfrac{V(T)}{n} \leqslant \dfrac{2}{n}$ (indépendance des variables)

Ainsi $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \dfrac{2}{n\varepsilon^2}$.

On cherche ε vérifiant $\dfrac{2}{n\varepsilon^2} = \alpha$ ssi $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}$.

Ainsi, $\mathbb{P}\left(g(\theta) \in \left]\, X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\,; X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\,\right[\right) \geqslant 1 - \alpha$.

Comme on sait que $g(\theta) \in\,]\,0\,;1\,[$, on peut proposer comme intervalle de confiance pour $g(\theta)$ au niveau de confiance $1 - \alpha$:

$$\boxed{\left]\max\left(X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}, 0\right)\,;\min\left(X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}, 1\right)\right[.}$$

(b) On redonne le tableau de variation de g.

	0	$+\infty$
$g(x)$	1	$\searrow$ 0

- $g(\theta) > 0$ ou $g(\theta) < 1$ ne donne aucune information ne donne aucune information sur θ.

- Quand $X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}} > 0$, $g(\theta) > X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}$ ssi $\theta < g^{-1}\left(X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right)$
- Quand $X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}} < 1$, $g(\theta) < X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}$ ssi $\theta > g^{-1}\left(X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right)$

Ainsi $g(\theta) \in \left]\max\left(X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}, 0\right) ; \min\left(X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}, 1\right)\right[$ ssi $\theta \in \left] h\left(X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right) ; h\left(X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right)\right[$
avec la convention $h(y) = +\infty$ si $y \leqslant 0$, $h(y) = g^{-1}(y)$ si $y \in]\,0\,;1\,[$ et $h(y) = 0$ si $y \geqslant 1$
Ainsi on peut proposer comme intervalle de confiance pour θ

$$\boxed{\left] h\left(X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right) ; h\left(X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right)\right[}$$

(c) On suppose $0 < g(2) \leqslant X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}} \leqslant X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}} \leqslant g(1) < 1$.

Avec les hypothèses données, $h(t) = g^{-1}(t)$ pour tout $t \in \left] X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}} ; X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right[$.

On cherche donc à majorer $\left| g^{-1}\left(X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right) - g^{-1}\left(X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right)\right|$.

On souhaite appliquer l'inégalité des accroissements finis à g^{-1} sur cet intervalle.
g étant dérivable et g' ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$, g^{-1} est dérivable sur $]\,0\,;1\,[$, et $(g^{-1})' = \dfrac{1}{g' \circ g^{-1}}$.
Or, g^{-1} est une fonction strictement décroissante sur $]\,0\,;1\,[$, g' est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $g' \circ g^{-1}$ est strictement décroissante et $(g^{-1})'$ est strictement croissante.
Mais $\left|(g^{-1})'\right| = -(g^{-1})'$ car $(g^{-1})' < 0$.
Donc $\left|(g^{-1})'\right|$ est strictement décroissante.
Ainsi $\forall t \in \left] X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}} ; X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right[$, $t \geqslant g(2)$,

donc $\left|(g^{-1})'(t)\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{g'(g^{-1}(g(2)))}\right| \leqslant \dfrac{1}{g'(2)} = \left|\dfrac{4}{6e^{-2} - 1}\right| = \dfrac{4e^2}{e^2 - 6}$.
Ainsi avec l'IAF :

$$\left| g^{-1}\left(X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right) - g^{-1}\left(X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right)\right| \leqslant \dfrac{4e^2}{e^2 - 6}\left| X_n + \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}} - \left(X_n - \sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}\right)\right|.$$

La largeur de l'intervalle de confiance est majorée par $\boxed{\dfrac{4e^2}{e^2 - 6}\sqrt{\dfrac{2}{n\alpha}}.}$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 12

Le déterminant d'une matrice 2×2, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est par définition $\det(M) = ad - bc$. On a pour deux matrices M et N, $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.
Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées 2×2 et on considère $\chi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ l'application qui à une matrice M associe $(\mathrm{Tr}(M), \det(M))$.

1. Montrer que χ est surjective. Est-elle injective ?
2. On suppose que M est diagonalisable, exprimer $\chi(M)$ à l'aide de ses valeurs propres.
3. Déterminer $\chi^{-1}(0,0)$.

Solution :

1. Si $(t, \delta) \in \mathbb{R}^2$, la matrice $\begin{pmatrix} t & -\delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour image (t, δ).

   χ n'est pas injective, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même image.
2. On a $\chi(M) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2)$.
3. En remarquant que les vecteurs colonnes doivent être colinéaires, on trouve que

$$\chi^{-1}(0,0) = \{\alpha \begin{pmatrix} \beta & -\beta^2 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

SUJET Maths Approfondies 13

Exercice principal Maths Approfondies 13

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[x]$.
On note d l'application dérivation $d : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$

1. Question de cours : théorème du rang.
2. (a) Déterminer Ker (d^j) pour $j \in \mathbb{N}^*$.
   (b) On note pour $n \in \mathbb{N}$, d_n la restriction de d à $\mathbb{R}_n[x]$. Pour quelle valeur de n d_n est-il un endomorphisme diagonalisable ?

   Soit f un endomorphisme de E, k et m deux entiers de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $f^k = d^m$.
3. (a) Montrer que f est un endomorphisme surjectif de E.
   (b) f est-il injectif ?
4. Soit $p \in [\![1, k]\!]$
   (a) Montrer que Ker (f^p) est de dimension finie.
   On note f_p la restriction de f à Ker (f^p).
   (b) Montrer que Im $(f_p) =$ Ker (f^{p-1}).
   (c) Montrer que $\dim($ Ker $(f^p)) = \dim($ Ker $(f)) + \dim($ Ker $(f^{p-1}))$.
5. Exprimer $\dim($ Ker $(f))$ à l'aide de k et de m.
6. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k et m pour qu'il existe un endomorphisme de E vérifiant $f^k = d^m$.
7. On suppose dans cette question que E est un espace vectoriel de dimension finie et g est un endomorphisme diagonalisable. Soient k et m deux entiers naturels de $\mathbb{N}^*$ fixés.
   Montrer que si pour tout endomorphisme f de E, $f^k \neq g^m$ alors k est pair et m est impair.

Solution :

1. Programme première année page 16.
2. (a) d est sans problème un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   Et pour $P \in E$, $d^j(P) = 0$ ssi $P^{(j)} = 0$ ssi $P \in \mathbb{R}_{j-1}[x]$.
   $\boxed{\text{Ker } (d^j) = \mathbb{R}_{j-1}[x].}$
   (b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $P \in$ Ker $(d_n - \lambda Id)$ ssi $P' = \lambda P$.
   Si λ et P sont non nuls, on aurait $\deg(P) = \deg(P')$ ce qui est exclu.
   Donc la seule valeur propre de P possible est 0.
   Donc d est diagonalisable ssi d est une homothétie ssi $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P' = 0$.
   C'est vrai pour $n = 0$, $\boxed{d_n \text{ est diagonalisable ssi } n = 0.}$
   Remarque : on peut aussi donner la matrice de d_n dans la base canonique.
3. (a) d est bien surjective : $\forall P \in E$, si l'on note $Q : x \mapsto \displaystyle\int_0^x P(t)\,dt$ un primitive de P, $d(Q) = Q' = P$, donc d est surjective.
   Donc d^m est elle aussi surjective (on peut le montrer par récurrence)
   Donc f^k est surjective.
   Or, si $P \in$ Im (f^k), $\exists Q \in E$ tel que $P = f^k(Q) = f(f^{k-1}(Q)) \in$ Im (f), donc Im $(f^k) \subset$ Im (f).
   Donc Im $(f) = E$ et $\boxed{f \text{ est surjective}}$

(b) Attention, on ne peut pas utiliser le théorème du rang ici, car la dimension de E n'est pas finie.
Si f était injective, on aurait f^k qui serait aussi injective.
En effet, si l'on suppose f injective :
si $Q \in \text{ Ker }(f^k)$, $f^k(Q) = 0$ donc $f^{k-1}(Q) = 0$, donc ....$Q = 0$.
Ainsi $f^k = d^m$ est injective. Or, $\text{ Ker }(d^m) = \mathbb{R}_{m-1}[x]$. C'est absurde.
$\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$

4. (a) Comme $p \leqslant k$, $\text{ Ker }(f^p) \subset \text{ Ker }(f^k) = \text{ Ker }(d^m) = \mathbb{R}_{m-1}[x]$.
$\boxed{\text{Ker }(f^p) \text{ est un espace de dimension finie.}}$

(b) On va procéder par double inclusion :
• Si $y \in \text{ Im }(f_p)$, il existe $x \in \text{ Ker }(f^p)$ tel que $f_p(x) = f(x) = y$
Mais alors, $f^{p-1}(y) = f^p(x) = 0$ et $\text{ Im }(f_p) \subset \text{ Ker }(f^{p-1})$.
• Si $y \in \text{ Ker }(f^{p-1})$, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Mais, $f^{p-1}(y) = f^p(x) = 0$, donc $x \in \text{ Ker }(f^p)$ et $y \in \text{ Im }(f_p)$.
$\boxed{\text{Im }(f_p) = \text{ Ker }(f^{p-1})}$

(c) On va appliquer le théorème du rang à f_p
• Son espace de départ est $\text{ Ker }(f^p)$
• $\text{ Ker }(f_p) = \{x \in \text{ Ker }(f^p) \text{ tel que } f_p(x) = 0\} = \{x \in \text{ Ker }(f^p) \text{ tel que } f(x) = 0\}$
Ainsi $\text{ Ker }(f_p) = \text{ Ker }(f^p) \cap \text{ Ker }(f) = \text{ Ker }(f)$.
On obtient bien $\boxed{\dim(\text{ Ker }(f^p)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{ Ker }(f^{p-1})}$

5. Ainsi par récurrence limitée immédiate, $\dim(\text{ Ker }(f^p)) = p\dim(\text{ Ker }(f))$ pour tout $p \in [|1, k|]$
Donc $\dim(\text{ Ker }(f^k)) = k\dim(\text{ Ker }(f))$. Or, $\dim(\text{ Ker }(f^k)) = \dim(\text{ Ker }(d^m)) = m$
$\boxed{\dim(\text{ Ker }(f)) = \frac{m}{k}}$

6. D'après 5., si il existe un endomorphisme f de E vérifiant $f^k = d^m$ alors $\dfrac{m}{k}$ est un entier (ie k divise m)
Mais réciproquement, si k divise m, il suffit de poser $f = d^{\frac{m}{k}}$, cet endomorphisme de E vérifie $f^k = d^m$.
$\boxed{\text{Il existe un endomorphisme } f \text{ de } E \text{ vérifiant } f^k = d^m \text{ ssi } k \text{ divise } m.}$

7. Par contraposée. On suppose que m est pair ou k est impair.
Il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres où g est représenté par $\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
g^m est représenté dans cette base par $\text{diag}(\lambda_1^m, ..., \lambda_n^m)$.
• Si m est paire $\forall j \in [|1, n|]$, $\lambda_j^m \geqslant 0$.
On pose alors f l'endomorphisme représenté dans $\mathcal{B}$ par $diag(\mu_1, ..., \mu_n)$ où $\mu_j = \sqrt[k]{\lambda_j^m} = (\lambda_j^m)^{1/k}$.
• si k et m sont impairs, on a de même poser :
$\mu_j = \sqrt[k]{\lambda_j^m}$.
(le programme ne définissant pas vraiment $\sqrt[k]{\ }$, on peut proposer $\mu_j = -\sqrt[k]{-\lambda_j^m}$ dans le cas où $\lambda_j < 0$)
Il existe donc un endomorphisme f de E tel que $f^k = g^m$.
$\boxed{\text{Si pour tout endomorphisme } f \text{ de } E\ f^k \neq g^m, \text{ alors } m \text{ est impair et } k \text{ est pair}}$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 13

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X+Y+1 & X-Y-1 \\ X-Y+1 & X+Y-1 \end{pmatrix}$$

On suppose que $\mathbb{P}(\text{« } A \text{ diagonalisable »}) = 0$. Montrer que X est Y ont la même loi.

Solution :
Les valeurs propres de A sont $2X$ et $2Y$. Si $X \neq Y$, A est diagonalisable car ces deux valeurs propres sont simples. Donc $\{X \neq Y\} \subset \{A \text{ diagonalisable}\}$. Il en résulte que

$$P(X \neq Y) = 0.$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} P(Y \leqslant x) & = & P(Y \leqslant x \text{ et } Y = X) \cup (Y \leqslant x \text{ et } Y \neq X) \\ & = & P(Y \leqslant x \text{ et } Y = X) + P(Y \leqslant x \text{ et } Y \neq X) \\ & = & P(Y \leqslant x \text{ et } Y = X) \text{ car } P(Y \leqslant x \text{ et } Y \neq X) \leqslant P(Y \neq X) = 0, \\ & = & P(X \leqslant x \text{ et } X = Y) \\ & = & \boxed{P(X \leqslant x).} \end{array}$$

On conclut que X et Y ont la même loi.

SUJET Maths Approfondies 14

Exercice principal Maths Approfondies 14

1. Donner la définition d'un estimateur.
2. On souhaite effectuer un sondage sur le taux d'abstention p dans une population de N individus. On a :

$$p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

où chaque y_i désigne le choix de l'individu i ($y_i = 0$: vote, $y_i = 1$: abstention).
On choisit n individus au hasard parmi les N et on note $(Y_1, ..., Y_n)$ l'échantillon de leurs réponses obtenues.
On supposera que les Y_i suivent des loi de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

(a) Montrer que

$$\sigma^2 = V(Y_1) = p(1-p) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - p)^2$$

(b) On note $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe une constante c_α à déterminer telle

$$p \in [S_n - c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, S_n + c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

avec une probabilité supérieure à $1-\alpha$ pour n assez grand.

3. Pour améliorer le sondage, on répartit la population en H groupes homogènes (par exemple suivant la classe sociale des individus). On note N_h le cardinal du groupe $h \in \{1, ..., H\}$. On effectue à l'intérieur de chaque groupe le sondage auprès de n_h personnes (estimateur noté S_{n_h} du taux d'abstention exact p_h). On note $\sigma_h^2 = p_h(1-p_h)$ et

$$S_n^H = \sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N} S_{n_h}$$

Calculer $V(S_n^H)$ en fonction des données.

4. Calculer la quantité

$$\sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N}\sigma_h^2 + \sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N}(p_h - p)^2$$

en fonction des données.

5. On note

$$\eta^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N}(p_h - p)^2$$

En supposant le rapport $\frac{n_h}{N_h}$ constant, exprimer $V(S_n^H)$ en fonction de σ^2, n et η.
Montrer que $V(S_n^H)$ est très petit devant $V(S_n)$ lorsque p_h est proche de 0 ou de 1. Commenter.

Solution :

1. cours p22 EC2 appo
2. (a) La relation demandée s'obtient aisément en développant la somme et en remarquant que $y_i^2 = y_i$.

(b) Le théorème central limite assure que $\sqrt{n}\frac{S_n - p}{\sigma}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, on trouve aisément qu'il suffit de choisir c_α tel que $c_\alpha > \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

3. On trouve que
$$\mathbb{V}(S_n^H) = \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \mathbb{V}(S_{n_h}) = \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \frac{\sigma_h}{n_h}$$

4. On a
$$\sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N}\sigma_h^2 + \sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N}(p_h - p)^2 = \sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N}\left(-p_h^2 + p_h + (p_h - p)^2\right)$$
soit
$$\sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N}\sigma_h^2 + \sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N}(p_h - p)^2 = \sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N}(p^2 + p_h(1-2p)) = p^2 + p(1-2p) = \sigma^2$$

5. On a
$$\mathbb{V}(S_n^H) = \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \frac{\sigma_h^2}{n_h} = \sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N}\sigma_h^2 \frac{N_h}{N n_h} = \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N}\sigma_h^2 = \frac{1}{n}\sigma^2(1-\eta^2)$$

Ainsi $\mathbb{V}(S_n^H)$ est très petit devant $\mathbb{V}(S_n)$ lorsque η est proche de 1, c'est à dire lorsque le terme σ_h est petit, soit encore p_h proche de 0 ou de 1 (ie les groupes sont homogènes).

Exercice sans préparation Maths Approfondies 14

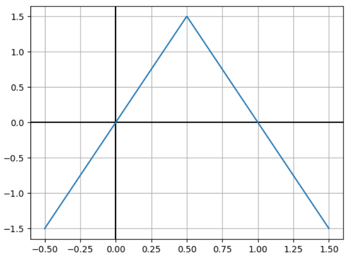
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 3(1-x) & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de F sur $[-1, 2]$. .
2. On définit une suite réelle $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par $x_0 = a \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = F(x_n)$.
   (a) Que dire de la suite (x_n) si elle est convergente ?
   (b) Que dire de la suite (x_n) si elle est bornée ?

Solution :

1. La fonction F est affine par morceaux :



2. (a) Comme la fonction F est continue, si (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, par passage à la limite $F(\ell) = \ell$.
   Pour $\ell \leqslant \dfrac{1}{2}$, $F(\ell) = 3\ell$ d'où $\ell = 0$.
   Pour $\ell > \dfrac{1}{2}$, $F(\ell) = 3(1-\ell)$ d'où $\ell = \dfrac{3}{4}$.
   Ainsi, sous réserve de convergence, les limites possibles pour (x_n) sont 0 et $\dfrac{3}{4}$.
   On va montrer que si la suite (x_n) converge, elle est nécessairement stationnaire.
   On suppose d'abord que (x_n) est convergente de limite nulle. Alors, nécessairement :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad x_n < \frac{1}{2}$$

   Alors, pour $n > n_0$, $x_n = F(x_{n-1}) = 3x_{n-1}$ et par une récurrence descendante immédiate : $x_n = 3^{n-n_0} x_{n_0}$. Or $\lim\limits_n 3^{n-n_0} = +\infty$ donc nécessairement : $x_{n_0} = 0$ et donc : $\forall n \geqslant n_0 \quad x_n = 0$.
   Si (x_n) est convergente de limite $3/4$, le même raisonnement s'applique de manière symétrique. Par définition de la limite :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad x_n > \frac{1}{2}$$

   Alors, pour $n > n_0$:

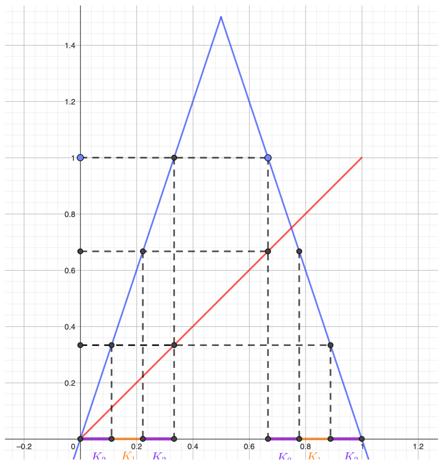
$$x_n - \frac{3}{4} = 3(1 - x_{n-1}) - \frac{3}{4} = -3\left(x_{n-1} - \frac{3}{4}\right)$$

   Par une récurrence descendante, on en déduit que, pour $n \geqslant n_0$: $\left|x_n - \dfrac{3}{4}\right| = 3^{n-n_0}\left|x_{n_0} - \dfrac{3}{4}\right|$. Comme précédemment, $\lim\limits_n 3^{n-n_0} = +\infty$ donc nécessairement : $x_{n_0} = \dfrac{3}{4}$ et donc $x_n = \dfrac{3}{4}$ pour $n \geqslant n_0$.
   Dans tous les cas, la suite (x_n) est stationnaire.

(b) La réponse attendue est que nécessairement : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in [0,1]$.
Pour montrer cela, il suffit de remarquer que $F(\mathbb{R}_-^*) \subset \mathbb{R}_-^*$.
Par une récurrence immédiate, on en déduit que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} < 0$, alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $x_n < 0$ d'où finalement $x_n = 3^{n-n_0} x_{n_0}$ et donc $\lim\limits_n x_n = -\infty$. La suite (x_n) n'est donc pas bornée.
De même, on remarque que $F([1,+\infty[) \subset \mathbb{R}_-^*$ et donc s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} > 1$, alors $x_{n_0+1} = F(x_0) < 0$ et on est donc ramené au cas précédent : la suite n'est pas bornée.
Ainsi, <u>la suite est bornée si et seulement si elle est à valeurs dans $[0,1]$</u>.

Question supplémentaire : On pourra demander au candidat si l'intervalle $[0,1]$ est stable par F. La réponse est non, et il est donc naturel de se poser ensuite la question des valeurs de x_0 pour lesquelles la suite (x_n) est effectivement bornée.

Ce sont exactement les x_0 qui sont dans l'ensemble de Cantor et on ne s'attend bien sûr pas à ce qu'un candidat donne cette réponse. Mais on peut tenter de repérer ceux qui comprennent ce qui se passe sur le dessin et commencent à construire l'ensemble des valeurs possibles sur le dessin de la courbe de F.



On a bien sûr $x_0 \in [0,1]$ par la question précédente.

Pour le terme suivant, $x_1 = F(x_0) \in [0,1]$ si et seulement si $x_0 \in K_1 = F^{-1}([0,1]) = [0,1/3] \cup [2/3,1]$ comme on le voit sur le dessin.

Ensuite $x_2 = F(x_1) \in [0,1]$ si et seulement si $x_1 = F(x_0) \in K_1$ par ce qui précède et donc si et seulement $x_0 \in K_2$ où $K_2 = F^{-1}(K_1)$. En regardant le dessin, à défaut de faire le calcul, on peut se convaincre que :

$$K_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$$

On définit ainsi une suite décroissante $(K_n)_{n \geqslant 0}$ de parties de $[0,1]$ avec $K_{n+1} = F^{-1}(K_n)$ et l'ensemble cherché est exactement $\bigcap\limits_{n \geqslant 0} K_n$.

