Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECG Maths approfondies

Juin 2024

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de belles qualités de logique et de présentation. On trouve bien sûr une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 2 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes dans la connaissance du cours ainsi que de grosses faiblesses en calcul.

A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances, faisaient preuve de finesse dans leurs raisonnements et démontraient un certain recul sur les concepts étudiés.

La moyenne est de 11,20 et l'écart-type est de 3,93.

Le jury aimerait insister sur les points suivants.

- Comme annoncé à l'issue de la session 2023, et dans la continuité du mouvement inauguré par la dernière réforme des programmes, l'informatique a eu une place encore plus importante cette année. Quasiment toutes les planches comptaient une question d'informatique, que ce soit dans l'exercice principal ou lors de la question sans préparation. Cette évolution avait été annoncée en amont et a bien été prise en compte par les candidats. Le jury n'a remarqué qu'une minorité de candidats qui avaient totalement délaissé cette partie du programme. Une telle attitude a systématiquement été sanctionnée.
  Les candidats doivent s'attendre pour l'année prochaine, et les suivantes, à ce que l'informatique garde la place qu'elle occupe désormais. Chaque planche proposée aux candidats continuera à comporter au moins une question concernant le programme d'informatique. Ces questions permettent d'évaluer l'esprit pratique et de relier les mathématiques à des cas concrets.
- Le jury apprécie particulièrement les candidats attentifs à la cohérence de leurs résultats. Cela est notamment le cas quand cela permet, par exemple, à des candidats de repérer des erreurs de calcul. Des candidats ayant ainsi d'eux-mêmes corriger leurs erreurs ont été récompensés.
- Les candidats doivent savoir citer précisément les résultats de leur cours avec toutes les hypothèses nécessaires. A ce propos, le jury a été frappé notamment par la méconnaissance de la définition d'un estimateur convergent. Les candidats nous donnant simplement une condition suffisante afin d'avoir un estimateur convergent.
  Pour étudier la monotonie d'une suite ou d'une fonction, les relations d'ordre suffisent souvent. Il est inutile de se lancer dans des gros calculs.

Nous avons encore trop souvent des récurrences mal posées ou qui ne servent à rien...

- Le jury attend des candidats qu'ils soient en mesure d'illustrer leurs raisonnements par des schémas, et qu'ils soient également capables de tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.
  Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrit à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET Maths Approfondies 1

Exercice principal Maths Approfondies 1

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y + 1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ où $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. Dans toute la suite M désigne un entier naturel et Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \min(Y, M).$$

1. Question de cours : rappeler la loi géométrique ainsi que l'espérance et la variance associées.
2. Déterminer la loi de Z ? On considère désormais les polynômes $(T_n)_{n \geqslant 0}$ définis par la relation de récurrence :

$$T_0(X) = 1, \; T_1(X) = X \text{ et } T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, T_n est de degré égal à n et déterminer son coefficient dominant.
   On note dans la suite $a_{n,k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, les coefficients du polynôme T_n. Ainsi :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k.$$

   On convient désormais que $a_{n,k} = 0$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n < k$.
4. Ecrire une fonction **Python** ayant comme paramètres d'entrée un entier n et un réel x et qui renvoie $T_n(x)$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
6. Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) q^n$ converge. Puis établir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) q^n = \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}$$

7. Soit $x \in [-1, 1]$. On pose

$$H_M(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(a_{Z,k}) x^k.$$

   Montrer que $H_M(x)$ est bien défini et que

$$\lim_{M \to +\infty} H_M(x) = p \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}.$$

Solution :

1. p23 ECappro1
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k > M$, on a
$$\mathbb{P}(Z = k) = 0.$$
Si $k < M$, on a
$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k.$$
Si $k = M$, on a
$$\mathbb{P}(Z = M) = \mathbb{P}(Y \geqslant M) = 1 - \sum_{k=0}^{M-1} P(Y = k) = 1 - \sum_{k=0}^{M-1} pq^k = q^M.$$
3. Par récurrence, on montre facilement que pour tout $n \geqslant 0$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
4.

```python
def cheb(n, x):
  res = 0
  if (n == 0):
     res = 1
  elif (n == 1):
     res = x
  elif (n >= 2):
     res = 2*x*cheb(n-1, x)- cheb(n-2, x)

  return res
```

5. On procède par récurrence. Pour $n = 0$ ou 1 l'affirmation est vraie. Supposons qu'elle est vraie jusqu'à un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors :
$$\begin{array}{rcl} T_{n+1}(\cos(\theta)) & = & 2\cos\theta T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta) \\ & = & 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ & = & \cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta) = \cos((n+1)\theta). \end{array}$$
6. Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. Ainsi
$$|T_n(x)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leqslant 1.$$
D'où
$$\forall n \in \mathbb{N}, |T_n(x)q^n| \leqslant q^n.$$
Comme la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^n$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)q^n$ est absolument convergente.

7. Soit $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} q^{k+2}T_{k+2}(x) = 2x\sum_{k=0}^{n} q^{k+2}T_{k+1}(x) - \sum_{k=0}^{n} q^{k+2}T_k(x).$$

D'où

$$\sum_{k=2}^{n+2} q^{k}T_{k}(x) = 2xq\sum_{k=1}^{n+1} q^{k}T_{k}(x) - q^2\sum_{k=0}^{n} q^{k}T_k(x).$$

On fait tendre $n \to +\infty$ (tous les termes convergent) :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} q^{k}T_{k}(x) = 2xq\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k}T_{k}(x) - q^2\sum_{k=0}^{+\infty} q^{k}T_k(x).$$

En posant

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k T_k(x)$$

on a

$$F(x) - qx - 1 = 2xq(F(x) - 1) - q^2F(x).$$

D'où

$$F(x) = \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}.$$

8. On pose pour tout $k \leqslant N$, $Y_k = a_{Z,k}$. Puisque $Y_k = 0$ pour $k > M$, la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_k)x^k$ est finie et

$$H_M(x) = \sum_{k=0}^{M} \mathbb{E}(Y_k)x^k.$$

On a

$$\begin{aligned}
H_M(x) &= \sum_{k=0}^{M} \mathbb{E}(a_{Z,k}x^k) = \mathbb{E}(\sum_{k=0}^{M} a_{Z,k}x^k) = \mathbb{E}(\sum_{k=0}^{Z} a_{Z,k}x^k) \\
&= \mathbb{E}(T_Z(x)) = \sum_{k=0}^{M} P(Z=k)T_k(x) = \sum_{k=0}^{M-1} pq^kT_k(x) + q^MT_M(x) \\
&= p\sum_{k=0}^{M-1} T_k(x)q^k + q^MT_M(x).
\end{aligned}$$

Or

$$q^MT_M(x) \to 0 \text{ car } |q^MT_M(x)| \leqslant q^M.$$

Par ailleurs, la somme $\sum_{k=0}^{M-1} T_k(x)q^k$ converge vers

$$\sum_{k=0}^{+\infty} T_k(x)q^k = \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}.$$

D'où le résultat.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 1

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer BA.