On peut espérer qu'un candidat ayant fait le dessin et la construction pour K_1 et K_2 soit en mesure d'expliquer ensuite le processus général sans formalisation excessive.

SUJET Maths Approfondies 15

Exercice principal Maths Approfondies 15

Dans tout l'exercice n désigne un entier non nul et S une matrice symétrique réelle à *coefficients strictement positifs*.
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S rangées dans l'ordre décroissant *i.e.* $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$.
Pour toute valeur propre λ de S on note $E_\lambda(S)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ et on pose

$$\rho = \max\Big\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\Big\}$$

L'objectif principal de l'exercice est d'établir que ρ est une valeur propre de S, que $E_\rho(S)$ est de dimension égale à 1 et est engendré par un vecteur propre à composantes toutes strictement positives.

1. Question de cours : réduction des endomorphismes symétriques.

2. Vérifier le résultat principal annoncé ci-dessus dans le cas particulier où $n = 2$ et :

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $(a, b) \in]0, +\infty[^2$.

3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne tel que ${}^tXX = 1$ (où ${}^tX$ désigne la transposée de X).

(a) Etablir que : ${}^tXSX \leqslant \lambda_1$ et montrer l'équivalence : ${}^tXSX = \lambda_1 \iff X \in E_{\lambda_1}(S)$.

(b) On note $|X|$ le vecteur colonne dont les composantes sont les valeurs absolues de celles de X.
Montrer l'inégalité $\left|{}^tXSX\right| \leqslant {}^t|X|\,S\,|X|$ puis l'égalité $\rho = \lambda_1$.

4. Montrer que si V est un vecteur propre associé à la valeur propre ρ alors il en est de même de $|V|$ et que toutes ses composantes sont strictement positives.

5. Conclure.

Solution :

1. Cours EC2 p17
2. Si $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Sp}(S) = \{a + b, a - b\}$ et $E_{a+b}(S) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les réels a et b étant strictement positifs on a $\rho = a + b$ et on obtient le résultat attendu.

3. a)La matrice S étant symétrique il existe une base orthonormée $(E_1, \dots, E_n)$ de vecteurs colonnes propres de S associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Si $X = \sum_{k=1}^{n} x_k E_k$ alors ${}^tXSX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \leqslant \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \lambda_1^t XX = \lambda_1$ du fait que ${}^tXX = 1$.

Bilan :

$${}^tXSX \leqslant \lambda_1$$

Montrons l'équivalence : ${}^tXSX = \lambda_1 \iff X \in E_{\lambda_1}(S)$.

• Si $X \in E_{\lambda_1}(S)$ alors ${}^tXSX =^t X\lambda_1 X = \lambda_1 \, {}^tXX = \lambda_1$.

• Si ${}^tXSX = \lambda_1$ alors avec les notations ci-dessus on a : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 = \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et cette égalité n'est possible que si $x_i = 0$ pour tout entier i tel que $\lambda_i \neq \lambda_1$ du fait que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$.

Bilan :

$${}^tXSX = \lambda_1 \iff X \in E_{\lambda_1}(S)$$

b) D'après l'inégalité triangulaire et du fait de la positivité des coefficients de la matrice S on a :

$$|{}^tXSX| \leqslant |{}^tX|S|X| \leqslant \lambda_1$$

La dernière inégalité découle de la question précédente en remarquant que $|X|$ est encore un vecteur colonne de norme 1.

En prenant pour X un vecteur unitaire associé à la valeur propre λ on obtient

$$|\lambda| \leqslant \lambda_1$$

et donc

$$\rho = \lambda_1$$

4. Soit V un vecteur propre associé à la valeur propre ρ.
D'après ce qui précède, si V est unitaire on a

$$|\rho| \leqslant |{}^tV|S|V| \leqslant \rho$$

et donc

$$|{}^tV|S|V| = \rho$$

D'après le résultat de la question 3a) il apparait ainsi que si V est vecteur propre associé à la valeur propre ρ alors $|V|$ aussi.
Montrons alors que toutes ses composantes sont non nulles.
Supposons par l'absurde que la composante $|v_i|$ soit nulle. L'égalité $S|V| = \rho|V|$ conduit à :

$$\sum_{k \neq i} s_{ik}|v_k| = 0$$

et implique $|v_k| = 0$ pour tout k du fait de la positivité stricte des coefficients de S.
On aurait ainsi $V = 0$ ce qui est absurde.
Le résultat attendu en résulte.

5. Soient V et V' deux vecteurs propres associés à la valeur propre ρ.
D'après ce qui précède toutes les composantes de ces vecteurs sont non nulles et si on pose

$$k = \frac{v_1'}{v_1}$$

alors $V' - kV \in E_\rho(S)$ et possède une composante nulle. Il s'agit donc du vecteur nul et on a ainsi finalement l'égalité :

$$V' = kV$$

Il s'ensuit que :

$$\dim(E_\rho(S)) = 1$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 15

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

1. Montrer que pour tout k compris entre 0 et n,

$$P(X = k-1) \leq P(X = k) \Longleftrightarrow k \leq np + p$$

2. On dit que $m \in \{0, ..., n\}$ est un mode de X si $P(X = m)$ est maximal. Montrer que $m = \lfloor np + p \rfloor$ est un mode de X (où $\lfloor x \rfloor$) désigne la partie entière de x).
3. Après une alerte incendie, les 60 élèves d'une école se répartissent au hasard dans 5 salles de classe $C1$ à $C5$. Combien d'élèves a t-on le plus de chance de trouver dans la salle $C5$?

Solution :

a) On a si $1 \leq k \leq n$:

$$P(X = k-1) = \left(\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right) p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}$$

et

$$P(X = k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^{k}(1-p)^{n-k}$$

La condition $P(X = k-1) \leq P(X = k)$ est alors équivalente après simplifications à

$$\frac{1-p}{n-k+1} \leq \frac{p}{k}$$

soit exactement $k \leq np + p$.

b) Par contraposition, on a

$$P(X = k-1) > P(X = k) \Longleftrightarrow k > np + p$$

ou, si on raisonne dans la première inégalité avec des inégalités strictes,

$$P(X = k-1) \geq P(X = k) \Longleftrightarrow k \geq np + p$$

Or, $m_0 = \lfloor np + p \rfloor$ est tel que $m_0 \leq np + p$ et $m_0 + 1 > np + p$, ce qui indique que $P(X = m_0)$ correspond bien à une valeur maximale.

c) Ici $n = 60$, $p = \dfrac{1}{5}$. On a donc un unique mode $m = np$. Le nombre le plus probable d'élèves par classe sera donc de 12.

SUJET Maths Approfondies 16

Exercice principal Maths Approfondies 16

On suppose que $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est telle que :

$$\exists \alpha \in]0,1],\ \exists K \geqslant 0,\ \forall (y,z) \in [0,1]^2,\ |f(y)-f(z)| \leqslant K|y-z|^{\alpha}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme :

$$B_n f(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

1. Enoncer le théorème de transfert
2. Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre x. On pose
$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$
Exprimer $E(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$ et $E(f(S_n))$ en fonction de x, n et du polynôme $B_n f$.
3. En déduire les inégalités :
$$\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \mathbb{V}(S_n)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
4. Soit $\alpha \in [0,1]$. Montrer que $\lambda^{\alpha} \leq 1+\lambda$ pour tout réel $\lambda > 0$ et en déduire l'inégalité :
$$\left|x-\frac{k}{n}\right|^{\alpha} \leqslant n^{-\alpha/2}\left(1+\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)$$
pour tous $x \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0,...,n\}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$|f(x) - B_n f(x)| \leqslant \frac{3K}{2}\frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

Solution :

1. La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi binomiale de paramètres n et x.
$$P(S_n = \frac{k}{n}) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$
Puisque les variables ont la même loi, on a
$$E(S_n) = E(X_\ell) = x.$$
Puisque les variables sont deux à deux indépendantes, on a aussi :
$$\mathbb{V}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = nx(1-x).$$
D'où
$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{x(1-x)}{n}.$$
Par le théorème de transfert on a aussi :
$$E(f(S_n)) = B_n f(x).$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n}|x-\frac{k}{n}|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\mathbb{E}\left(|x-S_n|\right)\leqslant\sqrt{\mathbb{E}\left((x-S_n)^2\right)}=\mathbb{V}(S_n))^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbb{V}(S_n))^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. On sépare le cas $\lambda \leq 1$ (trivial) du cas $\lambda \geq 1$ (pour lequel $\lambda \geq \lambda^\alpha$). En choisissant $\lambda = \sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|$ dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité :

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|^\alpha \leqslant n^{-\alpha/2}\left(1+\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)$$

4.
$$\begin{aligned}
|f(x)-B_nf(x)| &= |E(f(x)-f(S_n))| = |\sum_{k=0}^{n}(f(x)-f(\frac{k}{n}))\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}|,\\
&\leqslant |\sum_{k=0}^{n}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\\
&\leqslant K\sum_{k=0}^{n}|x-\frac{k}{n}|^\alpha\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\\
&\leqslant Kn^{-\alpha/2}[\sum_{k=0}^{n}(1+\sqrt{n}|x-\frac{k}{n}|)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}]\\
&\leqslant Kn^{-\alpha/2}(1+\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}|x-\frac{k}{n}|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k})\\
&\leqslant \frac{3}{2}Kn^{-\alpha/2}.
\end{aligned}$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 16

Déterminer toutes les fonctions continues $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$.

Solution :

1. Demander un dessin
2. Soit f une fonction solution. Puisque $f \circ f = \mathrm{Id}$, la fonction f réalise une bijection entre $[0, +\infty[$ et $\mathrm{Im}\ f$; elle est même sa propre réciproque, assurant que $\boxed{\mathrm{Im}\ f = [0, +\infty[}$.
3. Puisqu'elle est continue, elle est nécessairement $\boxed{\text{strictement monotone}}$ sur $[0, +\infty[$. En effet si par exemple il existe a, b, c tels que $a < b < c$, $f(a) < f(b)$ et $f(c) > f(b)$, tout α élément de $]\max(f(a), f(c)), f(b)[$ aurait au moins deux antécédent par le TVI, c'est absurde.
4. Si f était strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, elle ne pourrait être surjective sur $[0, +\infty[$. Elle est donc $\boxed{\text{strictement croissante.}}$
5. Soit $x \in [0, +\infty[$.
   Supposons que $f(x) < x$. Par stricte croissance de f, on a : $x = f(f(x)) < f(x) < x$, ce qui est absurde.
   On obtient une absurdité similaire en supposant $f(x) > x$. On en déduit que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0, +\infty[$, i.e. $\boxed{f = \mathrm{Id}\,.}$
6. Puisque $\boxed{\text{l'application Id convient}}$ (elle est continue et vérifie l'équation fonctionnelle $f \circ f = \mathrm{Id}$) c'est la seule fonction solution.

SUJET Maths Approfondies 17

Exercice principal Maths Approfondies 17

Soit λ une constante réelle strictement positive. On cherche une densité f (d'une variable aléatoire réelle) vérifiant : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) = \lambda f(\sqrt{x^2+y^2})$$

1. Question de cours : rappeler la définition d'une variable aléatoireà densité.
2. Montrer que $f(0) = \lambda$.
3. Montrer que f est paire.
4. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a
$$xf(x)f'(y) - yf'(x)f(y) = 0.$$
5. Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = f(\sqrt{x})$ pour tout $x > 0$. Montrer que h est solution de l'équation
$$h(x) + \alpha h'(x) = 0 \text{ pour tout } x > 0,$$
où α est une constante réelle.
6. Trouver l'expression de f.

Solution :

1. p12 mathématiques approfondies de seconde année
2. Montrons d'abord que $f(0) \neq 0$. Par l'absurde, si $f(0) = 0$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(|x|) = 0$ (en prenant x quelconque et $y = 0$ dans l'identité). Donc $f(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = \lambda f(\sqrt{2x^2}) = 0$. On en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ce qui est une contradiction car f est une densité.
Ensuite, en prenant $x = y = 0$, on en déduit que $f(0)^2 = \lambda f(0)$. Donc $f(0) = \lambda$.
3. En choisissant $y = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(0) = \lambda f(|x|)$. D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(|x|)$. Ainsi, f est paire.
4. En dérivant l'identité par rapport à x et y en $(x,y) \neq (0,0)$ on obtient
$$f'(x)f(y) = \lambda \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f'(\sqrt{x^2+y^2}),\ f(x)f'(y) = \lambda \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} f'(\sqrt{x^2+y^2}).$$
D'où $xf'(x)f(y) - yf(x)f'(y) = 0$. Par continuité, cette égalité reste vraie quand $(x,y) = (0,0)$.
5. Puisque f est de classe C^1, h est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. De plus, on a $f(x) = h(x^2)$ pour tout $x > 0$. Donc, $f'(x) = 2xh(x^2)$ et en remplaçant dans l'équation précédente on obtient :
$$\forall x > 0, \forall y > 0,\ \ h(x^2)h'(y^2) - h'(x^2)h(y^2) = 0.$$
ou encore
$$\forall x > 0, \forall y > 0,\ h(x)h'(y) - h'(x)h(y) = 0.$$
Etant donné que f est une densité et qu'elle est paire, elle ne peut être constante sur $]0, +\infty[$. Il existe donc $t_0 > 0$ tel que $f'(t_0) \neq 0$. En choisissant $y_0 = t_0^2$, on a $h'(y_0) \neq 0$ et
$$\forall x > 0,\ h(x) + \alpha h'(x) = 0,$$
où on a posé $\alpha = -\dfrac{h(y_0)}{h'(y_0)}$.

6. En résolvant l'équation précédente, on obtient

$$h(x) = Ae^{-\alpha x} \text{ pour } x > 0.$$

Ainsi, f est de la forme $f(x) = Ae^{-\alpha x^2}$ pour $x > 0$. Par continuité en 0 et par parité de f cette expression reste vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il reste à déterminer la constante A qui est forcément non nulle et la constante α. Pour ce faire, on remplace dans l'équation de départ. On a alors

$$Ae^{-\alpha x^2} Ae^{-\alpha y^2} = \lambda Ae^{-\alpha(x^2+y^2)}.$$

Donc $A = \lambda$. Pour déterminer α, on utilise le fait que f est une densité de probabilité. Ainsi, on a doit avoir $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. Forcément $\alpha > 0$ (sinon l'intégrale diverge). Ainsi f est la densité d'une loi normale centrée. De plus, en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{2\alpha}t$, alors $u^2/2 = \alpha t^2$ et l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{\lambda}{\sqrt{2\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Il en résulte que

$$\alpha = \pi\lambda^2.$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = \lambda e^{-\pi\lambda^2 x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}.$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 17

Soit X une variable aléatoire centrée admettant une variance notée σ^2.

1. Montrer que
$$\forall\,(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \qquad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + b^2}{(a+b)^2}.$$
2. Montrer que
$$\forall\, a \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

Solution :

1. Soit a et b deux réels strictement positifs. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on a l'inclusion
$$[X \geqslant a] \subset [(X+b)^2 \geqslant (a+b)^2].$$
Par croissance de la probabilité,
$$P(X \geqslant a) \leqslant P\left((X+b)^2 \geqslant (a+b)^2\right).$$
Par l'inégalité de Markov appliquée à la variable $(X+b)^2$,
$$P(X \geqslant a) \leqslant P\left((X+b)^2 \geqslant (a+b)^2\right) \leqslant \frac{E((X+b)^2)}{(a+b)^2}.$$
Par linéarité de l'espérance,
$$E((X+b)^2 = E(X^2) + 2bE(X) + b^2 = \sigma^2 + b^2$$
puisque $E(X) = 0$.
2. Soit $f : b \mapsto \dfrac{\sigma^2 + b^2}{(a+b)^2}$. Une étude de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ montre qu'elle atteint son minimum en $b = \dfrac{\sigma^2}{a}$. En appliquant le résultat de la première question en ce point, on trouve l'inégalité demandée.

SUJET Maths Approfondies 18

Exercice principal Maths Approfondies 18

Soient a un réel strictement positif et $x_1, ..., x_n$ une famille de n réels strictement positifs tels que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$

On veut montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^a \geq n^{1-a}(n^2+1)^a \tag{1}$$

1. Donner la condition nécessaire d'existence d'un extremum pour une fonction de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sous contraintes d'égalités linéaires.
2. Montrer l'inégalité (1) lorsque $n = 1$.
3. Soit $n \geq 2$. On note $U =]0,1[^n$ et F l'application de U dans $\mathbb{R}$ telle que

$$F(t_1, ..., t_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(t_k + \frac{1}{t_k} \right)^a$$

   Montrer que si $(x_1, ..., x_n) \in U$ est un extremum pour F sous la contrainte linéaire $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^{a-1} \left(-1 + \frac{1}{x_k^2} \right) = \lambda$$

4. On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ telle que

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^{a-1} \left(-1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

   Montrer que f établit une bijection strictement décroissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. En déduire que F possède au plus un extremum sur U sous la contrainte $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$ qu'on déterminera.
6. Montrer l'inégalité (1) dans le cas général.

Solution :

1. p20 EC2
2. Lorsque $n = 1$, on a $2^a \geq 2^a$.
3. On calcule tout d'abord

$$\partial_k F(x_1, ..., x_n) = a(x_k + \frac{1}{x_k})^{a-1}(1 - \frac{1}{x_k^2})$$

   puis on écrit la condition d'optimalité sous contrainte linéaire pour aboutir au résultat.

4. On calcule la dérivée de f :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -(a-1)(x+\frac{1}{x})^{a-2}(-1+\frac{1}{x^2})^2-\frac{2}{x^3}(x+\frac{1}{x})^{a-1}\\
&= (x+\frac{1}{x})^{a-2}[-(a-1)(-1+\frac{1}{x^2})^2-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^4}]\\
&= (x+\frac{1}{x})^{a-2}\left(-(a-1)(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4})-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^4}\right)\\
&= (x+\frac{1}{x})^{a-2}\left(-\frac{(a-1)x^4-2(a-2)x^2+(a+1)}{x^4}\right)
\end{aligned}$$

Si $a=1$, $f'(x)<0$ de manière immédiate.
Sinon, le discriminant réduit du trinôme $(a-1)X^2-2(a-2)X+a+1$ est $\Delta=(a-2)^2-(a^2-1)=-4a+5$. Ainsi $\Delta\leqslant 0$ ssi $a\geqslant 5/4$. En ce cas le trinôme est toujours positif et $f'(x)\leqslant 0$ pour $x\in[0,1]$ en s'annulant au plus une fois.
Si $1<a<5/4$, le trinôme a deux racines distinctes. Le produit des racines est alors positif, les racines sont donc de même signe et comme la somme des racines est alors négative car $a<2$, on a deux racines négatives strictement et donc $(a-1)x^4-2(a-2)x^2+(a+1)>0$ pour tout x réel. Ainis $f'(x)<0$ pour $x\in]0,1[$ en ce cas.
Reste le cas $0<a<1$. Le trinôme a deux racines de signes distincts. La racine positive est $X_1=\dfrac{a-2-\sqrt{5-4a}}{a-1}=1-\dfrac{1+\sqrt{5-4a}}{a-1}>1$ $(a-1<0)$. Donc sur l'intervalle $]0,1[$, $f'(x)$ ne s'annule pas, et comme on est entre les racines du trinôme, on a nécessairement $f'(x)<0$ pour $x\in]0,1[$.
Dans tous les cas f est strictement décroissante sur $]0,1[$.
Les limites de f en 0 et en 1 (respectivement $+\infty$ et 0) permettent alors de conclure.

5. Avec le résultat précédent, il existe un unique $r\in]0,1[$ tel que $f(r)=\lambda$. On en déduit que nécessairement $x_1=x_2=...=x_n=\dfrac{1}{n}$ et F possède au plus un extrémum sur U sous la contrainte choisie.

6. On remarque que la limite de $F(x_1,...,x_n)$ lorsque l'un des x_i tend vers 0 ou 1 (et les autres quelconques tels que $(x_1,...,x_n)\in U$) tend vers $+\infty$. Cela permet d'affirmer que F atteint un minimum sur $]0,1[^n$ sous la contrainte d'égalité en se restreignant à un ensemble du type $[\epsilon,1-\epsilon]^n$ avec la contrainte d'égalité qui est fermé borné de $\mathbb{R}^n$ sur lequel F atteint bien un minimum et un maximum. Ce minimum vérifie la condition d'optimalité sous contrainte précédente. Il s'agit donc du point $(\dfrac{1}{n},...,\dfrac{1}{n})$ pour lequel

$$F(\frac{1}{n},...,\frac{1}{n})=n^{1-a}(n^2+1)^a$$

L'inégalité (1) s'en déduit.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 18

Soient X et ε deux variables aléatoires indépendantes, telles que X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et ε une loi à support dans $\{-1,1\}$ telle que $P(\varepsilon=-1)=P(\varepsilon=1)=\dfrac{1}{2}$. On note $Y=\varepsilon X$.

Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution :

On a $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(\epsilon X^2)=E(\epsilon)E(X^2)=0$

Soit $u\in\mathbb{R}$. On calcule la loi de Y :

$$P(Y\leq u)=P(X\leq u)P(\epsilon=1)+P(X\geq -u)P(\epsilon=-1)=\frac{1}{2}(\phi(u)+1-\phi(-u))=\phi(u)$$

Y suit donc aussi une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On peut montrer de deux manières que X et Y ne sont pas indépendantes :

1. En calculant $E(X^2Y^2)=E(\epsilon^2X^4)=E(X^4)=3$ tandis que $E(X^2)E(Y^2)=1$

2. En considérant $S=X+Y$, on constate que $P(S=0)=P(X=-\epsilon X)=\dfrac{1}{2}$, ce qui indique que S n'est pas une loi normale contrairement au cas où X et Y sont indépendantes.

SUJET Maths Approfondies 19

Exercice principal Maths Approfondies 19

1. Question de cours : convergence en probabilité et convergence en loi.

2. Soient $(m_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels convergent vers le réel m, $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs et convergent vers le réel $\sigma > 0$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telle que X_n suit la loi normale $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$.
   Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

3. Montrer l'existence d'une constante réelle γ telle que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$
   Dans la suite de l'exercice $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance m et d'écart-type σ. Pour tout entier n, on note :
$$H_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{k}$$

4. Etablir que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ convergence en probabilité vers une variable certaine égale à m.

5. On suppose dans cette question que la loi commune des variables aléatoires Y_n est une loi normale.
   Etudier la convergence en loi de la suite $\Big(\ln(n)(H_n - m)\Big)_{n\geqslant 1}$.
   On donne : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution :

1. p21 EC2
2. Pour tout n on a :
$$\frac{X_n - m_n}{\sigma_n} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

et il en résulte que pour tout réel t on a :
$$F_{X_n}(t) = P(X_n \leqslant t) = P\left(\frac{X_n - m_n}{\sigma_n} \leqslant \frac{t - m_n}{\sigma_n}\right) = \Phi\left(\frac{t - m_n}{\sigma_n}\right)$$

en notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Il s'ensuit que :
$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(t) = \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right) = F_{X_\infty}(t)$$

où :
$$X_\infty \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Bilan :

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X_∞ suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

3. Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

On étudie la série (téléscopique) de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.
On a :

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \ln(1 - \frac{1}{n+1}) \sim \frac{-1}{2n^2}$$

La série de terme général v_n est donc convergente et, par téléscopage, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel noté γ.

Bilan :

$$\text{Il existe une constante } \gamma \text{ telle que } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

4. Pour tout entier non nul n on a :

$$E(H_n) = \frac{m \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n+1)}$$

et comme $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} E(H_n) = m$$

De plus, par indépendance des variables aléatoires Y_k, on a :

$$V(H_n) = \frac{\sigma^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}{\ln^2(n+1)}$$

et puisque la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ converge il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} V(H_n) = 0$$

Soit alors $\epsilon > 0$ fixé.
D'après l'inégalité de Markov on a :

$$P\left(|H_n - m| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{E(|H_n - m|^2)}{\epsilon^2}$$

Or :

$$E(|H_n - m|^2) = V(H_n) + \left(E(H_n) - m\right)^2 \to 0$$

Bilan :

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(|H_n - m| \geqslant \epsilon\right) = 0$$

Finalement :

$$\text{la suite } (H_n)_{n\geqslant 1} \text{ convergence en probabilité vers } m$$

5. Posons : $T_n = \ln(n)(H_n - m)$.

$$E(T_n) = \ln(n) \left(\frac{m \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n+1)} - m \right) = \frac{m\ln(n)}{\ln(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right)$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = m\gamma$$

De plus :

$$V(T_n) = \ln^2(n) \left(\frac{\sigma^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}{\ln^2(n+1)} \right)$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} V(T_n) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\sigma^2\pi^2}{6}$$

D'après le résultat de la question 2. et du fait que les variables en jeu suivent des lois normales, il en résulte finalement que :

la suite $\Big(\ln(n)(H_n - m)\Big)_{n\geqslant 1}$ convergence en loi vers une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}\left(m\gamma, \dfrac{\sigma^2\pi^2}{6}\right)$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 19

Soient b, c et d des constantes réelles et considérons l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier brièvement pourquoi il existe un entier naturel m tel que $f(m)f(-m) \leqslant 0$.
2. Compléter en Python les endroits soulignés de la fonction `trouver_chg_signe` ci-dessous afin qu'elle renvoie le plus petit entier naturel m vérifiant $f(m)f(-m) < 0$.

```
def trouver_chg_signe(b, c, d):
    def pol3(x):
        return x**3 + b*x**2 + c*x + d
    m = ________
    while ________________________:
        m =  __________
    return m
```

3. On utilise une méthode de dichotomie pour trouver une solution de l'équation dans $[-m, m]$: on considère les suites (a_n) et (b_n) définies comme suit : $a_0 = -m$, $b_0 = m$ et pour tout $n \geqslant 0$

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, c_n) & \text{si } f(c_n)f(a_n) \leqslant 0, \\ (c_n, b_n) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où on a posé $c_n = (a_n + b_n)/2$ pour $n \geqslant 0$. Si on se donne un réel $\varepsilon > 0$ définissant la précision souhaitée, on considèrera que la solution est atteinte quand $|b_n - a_n| < \varepsilon$. Dans ce cas, on peut choisir $c_n = (a_n + b_n)/2$ comme solution.

Compléter en Python les endroits soulignés de la fonction `madichotomie` ci-dessous afin qu'elle renvoie une solution de l'équation $f(x) = 0$ obtenue par cette méthode de dichotomie avec une précision `epsilon`. Cette fonction peut faire appel à la fonction `trouver_chg_signe`.

```
def madichotomie(b, c, d, epsilon):
    def pol3(x):
      return x**3 + b*x**2 + c*x + d
    m = _________________________
    an = _______
    bn = _______
    while (_________________________________________):
        cn = (an + bn)/2
        if (________________________________):
            _______ = cn
        else:
            _______ = cn
        res = ___________
    return res
```

Solution :

1. On a $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = -\infty$. Il existe donc $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$ tels que $f(t) < 0$ pour $t \leqslant -A$ et $f(t) > 0$ pour $t \geqslant B$. On peut choisir m tel que $m \geqslant \max(A, B)$.
2.

```
def find_sign_change(b, c, d):
    def pol3(x):
        return x**3 + b*x**2 + c*x + d
    m = 0
    while pol3(m)*pol3(-m)>=0:
        m = m + 1
    return m
```

3.

```
def madichotomie(b, c, d, epsilon):
    def pol3(x):
      return x**3 + b*x**2 + c*x + d
    m = find_sign_change(b, c, d)
    an = -m
    bn = m
    while (abs(an-bn) >= epsilon):
      cn = (an + bn)/2
      if (pol3(an)*pol3(cn) <= 0.0):
         bn = cn
      else:
         an = cn
      res = (an + bn)/2
    return res
```

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECG Maths appliquées

Juin 2023

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de belles qualités de logique et de présentation. On trouve bien sûr une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 1 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes dans la connaissance du cours, de grosses faiblesses en calcul et quasiment aucune connaissance en informatique.

A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances et faisaient preuve de finesse et de recul dans le maniement des concepts.

La moyenne est de 10,04 et l'écart-type est de 4,30.

Le jury aimerait insister sur les points suivants.

- La dernière réforme du programme a donné une plus grande place à l'informatique. Malgré cela, encore trop de candidats s'étaient contentés d'un survol rapide de la matière, quand ils ne l'avaient pas délaissé totalement. Le cas du SQL est éloquent. Les attendus du programme en ce domaine restent relativement modestes et le jury a rencontré deux grands types de candidats : ceux qui avaient travaillé et s'en sortaient généralement bien ; d'autres qui avaient visiblement fait une impasse totale et se révélaient souvent incapables d'écrire la moindre requête, aussi simple soit-elle.
  Tous les sujets comportaient une question d'informatique, afin que chaque candidat soit interrogé sur cette matière. Cela sera encore le cas à l'avenir. Ces questions nous permettent d'évaluer l'esprit pratique et de relier les mathématiques à des cas concrets.
- Le jury a apprécié les candidats capables de repérer des erreurs de calcul du fait des incohérences qu'elles provoquent. Ainsi, par exemple, un candidat aboutissant à une espérance négative pour une variable aléatoire positive et se mettant aussitôt à la recherche de son erreur a été récompensé.
- Les candidats doivent savoir tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction ou être capables d'illustrer un raisonnement par un petit schéma.
- Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral. Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation. Le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre question, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET Maths Appliquéees 1

Exercice principal Maths Appliquéees 1

Soit m un réel strictement positif et f lendomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id lendomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$. Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ on pose $g^0 = Id$ et pour tout k appartenant à $\mathbb{N}^*, g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Question de cours : critère de diagonalisabilité d'une matrice selon les sous espaces propres.
2. (a) Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de M et de I. En déduire un polynôme annulateur non nul de M.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Soient p et q les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par $p = \dfrac{1}{3}(f + Id)$ et $q = -\dfrac{1}{3}(f - 2Id)$.
   (a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout n appartenant à $\mathbb{N}, p^n$ et q^n.
   (b) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de f^n en fonction de p et q.
   (c) Déterminer deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $M^n = a_n I + b_n M$.
   (d) Cette dernière formule reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

Solution :

1. Question de cours : un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous espaces propres de f est égale à la dimension de E.
2. (a)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = M + 2I$$

   Ainsi, $P(X) = X^2 - X - 2$ est un polynôme annulateur de M.

   (b) Les valeurs propres de M sont racines du polynôme annulateur, ainsi les seules valeurs propres possibles de M sont -1 et 2.
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(M+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z & = 0 \\ mx + y + \dfrac{1}{m}z & = 0 \\ m^2x + my + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2x + my + z = 0$$

   -1 est donc valeur propre de M, et $E_{-1}(M) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. $\dim(E_{-1}(M)) = 2$.

$$(M-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z = 0 \\ mx - 2y + \dfrac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2m}y = 0 \\ \dfrac{3m}{2}x - \dfrac{3}{2}y = 0 \\ z = \dfrac{m^2}{2}x + \dfrac{m}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ z = m^2x \end{cases}$$

2 est donc valeur propre de M et $E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\m\\m^2\end{pmatrix}\right\}$. $\dim\left(E_2(M)\right) = 1$

La somme des dimensions des sous espaces propres est est égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$ donc M est diagonalisable.

3. (a) Dans la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-m^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-m\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\m\\m^2\end{pmatrix}\right\}$ de vecteurs propres de f, on appelle D la matrice $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^3$ est $P = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, la matrice de l'endomorphisme q est $Q = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$PQ = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = QP$, donc les endomorphismes $p\circ q$ et $q \circ p$ sont nuls.

$p^0 = Id$ et $q^0 = Id$.

Pour tout entier naturel n, $P^n = P$ donc $p^n = p$; $Q^n = Q$ donc $q^n = q$.

(b) $f = 2p - q$, et p et q commutent, donc pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
f^n &= \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}2^k p^k(-1)^{n-k}q^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}2^k(-1)^{n-k}\times p\circ q + 2^n p^n + (-1)^n q^n\\
&= 2^n p + (-1)^n q
\end{aligned}$$

(c) $f^0 = Id$ et d'après l'égalité précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f^n = \dfrac{2^n + 2\times(-1)^n}{3}Id + \dfrac{2^n-(-1)^n}{3}f$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $f^n = a_n Id + b_n f$, avec $a_n = \dfrac{2^n+2\times(-1)^n}{3}$; $b_n = \dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$. (Ces formules donnent bien $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$).

(d) D'après la question 2.a), $M^2 = M + 2I$ donc $M\left(\dfrac{1}{2}(M-I)\right) = I$. M est donc inversible d'inverse $M^{-1} = \dfrac{1}{2}(M-I)$.

Ainsi, $f^{-1} = \dfrac{1}{2}f - \dfrac{1}{2}Id$. En posant $a_{-1} = -\dfrac{1}{2}$ et $b_{-1} = \dfrac{1}{2}$, on étend bien les formules précédentes à $n = -1$.

On suppose que ces formules sont vraies pour un certain rang $n < 0$ fixé : $f^n = a_n Id + b_n f$ avec $a_n = \dfrac{2^n+2\times(-1)^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$.

Alors

$$\begin{aligned}
f^{n-1} &= f^n \circ f^{-1}\\
&= (a_n Id + b_n f)\circ\left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}Id\right)\\
&= \frac{b_n}{2}f^2 + \frac{a_n-b_n}{2}f - \frac{a_n}{2}Id\\
&= \frac{b_n}{2}(f+2I) + \frac{a_n-b_n}{2}f - \frac{a_n}{2}Id\\
&= \left(b_n - \frac{a_n}{2}\right)Id + \frac{a_n}{2}f
\end{aligned}$$

Or, $b_n - \dfrac{a_n}{2} = \dfrac{2^n-(-1)^n-2^{n-1}-(-1)^n}{3} = \dfrac{2^{n-1}+2\times(-1)^{n-1}}{3}$

et $\dfrac{a_n}{2} = \dfrac{2^{n-1}+(-1)^n}{3} = \dfrac{2^{n-1}-(-1)^{n-1}}{3}$

Ce qui permet d'écrire $f^{n-1} = a_{n-1}Id + b_{n-1}f$ en étendant les formules trouvées à la question c. Ces formules sont donc bien valables pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et ε une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. X et ε sont supposées indépendantes.

1. Ecrire un script en Python permettant de simuler 1000 réalisations de la variable aléatoire $Y=\varepsilon X$ et d'en afficher une représentation.
2. Trouver la loi de Y.

Solution :

1.
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd

n = 1000
def simu_epsilon():
        if rd.random() < 1/2:
                eps = -1
        else:
                eps=1
        return eps

Epsilon=[simu_epsilon() for k in range(n)]
X=rd.normal(0,1,n)
Y=Epsilon*X

plt.hist(Y)
plt.show()
```

On a $X(\Omega)=\mathbb{R}$ donc $Y(\Omega)=\mathbb{R}$. On note F_Y la fonction de répartition de Y : $\forall y\in\mathbb{R}, F_Y(y)=P(\varepsilon X\leqslant y)$. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(\varepsilon=-1,\varepsilon=1)$ donne : $F_Y(y)=P((X\leqslant y)\cap(\varepsilon=1))+P((-X\leqslant y)\cap(\varepsilon=-1))$. Par indépendace de ϵ et X on obtient : $F_Y(y)=\dfrac{1}{2}P(X\leqslant y)+\dfrac{1}{2}P(-X\leqslant y)=\dfrac{1}{2}\Phi(y)+\dfrac{1}{2}(1-\Phi(-y))$, où Φ est la fonction de répartition de X qui est une variable à densité. Finalement : $F_Y(y)=\Phi(y)$, car $\Phi(-y)=1-\Phi(y)$ pour tout réel y. Comme la fonction de répartition caractérise la loi : Y et X suivent la même loi.

Question supplémentaire : Le résultat obtenu reste-t-il valable si X suit une loi normale centrée quelconque ?
On note $X\hookrightarrow\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, avec $\sigma>0$. Les calculs précédents donnent, pour tout $y\in\mathbb{R}$:
$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}P\left(\dfrac{X}{\sigma}\leqslant\dfrac{y}{\sigma}\right)+\dfrac{1}{2}P\left(\dfrac{X}{\sigma}\geqslant-\dfrac{y}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{y}{\sigma}\right)+\dfrac{1}{2}\left(1-\Phi\left(-\dfrac{y}{\sigma}\right)\right)=\Phi\left(\dfrac{y}{\sigma}\right)$.
De nouveau, X et Y suivent la même loi.

SUJET Maths Appliquéees 2

Exercice principal Maths Appliquéees 2

On considère un entier naturel $n \geqslant 3$, un entier naturel impair $N \geqslant 3$ et un réel $S > 0$. On note $N = 2p + 1$.

Un jeu oppose n joueurs $J_1, \dots, J_n$. Le jeu consiste à lancer N fois une pièce équilibrée par une machine. Avant les lancers, chaque joueur prédit le résultat de chaque lancer. Sont déclarés gagnants les joueurs ayant obtenu le plus grand nombre de prévisions correctes (dans l'ordre) ; ils se partagent alors la somme de S euros.

Par exemple, si $N = 3$ et si les lancers donnent PFP, un joueur ayant prédit FFP aura deux prévisions correctes.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k le nombre de prévisions correctes du joueur J_k et G_k son gain.

1. Cours : énoncer la formule du binôme de Newton.
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(G_k) = \dfrac{S}{n}$.
3. Écrire en Python une fonction `jeu` simulant le jeu et renvoyant une liste de n nombres représentant le gain de chaque joueur.
4. On suppose que les joueurs J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante : le joueur J_1 choisit les prévisions contraires à celles du joueur J_2 (qui choisit ses prévisions au hasard). Les joueurs J_1 et J_2 décident de partager leur gain à l'issue du jeu.

   Par exemple, si $N = 3$ et si le joueur J_2 choisit PPF, le joueur J_1 choisit FFP.

   Les autres joueurs jouent indépendamment des deux joueurs J_1 et J_2. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_3, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, tout comme les variables aléatoires $X_2, X_3, \dots, X_n$.

   On note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $H = G_1 + G_2$.

   (a) Justifier que toutes les variables aléatoires X_k suivent une même loi à déterminer.
   Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $q_i = \mathbb{P}(X_k = i)$ et $f_i = \mathbb{P}(X_k \leqslant i)$.

   (b) Déterminer l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y.

   (c) Justifier que $f_p = \dfrac{1}{2}$.

   (d) Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $i \in Y(\Omega)$, montrer que :

   $$\mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) = 2\binom{n-2}{j-1} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j}.$$

   (e) En déduire $\mathbb{E}(H)$, $\mathbb{E}(G_1)$ et $\mathbb{E}(G_2)$. La stratégie des joueurs J_1 et J_2 est-elle avantageuse ?

Solution :

1. Cf. programme de première année, page 25.
2. Par symétrie des rôles de chaque joueur, les espérances de gain de chaque joueur sont égales.
   Puisque $G_1 + \cdots + G_n = S$, on en déduit par linéarité que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(G_k) = \dfrac{S}{n}$.
3.

```python
import numpy.random as rd

def jeu(N,n,S):
    X = [0 for k in range(n)]
    for i in range(N):
        lancer = rd.randint(0,2)
        # print(lancer)
        for k in range(n):
            if rd.randint(0,2) == lancer:
```

```
                X[k] += 1
        # print(X)
    m = max(X)
    gagnants = []
    for k in range(n):
        if X[k] == m:
            gagnants.append(k)
    gain = S/len(gagnants)
    G = [0 for k in range(n)]
    for k in gagnants:
        G[k] = gain
    return G
```

---

4. (a) Les variables aléatoires X_k suivent toutes la loi binomiale de paramètre N et $\dfrac{1}{2}$: elles sont égales au nombre de succès (« prédire le résultat d'un lancer ») lors de la répétition de N expériences de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

   (b) Puisque $X_2 = N - X_1$, on trouve immédiatement que $Y(\Omega) = [\![p+1, N]\!] = [\![p+1, 2p+1]\!]$.

   (c) On sait que :

$$f_p = \mathbb{P}(X_i \leqslant p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \frac{1}{2^{2p+1}}.$$

Or :

$$\begin{aligned} f_p &= 1 - \mathbb{P}(X_i > p) \\ &= 1 - \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} \frac{1}{2^{2p+1}} \\ &= 1 - \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{2p+1-k} \frac{1}{2^{2p+1}} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \frac{1}{2^{2p+1}} \\ &= 1 - f_p. \end{aligned}$$

On en déduit que $f_p = \dfrac{1}{2}$.

   (d) Remarquons que, puisque N est impair, X_1 et X_2 ne peuvent prendre la même valeur (car $X_2 = N - X_1$).
   Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $i \in Y(\Omega)$.
   Réaliser l'événement $[H = \dfrac{S}{j}, Y = i]$ revient à réaliser l'événement $[Y = i]$ (de probabilité $2q_i$) et choisir $j-1$ joueurs parmi les $n-2$ joueurs J_3 à J_n qui obtiennent i prévisions correctes et $(n-2)-(j-1) = n-j-1$ joueurs qui obtiennent au plus $i-1$ prévisions correctes. Par indépendance, on trouve que :

$$\mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) = 2q_i \binom{n-2}{j-1} q_i^{j-1} f_{i-1}^{n-1-j} = 2\binom{n-2}{j-1} q_i^{j} f_{i-1}^{n-1-j}.$$

(e) Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H) &= 0 \times P(H=0) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2S}{j}\mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}\right) \\
&= 2S \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \frac{1}{j}\binom{n-2}{j-1} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= 2S \sum_{i=p+1}^{2p+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{j!(n-1-j)!} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= \frac{2S}{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= \frac{2S}{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= \frac{2S}{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \left(f_i^{n-1} - f_{i-1}^{n-1}\right) \\
&= \frac{2S}{n-1} \left(f_{2p+1}^{n-1} - f_p^{n-1}\right) \\
&= \frac{2S}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(G_2) = \dfrac{S}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

On peut prouver par récurrence que $n < 2^{n-1}$ (pour $n \geqslant 3$). Ainsi :

$$\mathbb{E}(G_1) > \frac{S}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{S}{n}.$$

La stratégie des joueurs J_1 et J_2 est donc avantageuse.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 2

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

Solution :
Soit $x \in [1,+\infty[$ et $A \geqslant x$.
$\displaystyle\int_x^A e^{-t^2}dt = \int_x^A (-2te^{-t^2})\frac{1}{-2t}dt.$
On fait une intégration par parties en posant $u(t) = -\dfrac{1}{2t}$ et $v(t) = e^{-t^2}$ pour $t > 0$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, A]$. On obtient :
$\displaystyle\int_x^A e^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right]_x^A + \frac{1}{2}\int_x^A \frac{e^{-t^2}}{t^2}dt = -\frac{1}{2A}e^{-A^2} + \frac{1}{2x}e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int_x^A \frac{e^{-t^2}}{t^2}dt.$
Par croissances comparées, on a : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}e^{-A^2} = 0$. Puis, pour tout $t \in [x, A]$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{e^{-t^2}}{t^2} \leqslant \dfrac{e^{-t^2}}{x^2}$.
La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par théorème de comparaison, les fonctions étant positives, on a la convergence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Ainsi, par comparaison de fonctions positives : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2}dt$ converge et on a l'inégalité :
$\displaystyle 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2}dt \leqslant \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$, ce qui justifie par théorème d'encadrement que
$\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2}dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)$, et finalement : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

Question supplémentaire : En déduire, pour $0 < a < b$, la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b e^{-nt^2}dt\right)^{\frac{1}{n}}$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_a^b e^{-nt^2}dt$.
Par changement de variable $x = \sqrt{n}t$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on obtient :
$\displaystyle I_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_{a\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2}dx - \int_{b\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right).$
En utilisant l'équivalent précédent : $\displaystyle I_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e^{-na^2}}{2a\sqrt{n}} - \frac{e^{-nb^2}}{2b\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{e^{-na^2}}{2an}\left(1 - \frac{ae^{-n(b^2-a^2)}}{b} + o\left(e^{-na^2}\right)\right).$
Comme $a < b$, on obtient :
$\displaystyle\ln(I_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\frac{e^{-na^2}}{2an}\left(1 - \frac{ae^{-n(b^2-a^2)}}{b} + o\left(e^{-na^2}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -na^2 - \ln(2an) - \frac{ae^{-n(b^2-a^2)}}{b} + o\left(e^{-na^2}\right).$
Ainsi : $I_n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(I_n)} = e^{-a^2 - \frac{\ln(2an)}{n} - \frac{ae^{-n(b^2-a^2)}}{bn} + o\left(\frac{e^{-na^2}}{n}\right)}$, par croissances comparées, on obtient :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n^{\frac{1}{n}} = e^{-a^2}$.

SUJET Maths Appliquéees 3

Exercice principal Maths Appliquéees 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres. Pour tout i de $1, 2, ..., n$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si lurne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.
Pour tous i et k de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement : « l'urne i est choisie à la k^{ieme} épreuve ».

1. Question de cours : espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
2. (a) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}, P(X_i = 1) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

   (b) Si $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
3. On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et en déduire un équivalent simple de $E(Y_n)$ au voisinage de $+\infty$. Interpréter le résultat obtenu.
4. On considère le programme suivant :

```
import numpy.random as rd
def simulation(n):
  L = n*[n]
  X = n*[0]
  N = n*[0]
  for k in range(n):
    i = rd.randint(0,n)
    L[i] = L[i]-1
  for j in range(n):
    N[j] = n-L[j]
    .............
    .............
  return(X,N)
```

   (a) Compléter le programme afin que X contienne les valeurs prises par les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ à la fin de l'expérience.

   (b) Que représente les variables aléatoires N_i renvoyées par cette fonction ?

   (c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Sous réserve de convergence absolue :
   $E(XY) = \displaystyle\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \times P([X = x] \cap [Y = y])$
   Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
2. (a) Pour tout $i \in \{1, ..., n\}, (X_i = 1) = \overline{\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} U_{i,k}} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}$.

   Par indépendance des tirages, $P(X_i = 1) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(\overline{U_{i,k}}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

(b) Si i et j sont deux éléments distincts de $\{1, ..., n\}$:

$$(X_i = 1) \cap (X_j = 1) = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} (U_{i,k} \cup U_{j,k})} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}$$

Or $P(\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}) = 1 - \dfrac{2}{n}$.
Par indépendance des tirages :

$$P\left((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

(c) Soient i et j deux éléments distincts de $\{1, ..., n\}$:

$$P(X_i = 1) \times P(X_j = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n > \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

Donc $P(X_i = 1) \times P(Y_j = 1) \neq P\left((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\right)$. Les variables X_i et Y_j ne sont pas indépendantes.

3. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$. Par linéarité de l'espérance : $E(Y_n) = n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} = \lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln(1-x)}{x}}$$

Or $\ln(1 - x) \underset{0}{\sim} -x$, ainsi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{E(Y_n)}{n} = \mathrm{e}^{-1}$.
On déduit qu'un équivalent simple de $E(Y_n)$ au voisinage de $+\infty$ est $n\mathrm{e}^{-1}$.
Y_n représente le nombre d'urnes contenant toujours n boules à la fin des n tirages. En moyenne, un tiers des urnes reste intouché.

4. (a) On complète ainsi le programme :

```python
import numpy.random as rd
def simulation(n):
  L=n*[n]
  X=n*[0]
  N=n*[0]
  for k in range(n):
    i=rd.randint(0,n)
    L[i]=L[i]-1
  for j in range(n):
    N[j]=n-L[j]
    if L[j]==n:
      X[j]=1
  return(X,N)
```

(b) Pour tout i appartenant à $\{1, ..., n\}$, N_i est le nombre de boules manquantes dans l'urne i à la fin des n tirages. N_i suit donc la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{n}$. $E(N_i) = 1$.

(c) Lorsque X_i vaut 1, N_i vaut 0, donc $N_i X_i = 0$ et ainsi $N_i X_i$ admet une espérance qui est nulle. Or $E(X_i)E(N_i) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \neq 0$ donc les variables aléatoires X_i et N_i ne sont pas indépendantes.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$ et soit y une solution de l'équation différentielle $y'' = f(y)$ sur $[-a, a]$ $(a > 0)$. On suppose que $y(-a) = y(a)$. Montrer que y est paire en étudiant l'intégrale

$$\int_{-a}^{a} \left(y'(t) + y'(-t)\right)^2 \, \mathrm{d}t,$$

Solution :
Calculons l'intégrale de l'énoncé par parties. Remarquons que $y'' = f(y)$ est continue sur $[-a, a]$ par composition. Puisque les fonctions $t \mapsto y(t) - y(-t)$ et $t \mapsto y'(t) + y'(-t)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$, on trouve que :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \left(y'(t) + y'(-t)\right)^2 \, \mathrm{d}t &= \Big[\left(y'(t) + y'(-t)\right)\left(y(t) - y(-t)\right) \Big]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} \left[y''(t) - y''(-t)\right]\left[y(t) - y(-t)\right] \mathrm{d}t \\ &= -\int_{-a}^{a} \left[f(y(t)) - f(y(-t))\right]\left[y(t) - y(-t)\right] \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Puisque la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \in [-a, a]$, $f(y(t)) - f(y(-t))$ est du même signe que $y(t) - y(-t)$ et donc que :

$$\left[f(y(t)) - f(y(-t))\right]\left[y(t) - y(-t)\right] \geqslant 0.$$

On en déduit donc que :

$$\int_{-a}^{a} \left(y'(t) + y'(-t)\right)^2 \, \mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Par positivité de l'intégrale et continuité de l'intégrande, il vient que :

$$\forall t \in [-a, a], \left(y'(t) + y'(-t)\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in [-a, a], y'(t) + y'(-t) = 0.$$

La dérivée de la fonction $\varphi : t \mapsto y(t) - y(-t)$ s'annule sur $[-a, a]$. Puisque φ s'annule en a par hypothèse, φ est la fonction nulle, i.e. y est une fonction paire.

SUJET Maths Appliquéees 4

Exercice principal Maths Appliquéees 4

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k$.

1. Cours : Énoncer les trois théorèmes de comparaison de séries à termes positifs.
2. Écrire un script Python permettant de représenter la fonction P_{100} sur $[-1,1]$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P_n'(x) = \dfrac{Q_n(x)}{(x-1)^2}$ où Q_n est une fonction polynômiale à déterminer.
4. Déterminer les variations de P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer en particulier que P_n admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en un unique point u_n de $]-1,0[$.
5. Compléter le code ci-dessous afin que l'instruction `u(n)` renvoie une approximation de u_n à 10^{-3} près.

```python
def Q(n,x):
    return ...

def u(n):
    a, b = ..., ...
    while b-a > ...:
        c = (a+b)/2
        if Q(n,a)*Q(n,c) < 0:
            ...
        else:
            ...
    return ...
```

6. Déterminer un équivalent simple de $\ln(2n+1-2nu_n)$.
7. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
8. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = u_n + 1$. Déterminer un équivalent de h_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Cf. programme de seconde année, page 9.
2.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def P(n,x):
    s = 0
    puissancex = 1
    for k in range(0,2*n+1):
        s += puissancex
        puissancex *= x
    return s

abs = np.linspace(-1,1,100)
ord = [P(100,x) for x in abs]
plt.plot(abs,ord)
plt.show()
```

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ P_n(x) = \frac{1 - x^{2n+1}}{1-x} = \frac{x^{2n+1} - 1}{x - 1},$$
on trouve que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ P_n'(x) = \frac{Q_n(x)}{(x-1)^2}$$
où :
$$Q_n(x) = (2n+1)x^{2n}(x-1) - \left(x^{2n+1} - 1\right) = 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que P_n est continue sur $\mathbb{R}$. Étudier ses variations sur $\mathbb{R}$ revient donc à étudier ses variations sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q_n'(x) = 2n(2n+1)x^{2n} - 2n(2n+1)x^{2n-1} = 2n(2n+1)x^{2n-1}(x-1).$$
La fonction Q_n est croissante sur $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$ et décroissante sur $[0, 1]$. Puisque $Q_n(0) = 1$ et $Q_n(1) = 0$, le théorème de la bijection assure que Q_n s'annule en un unique point $u_n \in]-\infty, 0[$. En effet, Q_n est continue sur $\mathbb{R}$ et change de signe sur $]-\infty, 0]$, puisque $\lim_{x \to -\infty} Q_n(x) = -\infty$. On en déduit que P_n est décroissante sur $]-\infty, u_n]$ et croissante sur $[u_n, +\infty[$. La fonction P_n atteint donc un minimum en un unique point $u_n \in \mathbb{R}$.

5.
```python
def Q(n,x):
    return 2*n*x**(2*n+1) - (2*n+1)*x**(2*n)+1

def u(n):
    a, b = -1,0
    while b-a > 2*10**-3:
        c = (a+b)/2
        if Q(n,a)*Q(n,c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return c
```

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Remarquons que $P_n(-1) = 1$. On en déduit que $-1 < u_n < 0$, puis $\ln(2n+1) < \ln(2n+1-2nu_n) < \ln(4n+1)$.
On en déduit alors que $\ln(2n+1-2nu_n) \sim \ln n$.

7. Puisque $Q_n(u_n) = 0$, on trouve que $2nu_n^{2n+1} - (2n+1)u_n^{2n} + 1 = 0$, puis $\ln(2n+1-2nu_n) = -2n\ln(-u_n)$.
On en déduit que $\ln(-u_n) \sim -\dfrac{\ln n}{2n}$. Il vient alors que $\lim_{n \to +\infty} \ln(-u_n) = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$.

8. Remarquons que $-u_n = 1 - h_n$. Ainsi, d'après la question précédente $\ln(1-h_n) \sim -\dfrac{\ln n}{2n}$. Or $\lim_{n \to +\infty} h_n = 0$, donc :
$$h_n \sim -\ln(1-h_n) \sim \frac{\ln n}{2n}.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ? Quelle est la probabilité que M soit inversible ?

Solution :
La matrice M est réelle et symétrique donc diagonalisable : la probabilité vaut 1.
On note A l'événement "M est inversible". Déterminons les valeurs propres de A.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $det(M-\lambda I_2) = (X-\lambda)^2 - Y^2 = (X-\lambda-Y)(X-\lambda+Y)$. Les valeurs propres de M sont donc $X-Y$ et $X+Y$. Pour que A soit réalisé, il faut et il suffit que 0 ne soit pas valeur propre de M. Or $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $X+Y \geqslant 1$ et l'événement $(X+Y \neq 0)$ est toujours réalisé.

Ainsi, $P(A) = P(X-Y \neq 0) = 1 - P(X = Y)$. La formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ donne : $P(X = Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = k))$.

Par indépendance des variables X et Y, on a $P(X = Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)^{k-1}p)^2 = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$.

Finalement : $P(A) = 1 - \dfrac{p}{2-p} = \dfrac{2(1-p)}{2-p}$.

Question supplémentaire : On note Λ_1 et Λ_2 les valeurs propres de M. Est-ce que les variables aléatoires Λ_1 et Λ_2 sont indépendantes ?
On pose, sans perte de généralité, $\Lambda_1 = X - Y$ et $\Lambda_2 = X + Y$. On 'intéresse aux événements $(\Lambda_1 = 0)$ et $(\Lambda_2 = 3)$. On a $P((\Lambda_1 = 0) \cap (\Lambda_2 = 3)) = 0$. On a aussi : $P(\Lambda_1 = 0) = P(X = Y) = \dfrac{p}{2-p} \neq 1$, et
$P(\Lambda_2 = 3) \geqslant P(X_1 = 1)P(Y = 2) > 0$, on conclut donc que Λ_1 et Λ_2 ne sont pas indépendantes.

SUJET Maths Appliquéees 5

Exercice principal Maths Appliquéees 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite.

On note respectivement φ et Φ la densité continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction de répartition de cette loi.

1. Cours : énoncer le théorème d'intégration par parties.
2. Donner sans justification la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $Z = \max(X, Y)$ est une variable aléatoire à densité. Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$
4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :
$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$
   (c) En déduire que Z admet une espérance et donner sa valeur.
5. (a) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.
   (b) En déduire la variance de Z.

Solution :

1. Cours :
2. La loi normale d'espérance 0 et d'écart-type $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ admet pour densité la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$. On trouve alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a, par indépendance de X et Y :
$$\mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}(X \leqslant z)\mathbb{P}(Y \leqslant z) = \Phi(z)^2.$$
Puisque Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction de répartition de Z l'est aussi. On en déduit que Z est à densité, de densité f donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\Phi'(x)\Phi(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$
4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc $\varphi'(x) = -x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\varphi(x)$.
   (b) Soit $A \in \mathbb{R}_+$.
$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf(x) = 2x\varphi(x)\Phi(x) = -2\varphi'(x)\Phi(x).$$
   Les fonctions φ et Φ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ donc par intégrations par parties, on trouve :
$$\begin{aligned}\int_0^A xf(x)\,\mathrm{d}x &= -2\int_0^A \varphi'(x)\Phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -2\Big[\varphi(x)\Phi(x)\Big]_0^A + 2\int_0^A \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - 2\varphi(A)\Phi(A) + 2\int_0^A \frac{1}{2\pi}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
   On en déduit que :
$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(c) On montre de la même façon que :

$$\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, c'est-à-dire que Z admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

5. (a) Remarquons que X^2 et Z^2 sont positives. Pour tout $z \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z^2 \leqslant z) &= \mathbb{P}(-\sqrt{z} \leqslant Z \leqslant \sqrt{z})\\ &= \Phi(\sqrt{z})^2 - \Phi(-\sqrt{z})^2\\ &= (\Phi(\sqrt{z}) - \Phi(-\sqrt{z}))(\Phi(\sqrt{z}) + \Phi(-\sqrt{z}))\\ &= \Phi(\sqrt{z}) - \Phi(-\sqrt{z}),\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(X^2 \leqslant z) = \mathbb{P}(-\sqrt{z} \leqslant X \leqslant \sqrt{z}) = \Phi(\sqrt{z}) - \Phi(-\sqrt{z}) = \mathbb{P}(Z^2 \leqslant z).$$

Les fonctions de répartition de X^2 et Z^2 sont égales sur $\mathbb{R}^+$ (donc sur $\mathbb{R}$) donc X^2 et Z^2 suivent la même loi.

(b) On déduit de la question précédente que Z admet une variance donnée par la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{\pi} = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 - \frac{1}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi}.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 5

Un graphe est dit *régulier* s'il est simple et si tous ses sommets ont le même degré. Ce degré commun est alors appelé le degré du graphe régulier.

1. Ecrire le code Python d'une fonction `regulier`(M) qui prend en entrée la matrice d'adjacence d'un graphe simple et qui renvoie un booléen égal à `True` si le graphe est régulier, à `False` sinon.
2. Déterminer les graphes réguliers de degré 0, 1 et 2.
3. Soit G un graphe régulier de degré 3. Que dire du nombre de sommets de G ?

Solution :

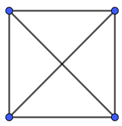
1. Une possibilité est le code suivant :

```
import numpy as np

def regulier(M):
    n=len(M)
    d=np.sum(M[0,:])
    for i in range(1,n):
        if np.sum(M[i,:])!=d:
            return False
    return True
```

2. De manière à peu près immédiate, les graphes réguliers de degré zéro sont formés de sommets déconnectés, les graphes réguliers de degré 1 sont formés d'un ensemble d'arêtes déconnectées. En particulier un tel graphe a un nombre pair de sommets. Enfin un graphe régulier de degré 2 est formé d'un nombre fini de cycles déconnectés.
3. Le nombre de sommets est supérieur ou à égal à 4 car chaque sommet est relié à trois autres sommets. De plus, par la formule d'Euler : $\sum_{x \in G} \deg x = 2m$ où m est le nombre d'arêtes du graphe. Comme $\deg x = 3$ pour tout $x \in G$, on obtient, en notant n le nombre de sommets du graphe : $3n = 2m$ et donc le nombre de sommets est nécessairement pair.

   Question supplémentaire : on peut demander de prouver la réciproque du résultat précédent, à savoir que si k est un entier avec $k \geqslant 2$, il existe toujours un graphe régulier de degré 3 possédant $2k$ sommets.
   Pour $k = 2$, une solution est fournie par le graphe complet à 4 sommets :



   Pour $k \geqslant 3$, on note les sommets $s_1, s_2, \ldots, s_{2p}$ et on les sépare en deux moitiés : $\{s_1, \ldots, s_p\}$ et $\{s_{p+1}, \ldots, s_{2p}\}$.
   On obtient une solution en reliant :
   — s_1 à s_{p+1}, s_{p+2} et s_{p+3} ;
   — s_2 à s_{p+2}, s_{p+3} et s_{p+4}
   — ...
   — s_{p-2} à s_{2p-2}, s_{2p-1} et s_{2p} ;
   — s_{p-1} à s_{2p-1}, s_{2p} et s_{p+1} ;
   — s_p à s_{2p}, s_{p+1} et s_{p+2}.
   On obtient bien ainsi une solution convenable. Un candidat pourra naturellement chercher une telle solution d'abord sur des petites valeurs de p pour avoir une idée du processus de construction général.

SUJET Maths Appliquéees 6

Exercice principal Maths Appliquéees 6

1. Cours : énoncer le théorème central limite.
2. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note G la fonction :

$$G : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k)t^k.$$

   (a) Déterminer l'ensemble D de définition de G et, pour tout $t \in D$ une expression de $G(t)$ en fonction de t. Préciser en particulier la valeur de $G(-1)$.

   (b) En déduire la probabilité que la variable aléatoire Z soit paire.

   (c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(Z \leqslant n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

   (d) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t}\, \mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1.

   (a) Déterminer l'espérance et la variance éventuelles de $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leqslant n)$.

   (c) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} t^n e^{-t}\, \mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Cf. programme de seconde année, page 20.
2. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z = k)t^k = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda}$. En reconnaissant une série exponentielle, on trouve que $D = \mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k)t^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda+\lambda t}.$$

   En particulier, $G(-1) = e^{-2\lambda}$.

   (b) D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathbb{P}(Z = n) = e^{-2\lambda}.$$

   Puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = n) = 1$, on obtient en sommant les deux égalités :

$$1 + e^{-2\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} [\mathbb{P}(Z = n) + (-1)^n \mathbb{P}(Z = n)] = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} 2\mathbb{P}(Z = n) = 2\mathbb{P}(Z \in 2\mathbb{N})$$

   On en déduit que la probabilité que Z soit pair est égale à $\dfrac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$.

(c) Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— Si $n = 0$, $\frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_\lambda^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-\lambda} = \mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(Z \leqslant 0).$$

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour un entier $n-1$. Les fonctions $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\lambda, +\infty[$. Après intégration par parties (d'abord sur $[\lambda, A]$ puis en faisant tendre A vers $+\infty$), on trouve que $\frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} + \frac{1}{(n-1)!}\int_\lambda^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathbb{P}(Z=n) + \mathbb{P}(Z \leqslant n-1) = \mathbb{P}(Z \leqslant n).$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(Z \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(d) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z \leqslant n) = 1$, $\mathbb{P}(Z \leqslant n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et donc $\int_\lambda^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

3. (a) Puisque Y_n est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson, Y_n suit une loi de Poisson : $Y_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$. En particulier $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{V}(Y_n) = n$.