Solution :
On note $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \mapsto R^2$ les applications canoniquement associées à A et B respectivement.
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
L'énoncé donne : $f \circ g(e_2) = e_2$ et $f \circ g(e_3) = e_3$. D'où $g(f \circ g(e_2)) = g(e_2)$ et $g(f \circ g(e_3)) = g(e_3)$. On montre ensuite que la famille $(g(e_2), g(e_3))$ est libre.
Soit en effet $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$ag(e_2) + bg(e_3) = 0 \Longleftrightarrow af(g(e_2)) + bf(g(e_3)) = 0 \Longleftrightarrow ae_2 + be_3 = 0.$$

Ainsi $(g(e_2), g(e_3))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$, dont les vecteurs sont invariants par $f \circ g$, qui est donc l'identité.
Ainsi $BA = I_2$.

SUJET Maths Approfondies 2

Exercice principal Maths Approfondies 2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$

1. Cours : donner la définition de la convergence en loi.
2. On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la suite $(n(1-M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi. Préciser la loi limite.
3. (a) Représenter graphiquement la fonction $\varphi : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

   (b) Montrer que $\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. On suppose que X_1 admet pour densité :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi(x^2+1)}.$$

   (a) Déterminer la loi de $\arctan(X_1)$.

   (b) Écrire en Python une fonction simulant la réalisation d'une variable aléatoire de densité f.

   (c) Montrer que la suite $\left(\frac{n}{M_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi. Préciser la loi limite.

Solution :

1. Cours : cf programme EC maths approfondies page 21.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $n(1-M_n)$ étant à valeurs dans $[0,n]$, on a

$$\forall x < 0,\ \mathbb{P}(n(1-M_n) \leqslant x) = 0.$$

   Soit $x \geqslant 0$. Par indépendance de $X_1, \ldots, X_n$, on a :

$$n \geqslant x \Rightarrow \mathbb{P}(n(1-M_n) \leqslant x) = \mathbb{P}\left(M_n \geqslant 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - e^{-x}$ donc la suite $(n(1-M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

3. (a) L'étude de la fonction φ montre qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée nulle. Elle est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, respectivement égale à $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

(b) La fonction arctan est dérivable en 0 donc :

$$\arctan(u) \underset{u \to 0}{=} \arctan(0) + \arctan'(0)u + o(u) \underset{u \to 0}{=} u + o(u).$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on trouve que :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'après la question 3.(a), $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x > 0$ donc :

$$\arctan(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. (a) Remarquons que $\arctan(X_1)$ est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi :

$$\forall t \leqslant -\frac{\pi}{2},\ \mathbb{P}(\arctan(X_1) \leqslant t) = 0 \text{ et } \forall t \geqslant \frac{\pi}{2},\ \mathbb{P}(\arctan(X_1) \leqslant t) = 1.$$

Soit $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\mathbb{P}(\arctan(X_1) \leqslant t) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant \tan t) = \int_{-\infty}^{\tan t} \frac{\mathrm{d}x}{\pi(x^2+1)} = \frac{t + \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{t - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

On en déduit que $\arctan(X_1)$ suit la loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(b) On utilise le résultat de la question précédente (simulation par inversion) :

```
import numpy as np

def simule_X1():
    u = np.pi*np.random() - np.pi/2
    return np.tan(u)
```

(c) Soit $t \leqslant 0$.

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leqslant t\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leqslant 0\right) = \mathbb{P}(M_n \leqslant 0) = \frac{1}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $t > 0$.

$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leqslant t\right) = \mathbb{P}\left(M_n \geqslant \frac{n}{t}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < \frac{n}{t}\right) = 1 - \left(\int_{-\infty}^{\frac{n}{t}} \frac{\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)}\right)^n = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\right.\right.$$

D'après la question 3.(b),

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{n}{t}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{t}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leqslant t\right) = 1 - e^{-\frac{t}{\pi}}.$$

La suite $\left(\dfrac{n}{M_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\pi}$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une réelle symétrique et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P'(\lambda) \neq 0$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que :

$$A = P(S).$$

Solution :
Puisque P' ne s'annule pas, il est de signe de constant (d'après le T.V.I.). Il en résulte que P est strictement monotone. Comme c'est un polynôme, ses limites en $\pm\infty$ sont infinies. Donc P est une bjiection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème spectral, A est diagonalisable : $A = QDQ^{-1}$ avec D diagonale et Q inversible (on peut même choisir Q orthogonale). Il suffit de choisir $S = QP^{-1}(D)Q^{-1}$ où $P^{-1}(D) = \mathrm{diag}(P^{-1}(d_{1,1}), \cdots, P^{-1}(d_{n,n}))$.
Soit maintenant S' une matrice symétrique vérifiant $A = P(S')$. Il en résulte que tout vecteur propre de S' est aussi vecteur propre de A. Soit $E'_1, \cdots, E'_m$ les sous-espaces propres de S'. Chacun de ces sous-espaces propres de S' est inclus dans un sous-espace propre de A : $E'_i \subset E_i$. Comme $E'_1 \oplus \cdots \oplus E'_m = \mathbb{R}^n$ on en déduit que $E'_i = E_i$ pour tout $i \leqslant m$. Donc S' et A ont les mêmes sous-espaces propres. Il en résulte que $D_0 = Q^{-1}S'Q$ est aussi diagonale. Or $P(S') = A$. Donc $QP(D_0)Q^{-1} = A = QDQ^{-1}$. Donc $P(D_0) = D$. Puisque P est un bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, forcément $D_0 = P^{-1}(D)$ où $P^{-1}(D)$ est la matrice diagonale ci-dessus. Ainsi, $S' = QD_0Q^{-1} = S$.

SUJET Maths Approfondies 3

Exercice principal Maths Approfondies 3

On remarque qu'à une station de métro londonien, la durée moyenne entre deux métros consécutifs est de 10 minutes.

On fixe un instant 0, on note X_1 la variable aléatoire égale à la durée (en minutes) entre l'instant 0 et le passage du premier métro et, pour tout entier naturel k non nul, X_k la variable aléatoire égale à la durée (en minutes) entre le passage du k-métro et du suivant. On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forme une famille de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi exponentielle.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k le temps (en minutes) de passage du k-ème métro depuis l'instant 0 (on convient que $S_0 = 0$). Pour un instant $t > 0$, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de métros qui sont passés entre l'instant 0 et l'instant t (compris).

1. Cours : loi de somme de n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.
2. Quel est le paramètre de la loi exponentielle suivies par les variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$?
3. Écrire le code d'une fonction en Python prenant en argument un flottant $t > 0$ (inutile de vérifier cette condition) et simulant la variable aléatoire N_t.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que S_n est une variable à densité dont on déterminera une densité.
5. Montrer que la variable aléatoire N_t suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
6. Un passager arrive à la station à l'instant $t > 0$ et attend le prochain métro. On note A_t la variable aléatoire égale à son temps d'attente (en minutes).
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leqslant S_{n+1}) = 10n + 10 - t$.
   (b) En déduire que le temps moyen d'attente du métro est de 10 minutes.