(b) En notant $\overline{X}_n = \frac{Y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$, et $\mu = 1$ et $\sigma = 1$ (l'espérance et l'écart-type de la loi de Poisson de paramètre 1), on remarque que :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant n) = \mathbb{P}(\overline{X}_n \leqslant 1) = \mathbb{P}(\overline{X}_n \leqslant \mu) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \leqslant 0\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}_n^* \leqslant 0\right).$$

D'après le théorème central limite, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leqslant n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\overline{X}_n^* \leqslant 0\right) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

(c) D'après la question 2.(c), on a :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_n^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit alors que :

$$\int_n^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2}.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 6

On considère une base de donnée de location de voitures dont le schéma relationnel est donné par :

voiture (id_voiture, marque, modele, etat)
client (id_client, nom, prenom, adresse, num_permis)
location (id_loc, voiture, client, date_debut, date_fin)

1. Identifier les clés primaires et les éventuelles clés étrangères de chacune des tables.
2. L'état d'une voiture à louer est désigné par l'une de ces dénominations : « *neuf* », « *bon* », « *abimé* », « *au garage* ». Déterminer la liste des voitures qui sont actuellement dans l'un des deux meilleurs états.
3. Déterminer la liste des voitures (identifiant, marque et modèle) qui ont déjà été louées ou en cours de location.
4. Déterminer tous les clients (identifiant, nom et prénom) qui ont loué une Renault. On pourra réaliser une requête imbriquée, de la forme :

```sql
SELECT *
FROM table1
WHERE attribut IN (
    SELECT attribut2
    FROM table2
)
```

Solution :

1. L'attribut `id_voiture` est la clé primaire de la table `voiture`.
   L'attribut `id_client` est la clé primaire de la table `client`.
   L'attribut `id_loc` est la clé primaire de la table `loc`.
   L'attribut `voiture` est une clé étrangère de la table `location` faisant référence à la clé primaire de la table `voiture`.
   L'attribut `client` est une clé étrangère de la table `location` faisant référence à la clé primaire de la table `client`.

2.
```sql
SELECT *
FROM voiture
WHERE etat = "neuf" or etat = "bon"
```

3.
```sql
SELECT id_voiture , marque , modele
FROM voiture
JOIN location ON id_voiture = voiture
```

4.
```sql
SELECT id_client , nom , prenom
FROM client
WHERE id_client IN (
    SELECT client
    FROM location
    JOIN voiture ON id_voiture = voiture
    WHERE marque = "Renault"
)
```

SUJET Maths Appliquéees 7

Exercice principal Maths Appliquéees 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = y^2 - x^2 y + x^2.$$

On note $C = [-1,1] \times [-1,1]$, une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

1. **Cours :** Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
   Rappeler les conditions suffisantes pour que (x_0, y_0) soit un minimum local pour g.
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur C.
3. Etudier la nature du point critique de f qui se trouve dans C.
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur C.
5. Soit $\lambda > 1$. On s'intéresse à la ligne de niveau λ, notée L_λ de la fonction f.
   (a) Déterminer deux fonctions φ_1 et φ_2 définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $L_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi_1(x)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi_2(x)\}$.
   (b) Ecrire un code Python qui réalise le tracé des lignes de niveau L_λ pour $-4 \leqslant x \leqslant 4$ et $\lambda \in \{1{,}01; 1{,}2; 2{,}2; 3{,}2; 4{,}2\}$.

Solution :

1. **Cours**
2. La fonction f est continue sur C en tant que somme et produit des fonctions coordonnées qui le sont. De plus, C est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$, donc f est bornée et atteint ses bornes sur C.
3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme et produit des fonctions coordonnées qui le sont. On détermine les points critiques (x,y) de f en résolvant le système : $\begin{cases} \partial_1 f(x,y) &= 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-y) &= 0 \\ 2y - x^2 &= 0 \end{cases}$
   La première ligne donne $x = 0$ ou $y = 1$ et la seconde ligne $x^2 = 2y$. On trouve donc trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, 1)$ et $(-\sqrt{2}, 1)$. $(0,0)$ est le seul point critique de f qui se trouve dans C, étudions sa nature.
   La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme et produit des fonctions coordonnées qui le sont. On détermine les valeurs propres de la hessienne, notée H en ce point. En calculant les dérivées secondes de f en $(0,0)$, on trouve $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont strictement positives, on a donc un minimium local en $(0,0)$ pour f et $f(0,0) = 0$.
   C'est un minimum global sur C car :
   $$\forall (x,y) \in C, \quad x^2 y \leqslant |x|\,|y| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \textit{(par identité remarquable)},$$
   donc pour tout $(x,y) \in C,\ f(x,y) \geqslant 0 = f(0,0)$.
   Ce n'est pas un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ car $f(1,0) = 1 > 0$ et $f(3,2) = -5 < 0$.
4. La question 3. nous donne le minimum de f sur C atteint en $(0,0)$. Il reste à déterminer le maximum de f sur C. L'étude des points critiques justifie que ce maximum se trouve sur le bord de C. On étudie donc les valeurs de f sur chacun des bords du carré C :
   — Sur $C_1 = [-1,1] \times \{1\}$, $f(x,y) = f(x,1) = 1$, la fonction est constant et son maximum vaut 1,
   — Sur $C_2 = [-1,1] \times \{-1\}$, $f(x,y) = f(x,-1) = 1 + 2x^2$, la fonction atteint son maximum quand x vaut 1 ou -1 et la valeur du maximum est 3,
   — Sur $C_3 = \{1\} \times [-1,1]$ ou $C_4 = \{-1\} \times [-1,1]$, $f(x,y) = y^2 - y + 1$. L'étude de $y \mapsto y^2 - y + 1$ sur $[-1,1]$ justifie que la fonction est décroissante sur $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Elle atteint son maximum en $y = -1$ et il vaut 3.
   Ainsi, f admet un maximum sur C aux points $(1,-1)$ et $(-1,-1)$ qui vaut 3.

5. (a) Par définition, $L_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \lambda\}$.
Il s'agit d'exprimer y en fonction de x dans l'équation : $y^2 - x^2y + x^2 - \lambda = 0$. On reconnait une fonction polynomiale de degré 2 en y de discriminant $\Delta = x^4 - 4(x^2 - \lambda)$. Pour déterminer le signe de ce discriminant, on reconnait une fonction polynomiale de degré 2 en x^2 de discriminant $16(1-\lambda) < 0$ et de coefficient de plus haut degré positif. Ainsi, $\Delta > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda > 1$.
L'équation étudiée admet donc deux solutions : $y_1 = \dfrac{x^2 + \sqrt{x^4 - 4(x^2-\lambda)}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{x^2 - \sqrt{x^4 - 4(x^2-\lambda)}}{2}$.
Les fonctions $\varphi_1 : x \mapsto \dfrac{x^2 + \sqrt{x^4 - 4(x^2-\lambda)}}{2}$ et $\varphi_2 : x \mapsto \dfrac{x^2 - \sqrt{x^4 - 4(x^2-\lambda)}}{2}$ répondent à la question.

(b) Une possibilité est :

```
import math as m
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def ph1(x,la):
    return (x**2+m.sqrt(x**4-4*(x**2-la)))/2

def ph2(x,la):
    return (x**2-m.sqrt(x**4-4*(x**2-la)))/2

L_la=[1.01,1.2,2.2,3.2,4.2]
L_c=['r','b','g','c','m']

for i in range(0,len(L_la)):
    Lx=np.linspace(-4,4,10**4+1)
    Ly1=[ph1(x,L_la[i]) for x in Lx]
    Ly2=[ph2(x,L_la[i]) for x in Lx]
    plt.plot(Lx,Ly1,label='$\lambda$='+str(L_la[i]),color=L_c[i])
    plt.plot(Lx,Ly2,color=L_c[i])

plt.legend()
plt.show()
```

On peut noter que `matplotlib.pyplot` dispose de fonctions permettant de tracer directement les lignes de niveau d'une fonction de deux variables, mais ces fonctions ne sont pas au programme.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 7

Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et admettant une variance notée σ^2. On suppose que leur loi a la propriété suivante : X_1+X_2 a même loi que $\sqrt{2}X_1$.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1+X_2+\cdots+X_{2^n}$ et $\sqrt{2^n}X_1$ ont même loi.
2. En déduire la loi commune à toutes les variables de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution :

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
   Le résultat est vérifié par hypothèse pour $n=1$.
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que $X_1+X_2+\cdots+X_{2^n}$ et $\sqrt{2^n}X_1$ ont même loi.
   Remarquons que $X_{2^n+1}+\cdots+X_{2^{n+1}}$ suit la même loi que $X_1+X_2+\cdots+X_{2^n}$ donc que $\sqrt{2^n}X_2$ par hypothèse de récurrence.
   Puisque les variables aléatoires $X_1+X_2+\cdots+X_{2^n}$ et $X_{2^n+1}+\cdots+X_{2^{n+1}}$ sont indépendantes par le lemme des coalitions, leur somme $X_1+\cdots+X_{2^{n+1}}$ suit la même loi que $\sqrt{2^n}X_1+\sqrt{2^n}X_2$ donc que $\sqrt{2^{n+1}}X_1$.
2. En notant μ l'espérance de cette loi (dont l'existence est garantie par l'existence de la variance), on a :

   $$2\mu=\mathbb{E}(X_1+X_2)=\mathbb{E}(\sqrt{2}X_1)=\mu\sqrt{2}.$$

   On en déduit que $\mu=0$.
   Remarquons que :

   $$\sqrt{2^n}\frac{\overline{X}_{2^n}-\mu}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\frac{X_1+\cdots+X_{2^n}}{\sqrt{2^n}}$$

   suit la même loi que la variable aléatoire $\dfrac{1}{\sigma}X_1$.
   Or, d'après le théorème central limite, la suite de variable aléatoire $\left(\sqrt{2^n}\dfrac{\overline{X}_{2^n}-\mu}{\sigma}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.
   On en déduit donc que $\dfrac{1}{\sigma}X_1$ suit la loi normale centrée réduite donc que X_1 suit la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

SUJET Maths Appliquéees 8

Exercice principal Maths Appliquéees 8

On tire une main de 5 cartes d'un paquet de 32 cartes.

On considère alors les événements A et B suivants :

$$A = \text{« L'as de pique est dans la main »} \quad \text{et} \quad B = \text{« Au moins un as est dans la main »}$$

1. Cours : coefficients binômiaux ; interprétation ensembliste.
2. (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(A)$.

   (b) Sachant que $\dfrac{27 \times 26 \times 25 \times 24}{32 \times 31 \times 30 \times 29} < \dfrac{1}{2}$, montrer que : $\mathbb{P}(B) > 2\mathbb{P}(A)$

On note maintenant X la variable aléatoire égale au nombre d'as d'une main de cinq cartes,
Y la variable aléatoire égale au nombre d'as d'une main contenant l'as de pique,
Z la variable aléatoire égale au nombre d'as d'une main contenant au moins un as.

On se propose de comparer les espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

3. Etude empirique.

   On suppose qu'on dispose d'une fonction Python `ma_main()` qui ne prend aucun argument et qui renvoie une main déterminée de manière aléatoire. Une telle main sera représentée par un tableau de 5 couples `(val,coul)` où `val` est élément de la liste `[7, 8, 9, 10, 'valet', 'dame', 'roi', 'as']` et `coul` de la liste `['trefle', 'carreau', 'coeur', 'pique']`.

   (a) Ecrire le code d'une fonction Python `as_de_pique(m)` qui prend en argument une main `m` de cinq cartes, et qui renvoie `True` si la main contient l'as de pique, `False` sinon.

   (b) Ecrire le code d'une fonction Python `nbre_as(m)` qui prend en argument une main `m` de cinq cartes et qui renvoie le nombre d'as contenus dans la main.

   (c) Compléter la première boucle `for` dans le code de la fonction `estimation(N)` suivante, qui prend en entrée un entier `N` et réalise une estimation des espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

```
import numpy as np

def estimation(N):
        a,b=0,0
        xA,xB=np.zeros(5),np.zeros(5)
        for i in range(N):
                main=ma_main()
                ........................
        sY=0 ; sZ=0
        for k in range (1,5) :
                sY+=k*xA[k]
                sZ+=k*xB[k]
        if a*b != 0 : return sY/a,sZ/b
```

   La première boucle `for` comptabilise, pour `N` mains aléatoires : dans `a` (resp. `b`) le nombre de celles qui contiennent l'as de pique (resp au moins un as) et au rang n ($0 \leqslant n \leqslant 4$) de la liste `xA` (resp. `xB`) le nombre de celles contenant n as et appartenant à A (resp. à B).

4. Etude théorique.

   (a) Pour $k=2$, $k=3$ et $k=4$, comparer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_A(X=k)$ et $\mathbb{P}_B(X=k)$.

   (b) Comparer les espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

Solution :

1. Cours : coefficients binomiaux - première année p 16.
2. Ω est l'ensemble des mains, c'est-à-dire des parties à 5 éléments de l'ensemble *jeu* des 32 cartes du paquet.
   Une carte a : . l'une des huit valeurs : 7, 8, 9 ,10, Valet, dame roi, as : ensemble *valeur* ,
   . et une des quatre couleurs trèfle, carreau, cœur, pique : ensemble $couleur = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.
   L'ensemble *jeu* s'identifie donc à l'ensemble des couples (val, coul), val$\in$ *valeur*, coul$\in$ *couleur*.
   Une main est une partie à 5 éléments de l'ensemble *jeu*.
   Par suite, on pose : $\Omega = \mathcal{P}_5(valeur \times couleur)$
   $A = \{main \in \Omega \,/\, (as, \spadesuit) \in main\}$
   $B = \{main \in \Omega \,/\, \exists\, (x,y) \in main \quad x = as\}$

   (a) Du fait de l'équiprobabilité des tirages, $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{Card(A)}}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.
   A s'identifie à $\{(\mathrm{as}, \spadesuit)\} \times \mathrm{C}$, C ensemble des parties à 4 éléments du jeu privé de l'as de pique.
   Donc $\mathrm{Card(A)} = \dbinom{31}{4}$. Par ailleurs : $\mathrm{Card}(\Omega) = \dbinom{32}{5} = \dfrac{32}{5}\dbinom{31}{4}$
   Par conséquent : $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{5}{32}$.

   (b) L'évènement "la main ne contient pas d'as" est l'évènement contraire $\overline{\mathrm{B}}$ de B.
   $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}}) = \dfrac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} = \dfrac{\frac{28\times27\times26\times25\times24}{5\times4\times3\times2\times1}}{\frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times1}} = \dfrac{27 \times 26 \times 25 \times 24}{32 \times 31 \times 30 \times 29}$, donc avec l'information de l'énoncé : $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}}) < \dfrac{1}{2}$.
   Par suite : $\mathbb{P}(\mathrm{B}) > \dfrac{1}{2}$.
   Il y a plus de chance pour une main aléatoire de contenir un as (au moins) que de ne pas en contenir.

   (c) On a vu : $\mathbb{P}(B) > \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{5}{32}$; d'où : $2.\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{5}{16}$, et par suite : $\mathbb{P}(\mathrm{B}) > 2.\mathbb{P}(\mathrm{A})$.

   (a) Un code possible est :

```
def as_de_pique(m):
    rep=False
    for i in range(5) :
        if m[i]==('as','pique'):
            rep = True
    return(rep)
```

   (b) Un code possible est :

```
def nbre_as (m) :
    nb=0
    for i in range(5) :
        if m[i][0]=='as' :
            nb=nb+1
    return nb
```

   (c) Une possibilité pour le code complété est :

```
import numpy as np

def estimation(N):
    a,b=0,0
    xA,xB=np.zeros(5),np.zeros(5)
    for i in range(N):
        main=ma_main()
        n=nbre_as(main)
        if n != 0 :
            if as_de_pique(main) :
                a+=1
                xA[n]+=1
```

```
            xB[n]+=1
            b+=1
    sY=0 ; sZ=0
    for k in range (1,5) :
        sY+=k*xA[k]
        sZ+=k*xB[k]
    if a*b != 0 : return sY/a,sZ/b
```

Le cas où au cours des N tirages aléatoires, aucune main ne contient l'as de pique, ou même : aucune main ne contient d'as, n'est pas théoriquement impossible. D'où la nécessité de s'assurer avant d'imprimer des quotients par a et par b que a.b est non nul (i.e. que ni a ni b n'est nul).

(d) Par le calcul :

— Comparaison des probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$ pour $k \geqslant 2$:

$\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=\dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})}{\mathbb{P}(\mathrm{A})}$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=\dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$ (définies car $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$ non nulles)

. On a déjà comparé les dénominateurs [cf. question 2. (b)] : $\mathbb{P}(\mathrm{B}) > 2.\mathbb{P}(\mathrm{A})$ (1)

. L'équiprobabilité entraine que $\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})}{\mathrm{Card}(\Omega)}$

Pour $\mathrm{k} > 0$, $\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}$ est simplement l'ensemble des mains contenant k as ;

donc $\mathrm{Card}\,(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}) = \dbinom{4}{\mathrm{k}} \times \dbinom{28}{5-\mathrm{k}}$ (k as parmi 4, 5-k autres cartes pami les 28 qui ne sont pas des as)

$\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}$ est l'ensemble des mains contenant k as dont l'as de pique ;

donc $\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}) = \dbinom{3}{\mathrm{k}-1} \times \dbinom{28}{5-\mathrm{k}}$ (k-1 as autres que pique, 5-k autres cartes qui ne sont pas des as)

$\dbinom{4}{\mathrm{k}} = \dfrac{4}{\mathrm{k}}\dbinom{3}{\mathrm{k}-1} \Rightarrow \mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})=\dfrac{4}{\mathrm{k}}.\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})$, soit si $\mathrm{k}\geqslant 2$: $\mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}) \leqslant 2.\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})$ (2)

. (1) et (2) montrent que, pour $2 \leqslant k \leqslant 4$: $\mathbb{P}_B(X=k) < \mathbb{P}_A(X=k)$ (3).

— Y comme Z prend les valeurs 1, 2, 3, 4 (toujours au moins un as et au plus quatre).

Il est immédiat que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \mathbb{P}_A(\mathrm{X}=k)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k) = \mathbb{P}_B(\mathrm{X}=k)$

On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=1$ implique $\displaystyle\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}=1)=1-\sum_{k=2}^{4}\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=1$ implique $\displaystyle\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}=1)=1-\sum_{k=2}^{4}\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$

D'où : $\displaystyle\mathbb{E}(\mathrm{Y})=\sum_{k=1}^{4}k.\mathbb{P}_A(\mathrm{X}=k) = \mathbb{P}_A(\mathrm{X}=1) + \sum_{k=2}^{4}k.\mathbb{P}_A(\mathrm{X}=k) = 1 + \sum_{k=2}^{4}(k-1).\mathbb{P}_A(\mathrm{X}=k)$

$\displaystyle\mathbb{E}(\mathrm{Z})=\sum_{k=1}^{4}k.\mathbb{P}_B(\mathrm{X}=k) = \mathbb{P}_B(\mathrm{X}=1) + \sum_{k=2}^{4}k.\mathbb{P}_B(\mathrm{X}=k) = 1 + \sum_{k=2}^{4}(k-1).\mathbb{P}_B(\mathrm{X}=k)$

(3) implique alors : $\mathbb{E}(\mathrm{Z}) < \mathbb{E}(\mathrm{Y})$ $\big($puisque pour $k\geqslant 2$, $k-1 > 0\big)$.

L'espérance du nombre d'as dans la main est plus élevée si on sait que la main contient l'as de pique que si on sait que la main contient au moins un as.

Remarque : X, Y et Z sont définies sur 3 espaces probabilisés différents. Cela n'empêche pas de comparer $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$.