Solution :

1. Cours : cf programme EC maths approfondies page 16.
2. D'après l'énoncé, la loi est d'espérance $\dfrac{1}{\lambda} = 10$; son paramètre est donc $\lambda = \dfrac{1}{10}$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ X_k \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{10}\right).$$

3.

```python
import numpy.random as rd
def simule_N(t):
    n = 0
    s = 0
    while s < t:
        s += rd.exponential(10)
        n += 1
    return n-1
```

4. On trouve immédiatement que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Puisque :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lambda X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1),$$

la variable aléatoire λS_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes (par le lemme des coalitions) suivant la loi $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$. La variable aléatoire λS_n suit donc la loi $\gamma(n)$ par stabilité de la loi γ pour la somme. On montre sans difficulté que la variable aléatoire S_n est à densité, de densité donnée par :

$$f_n : x \mapsto \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $[N_t = n] = [S_n \leqslant t < S_{n+1}] = [S_n \leqslant t] \setminus [S_{n+1} \leqslant t]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_n \leqslant t, S_{n+1} \leqslant t) \\
&= \mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant t) \\
&= \int_{-\infty}^{t} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{t} f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x - \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n}}{n!} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties la première intégrale (les fonctions $u : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ et $v : x \mapsto \dfrac{\lambda^{n-1}x^n}{n!}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,t]$), on trouve que :

$$\int_0^t \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\lambda^{n-1}x^n}{n!}\lambda e^{-\lambda x}\right]_0^t + \int_0^t \frac{\lambda^{n-1}x^n}{n!}\lambda^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} + \int_0^t \frac{(\lambda x)^n}{n!} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(N_t = n) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ puis que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

6. (a) Sous l'hypothèse que l'événement $[S_n < t \leqslant S_{n+1}]$ est réalisé, $A_t = S_{n+1} - t$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leqslant S_{n+1}) = \mathbb{E}(S_{n+1} - t) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_k) - t = 10n + 10 - t.$$

(b) Remarquons que $([S_n < t \leqslant S_{n+1}])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système (quasi-)complet d'événements. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_n < t \leqslant S_{n+1})\mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leqslant S_{n+1}) &= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(N_t = n)[10n + 10 - t] \\
&= 10 - t + 10\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(N_t = n) \\
&= -t + 10 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^{n-1}t^n}{(n-1)!}e^{-\lambda t} \\
&= -t + 10 + t\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\lambda^n t^n}{n!}e^{-\lambda t} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 10.
\end{aligned}$$

Puisque A_t est une variable aléatoire positive et puisque la série

$$\sum_{n\in N} \mathbb{P}(S_n < t \leqslant S_{n+1})\mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leqslant S_{n+1})$$

converge, la variable aléatoire X_t admet une espérance, égale à 10.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes et non certaines. On pose $Z = X + Y$ et on suppose que $\mathbb{P}(X = 0) < \mathbb{P}(Y = 0)$ et que $\mathbb{P}(Z > 4) = 0$ et $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 3) = 0$ et que

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2},\ \text{ et } \mathbb{P}(Z = 4) = \frac{1}{6}.$$

On définit la fonction

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k,\ t \in \mathbb{R}.$$

On définit de même G_Y et G_Z.

1. Montrer que G_X, G_Y et G_Z sont des polynômes en t et que
$$G_Z = G_X G_Y.$$
2. Trouver les lois de X et de Y.

Solution :

1. Puisque $\mathbb{P}(Z > 4) = 0$ on a forcément $P(X > 4) = P(Y > 4) = 0$. Ainsi, les sommes définissant G_X, G_Y et G_Z sont des sommes finies (uniformément en t) et les trois fonctions sont polynomiales. On a par indépendance de X et Y :
$$\begin{aligned} G_Z(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X + Y = k)t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell \geqslant 0, m \geqslant 0 \text{ et } m+\ell=k} \mathbb{P}(X = m) \cap \mathbb{P}(Y = \ell)t^k, \\ &= (\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = m)t^m)(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = \ell)t^\ell) \\ &= G_X(t)G_Y(t) \end{aligned}$$
(on observe que toutes les sommes impliquées ici sont finies, et qu'on peut donc les permuter).
2. Les fonctions G_X, G_Y et G_Z sont des polynômes. De plus $G_Z = G_X G_Y$. Ainsi, G_X et G_Y divisent G_Z. De plus,
$$G_Z(t) = \frac{1}{6}(2 + 3t^2 + t^4) = \frac{1}{6}(t^2 + 1)(t^2 + 2). \tag{1}$$
Donc $G_X(t) = \dfrac{1}{2}(t^2 + 1)$ et $G_Y(t) = \dfrac{1}{3}(t^2 + 2)$ car $P(X = 0) \leqslant P(Y = 0)$ ($G_X \neq 1$, $G_Y \neq 1$ car X et Y ne sont pas certaines).

SUJET Maths Approfondies 4

Exercice principal Maths Approfondies 4

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice A.

1. Question de cours : caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide des dimensions des sous-espaces propres.
2. (a) Ecrire une fonction Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires. *On pourra représenter les vecteurs par des types array.*

   (b) Ecrire une fonction Python prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est vecteur propre de A.
3. (a) Vérifier que les vecteurs $(-1, 2, 0)$, $(0, 1, -1)$ et $(1, 0, -1)$ sont des vecteurs propres de f.

   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. (a) Ecrire un programme Python permettant de déterminer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 (bornes incluses).

   (b) Pour N un entier naturel non nul, calculer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre $-N$ et N (bornes incluses).
5. Soit N un entier naturel non nul. Une expérience consiste à choisir au hasard de manière indépendante N vecteurs à coefficients entiers dans $[\![-N, N]\!]^3$.

   (a) Quelle est la probabilités p_N d'obtenir au moins un vecteur propre de A parmi ces N vecteurs ?

   (b) Quelle est la limite de p_N quand N tend vers $+\infty$.

Solution :

1. EC2p8

2. (a)

```python
import numpy as np
def colineaires(U,V):
    matrice = np.array([U,V])
    return np.linalg.matrix_rank(matrice)<2
```

(b) On propose (pas la seule solution).

```python
def vp_A(U):
    if U==[0,0,0]:
        return False
    else:
        AU=[-4*U[0]-3*U[1]-3*U[2],2*U[1],6*U[0]+3*U[1]+5*U[2]] # ou np.dot(A
        return colineaires(AU,U)
```

3. (a) On calcule :

- $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\boxed{\text{vecteur propre associé à la valeur propre}}$
- $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\boxed{\text{vecteur propre associé à la valeur propre}}$
- $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\boxed{\text{vecteur propre associé à la valeur pro}}$

(b) Les deux premiers vecteurs forment une famille libre ; l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2. Donc, en utilisant la question de cours, $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

4. (a)

```python
def compte_vp_A():
    compteur = 0
    for x in range(-10,11):
        for y in range(-10,11):
            for z in range(-10,11):
                if vp_A([x,y,z]):
                    compteur +=1
    return compteur
```

(b) Pour la valeur propre -1, on compte les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$ avec $k \in [\![-N, N]\!]$ et $k \neq 0$.
Il y en a $2N$.

Pour la valeur propre 2, on compte les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha + \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$ avec contraintes :

- Première contrainte : $-N \leqslant \alpha \leqslant N$.
- Deuxième contrainte : $-N \leqslant \beta \leqslant N$.
- Troisième contrainte : $-N \leqslant -2\alpha + \beta \leqslant N$, c'est-à-dire $-N + 2\alpha \leqslant \beta \leqslant N + 2\alpha$.

  Pour connaître la quantité totale, on distingue les cas selon le signe de α.
  - Si $\alpha < 0$, la troisième contrainte donne $-N \leqslant \beta \leqslant N + 2\alpha$.
    Il y a donc $N + 2\alpha - (-N) + 1 = 2N + 2\alpha + 1$ valeurs de β possibles.
  - Si $\alpha = 0$, il y a $2N$ valeurs de β possibles.
  - Si $\alpha > 0$, la troisième contrainte donne $-N + 2\alpha \leqslant \beta \leqslant N$ et il y a $2N - 2\alpha + 1$ valeurs de β.

  Au total il y a : $\displaystyle\sum_{\alpha=-N}^{-1} \Big(2N + 2\alpha + 1\Big) + 2N + \sum_{\alpha=1}^{N} \Big(2N - 2\alpha + 1\Big) = 2\sum_{\alpha=1}^{N} \Big(2N - 2\alpha + 1\Big) + 2N$

  $\boxed{4N + 2N^2 = 2N(N+2)}$

5. (a) Pour un vecteur : $p_v = \dfrac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}$.

   Par indépendance, la probabilités qu'aucun vecteur ne soit propre est : $\boxed{p_N = 1 - \left(1 - \dfrac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)^N}$

   (b) $\dfrac{2N(N+2)}{(2N+1)^3} \underset{N\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2N^2}{8N^3}$ donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \dfrac{2N(N+2)}{(2N+1)^3} = 0$

   Ainsi, $N \ln\left(1 - \dfrac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{N\to+\infty} p_N = e^{-\frac{1}{4}}}$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 4

Un élève prépare trois concours. Il a une probabilité $p \in [0,1]$ de réussite pour chacun des trois. Il pense que s'il se présente aux trois concours, il a une probabilité $3p$ d'intégrer. Trouver les valeurs de p pour lesquelles l'erreur que fait cet élève soit inférieure à 10%.

Solution :

1. Soit X le nombre de succès de l'élève au concours. X est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres 3 et p. L'évenement A considéré est l'évenement $(X \geqslant 1)$.

   On calcule $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (1-p)^3$.

   Notons E l'erreur commise par l'élève. On a $E = 3p - \mathbb{P}(A) = p^2(3-p)$ (l'erreur est effectivement positive !). De plus, $E \leqslant 0.1 \iff p^2(3-p) \leqslant 0.1$.

   Considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(p) := p^3 - 3p^2 + 0.1$. f est dérivable, et $f'(p) = 3p(p-2) < 0$ pour $p \in]0,1]$. On trace le tableau de variations :

p	0		p_0		1
$f'(p)$	0		$-$		
$f(p)$	0.1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1.9

   f, étant strictement décroissante, réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f(1), f(0)] = [-1.9, 0.1]$. f et aussi continue, donc par théorème des valeurs intermédiaires, f atteint une fois et une seule la valeur 0, en p_0. Ainsi, l'ensemble des valeurs p solution est l'intervalle $[0, p_0]$.

2. *Question subsidiaire :* Proposer un programme Python pour déterminer une valeur approchée de p_0. (les examinateurs donneront l'encadrement une fois le programme rédigé, puis pourront demander d'interpréter le résultat).

   On peut par exemple proposer un algorithme de dichotomie.

```python
def dichotomie(f,a,b,e):
    delta = 1
    while delta > e:
        m = (a + b) / 2
```

```python
        delta = abs(b - a)
        if f(m) == 0:
            return m
        elif f(a) * f(m)  > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b

print(dichotomie(lambda p: p**3 -3*(p**2) +0.1, 0, 1, 1e-3))
>>> (0.1884765625, 0.18896484375)
```

En conlusion, si l'élève a entre 0 et 18% de chances de réussir l'un des concours, il triple ses chances en présentant les 3 concours (avec 10% d'erreur au plus).

SUJET Maths Approfondies 5

Exercice principal Maths Approfondies 5

1. Question de cours : énoncer les théorèmes de comparaison pour les intégrales généralisées.

   Soit f la fonction donnée par
$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Déterminer l'ensemble de définition de f.
3. (a) Montrer que f est positive et préciser sa monotonie.
   (b) En déduire que f admet une limite à droite et à gauche en 0.
   (c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - f(x) \leqslant -x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$
   (d) En déduire la limite de f à droite en 0 .
4. Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
5. On pose pour $x > 0$:
$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$$
   Montrer que :
$$\forall x > 0 \quad \varphi(x+1) = \varphi(x)$$
   Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Déterminer un équivalent à f en -1^+.

Solution :

1. Question de cours : p18 EC1 maths approfondies
2. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*

   Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & \sin t^x = \mathrm{e}^{x\ln(\sin t)} \end{array}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi \in C^0\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

$\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^x$, or $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^x \,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > -1$.

Par comparaison, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$ converge ssi $x > -1$.

f est définie sur $]-1, +\infty[$.

3. (a) *Montrer que f est positive et préciser sa monotonie.*

$\forall x \in]-1, +\infty[,\ \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ \varphi(t) \geqslant 0$.

Comme $\frac{\pi}{2} > 0$, par positivité de l'intégrale, f est positive sur $]-1, +\infty[$.

Soit $(x, y) \in]-1, +\infty[^2$ tels que $x < y$

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \sin^x(t) \geqslant \sin^y(t)$$

On conclut encore par positivité de l'intégrale que f est décroissante.

(b) *En déduire que f admet une limite à droite et à gauche en* 0

Conséquence de la monotonie.

(c) *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente et que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - f(x) \leqslant x \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln(\sin(t))\ dt$$

$t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue et négative sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\ln(\sin t) = \ln(t + o(t)) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t) + o(1) \underset{0}{\sim} \ln(t)$$

Or $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t)\ dt$ converge donc par comparaison $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt$ est convergente

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad 0 \leqslant f(0) - f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \mathrm{e}^{x\ln(\sin t)})\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} -x\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - f(x) \leqslant -x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t$$

(d) *En déduire la limite de f à droite en* 0

Par encadrement, nous obtenons

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} = f(0)$$

4. *Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.*

$$
\begin{aligned}
f(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sin^x(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos^2(t)\big)\sin^x(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\cos t \sin^x(t)}^{\uparrow} \underbrace{\cos t}_{\downarrow}\ \mathrm{d}t \\
&= f(x) - \left[\frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1}\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1}\,(-\sin t)\ \mathrm{d}t \\
&= f(x) - \frac{1}{x+1} f(x+2)
\end{aligned}
$$

D'où $\boxed{(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)}$

5. *On pose pour $x > 0$,*

$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$$

Montrer que

$$\forall x > 0,\ \varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x - 1 \in]-1, +\infty[$.