Pour les candidats les plus rapides, on pourra éventuellement demander d'écrire le code de la fonction `ma_main()`. Une possibilité est la suivante :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def ma_main():
    main=[]
    i=1
    while i <= 5 :
        val=valeur[rd.randint(0,8)]
        coul=couleur[rd.randint(0,4)]
        if (val,coul) not in main :
```

```
            main+=[(val,coul)]
            i+=1
    return(main)
```

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 8

Etudier le comportement asymptotique, quand t tend vers $+\infty$ des solutions de l'équation différentielle : $y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$.

Solution :

On écrit l'équation différentielle sous forme d'un système différentiel.
On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$, de sorte que $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} X(t)$.

On détermine les valeurs propres de A en étudiant l'inversibilité de la matrice $A - \lambda I$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$.

Par échange de L_2 et L_3 et en effectuant $L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \\ 0 & 0 & 2+3\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres sont donc $0, -1$ et -2. A est de taille 3 et possède 3 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. On obtient $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$, car les valeurs propres sont inférieures ou égales à 0.

Question supplémentaire : Utiliser une autre méthode pour répondre à la question.

Soit y une solution de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$. On remarque que y' est solution d'une equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $z''+3z'+2z = 0$. Son équation caractéristique est $r^2+3r+2 = 0$, dont les racines sont -1 et -2. Ainsi, il existe deux constantes réelles a et b telles que $y'(t) = ae^{-t} + be^{-2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On obtient y par calcul de primitive : il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $y(t) = ae^{-t} + be^{-2t} + c$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = c$.

SUJET Maths Appliquéees 9

Exercice principal Maths Appliquéees 9

Soit α un nombre réel. On considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

et on note ϕ_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On appelle f_1 le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et f_2 le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Question de cours : critère de diagonalisabilité dune matrice selon les sous espaces propres.
2. (a) Montrer que, quelque soit α, la matrice A_α admet la valeur propre 1.
   (b) On note $E_1(\alpha)$ le sous espace propre de A_α associé à la valeur propre 1. Déterminer, suivant les valeurs de α, une base de $E_1(\alpha)$.
3. On note $F = \text{Vect}\ (f_1, f_2)$.
   (a) Montrer que l'image par ϕ_α de tout vecteur de F appartient à F.
   (b) On appelle $\widehat{\phi_\alpha}$ l'endomorphisme de F induit par ϕ_α, c'est à dire vérifiant, pour tout vecteur V de F, $\widehat{\phi_\alpha}(V) = \phi_\alpha(V)$.
   Donner une matrice de $\widehat{\phi_\alpha}$.
4. Montrer que pour tout réel α, $\alpha - 1$ est une valeur propre de A_α et que l'on peut trouver un vecteur f_3 de $\mathbb{R}^3$ ne dépendant pas de α, qui soit, pour tout réel α, vecteur propre de A_α associé à la valeur propre $\alpha - 1$.
5. Pour quelles valeurs du paramètre α la matrice A_α est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Question de cours : un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous espaces propres de f est égale à la dimension de E.
2. (a) On remarque que pour tout réel α, $A_\alpha f_1 = f_1$ (avec $f_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$) donc 1 est valeur propre de ϕ_α.
   (b) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   $$u \in E_1 \iff \phi_\alpha(u) = u \iff \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ -\alpha x - \alpha z = 0 \\ 2x + (\alpha-2)y + \alpha z = 0 \end{cases}$$
   — si $\alpha \neq 0$ alors $\begin{cases} x = -z \\ (2-\alpha)y + (2-\alpha)z = 0 \\ (\alpha-2)y + (2-\alpha)z = 0 \end{cases}$
      — si de plus $\alpha \neq 2$ alors $\begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$ et $E_1(\alpha) = \text{Vect}\,(f_1)$ donc la famille (f_1) est une base de $E_1(\alpha)$.
      — si $\alpha = 2$ alors $x = -z$ et $E_1(2) = \{(x, y, -x), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
      On a bien une base de $E_1(2)$.
   — si $\alpha = 0$ alors $\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \iff x = y$ donc
   $E_1(0) = \{(x, x, z)\ /\ x, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et cette famille libre forme une base de $E_1(0)$.

3. (a) On remarque déjà que (f_1, f_2) est une famille libre, et donc une base de F.
On a déjà constaté que $\phi_\alpha(f_1) = f_1$.
On remarque que $\phi_\alpha(f_2) = \alpha f_1 + f_2 \in F$.
Donc pour tout $u = xf_1 + yf_2 \in F$, on a $\phi_\alpha(u) = (x + \alpha y)f_1 + yf_2 \in F$.

   (b) La matrice M de $\widehat{\phi_\alpha}$ dans la base (f_1, f_2) est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $\phi_\alpha(u) = (\alpha - 1)u \iff (A_\alpha - (\alpha - 1)I)\, U = 0$

$$\iff \begin{cases} -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 & \\ -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 & L_2 - L_1 \\ 2x + (\alpha - 2)y + 2z = 0 & L_3 + L_1 \end{cases}, \iff (1) \begin{cases} -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ 0 = 0 \\ (2-\alpha)x + (2-\alpha)z = 0 \end{cases}$$

— si $\alpha \neq 2$: (1) $\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$

— si $\alpha = 2$: (1) $\iff x + z = 0$

Donc $f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha - 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. — Soient x, y et z réels. Si $xf_1 + yf_2 + zf_3 = 0$ alors $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ d'où $x = -y$ et $z = 0$ et $y = 0$ par substitution. Donc la famille (f_1, f_2, f_3) est libre et de cardinal 3. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de ϕ_α dans cette base est :
$N = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$
   — Si $\alpha = 0$ alors ϕ_α est diagonalisable (diagonalisée sur (f_1, f_2, f_3))
   Et si $\alpha \neq 0$, comme N est triangulaire, les seules valeurs propres de ϕ_α sont 1 et $\alpha - 1$. On détermine la dimension de chaque sous espace propre :
   — Si $\alpha = 2$, la seule valeur propre est 1 et le sous espace propre associé $E_1(2)$ est de dimension 2. Donc ϕ_2 n'est pas diagonalisable.
   — Si $\alpha \neq 2$ le sous espace propre associé à 1 est de dimension 1 et celui associé à $(\alpha - 1) \neq 1$ est de dimension 1 également. Donc ϕ_α n'est pas diagonalisable.

   Finalement, la seule valeur pour laquelle ϕ_α est diagonalisable est $\alpha = 0$.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu ; dans le cas contraire, il perd 10 euros pour chaque Pile obtenu. La pièce est truquée et, à chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est égale à p, avec $p \in]0;1[$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Ecrire le code d'une fonction Python `simule_G(n,p)` qui réalite une simulation du gain du joueur.
2. Déterminer l'espérance de G.
   Comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce pour optimiser sa rentabilité ?
3. Le concepteur du jeu décide de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. Il pense pouvoir compter sur la participation de 200 joueurs dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque derreur inférieur à 10% , quil gagnera plus de 100 euros dans la journée. Installera-t-il son stand ?

Solution :

1. Une possibilité est le code suivant :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simule_G(n,p):
    X=rd.binomial(n,p)
    return 10*X*(-1)**X
```

2. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $G = 10X(-1)^X$. D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(G) &= \sum_{k=0}^{n} 10k(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= 10\sum_{k=1}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-p)^k(1-p)^{n-k} \\
&= 10\sum_{k=1}^{n} n \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} (-p)^k(1-p)^{n-k} \\
&= 10n\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} (-p)^{k+1}(1-p)^{n-k} \\
&= -10np(1-2p)^{n-1}
\end{aligned}$$

On étude la fonction $f : \begin{array}{rcl} \left]0;\frac{1}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -10nx(1-2x)^{n-1} \end{array}$

Pour $n \geqslant 2$, f est dérivable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) = 10n(1-2x)^{n-2}(2nx-1)$. f admet donc un minimum en $\frac{1}{2n}$ donc le gain moyen du joueur est minimal lorsque $p = \frac{1}{2n}$.

3. Pour tout entier i compris entre 1 et 200, on appelle G_i la variable aléatoire égale au gain du i-ème joueur de la journée. Avec $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$, la loi de probabilité de G_i est donnée par :

$$P(G_i = 20) = p^2 = \frac{1}{16} \; P(G_i = 0) = (1-p)^2 = \frac{9}{16} \; P(G_i = -10) = \frac{3}{8}$$

On a alors : $E(G_i) = 20 \times \dfrac{1}{16} - 10 \times \dfrac{3}{8} = -\dfrac{5}{2}$.
$V(G_i) = E(G_i^2) - E(G_i)^2 = 400 \times \dfrac{1}{16} + 100 \times \dfrac{3}{8} - \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{225}{4}$

Soit H la variable aléatoire égale au gain du concepteur du jeu. $H = -\sum_{i=1}^{200} G_i$ donc par linéarité de l'espérance, $E(H) = -200 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) = 500$.
Par indépendance des variables G_i, $V(H) = 200 \times V(-G_i) = 200 \times V(G_i) = 200 \times \dfrac{225}{4}$.
On remarque que $P(H > 100) \leqslant P(|H - 500| > 400)$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, H possédant un moment d'ordre 2 :

$$P(H > 100) \leqslant P(|H - E(H)| > 400) \leqslant \frac{V(H)}{400^2} = \frac{200 \times \frac{225}{4}}{160000} = \frac{9}{128} < \frac{10}{100}$$

Le concepteur du jeu peut bien installer son stand.

SUJET Maths Appliquéees 10

Exercice principal Maths Appliquéees 10

Une urne contient $n \geqslant 2$ boules distinctes $B_1, B_2, \ldots, B_n$, que l'on tire successivement et avec remise. Pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, on note Y_r la variable aléatoire qui donne le rang du tirage au bout duquel les boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ ont été tirées au moins une fois.

1. Cours : quel est le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble de n éléments ?
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_1.
3. Écrire une fonction en Python prenant en argument deux entiers n et r (on supposera $1 \leqslant r \leqslant n$, sans le vérifier) et qui simule une réalisation de la variable Y_r.
4. Préciser l'univers-image de Y_r. Calculer $\mathbb{P}(Y_r = r)$.
5. Montrer que l'événement A_r : « on tire les boules $B_1, \ldots, B_{r-1}$ lors des r premiers tirages sans jamais tirer les boules $B_{r+1}, \ldots, B_n$, et on tire la boule B_r au $(r+1)$-ème tirage » a pour probabilité :
$$\mathbb{P}(A_r) = \frac{\binom{r}{2}(r-1)!}{n^{r+1}}.$$
6. En déduire que :
$$\mathbb{P}(Y_r = r+1) = \frac{r(n-r)r! + \binom{r}{2}r!}{n^{r+1}}.$$
7. On fixe r. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1,\ B_2, \ldots, B_r$ soient sorties. On pose $X_1 = W_1$ et, pour tout $i \geqslant X_i = W_i W_{i-1}$ si $i \geqslant 2$.
   (a) Déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance.
   (b) En déduire l'espérance de Y_n.
   (c) Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Cf. programme de première année, page 22.
2. Y_1 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$. On a alors : $\mathbb{E}(Y_1) = n$ et $\mathbb{V}(Y_1) = n^2 - n$.
3.
```python
import numpy.random as rd

def simule_Y(n,r):
    B = [0]*n
    rang = 0
    while sum(B[:r]) < r:
        rang += 1
        boule = rd.randint(0,n)
        if B[boule] == 0:
            B[boule] = 1
        # print(rang, B, boule)
    return rang
```
4. On trouve immédiatement que $Y_r(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$.
   Par équiprobabilité des tirages, on trouve que $\mathbb{P}(Y_r = r) = \frac{r!}{n^r}$.

5. Par équiprobabilité, on est ramené à calculer le cardinal de l'événement A_r. Or réaliser l'événement A_r revient à choisir :
   — le numéro i de boule tirée deux fois (il y a $r-1$ choix)
   — les deux rangs de tirage de la boule B_i (il y a $\binom{r}{2}$ choix)
   — le rang des boules B_k ($1 \leqslant k \leqslant r-1$ et $k \neq i$) (il y a $(r-2)!$ choix).

   Par équiprobabilité, on trouve que :
$$\mathbb{P}(A_r) = \frac{(r-1)\binom{r}{2}(r-2)!}{n^{r+1}} = \frac{\binom{r}{2}(r-1)!}{n^{r+1}}$$

6. Réaliser l'événement C_r : « on tire une seule fois les boules $B_1, \ldots, B_{r-1}$ lors des r premiers tirages et on tire la boule B_r au $(r+1)$-ème tirage » revient à choisir :
   — le numéro i de boule tirée parmi les boules $B_{r+1}, \ldots, B_n$ (il y a $n-r$ choix)
   — le rang des boules $B_1, \ldots, B_{r-1}, B_i$ (il y a $r!$ choix).

   Ainsi $\mathbb{P}(C_r) = \dfrac{(n-r)r!}{n^{r+1}}$.

   En remarquant qu'on peut écrire l'événement $[Y_r = r+1]$ comme la réunion disjointe de r événements de même probabilité, égale à $\mathbb{P}(A_r \cup B_r)$, on trouve que
$$\mathbb{P}(Y_r) = r(\mathbb{P}(A_r) + \mathbb{P}(C_r)) = r\frac{(n-r)r! + \binom{r}{2}(r-1)!}{n^{r+1}} = \frac{r(n-r)r! + \binom{r}{2}r!}{n^{r+1}}$$

7. (a) La variable aléatoire X_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{r-(i-1)}{n}$.

   Elle admet pour espérance $\dfrac{n}{r-i+1}$.

   (b) On se trouve dans le cas où $r = n$. Par linéarité, la variable
$$Y_n = W_1 + \sum_{k=2}^{n} W_k - W_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} X_k$$
   admet une espérance égale à :
$$\mathbb{E}(Y_n) = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   (c) On peut montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{n}$$
   On en déduit que :
$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$
   et ainsi que $\mathbb{E}(Y_n) \sim n \ln n$.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 10

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k = \ell$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. Etudier la convergence de la suite (u_n).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \dfrac{1}{1-u_n}$.
   (a) Déterminer un équivalent de w_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que $u_n = 1 - \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution :

1. — $u_0 = 0; u_1 = \dfrac{1}{2}; u_2 = \dfrac{5}{8}; u_3 = \dfrac{89}{128}$.
   On montre par récurrence que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}, 0 \leqslant u_n < 1$.
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-1)^2}{2} \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
   — La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge. D'après un théorème de point fixe, sa limite vérifie $l = \dfrac{l^2+1}{2} \Leftrightarrow l = 1$
2. (a) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{u_n^2+1}{2}} - \frac{1}{1-u_n} \\ &= \frac{2}{1-u_n^2} - \frac{1}{1-u_n} \\ &= \frac{1}{1+u_n} \end{aligned}$$

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_{n+1} - w_n) = \dfrac{1}{2}$.

   D'après la propriété donnée dans l'énoncé, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) = \dfrac{1}{2}$

   Or $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) = w_n - w_0 = w_n - 1$

   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} w_n = \dfrac{1}{2}$, d'où $w_n \sim \dfrac{n}{2}$.

   (b) Lorsque n tend vers $+\infty$, on a donc :
   $u_n = 1 - \dfrac{1}{w_n} = 1 - \dfrac{1}{\frac{n}{2} + o(n)} = 1 - \dfrac{2}{n} \times \dfrac{1}{1+o(1)} = 1 - \dfrac{2}{n}(1+o(1)) = 1 - \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

SUJET Maths Appliquéees 11

Exercice principal Maths Appliquéees 11

Soit $p \in]0,1[$. Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant
— ou bien une seule marche, avec probabilité p,
— ou bien deux marches, avec probabilité $1-p$.
On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. **Cours :** Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance
   — d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$,
   — d'une variable aléatoire Y fonction affine de X, c'est-à-dire $Y = aX + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche. Ecrire une fonction Python qui prend en entrée un entier n et la probabilité p et renvoie une simulation de la variable aléatoire Z_n.
3. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté d'une marche, et Y_n le nombre de marches franchies.
   (a) Justifier la loi suivie par la variable X_n.
   (b) Exprimer Y_n en fonction de X_n et en déduire l'espérance et la variance de Y_n.
4. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k. Donner les valeurs de p_1, p_2 puis établir une formule de récurrence reliant p_k et p_{k-1} pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
5. En déduire la valeur de p_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Solution :

1. **Cours.**
2.
```python
import numpy.random as rd

def Z(n,p):
        k = 0
        compteur = 0
        while k < n:
                compteur = compteur + 1
                if rd.random() < p:
                        k = k+1
                else :
                        k = k+2
        return compteur
```
3. (a) La variable aléatoire X_n compte le nombre de succès "faire un saut d'une marche" de probabilité p lors de la répétition de n expériences de Bernoulli "Effectuer un saut" réalisées de manière indépendante. On reconnait : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
   (b) $Y_n = 1 \times X_n + (n - X_n) \times 2$ puisque la grenouille effectue X_n sauts d'une marche et $n - X_n$ sauts de deux marches. Ainsi : $Y_n = 2n - X_n$.
   Par linéarité de l'espérance : $E(Y_n) = 2n - E(X_n) = 2n - np = n(2-p)$.
   Par propriété de la variance : $V(Y_n) = (-1)^2 V(X_n) = np(1-p)$.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note U_k l'événement "Sauter d'une marche au k-ième saut" et D_k l'événement "Sauter de deux marches au k-ième saut".
   On a alors : $p_1 = P(U_1) = p$ et $p_2 = P((U_1 \cap U_2) \cup D_1)$. Par incompatibilité des événements :
   $p_2 = P(U_1 \cap U_2) + P(D_1)$, et comme les sauts sont indépendants : $p_2 = p^2 + (1-p) = p^2 - p + 1$.

Puis, pour tout entier $k \geqslant 2$, on définit l'événement M_k : "La grenouille passe par la marche k". Il existe un entier n_0 tel que : $\overline{M_k} = M_{k-1} \cap D_{n_0}$. Par indépendance des sauts :

$$\forall k \geqslant 2, \quad p_k = P(M_k) = 1 - P(\overline{M_k}) = 1 - p_{k-1}(1-p).$$

5. Vu la question précédente, on reconnait que $(p_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique. Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $u_k = p_k - \dfrac{1}{2-p}$ de sorte que $(u_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $p-1$ et de premier terme : $u_1 = p_1 - \dfrac{1}{2-p} = p - \dfrac{1}{2-p} = \dfrac{2p-p^2-1}{2-p}$.
   Ainsi :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = (p-1)^{k-1}\frac{2p-p^2-1}{2-p} + \frac{1}{2-p}.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 11

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive (respectivement strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls (respectivement strictement positifs). On note alors $M \geqslant 0$ (respectivement $M > 0$).
On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est productive si M est positive et s'il existe un vecteur $P \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ strictement positif tel que $P - MP$ soit strictement positif.
Dans tout cet exercice, A désigne une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose ici que si $X - AX \geqslant 0$, alors $X \geqslant 0$. Montrer que $(I_n - A)$ est inversible. Que peut-on dire de $(I_n - A)^{-1}$?
2. Montrer que si $X - AX \geqslant 0$, alors $X \geqslant 0$.

   En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ un vecteur strictement positif tel que $P - AP$ soit strictement positif, on pourra introduire $c = \min \left\{ \dfrac{x_j}{p_j}, 1 \leqslant j \leqslant n \right\} = \dfrac{x_k}{p_k}$.

Solution :

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = AX$. Alors $X - AX = 0$, donc $X - AX \geqslant 0$ et $X - AX \leqslant 0$ soit $(-X) - A(-X) \geqslant 0$.
   D'après l'hypothèse, on en déduit que X et $(-X)$ sont des matrices positives. Donc X est nulle.
   $(I_n - A)X = 0 \Rightarrow X = 0$ donc $(I_n - A)$ est inversible.

   — Soit $X \geqslant 0$, on pose $Y = (I_n - A)^{-1}X$. On a alors $(I_n - A)Y = X \geqslant 0$ donc $Y \geqslant 0$ par hypothèse, et ainsi pour tout $X \geqslant 0$, $(I_n - A)^{-1}X \geqslant 0$. On appelle alors X_k le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la k-ième qui vaut 1. Chaque X_k est positif donc les produits $(I_n - A)^{-1}X_k$ nous permettent de montrer que la matrice $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
   — A est productive donc il existe un vecteur $P \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ strictement positif tel que $U = P - AP$ soit strictement positif. On a alors $(I_n - A)^{-1}U = P > 0$ donc $(I_n - A)^{-1}$ est productive.

2. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

   $X - AX \geqslant 0$ donc pour tout i compris entre 1 et n, $x_i - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}x_j \geqslant 0$.

   En particulier : $0 \leqslant x_k - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}x_j \Leftrightarrow 0 \leqslant x_k - \sum_{j=0}^{n} a_{k,j}\frac{x_j}{p_j}p_j$

   Or pour tout j compris entre 1 et n, $\dfrac{x_j}{p_j} \geqslant \dfrac{x_k}{p_k}$ et $p_j > 0$ donc $\dfrac{x_j}{p_j}p_j \geqslant \dfrac{x_k}{p_k}p_j$.

   En sommant : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}\frac{x_j}{p_j}p_j \geqslant \frac{x_k}{p_k}\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}p_j$ donc $0 \leqslant x_k - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}x_j \leqslant cp_k - c\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j = c\left(p_k - \sum_{j=0}^{n} a_{k,j}p_j\right)$

   or $\left(p_k - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}p_j\right) > 0$ donc $c \geqslant 0$.

   Ceci prouve bien que $X \geqslant 0$.

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECT

Juin 2023

Le bilan de la session 2023 de mathématiques voie T est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 1 et 20. La moyenne s'établit à 9,02 et l'écart-type à 4,91.

Le niveau d'ensemble des candidats reste assez hétérogène : si certaines prestations se sont avérées catastrophiques, il y en a également eu de très brillantes avec des candidats faisant preuve de bonnes capacités de réflexion.

Le jury insiste à nouveau sur sur les points suivants auprès des futur.e.s candidat.e.s et de leurs enseignant.e.s.

- Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes restent incontournables. Notamment, le jury est en droit d'attendre l'esquisse qualitative d'une courbe après avoir établi un tableau de variation.
- Le jury continue de remarquer de grosses lacunes en calcul. De même, les théorèmes du cours doivent être connus avec plus de rigueur : hypothèses précises et conclusions.
- Avec la dernière réforme des programmes, l'informatique a pris une place plus importante. La quasi-totalité des sujets contenait au moins une question d'informatique. Cela sera encore le cas l'an prochain, le but étant d'interroger tous les candidats sur une partie du programme d'informatique. En particulier, il ne faut pas négliger le SQL.
- Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral. Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation. Le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre question, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts.
- La question sans préparation est aussi très importante. Il n'est pas nécessaire de la mener à son terme pour faire bonne impression. Le jury est là encore attentif aux qualités de réflexion des candidats. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, qui avaient complètement raté l'exercice préparé ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.
  Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Voici les sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T 1

Exercice principal T 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$.

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard une poignée de jetons (c'est-à-dire une partie, éventuellement vide, de l'ensemble des jetons). On note N le nombre de jetons tirés et S la somme des numéros de jetons tirés.

1. Question de cours : indépendance de deux variables aléatoires.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par N, puis la loi de N.
3. Ecrire le code d'une fonction Python `simule_S(n)` qui prend un entier n en argument, simule le tirage de la poignée de jetons et renvoie la valeur de S.
4. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le jeton n° i est dans la poignée tirée et à 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de X_i pour $i \in [\![1, n]\!]$.
   (b) Montrer que, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont indépendantes.
5. (a) Exprimer S à l'aide des X_i.
   (b) Déterminer l'espérance de S.

Solution :

1. Question de cours : programme ECT2 p. 6.
2. De manière immédiate N est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
   Alors, par équiprobabilité, pour $k \in [\![0, n]\!]$:
   $$\mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$
   car un tirage favorable est donné par une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments, tandis qu'un tirage possible est une partie d'un ensemble à n éléments et il y en a 2^n (pour chaque élément, on choisit s'il est ou non dans la partie donnée).
3. Une solution est le code suivant :

```python
import numpy.random as rd

def simule_S(n):
    for i in range(1,n+1):
        p=rd.random()
        if p<1/2:
            S=S+i
    return S
```

4. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le jeton n° i est dans la poignée tirée et à 0 sinon.
   (a) La variable X_i est une variable de Bernoulli. Par équiprobabilité des poignées :
   $$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$
   car un tirage favorable revient à se donner une poignée de l'ensemble des jetons privé du jeton n° i, déjà inclus dans la poignée. Ainsi : $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$.