$\varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x) = xf(x-1)f(x) = \varphi(x)$. D'où $\varphi(n) = \varphi(1)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(1) = 1\cdot f(1)f(0) = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) = \dfrac{\pi}{2}}$

6. *Déterminer un équivalent à f en -1^+.*

$\forall x > 0 \quad \dfrac{\pi}{2} = xf(x)f(x-1)$. Or $f(x) \underset{0^+}{\sim} f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $f(x-1) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$ d'où

$\boxed{f(x) \underset{-1^+}{\sim} \dfrac{1}{x+1}}$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 5

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que :

$$\forall n \geqslant 1 : \quad P([X_n = 1]) = P([X_n = -1]) = \frac{1}{2}$$

Pour tout entier non nul n on pose :

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$$

1. Ecrire un programme `Python` qui prend en entrée une entier n et retourne une réalisation de la variable aléatoire W_n .

2. Montrer que la suite $\big(E\left(|W_n|\right)\big)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

3. En déduire que la suite $\big(E\left(|W_n|\right)\big)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Solution :

1.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul(n):
    W = 0
    for k in range(1, n+1):
        u = 2 * rd.binomial(1, 0.5) - 1
        W+=u/k
    return W
```

2. $W_{n+1} = W_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ et d'aprés la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned}
E\left(|W_{n+1}|\right) &= E\left(|W_{n+1}| \mid X_{n+1} = 1\right) P\left(X_{n+1} = 1\right) + E\left(|W_{n+1}| \mid X_{n+1} = -1\right) P\left(X_{n+1} = -1\right) \\
&= \frac{1}{2} E\left(\left|W_n + \frac{1}{n+1}\right|\right) + \frac{1}{2} E\left(\left|W_n - \frac{1}{n+1}\right|\right)\Bigg) \\
&\geqslant \frac{1}{2} E\left(|2W_n|\right) = E\left(|W_n|\right)
\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire donc la suite $\left(E\left(|W_n|\right)\right)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

3. On a : $0 \leqslant E\left(|W_n|\right) \leqslant \left(E\left(W_n^2\right)\right)^{1/2}$ du fait que : $V\left(|W_n|\right) = E\left(W_n^2\right) - \left(E\left(|W_n|\right)\right)^2 \geqslant 0$.

   W_n étant centrée on a :

   $$E\left(W_n^2\right) = V\left(W_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} V\left(X_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

   La suite $\left(E\left(|W_n|\right)\right)_{n \geqslant 1}$ est donc croissante et majorée et, de ce fait, converge.

SUJET Maths Approfondies 6

Exercice principal Maths Approfondies 6

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $s \in]0,+\infty[$ les séries

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k)\frac{s^k}{k!} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k)^2\frac{s^k}{k!}$$

sont absolument convergentes. Dans toute la suite, pour tout $\lambda \in]0,+\infty[$, X_λ désigne une variable aléatoire discrète qui suit une loi de Poisson de paramètre λ et on pose

$$Y_\lambda = \frac{X_\lambda - \lambda}{\lambda}.$$

1. Question de cours : rappeler la loi de Poisson, l'espérance et la variance associées.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la variable aléatoire $\varphi(X_\lambda)$ admet une espérance et une variance.
   On pose dans la suite
   $$\forall \lambda \in]0,+\infty[,\ H(\lambda) = \mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)).$$
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la série
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$
   est absolument convergente et en déduire que la variable aléatoire $X_\lambda\varphi(X_\lambda)$ admet une espérance.
4. Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon \in]-1,1[$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
   $$|(\lambda+\varepsilon)^k - \lambda^k - k\varepsilon\lambda^{k-1}| \leqslant \frac{1}{2}k(k-1)\varepsilon^2(\lambda+1)^{k-2}.$$
   (on convient que $t^0 = 1$ pour tout $t \in]0,+\infty[$).
5. En déduire que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que
   $$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ H'(\lambda) = \mathbb{E}\left(\varphi(X_\lambda)Y_\lambda\right).$$
6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. En considérant la fonction
   $$Q(t) = \mathbb{E}\left((\varphi(X_\lambda) - H(\lambda) + tY_\lambda)^2\right) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$
   montrer que
   $$\mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)) \geqslant \lambda H'(\lambda)^2.$$

Solution :

1. Voir programme.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{P}(X_\lambda = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$
D'après les hypothèses de l'exercice, la série
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \mathbb{P}(X_\lambda = k)$$
est absolument convergence. En appliquant le théorème de transfert, on en déduit que $\varphi(X_\lambda)$ admet une espérance et que
$$H(\lambda) = \mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \mathbb{P}(X_\lambda = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \ \frac{\lambda^k}{k!}.$$
De même $\varphi(X_\lambda)^2$ admet une espérance et donc $\varphi(X_\lambda)$ admet une variance.
3. Soit $s > \lambda$ fixé. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\left|\varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right| = \left|\varphi(k) \frac{s^k}{k!}\right| (\frac{\lambda}{s})^k k.$$
Etant donné que la série $\sum \varphi(k) \dfrac{s^k}{k!}$ est absolument convergente, la suite $(\varphi(k) \dfrac{s^k}{k!})_{k \geqslant 0}$ converge vers 0 ; elle est donc majorée en valeur absolue par une constante $M > 0$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\left|\varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right| \leqslant M(\frac{\lambda}{s})^k k.$$
La série à droite est absolument convergente. On conclut par comparaison que la série
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$
converge absolument et donc converge. Par théorème de transfert on en déduit que la variable aléatoire $X_\lambda \varphi(X_\lambda)$ admet une espérance et
$$\mathbb{E}(X_\lambda \varphi(X_\lambda)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\varphi(k) \mathbb{P}(X_\lambda = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$
4. L'inégalité est clairement vraie pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons que $k \geqslant 2$. On considère sur $[-1, 1]$ la fonction
$$h(x) = (\lambda + x)^k,\ x \in [-1, 1].$$

On a $h(0)=\lambda^k$ et $h'(0)=k\lambda^{k-1}$. De plus

$\forall x\in[-1,1],\ |h''(x)|=k(k-1)|\lambda+x|^{k-2}\leqslant k(k-1)(|\lambda|+|x|)^{k-2}\leqslant k(k-1)(|\lambda|+1)^{k-2}$.

En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, on en déduit que pour tout $\varepsilon\in]-1,1[$

$$|h(\varepsilon)-h(0)-h'(0)\varepsilon|\ \leqslant \frac{1}{2!}k(k-1)(|\lambda|+1)^{k-2}\varepsilon^2.$$

5. Posons $F(\lambda)=e^{\lambda}H(\lambda)$. On a

$$F(\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi(k)\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}|F(\lambda+\varepsilon)-F(\lambda)-\varepsilon\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi(k)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}| &= |\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi(k)\frac{(\lambda+\varepsilon)^k-\lambda^k-k\varepsilon\lambda^{k-1}}{k!}|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi(k)|\frac{|(\lambda+\varepsilon)^k-\lambda^k-k\varepsilon\lambda^{k-1}|}{k!}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}|\varphi(k)|\frac{(\lambda+1)^{k-2}}{(k-2)!}.\end{aligned}$$

On montre comme dans la question 3 que la série

$$\sum_{k=2}^{+\infty}|\varphi(k)|\frac{(\lambda+1)^{k-2}}{(k-2)!}$$

converge. Et on a

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{F(\lambda+\varepsilon)-F(\lambda)}{\varepsilon}=\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi(k)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Donc F est dérivable en λ et

$$F'(\lambda)=\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi(k)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Il en résulte que H est aussi dérivable en λ et

$$H'(\lambda)=e^{-\lambda}F'(\lambda)-e^{-\lambda}F(\lambda)=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi(k)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}-H(\lambda)$$

En comparant avec la formule de $\mathbb{E}(X_\lambda\varphi(X_\lambda))$ on obtient :

$$H'(\lambda)=\frac{\mathbb{E}(X_\lambda\varphi(X_\lambda))}{\lambda}-\mathbb{E}(\varphi(X_\lambda))=\mathbb{E}(Y_\lambda\varphi(X_\lambda)),$$

d'où le résultat.

6. Observons que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \mathbb{E}(Y_\lambda^2)t^2 + 2\mathbb{E}((\varphi(X_\lambda) - H(\lambda))Y_\lambda)t + \mathbb{E}\left((\varphi(X_\lambda) - H(\lambda))^2\right) \\ &= \mathbb{V}(Y_\lambda)t^2 + 2\mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)Y_\lambda)t + \mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)), \\ &= \frac{1}{\lambda}t^2 + 2H'(\lambda)t + \mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\mathbb{E}(Y_\lambda) = 0$. Comme Q est un trinôme qui ne change pas de signe, son descriminant est négatif, c'est-à-dire

$$H'(\lambda)^2 \leqslant \frac{1}{\lambda}\mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)).$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 6

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe α dans $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ tel que :
$$f(\alpha + \frac{1}{2}) = f(\alpha)$$
2. Plus généralement, montrer que pour tout n entier non nul il existe α_n dans $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ tel que :
$$f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n)$$
3. Ecrire une fonction Python qui prend en entrée f et n et qui sort une approximation de α_n à 10^{-2} près.

Solution :

1. Soit g telle que
$$g(t) = f(t + \frac{1}{2}) - f(t)$$
g est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ avec $g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$
du fait que $f(0) = f(1)$).
D'après le théorème des valeurs intermédiaires g s'annule sur $[0, \frac{1}{2}]$ et l'existence de α est établie.
2. Soit g_n définie sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ par
$$g_n(t) = f(t + \frac{1}{n}) - f(t)$$
Supposons par l'absurde que g_n ne s'annule pas sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ et supposons alors $g_n > 0$ par exemple.
On a alors :
$g(\frac{k}{n}) > 0$ pour tout k compris entre 0 et $n-1$.
Ainsi :
$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) > 0$ (somme téléscopique). Contradiction.

3.

```python
def alpha(f,n):
    k=1
    while (f((k+1)/n)-f(k/n))*(f(1/n)-f(0))>0 :
        k+=1
    a=(k-1)/n
    b=k/n
    while b-a>0.01:
        c=(a+b)/2
        if (f(a+1/n)-f(a))*((f(c+1/n)-f(c)))<0:
            b=c
        else :
            a=c
    return a
```

SUJET Maths Approfondies 7

Exercice principal Maths Approfondies 7

On considère deux suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On suppose toutes ces variables mutuellement indépendantes.

1. Cours : densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n^2.
3. Soit $x \in]0,1]$. Montrer la convergence et calculer l'intégrale :
$$h(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{tx - t^2}}.$$
On pourra réaliser le changement de variable $t = \dfrac{x}{2}(\sin(u)+1)$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n^2 + Y_n^2$ admet une densité g. Déterminer une expression de $g(x)$ pour tout $x \leqslant 1$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = 1$ si $X_n^2 + Y_n^2 \leqslant 1$ et 0 sinon et $S_n = \dfrac{4}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.
On admet que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
   (a) Écrire en Python une fonction prenant en argument un entier n non nul et simulant la variable S_n.
   (b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable dont on déterminera la loi.
   (c) Comment peut-on choisir n pour que S_n soit une approximation de π à 10^{-5}-près avec une probabilité supérieure à 90% ?

Solution :

1. Cours : cf programme EC maths approfondies page 16.
2. On trouve sans difficulté la fonction de répartition de X_n :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X_n^2 \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On en déduit sans difficulté aussi que X_n^2 est à densité, donnée par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1]}(x).$$

3. Comme proposé par l'énoncé, on considère la fonction $\varphi : u \mapsto \frac{x}{2}(\sin u + 1)$. On vérifie que φ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Puisque $\varphi\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0, x[$, le théorème du changement de variable assure que l'intégrale $h(x)$ est de même nature que l'intégrale :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{x}{2}\cos(u)\,\mathrm{d}u}{\frac{x}{2}\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}u.$$

Puisque cette intégrale converge et vaut π, l'intégrale $h(x)$ converge et vaut π (toujours en vertu du théorème de changement de variable).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque X_n et Y_n sont indépendantes, X_n^2 et Y_n^2 le sont aussi. De plus, on a montré à la question 2 que X_n^2 et Y_n^2 sont de densité f_n. On en déduit que leur somme $X_n^2 + Y_n^2$ est à densité, donnée par la fonction :

$$g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

D'après ce qui précède, on trouve que $g(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et :

$$\forall x \in]0,1],\ g(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{tx - t^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

5. (a)
```
import numpy as np