(b) Comme X_i et X_j sont des variables de Bernoulli, elles sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1)$ (les événements $\{X_i = 1\}$ et $\{X_i = 0\}$ sont complémentaires).

Or, d'après la question précédente : $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Par ailleurs : $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$ car se donner une poignée contenant les jetons n° i et j revient, une fois sélectionnés ces deux jetons, à choisir une poignée des $n-2$ jetons restants, c'est-à-dire une partie d'un ensemble à $n-2$ éléments.

On a donc bien $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1)$ et les variables X_i et X_j sont indépendantes.

5. (a) On a $S = \sum_{i=1}^{n} iX_i$.

(b) Comme $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ pour X et Y des variables aléatoires et a et b des réels, une récurrence prouve que :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{E}(X_i)$$

Or, pour tout i, $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}$ d'où :

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathbb{E}(S) = \frac{n(n+1)}{4}}$$

Exercice sans préparation T 1

On dispose d'une base de données regroupant des informations sur les cafés parisiens. Son schéma relationnel est le suivant :

— Cafes (Nom : TEXT, Adresse : TEXT, Arrondissement : INTEGER, Prix_cafe : INTEGER)

Ecrire les requêtes SQL permettant d'afficher :

1. la liste des cafés dans le 14^{e} arrondissement ;
2. le prix moyen du café dans les cafés parisiens. On pourra utiliser la fonction de moyenne AVG() ;
3. le nombre de cafés où le prix du café est à 1 euro. On pourra utiliser la fonction de comptage COUNT().

Solution :

1. Une possibilité est :

```
SELECT *
FROM Cafes
WHERE Arrondissement=14
```

2. Une possibilité est :

```
SELECT AVG(Prix_cafe)
FROM Cafes
```

3. Une possibilité est :

```
SELECT COUNT()
FROM Cafes
WHERE Prix_cafe=1
```

SUJET T 2

Exercice principal T 2

On note I la matrice unité d'ordre 3.

On considère, pour un réel m donné, la matrice : $M = \begin{pmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Cours. Matrice et formule du binôme.
2. (a) Calculer $(M+I)^3$.

   (b) Pour n entier naturel, en déduire M^n en fonction de I, M, M^2 et n.
3. On se propose de vérifier le résultat de la question 2. (b) avec un programme Python.

   (a) Ecrire le code d'une fonction `Puissance(M,n)` qui prend en argument une matrice carrée M d'ordre 3 et un entier naturel n, et qui retourne la puissance $n^{\text{ième}}$ de M.
   On pourra utiliser la commande `np.identity(n)` qui renvoie la matrice identité d'ordre n.

   (b) Compléter le code de la fonction suivante, qui prend en argument un réel m, un entier n et affiche les valeurs de M_m^n calculées par les deux méthodes.

```
import numpy as np

def affichage(m,n):
        I=np.identity(3)
        M_m=np.array([[-1,m,m],[1,-1,0],[-1,0,-1]])
        print("Puissance nieme de M  pour m = ",m)
        print("Par le calcul : ")
        print(.......................)
        print("Par la formule ; ")
        print(........................)
```

4. Montrer que la matrice M est inversible et exprimer la matrice M^{-1} en fonction de I, M et M^2.
5. (a) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.
   Vérifier que si une matrice X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ de $\mathbb{R}$, alors : $Y = P^{-1}X$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre λ.

   (b) La matrice M admet-elle des valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Cours - programme de seconde année p. 4.
2. (a) *Calcul de* $(M+I)^3$:
   Le calcul donne : $M+I = \begin{pmatrix} 0 & m & m \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(M+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & m \\ 0 & -m & -m \end{pmatrix}$ et : $(M+I)^3 = 0$ (matrice nulle d'ordre 3)

(b) En remarquant que : $M=-I+(M+I)$, la formule du binôme donne, vu que $(M+I)^3=0$:

$$\begin{aligned}
M^n &= (-1)^n I + n.(-1)^{n-1}(M+I) + \frac{n.(n-1)}{2}.(-1)^{n-2}(M+I)^2 \\
&= (-1)^n I + (-1)^{n-1}n.M + (-1)^{n-1}n.I + (-1)^n\frac{n.(n-1)}{2}.M^2 + (-1)^n n.(n-1).M + (-1)^n\frac{n.(n-1)}{2}.I \\
&= (-1)^n\frac{n.(n-1)}{2}.M^2 + \left[(-1)^{n-1}n + (-1)^n n.(n-1)\right]M + \left[(-1)^n + (-1)^{n-1}n + (-1)^n\frac{n.(n-1)}{2}\right]I
\end{aligned}$$

soit $M^n = (-1)^n\frac{n.(n-1)}{2}\,.\,M^2 \;+\; (-1)^n n(n-2)\,.\,M \;+\; (-1)^n\frac{(n-1)(n-2)}{2}\,.\,I$

ou $M^n = (-1)^n\left(\frac{n.(n-1)}{2}\,.\,M^2 \;+\; n(n-2)\,.\,M \;+\; \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,.\,I\right)$

3. (a) Programme Python :
Pour calculer la puissance n^{ième} de M, on calcule les puissances successives par une boucle qui multiplie à chaque étape le résultat par M et qui est initialisée à la matrice identité.

```
import numpy as np

def Puissance(M,n):
    Mn=np.identity(3)
    for k in range(1,n+1):
        Mn=Mn.dot(M)
    return Mn
```

(b) On complète le code à l'aide de la fonction `Puissance(M,n)`.

```
import numpy as np

def affichage(m,n):
        I=np.identity(3)
        M_m=np.array([[-1,m,m],[1,-1,0],[-1,0,-1]])
        print("Puissance nieme de M  pour m = ",m)
        print("Par le calcul : ")
        print(Puissance(M_m,n))
        print("Par la formule ; ")
        print((-1)**n*((n*(n-1)/2)*Puissance(M_m,2)+
               n*(n-2)*M_m+((n-1)*(n-2)/2)*I))
```

4. $(M+I)^3=0 \iff M^3+3M^2+3M+I=0 \iff M.\left(-M^2-3M-3I\right)=I$
ce qui montre que : M est inversible et $M^{-1}=-M^2-3M-3I$.

5. (a) A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $\exists P\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B=P^{-1}AP$.

$X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} X\neq 0 \\ A\,.\,X=\lambda\,.\,X \end{cases}$

Alors, pour $Y=P^{-1}.\,X$:

$B\,.\,Y \underset{\substack{Y=P^{-1}.\,X \\ B=P^{-1}AP}}{=} P^{-1}.A\,.\,P\,.\,P^{-1}.X = P^{-1}.A\,.X \underset{\substack{X \text{ vect.} \\ \text{propre de } A \\ \text{associé à } \lambda}}{=} P^{-1}.\lambda\,.X = \lambda\,.\,P^{-1}.X = \lambda\,.Y$ i.e. $B\,.\,Y=\lambda\,.\,Y$

$X\neq 0$ et P^{-1} inversible $\Longrightarrow$ $,P^{-1}.X\neq 0$ i.e. $Y\neq 0$

Par conséquent, $Y=P^{-1}.\,X$ est vecteur propre de B associé à $\lambda\in\mathbb{R}$.

(b)
- $M+I$ ne peut pas être inversible, sinon $(M+I)^3$ le serait.
  Donc il existe $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\neq 0$ tel que $(M+I)\,.X=0$, i.e. $M.X=-X$: ainsi -1 est valeur propre de M.
- $(M+I)^3=0$ implique que $p(x)=(x+1)^3$ est un polynôme annulateur de M.
  Donc toute valeur propre de M est racine de p ; d'où : la seule valeur propre possible de M est -1.
- Si M était diagonalisable, il existerait deux matrices, P inversible et D diagonale, telles que $M=P^{-1}DP$.
  Les termes de la diagonale étant valeurs propres de D, seraient valeurs propres de M (cf **a.**) et D serait $-I$.
  Mais alors : $P^{-1}DP=P^{-1}(-I)P=-P^{-1}I\,P=-I$: absurde, car $M\neq -I$.
  Donc M n'est pas diagonalisable.

Exercice sans préparation T 2

1. Résoudre le plus simplement possible l'inéquation $|x-1|+|x+1| \leqslant 2$.
2. Soit une série statistique définie par $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des fréquences $f_1, f_2, ..., f_n$.

   Trouver l'ensemble E des valeurs réelles de x qui rendent la quantité $\sum_{i=1}^{i=n} f_i(x-x_i)^2$ minimale.
3. L'ensemble E est-il toujours égal à l'ensemble F des valeurs qui rendent minimale la quantité $\sum_{i=1}^{i=n} f_i|x-x_i|$?

Solution :

1. $|x-1|+|x+1|$ représente la somme des distances du point M d'abscisse x aux points d'abscisse 1 et -1 ; donc tous les points du segment $[-1;\ 1]$ sont tels que $|x-1|+|x+1|=2$ tandis que les autres points sont à une distance strictement supérieure à 2 ; donc $E=[-1;\ 1]$.
2. On dérive la fonction f définie par $f(x)=\sum_{i=1}^{i=n} f_i(x-x_i)^2$; on a : $f'(x)=\sum_{i=1}^{i=n} 2f_i(x-x_i)$.

   Cette dérivée s'annule en $m=\sum_{i=1}^{i=n} f_i x_i$ $\left(\text{puisque } \sum_{i=1}^{i=n} f_i=1\right)$.

   Il s'agit bien d'un minimum d'aprés le signe de la dérivée (- puis +). Donc $E=\{m\}$.
3. Non pas toujours .

   En s'inspirant de 1., on choisit : $n=2$ et $x_1=-1$ et $x_2=1$ avec $f_1=f_2=\frac{1}{2}$. Alors $F=[-1;1]$.

SUJET T 3

Exercice principal T 3

Soit n un entier strictement positif. On lance n fois un dé parfait. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de 5 (respectivement de 6) obtenus au cours de ces n lancers.

1. Cours. Définition de variables aléatoires discrètes finies indépendantes.
2. Déterminer les lois de X et de Y, puis la loi de la variable aléatoire $X+Y$.
3. (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
   (b) Écrire en Python une fonction `experience(n)` simulant le lancer de n dés et retournant le nombre de cinq et le nombre de six obtenus.
4. (a) Calculez le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) ; expliquez son signe.
   (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Expliquez.
   (c) La variable Y est-elle une fonction affine de X ?
5. Trouver des valeurs de n telles que la fréquence d'apparition d'un 5 ou d'un 6 soit égale à $\frac{1}{3}$, à $0,01$ près, avec une probabilité au moins égale à $0,9$.

Solution :

1. Cours : Indépendance mutuelle de n variables aléatoires - programme de seconde année p.10.
2. - variable aléatoire X [resp. Y] : nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes "lancer d'un dé", la probabilité de succès (obtenir cinq [resp. six]) étant égale à 1/6.
   Donc X et Y suivent $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.
   - variable aléatoire $X+Y$: nombre de cinq et de six lors des n lancers indépendants : le succès consiste à obtenir un résultat dans le sous-ensemble $\{5, 6\}$ de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la probabilité de succès est $2/6 = 1/3$.
   Donc $X+Y$ suit $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$.
3. (a) Loi conjointe du couple (X, Y) :
   - Univers (cas possibles) : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$; nombre de cas possibles : $\text{Card}(\Omega) = 6^n$.
   - Évènement (X=i, Y=j) avec i et j dans $[[0; n]]$ tels que $i+j \leqslant n$; nombre d'éléments de (X=i, Y=j)$\subset \Omega$:
   nombre de cas favorables = nombre d'emplacements parmi les n cases contenant les i cinq $\times$ nombre d'emplacements parmi les $n-i$ cases restantes contenant les j six $\times$ nombre de façons de remplir les $n-i-j$ cases restantes avec des nombres autres que cinq et six
   $= \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{j} \times 4^{n-i-j}$ ou : $\dfrac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} \times 4^{n-i-j}$ sous forme symétrique.
   Donc : $p_{ij} = \mathbb{P}((X=i, Y=j)) = \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{j} \times \dfrac{4^{n-i-j}}{6^n} = \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{j} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{i+j} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-i-j}$
   ou sous forme symétrique : $p_{ij} = \dfrac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} \left(\dfrac{1}{6}\right)^{i+j} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-i-j}$

   (b) Programme Python. Une possibilité :

```python
import numpy.random as rd

def experience(n):
    x=0 ; y=0
```

```python
    for i in range(n):
        lancer=rd.randint(1,7)
        if lancer == 5:
            x+=1
        elif lancer == 6 :
            y+=1
    return(x,y)
```

La fonction `randint` figurant dans le calcul de la variable « lancer » est utilisée en deuxième année mais ne figure pas dans les commandes exigibles. Dans le cas hautement improbable où elle n'ait pas été vue, une variante possible est l'affectation : `lancer=int(np.floor(6*rd.random()))+1`.

```python
import numpy.random as rd

def experience(n):
    x=0 ; y=0
    for i in range(n):
        lancer=int(np.floor(6*rd.random()))+1
        if lancer == 5:
            x+=1
        elif lancer == 6 :
            y+=1
    return(x,y)
```

4. (a) Coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) :

— Comme X et Y suivent $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = n \times \frac{1}{6}$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = n \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}\, n$

— Comme $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$, $\mathbb{V}(X+Y) = n \times \frac{2}{9} = \frac{2}{9}\, n$.

$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) \implies \operatorname{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\left[\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)\right]$.

Donc : $\operatorname{Cov}(X, Y)) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{9}\, n - 2 \times \frac{5}{36}\, n\right] = -\frac{1}{36}\, n$.

— D'où : le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) est $\rho_{X,Y} = \dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y} = \dfrac{-\frac{1}{36}\, n}{\left(\sqrt{\frac{5}{36}\, n}\right)^2} = -\dfrac{1}{5}$.

Le signe négatif du coefficient de corrélation linéaire indique que globalement X et Y varient en sens contraires ; c'est logique : plus il est sorti de 5, moins il y a de places pour des 6...

(b) Si les variables X et Y étaient indépendantes le coefficient de corrélation serait nul. Ce n'est pas le cas. Autre façon de voir que X et Y ne sont pas indépendantes : si X est égal à n, Y doit être nul...

(c) Si Y était une fonction affine de X, on aurait $|\rho_{X,Y}| = 1$, ce qui n'est pas le cas.

5. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, $\mathbb{P}(|f_n - p| < \varepsilon) \geqslant 1 - \dfrac{pq}{n\varepsilon^2}$; on a, puisque $p = \dfrac{1}{3}$:

$\mathbb{P}\left(\left|f_n - \frac{1}{3}\right| < 0,01\right) \geqslant 1 - \dfrac{2.10^4}{9n}$.

Pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à $0,9$, il suffit que $1 - \dfrac{2.10^4}{9n} \geqslant 0,9$, c.à d. : $n \geqslant 22223$.

Exercice sans préparation T 3

Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M^2 - 5M + 4I = 0\}$.

1. Montrer que E a au moins 4 éléments.
2. Déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.
3. Montrer que E est infini.

Solution :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
2. Les valeurs propres de d'une matrice de E sont dans $\{1;4\}$ (car le polynôme $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est annulateur). D'autre part toute matrice de la forme PDP^{-1}, avec des 1 ou des 4 sur la diagonale de D, et P inversible est trivialement dans E.
   Donc les diagonalisables de E sont de la forme PDP^{-1} avec D diagonale avec des coefficients diagonnaux appartenant à $\{1;4\}$ et P inversible.
3. Pour tout t réel, E contient les matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. En effet M_t est diagonalisable et s'écrit $P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$ et vérifie donc trivialement $M^2 - 5M + 4I = 0$. On peut aussi faire le calcul direct évident.

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques BL

Juin 2023

Le bilan de la session 2023 de mathématiques voie BL est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 4 et 19. La moyenne s'établit à 11,08 et l'écart-type à 4,05.

Le jury a fortement apprécié les qualités d'expression et la finesse de raisonnement de certains candidats qui ont fait forte impression.

A contrario, certains candidats se sont révélés approximatifs, au niveau du calcul, mais surtout au niveau de la connaissance des théorèmes du cours.

Le jury aimerait insister sur les points suivants :

- La question de cours n'est pas à négliger. Il faut y répondre précisément.
- Le jury a parfois rencontré des erreurs étonnantes dans les calculs de dérivée.
- Quand on introduit un objet, comme par exemple une intégrale, il faut penser à justifier avec toute la rigueur qu'il est bien défini.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons les candidats pour leur combattivité, qui s'est particulièrement exprimée lors des questions sans préparation, où certains ont pu redresser une situation bien compromise.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, qu'ils ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET BL 1

Exercice principal BL 1

1. Question de cours. Soit X une variable aléatoire de densité φ.
   Définition de l'espérance de X si elle existe. Expression de $\mathbb{E}(X)$.

   Soit la fonction $\quad g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$
2. Etude de g.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de g ? Quel est le signe de g ?
   Etudier les variations de g.
   (b) A l'aide d'un encadrement de $g(x)$ quand $x > 0$, étudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
   De façon analogue, étudier $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)$.
   (c) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On note encore g ce prolongement.
   Que vaut $g(0)$?
   On admet que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Que vaut $g'(0)$?
   Donner l'allure de la courbe de g.
3. Soit $k > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} kg(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Justifier qu'il existe une valeur de k telle que f soit une densité de probabilité. Le réel k prend cette valeur dans la suite de l'exercice.
   (b) Soit X une variable aléatoire de densité f.
   Montrer que X admet une espérance que l'on déterminera.
   Montrer que X admet une variance,
   Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = (X-1)^2$. Montrer que Y admet une espérance.

Solution :

1. Question de cours. X admet une espérance si les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ convergent ou encore si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(-t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ ou encore $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} t\varphi(-t)\,\mathrm{d}t$.
   Soit la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
2. Etude de g.
   (a) $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc continue sur le segment $[x, 2x]$ si $x > 0$ et sur le segment $[2x, x]$ si $x < 0$. g est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Si $x > 0, h$ est positive sur $[x, 2x]$ donc $g(x) \geqslant 0$.
   Si $x < 0, h$ est négative sur $[2x, x]$ donc $\displaystyle\int_{2x}^{x} h(t)dt \leqslant 0$ et par suite $g(x) \geqslant 0$.

Donc g est positive sur $\mathbb{R}^*$.
Soit H une primitive de h sur $\mathbb{R}_+^*$ (sur $\mathbb{R}_-^*$). Alors $g(x) = H(2x) - H(x)$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (de même sur $\mathbb{R}_-^*$) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x}\,(1 - e^{x})}{x} < 0$$

Donc g est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

(b) $\forall x > 0 \quad \forall t \in [x, 2x] \quad e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$ donc

$$e^{-2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leqslant g(x) \leqslant e^{-x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \quad \text{soit} \quad e^{-2x} \ln 2 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x} \ln 2$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
$\forall x < 0 \quad \forall t \in [2x, x] \quad e^{-x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-2x}$ donc

$$e^{-x} \int_{2x}^{x} \frac{dt}{t} \geqslant -g(x) \geqslant e^{-x} \int_{2x}^{x} \frac{dt}{t} \quad \text{soit} \quad e^{-2x} \ln 2 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x} \ln 2$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

(c) L'encadrement lorsque $x < 0$ prouve que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = \ln 2$. L'encadrement lorsque $x > 0$ prouve que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \ln 2$.
Donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = \ln 2$
On admet que g prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$g'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g'(x) = -1$$

La courbe présente au point de coordonnées $(0, \ln 2)$ une tangente de pente -1.

3. Probabilités. Soit $k > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} kg(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) f est positive sur $\mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall A > 0 \quad \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant k \ln 2 \int_0^A e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant k \ln 2 \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant k \ln 2$$

$A \mapsto \displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante majorée donc a une limite finie quand A tend vers $+\infty$.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et il existe k réel strictement positif tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Pour cette valeur de k, f est une densité de probabilité.

(b) Soit X une variable aléatoire de densité f. Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Soit $A > 0$. En intégrant par parties (car g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\int_0^A x f(x)\,\mathrm{d}x = k \left(\left[\frac{1}{2} x^2 g(x) \right]_0^A - \frac{1}{2} \int_0^A x^2 g'(x)\,\mathrm{d}x \right) = k \left(\frac{1}{2} A^2 g(A) - \frac{1}{2} \int_0^A x \left(e^{-2x} - e^{-x} \right)\,\mathrm{d}x \right)$$

On peut soit intégrer encore par parties, soit chercher une primitive de $x \mapsto x\left(e^{-2x} - e^{-x}\right)$ de la forme $x \mapsto (ax+b)e^{-2x} - (\alpha x+\beta)e^{-x}$ On obtient : $\displaystyle\int_0^A x f(x) dx = \frac{k}{2}\left(A^2 g(A) + (A/2 + 1/4)e^{-2A} - (A+1)e^{-A} + 3/4\right)$
On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ (en utilisant l'encadrement $0 \leqslant g(A) \leqslant e^{-A} \ln 2$). Donc l'espérance existe et : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{3k}{8}}$.

Pour montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, on procède comme dans a) : $A \mapsto \displaystyle\int_0^{A} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est croissante majorée. (On aurait pu utiliser le même méthode pour la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$).