def simule_S(n):
    S = 0
    for k in range(n):
        x, y = np.random.random(), np.random.random()
        if x**2 + y**2 <= 1:
            S += 1
    return 4*S/n
```

(b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire Z_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p où :

$$p = \mathbb{P}(X_k^2 + Y_k^2 \leqslant k) = \int_{-\infty}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Puisque les variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ admettent la même espérance et la même variance, la loi faible des grands nombres assure que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k - \frac{\pi}{4}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\right) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(|S_n - \pi| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers une variable presque-sûrement constante égale à π.

(c) On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \pi| \leqslant 10^{-5}\right) \geqslant 90\%,$$

ce qui revient à choisir n tel que :

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \pi| > 10^{-5}\right) \leqslant 10\%,$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a :

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \pi| \geqslant 10^{-5}\right) \leqslant \frac{\pi(4-\pi)}{n \times 10^{-10}}.$$

Il suffit donc de choisir n tel que $\dfrac{\pi(4-\pi)}{n \times 10^{-10}} \leqslant 10^{-1}$, i.e. $n \geqslant \pi(4-\pi) \times 10^{11}$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 7

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note : $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ M \text{ est semblable à } A\}$.

Que dire de A lorsque $\mathcal{C}(A) = \{A\}$?

Solution :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A) = \{A\} &\Leftrightarrow \forall P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad P^{-1}AP = A \\ &\Leftrightarrow \forall P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad AP = PA \quad (*) \end{aligned}$$

• S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I$ alors vérifie (*).
•• Réciproquement si A vérifie (*) alors A commute avec toute matrice inversible et en particulier avec toutes les matrices de la forme :

$$P = I + E_{ij}$$

où : $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ désigne la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.
On a ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$A\,(I + E_{ij}) = (I + E_{ij})\,A$$

soit

$$AE_{ij} = E_{ij}A$$

En notant $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, il en résulte que :

$$\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{ii} = a_{jj}$$

et donc A est de la forme $A = \lambda I$.

Bilan :

$$\mathcal{C}(A) = \{A\} \iff A \in \text{Vect}(I)$$

SUJET Maths Approfondies 8

Exercice principal Maths Approfondies 8

L'objectif de cet exercice est de démontrer de deux manières **indépendantes** le résultat suivant :

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tous réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$ on a :

$$(\star) \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^3 \geqslant n \left(n + \frac{1}{n} \right)^3$$

1. Question de cours : Fonctions convexes .

2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.
On suppose que $X(\Omega) \subset I$ et que les variables aléatoires X et $f(X)$ admettent une espérance.
a) En remarquant que la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes établir l'inégalité :

$$f\big(E(X)\big) \leqslant E\big(f(X)\big)$$

b) En introduisant une variable aléatoire bien choisie en déduire que :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n \quad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$: $\quad f(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$.
c) En utilisant le résultat précédent établir alors l'inégalité $(\star)$.

3. Soit F la fonction à n-variables définie sur l'ouvert $U =]0,1[^n$ par :

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^3$$

a) Etablir que le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ est un point critique pour F sous la contrainte linéaire $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{x_k^2} \right) = \lambda$$

b) En déduire que, sous cette contrainte linéaire, F admet un unique point critique que l'on précisera.
c) A l'aide de ce qui précède, établir une nouvelle preuve de l'inégalité ($\star$).

Solution :

1. Cours

2.a) Pour tout $(x, a) \in I^2$ on a :

$$f(x) \geqslant f(a) + (x-a) f'(a)$$

et donc : $f(x) \geqslant f(a) + (x-a) f'(a)$.
En prenant $a = E(X) \in I$ on obtient, par croissance de l'espérance :

$$E(f(X)) \geqslant f(E(X))$$

du fait que la variable aléatoire $Y = X - E(X)$ est centrée.

b) Si les $x_1, \ldots, x_n$ sont 2 à 2 distincts on prend X telle que :

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!] \quad P(X = x_k) = t_k$$

On a alors :

$$E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k) \text{ at } E(X) = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k$$

d'où l'inégalité attendue.
Si les $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas 2 à 2 distincts on "regroupe" les t_j et on a bien le resultat d'après le cas précédent.

c) On applique le résultat précedant à la fonction convexe f donnée, pour tout $t \in]0, 1[$ par

$$f(t) = \left(t + \frac{1}{t}\right)^3$$

$$\left(f'(t) = 3\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 \text{ et } f''(t) = \frac{6}{t^3}\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 + 6\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2\left(t + \frac{1}{t}\right) > 0\right)$$

On obtient : $f(\bar{x}_n) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ avec $\bar{x}_n = \frac{1}{n}$ et donc $f(\bar{x}_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^3$.
L'inégalité ($*$) en résulte.

3.a) Posons $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$.

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ est un point critique de F sous la contrainte linéaire $g(\vec{x}) = 1$ lorsque :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} / \ \nabla F(\vec{x}) = \alpha \nabla g(\vec{x})$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$\partial_k F(\vec{x}) = 3\left(1 - \frac{1}{x_k^2}\right)\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^2$$

et

$$\partial_k g(\vec{x}) = 1.$$

La propriete attendue en résulte (en posant $\lambda = \dfrac{\alpha}{3}$).

b) La fonction $g : t \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{t^2}\right)\left(t + \dfrac{1}{t}\right)^2$ réalise une bijection croissante de $]0, 1[$ sur $] - \infty, 0[$ du fait que :

$$g'(t) = f''(t) > 0 \quad \text{(calcul en 2c.)}$$

Il en résulte que si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est un point critique de F sous la contrainte $x_1 + \ldots + x_n = 1$ alors : $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad x_k = \dfrac{1}{n}$.

Bilan : Sous cette contrainte l'unique point critique est

$$\vec{x} = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$$

3c) On remarque que $F(x_1, \ldots, x_n)$ tend vers $+\infty$ lorsque l'un des x_k tend vers 0 . Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que, sous cette contrainte linéaire, F atteint un minimum global sur le compact $K_\varepsilon = [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^n \cap \{(x_1, \ldots, x_n) \in U / x_1 + \ldots + x_n = 1\}$.
D'après ce qui précède ce minimum est atteint en $\left(\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n}\right)$ et puisque $F\left(\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n}\right) = n\left(n + \dfrac{1}{n}\right)^3$ l'inégalité $(*)$ en résulte.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 8

1. Soit $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P définisse une fonction injective, respectivement surjective sur $\mathbb{R}$.
2. On définit une fonction sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $M \mapsto P(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que cette fonction n'est jamais injective si le degré de P est supérieur à 2.

Solution :

1. $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective ssi P' est de signe constant, donc les racines réelles de P' sont de multiplicité paire. $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective ssi le degré de P est impair.
2. On commence par remarquer que si P est injectif sur $\mathbb{R}$, P est injectif sur les matrice diagonales, donc sur les matrices symétriques. On cherche alors un exemple sur les matrices anti-symétriques $M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Quitte à décaler par une constante, il suffit de trouver deux matrices M_1, M_2 telles que $P(M_1) = P(M_2) = 0$. Tout polynôme admet des facteurs de degré 2, il suffit de considérer $P(X) = X^2 + aX + b$. L'équation $P(M) = 0$ donne

$$x^2 - y^2 + ax + b = 0, \quad y(2x + a) = 0$$