On en déduit l'existence du moment d'ordre 2, puis de la variance. $Y = X^2 - 2X + 1$.

Comme X admet un moment d'ordre 2, on en déduit (par linéarité de l'espérance) que Y admet une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(X) + 1$.

Exercice sans préparation BL 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AP.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.
3. A est-elle diagonalisable ? est-elle inversible ?

Solution :

1. $AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
2. En notant $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ les colonnes de P, on remarque que :

$$AC_1 = 2C_1, \quad AC_3 = 2C_3, \quad AC_2 = 0C_2 \quad \text{et} \quad AC_4 = -C_4$$

   Comme les C_k sont non nuls, on en déduit que :
   — 0 est valeur propre et C_2 est un vecteur propre associé ;
   — -1 est valeur propre et C_4 est un vecteur propre associé ;
   — 2 est valeur propre et C_1 et C_3 sont des vecteurs propres associés.
   En notant E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ, on déduit de ce qui précède que :
   $\dim E_0 \geq 1$, $\dim E_{-1} \geq 1$ et $\dim E_2 \geq 2$ car la famille (C_1, C_3) est libre.
   Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, nécessairement : $\dim E_0 = \dim E_{-1} = 1$, $\dim E_1 = 2$
   et $E_0 = \mathrm{Vect}\,(C_2)$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}\,(C_4)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_3)$
3. A est donc diagonalisable et n'est pas inversible car 0 est valeur propre.

SUJET BL 2

Exercice principal BL 2

1. Question de cours. Convergence et somme d'une série géométrique.
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T ($T > 0$).
   Soit x un réel strictement positif.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n(x) = \displaystyle\int_0^{nT} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Exprimer $S_n(x)$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^{T} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Etudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que : $\forall t \geqslant 0 \quad |f(t)| \leqslant M$.
   (c) On suppose que f est positive. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.
   Exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{T} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (d) Soit E_T l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant T pour période. Soit φ l'application qui à f élément de E_T associe la fonction $F = \varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
   $$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$$
   Justifier que pour tout $(f, g) \in E_T^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R} \quad \varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$.
3. Soit c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \quad c(x) = \cos x$ et s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \quad s(x) = \sin x$.
   Soit $E = \left\{\lambda c + \mu s / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Muni de l'addition et du produit par un scalaire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   On appelle encore φ la restriction de φ à E.
   (a) On admet que
   $$\int_0^{2\pi} e^{-xt}\cos t\,\mathrm{d}t = x\int_0^{2\pi} e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t = x\left(1 - e^{-2\pi x}\right) - x^2\int_0^{2\pi} e^{-xt}\cos t\,\mathrm{d}t$$
   En déduire les fonctions $C = \varphi(c)$ et $S = \varphi(s)$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que φ est un isomorphisme de E sur $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   (c) Montrer les égalités admises à la question a).

Solution :

1. Question de cours. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et alors
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} q^n = \lim_{N\to+\infty}\frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T (T > 0)$ Soit x un réel strictement positif.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est continue sur $[0, nT]$.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-xt}f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T e^{-x(u+kT)}f(u+kT)du = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-xkT} \int_0^T e^{-xu}f(u)du$$

Comme $x > 0$ et $T > 0$, on a $0 < e^{-xu} < 1$ donc :

$$S_n(x) = \frac{1 - e^{-xnT}}{1 - e^{-xT}} \int_0^T e^{-xu}f(u)du \text{ et } \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{1}{1 - e^{-xT}} \int_0^T e^{-xu}f(u)du$$

(b) f st continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc bornée sur $[0, T]$, donc $\exists M > 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad |f(t)| \leqslant M$ et comme f est T-périodique, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [nT, (n+1)T] \quad |f(t)| \leqslant M$. Donc, il existe un réel M strictement positif tel que $\quad \forall t \geqslant 0 \quad |f(t)| \leqslant M$.

(c) On suppose f positive, donc $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant M$

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^A e^{-xt}f(t)dt \leqslant \int_0^A e^{-xt}Mdt \leqslant M \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$$

$A \mapsto \displaystyle\int_0^A e^{-xt}f(t)dt$ est croissante majorée donc a une limite finie quand $A \to +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt = \frac{1}{1 - e^{-xT}} \int_0^T e^{-xt}f(t)dt$

(d) Soit E_T l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant T pour période. Soit φ l'application qui à f élément de E_T associe la fonction $F = \varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$. D'après la linéarité de l'intégration : $\forall (f, g) \in E_T^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$.

3. (a) On admet que

$$\int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t dt = x \int_0^{2\pi} e^{-xt} \sin t dt = x\left(1 - e^{-2\pi x}\right) - x^2 \int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t dt$$

Alors :

$$C(x) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi x}} \int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos(t)dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi x}} \frac{x\left(1 - e^{-2\pi x}\right)}{1 + x^2} = \frac{x}{1 + x^2}$$

tandis que :

$$S(x) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi x}} \int_0^{2\pi} e^{-xt} \sin(t)dt = \frac{1}{1 + x^2}$$

(b) La famille (c, s) est libre et $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(c), \varphi(s)) = \text{Vect}(C, S)$. De plus (C, S) est libre donc $\dim E = 2 = \dim(\text{Im}(\varphi))$. Enfin l'application φ est linéaire donc φ est un isomorphisme de E sur $\text{Im}(\varphi)$.

(c) Par des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t \, \mathrm{dt} &= \left[\sin t e^{-xt}\right]_0^{2\pi} + x \int_0^{2\pi} e^{-xt} \sin t \, \mathrm{dt} \\
&= 0 + x\left(\left[-\cos t e^{-xt}\right]_0^{2\pi} - x \int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t \, \mathrm{dt}\right) \\
&= x\left(1 - e^{-2\pi x}\right) - x^2 \int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t \, \mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Exercice sans préparation BL 2

1. Vérifier que : $\dfrac{1}{k(k^2-1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{2}{k} + \dfrac{1}{k+1}\right)$.
   Montrer qu'il existe un réel a (à déterminer) tel que les relations :
   $$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{a}{k(k^2-1)}$$
   définissent une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
2. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif qui vérifie :
   $$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$
   Soit alors Y la variable aléatoire définie par $Y = \left\lfloor \dfrac{X}{2} \right\rfloor$.
   Quelle est la loi de Y ?
3. Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et la déterminer.
4. Montrer que Y admet une espérance.

Solution :

1. On vérifie facilement que :
   $$\forall k \in \mathbb{N} - \{0,\ 1\} \quad \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right)$$
   Les relations $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \qquad P(X=k) = \dfrac{a}{k(k^2-1)}$
   définissent une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
   si et seulement si $a \geq 0$ et la série de terme général converge et sa somme vaut 1.
   Soit $n \geqslant 2$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{a}{k(k^2-1)}$. Alors
   $$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{a}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{a}{4} + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$
   d'où :
   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{4}$$
   et donc : $a = 4$.
2. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=k) = P(\{X=2k\} \bigcup \{X=2k+1\})$.
   Les deux événements $\{X=2k\}$ et $\{X=2k+1\}$ sont disjoints donc
   $$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Y=k) = \frac{4}{2k(4k^2-1)} + \frac{4}{(2k+1)(4k^2+4k)}$$
3. Soit $n \geq 2$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} kP(X=k)$. Alors
   $$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{4}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+1}\right)$$
   qui tend vers 3 quand $n \to +\infty$.
   Donc X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 3$.

4. Soit $n \geq 2$ et $V_n = \sum_{k=2}^{n} kP(Y = k)$. Alors

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2} 2kP(X = 2k) + \frac{1}{2}(2k+1)P(X = 2k+1) \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} P(X = 2k+1)$$

La première somme tend vers $\mathbb{E}(X)/2$ et la deuxième a une limite finie appartenant à $]0, 1/2[$.
Donc Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) \in \left] 1, \frac{3}{2} \right[$.

SUJET BL 3

Exercice principal BL 3

1. Question de cours : Définition d'une densité de probabilité.

   Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   Soit α un réel non nul et f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\alpha(x) = \begin{cases} x^{-\alpha} \ln x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. (a) Etudier f_α selon les valeurs de α : limite en $+\infty$, variations de f_α.
   (b) Préciser l'allure de la courbe représentative de f_α au voisinage du point d'abscisse 1.
3. (a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
   (b) Montrer que f_α est une densité de probabilité si et seulement si $\alpha = 2$.
   Tracer la courbe représentative de f_2.
   Soit X_2 une variable aléatoire de densité f_2. La variable X_2 admet-elle une espérance ?
4. (a) Montrer que, si $\alpha > 1$, il existe un réel k_α tel que $k_\alpha f_\alpha$ soit une densité de probabilité.
   (b) Soit X_α une variable aléatoire de densité $k_\alpha f_\alpha$.
   Pour quelles valeurs de α admet-elle une espérance ? une variance ?
   (c) Soit la variable aléatoire $Y_\alpha = X_\alpha^2$.
   Montrer que Y_α est une variable à densité. Pour quelles valeurs de α admet-elle une espérance ? une variance ?

Solution :

1. f est une densité de probabilité si f est définie sur $\mathbb{R}$, positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. (a) Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = 0$ (croissances comparées). Si $\alpha \leqslant 0$ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$.
   f_α est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et : $\forall x \in [1, +\infty[\;\; f'_\alpha(x) = \dfrac{1 - \alpha \ln x}{x^{\alpha+1}}$. De plus :
$$f'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) > 1 & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ \exp\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) < 1 & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$
   La fonction f_α est constante nulle sur $]-\infty, 1]$. De plus, si $\alpha > 0, f_\alpha$ est strictement croissante sur $\left[1, \exp\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\exp\left(\dfrac{1}{\alpha}\right), +\infty\right[$.
   (b) $f'_{\alpha,g}(1) = 0$ et $f'_{\alpha,d}(1) = 1$ donc la courbe au point d'abscisse 1 présente un point anguleux.
   On peut chercher la position de la courbe par rapport à la demi-tangente de pente 1 .
   On pose $x = 1 + u$ avec $u \geqslant 0$. Alors
$$\begin{aligned} f_\alpha(1+u) &= (1+u)^{-\alpha} \ln(1+u) \\ &= \left(1 - \alpha u + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} u^2 + o\left(u^2\right)\right)\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)\right) \\ &= u - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) u^2 + \left(\frac{2 + 6\alpha + 3\alpha^2}{6}\right) u^3 + o\left(u^3\right) \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, $f_\alpha(1+u) = u - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) u^2 + o\left(u^2\right)$. Ainsi, la courbe est au-dessus de la demi tangente si $\alpha + \frac{1}{2} < 0$ et au-dessous si $\alpha + \frac{1}{2} > 0$.

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $f_\alpha(1+u) = u - \frac{1}{24}u^3 + o\left(u^3\right)$ et la courbe est au-dessous de la demi-tangente.

3. (a) La fonction f_α est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $A > 1$. En intégrant par parties :

$$F_\alpha(A) = \int_1^A x^{-\alpha} \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \ln x\right]_1^A - \int_1^A \frac{x^{-\alpha}}{1-\alpha} \,\mathrm{d}x = \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ln A - \frac{1}{(1-\alpha)^2}\left(A^{1-\alpha} - 1\right)$$

Si $\alpha \leqslant 1$, $\lim\limits_{A \to +\infty} F_\alpha(A) = +\infty$, tandis que si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{A \to +\infty} F_\alpha(A) = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$.

Donc $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x) \,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(b) La fonction f_α est continue positive sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{A \to +\infty} F_\alpha(A) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$. Donc f_α est une densité de probabilité si et seulement si $\alpha = 2$.

Pour le tracé de la courbe représentative de f_2 : le maximum de f_2 est $\frac{1}{2e}$ et est atteint en $\sqrt{e}$.

Soit X_2 une variable aléatoire de densité f_2. Alors X_2 n'admet pas d'espérance car $\int_1^{+\infty} x x^{-2} \ln x \,\mathrm{d}x$ diverge (d'après 3.a)).

4. (a) Si $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x) \,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{1}{(1-\alpha)^2}$, donc en posant $k_\alpha = (1-\alpha)^2$, $k_\alpha f_\alpha$ est une densité de probabilité.

(b) D'après la question 3.a) $\int_1^{+\infty} x^n k_\alpha f_\alpha(x) \,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha - n > 1$ donc X_α admet une espérance si et seulement si $\alpha > 2$ et une variance si et seulement si $\alpha > 3$.

(c) Y_α prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$. Soit F sa fonction de répartition. Alors

$$\forall y \in]-\infty, 1] \quad F(y) = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in [1, +\infty[\quad F(y) = P\left(X^2 \leqslant y\right) = F_\alpha(\sqrt{y})$$

Donc la fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ donc Y_α est une variable à densité. Une densité f est alors définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} k_\alpha f_\alpha(\sqrt{y}) & \text{si} \quad y \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus :

$$\int_1^{+\infty} y^n f(y) \,\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty} x^{2n} \times \frac{1}{2x} \times k_\alpha f_\alpha(x) \times 2x \,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} x^{2n} k_\alpha f_\alpha(x) \,\mathrm{d}x$$

qui converge si et seulement si $\alpha - 2n > 1$. Donc Y_α admet une espérance si et seulement si $\alpha > 3$ et une variance si et seulemeny si $\alpha > 5$.

Exercice sans préparation BL 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b deux réels.
Soit M_n la matrice carrée d'ordre $2n$ dont les coefficients $m_{i,j}$ sont définis par :

$$m_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } i+j \text{ est pair} \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Cas $n = 1$.
   La matrice M_1 est-elle inversible ? Quel est le rang de M_1 ?
   Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de M_1 ? La matrice M_1 est-elle diagonalisable ?
2. Cas $n = 2$.
   Mêmes questions pour M_2.

Solution :

1. $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
   M_1 est inversible si et seulement si $a^2 \neq b^2$.
   Si $a = b = 0$, $\mathrm{rg}\,(M_1) = 0$
   Si $a^2 = b^2$ avec $a \neq 0$, $\mathrm{rg}\,(M_1) = 1$
   Si $a^2 \neq b^2$,$\mathrm{rg}\,(M_1) = 2$.
   — Si $a = b = 0$, 0 est la seule valeur propre, $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est le sous espace propre associé et M_1 est diagonalisable.
   — Si $a = b$ avec $a \neq 0$, deux valeurs propres distinctes :
     - 0 de sous espace propre associé $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$;
     - $2a$ de sous espace propre associé $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

     Alors M_1 est diagonalisable.
   — Si $a = -b \neq 0$, deux valeurs propres distinctes :
     - 0 de sous espace propre associé $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$;
     - $2a$ de sous espace propre associé $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

     Alors M_1 est diagonalisable.
   — Si $a^2 \neq b^2$, deux valeurs propres distinctes :
     - $a - b$ de sous espace propre associé $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$;
     - $a + b$ de sous espace propre associé $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

     Alors M_1 est diagonalisable.
2. $M_2 = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$.
   La matrice M_2 est jamais inversible car son rang est au plus 2.
   Si $a = b = 0$, $\mathrm{rg}\,(M_1) = 0$.
   Si $a^2 = b^2$ avec $a \neq 0$, $\mathrm{rg}\,(M_1) = 1$.
   Si $a^2 \neq b^2$, $\mathrm{rg}\,(M_1) = 2$.
   — Si $a = b = 0$, 0 est la seule valeur propre, $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est le sous espace propre associé et M_2 est diagonalisable.
   — Si $a = b$ avec $a \neq 0$, deux valeurs propres distinctes :

- 0 de sous espace propre associé $\operatorname{Ker} M$ de dimension 3 ;
- $4a$ de sous espace propre associé $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi M_2 est diagonalisable.

— Si $a = -b$ avec $a \neq 0$, deux valeurs propres distinctes :
- 0 de sous espace propre associé $\operatorname{Ker} M$ de dimension 3 ;
- $4a$ de sous espace propre associé $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Alors M_2 est diagonalisable.

— Si $a^2 \neq b^2$, trois valeurs propres distinctes :
- 0 de sous espace propre associé $\operatorname{Ker} M$ de dimension 2 ;
- $2(a-b)$ de sous espace propre associé $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$;
- $2(a+b)$ de sous espace propre associé $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Alors M_2 est diagonalisable.

3. Si on a le temps : cas n quelconque.

SUJET BL 4

Exercice principal BL 4

1. Question de cours : énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite (de loi $\mathcal{N}(0,1)$).
   (a) Montrer que X admet des moments de tous ordres et déterminer un entier k_n tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}\left(X^{n+2}\right) = k_n \mathbb{E}\left(X^n\right)$$
   où $\mathbb{E}\left(X^n\right)$ désigne le moment d'ordre n de X.
   (b) Que vaut $\mathbb{E}\left(X^n\right)$ si n est impair ? Que vaut $\mathbb{E}\left(X^4\right)$?
3. Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = X + 1$.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   (b) Calculer les moments d'ordre 2 et 4 de Y.
4. On dit qu'une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante m si :
   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{|Z_n - m| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$
   Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de même loi que Y.
   (a) On pose $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$ Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 1 .
   (b) On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k^4$ Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 10 .

Solution :

1. Question de cours : énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit X une variable aléatoire admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$.
   $$\forall a \quad \mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\}) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$
2. Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Soit φ une densité de X :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Soit A et B deux réels tels que $A < B$. En intégrant par parties, φ et les fonctions monômes étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:
   $$\int_A^B x^{n+2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^B x^{n+1} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left[-x^n\varphi(x)\right]_A^B + (n+1)\int_A^B x^n\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$
   Par croissances comparées de l'exponentielle et de la fonction puissance :
   $$\lim_{A\to-\infty} A^n\varphi(A) = 0 \lim_{B\to+\infty} B^n\varphi(B) = 0$$
   donc, sous réserve d'existence des moments :
   $$\mathbb{E}\left(X^{n+2}\right) = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B x^{n+2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)\mathbb{E}\left(X^n\right)$$

Comme X admet des moments d'ordre 1 et d'ordre 2, on en déduit par récurrence que X admet des moments de tous ordres et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}\left(X^{n+2}\right) = (n+1)\mathbb{E}\left(X^n\right)}$$

(b) Si n est impair, comme φ est paire $\mathbb{E}\left(X^n\right) = 0$ (ou encore par récurrence en utilisant $\mathbb{E}(X) = 0$).
Par ailleurs : $\mathbb{E}\left(X^0\right) = 1$ donc $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 1 \times \mathbb{E}\left(X^0\right) = 1$; que l'on retrouve avec $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 1 + 0$.
Enfin : $\mathbb{E}\left(X^4\right) = (2+1)\mathbb{E}\left(X^2\right) = 3$

3. Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = X + 1$.
   (a) Y est une variable gaussienne de moyenne 1 et de variance 1 (de loi $\mathcal{N}(1,1)$).
   (b) $Y^2 = X^2 + 2X + 1$. Donc : $\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) + 2\mathbb{E}(X) + 1 = 2$.
   $Y^4 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$ donc $\mathbb{E}\left(Y^4\right) = 3 + 0 + 6 + 0 + 1 = 10$.

4. (a) Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}\left(Z_n\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(Y_k\right) = 1$.
   Les Y_k sont indépendantes donc $\mathbb{V}\left(Z_n\right) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\left(Y_k\right) = \dfrac{1}{n}$.
   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\{|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

   Or $\dfrac{1}{n\varepsilon^2}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini donc (Z_n) converge en probabilité vers 1.

   (b) Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}\left(T_n\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(Y_k^4\right) = 10$.
   Les Y_k^4 sont indépendantes donc $\mathbb{V}\left(T_n\right) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\left(Y_k^4\right) = \dfrac{1}{n}\mathbb{V}\left(Y^4\right)$. On n'a pas besoin de la valeur de $\mathbb{V}\left(Y^4\right)$, son existence suffit. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\{|T_n - 10| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{V\left(Y^4\right)}{n\varepsilon^2}$$

   Or $\dfrac{V\left(Y^4\right)}{n\varepsilon^2}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini donc (T_n) converge en probabilité vers 10 .

Exercice sans préparation BL 4

Soit l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel $\langle\cdot;\ \cdot\rangle$. On identifie $\mathbb{R}^3$ avec $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On note C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de A.

1. Que peut-on dire de la famille (C_1, C_2, C_3) dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$?
2. En déduire la valeur de A^2.
3. Soit λ une valeur propre de A et X une matrice colonne propre associée. Calculer A^2X en fonction de λ et X.

   Montrer que λ appartient à l'ensemble $\{-1, 1\}$.

   On admet qu'une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable. En utilisant la trace de A, préciser les valeurs propres de A et une matrice D diagonale représentant l'endomorphisme associé à A dans une base de vecteurs propres.

Solution :

1. Les colonnes $C_1,\ C_2,\ C_3$ sont de norme 1 et deux à deux orthogonales donc la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
2. A est symétrique donc $A^2 = AA^T = (< C_i, C_j >)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} = I_3$.
3. Soit λ une valeur propre de A et X une matrice colonne propre associée. Alors $A^2X = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$. Par ailleurs, $A^2X = I_3X = X$. Donc $\lambda^2 X = X$ et comme $X \neq 0$ car X est un vecteur propre : $\lambda^2 = 1$. Donc, $\lambda \in \{-1, 1\}$.

   Comme A est diagonalisable en tant que matrice symétrique, il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$ et où les λ_k sont les valeurs propres de A.

   Par ailleurs :

   $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,\left(PDP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\,\left(DPP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\,(D)$. Or $\mathrm{Tr}\,(A) = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ et chaque λ_k vaut -1 ou 1 donc il y a deux « 1 » et un « -1 » sur la diagonale de D.