Si le discriminant de P est < 0, on a alors deux solutions pour $x = -a/2$ et y les deux racines de $-a^2/4 + b$. Si $P(X) = (X - \alpha)^2$, on a en plus de la matrice diagonale $M = \alpha I_2$, la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ qui est annulée par P. Enfin si $P(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$, $\alpha \neq \beta$, on prend $M = \alpha I_2$ et βI_2.

SUJET Maths Approfondies 9

Exercice principal Maths Approfondies 9

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ continue.

1. Question de cours : rappeler l'inégalité des accroissements finis.
2. Ecrire une fonction **Python** ayant comme paramètres d'entrée deux réels a et b avec $a \leqslant b$, un entier $N \geqslant 1$ et une fonction h et qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale
$$\int_a^b h(t)dt$$
calculée par la méthode des rectangles à N pas.
3. Soit $x \in [0,1[$. Montrer que l'intégrale
$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$$
converge.
On pose désormais pour tout $x \in [0,1[$:
$$F(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt.$$
4. Montrer que la limite $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$ existe et trouver sa valeur ℓ.
On pose désormais $F(1) = \ell$.
5. Montrer que
$$\forall x \in [0,1],\ F(x) = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{s}}ds.$$
6. Montrer que
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = 2f(1).$$
7. On suppose que f est de classe C^1 sur $[0,1]$. Montrer que F dérivable en 1 si et seulement si $f(1) = 0$.

Solution :

1. Voir programme.
2. ```
   import numpy
   def F(a, b, h, N):
     t = numpy.linspace(a, b, N)
     res = 0
     for i in range(0, N):
          res = res + h(t[i])
     return res*(b-a)/N
   ```
3. La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t-x}}$ est continue sur $]x,1]$. De plus, la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$. Elle est donc bornée. Soit $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in [0,1],\ |f(t)| \leqslant M$. On a
$$\forall t \in]x,1],\ \left|\frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{t-x}}.$$
Or l'intégrale
$$\int_x^1 \frac{M}{\sqrt{t-x}}dt$$
converge. Donc l'intégrale
$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$$
converge absolument.
4. Avec les notations de la réponse à la question précédente, on a pour tout $x \in [0,1[$:
$$0 \leqslant |F(x)| \leqslant \int_x^1 \frac{M}{\sqrt{t-x}}dt = 2M[\sqrt{t-x}]_x^1 = 2M\sqrt{1-x}.$$
Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = 0$. Donc $\ell = 0$.
5. On vérifie facilement que l'identité est vraie quand $x = 1$. Soit $x \in [0,1[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1-x$. En effectuant le changement de variable affine
$$s = \frac{t-x}{1-x},$$
on a $t = x + (1-x)s$ et
$$\int_{x+\varepsilon}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt = \int_{\frac{\varepsilon}{1-x}}^1 (1-x)\frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{(1-x)s}}ds = \sqrt{1-x}\int_{\frac{\varepsilon}{1-x}}^1 \frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{s}}ds.$$
On fait tendre $\varepsilon \to 0^+$ (les deux intégrales convergent) et on obtient l'identité demandée.
6. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en 1, il existe $\eta > 0$ suffisamment petit tel que
$$\forall t \in [1-\eta, 1],\ |f(t) - f(1)| \leqslant \varepsilon.$$
   ```

Soit $x \in [1-\eta, 1]$. On a pour tout $s \in [0,1]$, $x + (1-x)s \in [1-\eta, 1]$ car $x \leqslant x + (1-x)s \leqslant x + (1-x) = 1$. Il en résulte que

$$\forall s \in [0,1],\ |f(x+(1-x)s) - f(1)| \leqslant \varepsilon.$$

Or

$$\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)s) - f(1)}{\sqrt{s}} ds + \int_0^1 \frac{f(1)}{\sqrt{s}} ds = 2f(1) + \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)s) - f(1)}{\sqrt{s}} ds.$$

Ainsi, pour tout $x \in [1-\eta, 1]$ on a

$$|\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} - 2f(1)| \leqslant \int_0^1 \frac{|f(x+(1-x)s) - f(1)|}{\sqrt{s}} ds \leqslant \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}} ds = 2\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = 2f(1).$$

7. Si F est dérivable en 1, on a

$$\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x}\frac{F(x) - F(1)}{x-1} \to 0 \text{ quand } x \to 1.$$

Donc $f(1) = 0$ par unicité de la limite. Réciproquement, si $f(1) = 0$. On a

$$|\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}}| \leqslant \int_0^1 \frac{|f(x+(1-x)s) - f(1)|}{\sqrt{s}} ds \leqslant \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \int_0^1 \frac{|x+(1-x)s - 1|}{\sqrt{s}} ds = C_f(1-x),$$

avec

$$C_f = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \int_0^1 \frac{|s-1|}{\sqrt{s}} ds.$$

D'où

$$\lim_{x \to 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = 0.$$

On en déduit que F est dérivable à gauche en 1 et $F'(1) = 0$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 9

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 définies sur un même espace probabilisé. Montrer que la matrice $\Gamma = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ les valeurs propres sont-elles toutes strictement positives ?

Solution :
La matrice Γ est évidemment symétrique réelle donc diagonalisable.

Aide possible pour la suite *: calculer $U^T \Gamma U$ de deux manières différentes.*

Soit λ une valeur propre de Γ et $U = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}^T$ un vecteur propre associé. On calcule $U^T \Gamma U$ de deux manières. D'abord $U^T \Gamma U = \lambda U^T U = \lambda \|U\|^2$, mais aussi :

$$U^T \Gamma U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i u_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(u_i X_i, u_j X_j) = \mathbb{V}(u_1 X_1 + \dots u_n X_n).$$

Ainsi $\lambda = \dfrac{\mathbb{V}(u_1 X_1 + \dots u_n X_n)}{\|U\|^2} \geqslant 0$.

Remarquons que $\lambda = 0$ si, et seulement si $V(u_1 X_1 + \dots u_n X_n) = 0$, i.e. si, et seulement si, $u_1 X_1 + \dots u_n X_n$ est constante presque-sûrement.

On en déduit donc que les valeurs propres de Γ sont toutes strictement positives si, et seulement si, toute combinaison linéaire des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ n'est pas constante presque-sûrement.

SUJET Maths Approfondies 10

Exercice principal Maths Approfondies 10

Cet exercice traite de certains liens entre une variable aléatoire et des transformations affines de celle-ci et est composé de questions en grande partie indépendantes.
Dans l'exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Dans la suite c désigne un réel **non nul** et a un réel non-nul différent de 1 et de -1.

1. Question de cours : Théorème central limite.

2. Soit $c \in \mathbb{R}$.
a) Donner un exemple de variable aléatoire X quasi-certaine telle que X et $c - X$ suivent la même loi.
b) Donner un exemple de variable aléatoire X bornée et à densité telle que X et $c - X$ suivent la même loi.
c) Donner un exemple de variable aléatoire X non-bornée et à densité telle que X et $c - X$ suivent la même loi.
d) Donner un exemple de variable aléatoire X n'admettant pas d'espérance telle que X et $c - X$ suivent la même loi.

3. On se propose de montrer dans cette question qu'il n'existe pas de variable aléatoire X telle que X et $c + X$ suivent la même loi.
On suppose par l'absurde qu'une telle variable aléatoire X existe et on note F sa fonction de répartition.
a) Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel t, l'égalité : $F(t) = F(t - nc)$.
b) En déduire une contradiction et conclure.

4. On suppose dans cette question qu'il existe une variable aléatoire X qui suit la même loi que la variable aléatoire $aX + c$. On pose $\alpha = \dfrac{c}{1-a}$ et $Y = X - \alpha$.
a) Etablir que les variables aléatoire Y et aY suivent la même loi.
b) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a : $P(|Y| \geqslant t) = 0$.
c) Que peut-on en déduire ?

5. Dans cette question on suppose que la variable aléatoire X est telle que, pour tout entier n non nul et tout n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de X, il existe $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que les variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_n$ et $a_n X + b_n$ suivent la même loi.
Etablir que si X admet une variance non nulle alors X suit une loi normale.

Solution :

1. Cours.

2. a) $X = \dfrac{c}{2}$ convient.

b) Toute v.a. de densité symétrique par rapport à $\dfrac{c}{2}$ convient. Ainsi, par exemple, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, c])$ convient.

c) $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\dfrac{c}{2}, 1\right)$ convient par exemple .

d) X ayant pour densité $f(x) = \dfrac{\pi^{-1}}{1 + \left(x - \frac{c}{2}\right)^2}$ convient (ou tout autre densité symétrique par rapport à $\dfrac{c}{2}$ qui décroit à la vitesse de $k \times \dfrac{1}{x^2}$).

3.a) Pour tout réel t on a :

$$F(t) = P(X \leqslant t) = P(c + X \leqslant t) = P(X \leqslant t - c) = F(t - c)$$

et ainsi, par un raisonnement par récurrence sor $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = F(t - nc)$$

b) En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient (du fait que $c \neq 0$) :

$$F = 0 \text{ si } c > 0$$
$$F = 1 \text{ si } c < 0$$

Dans le deux cas F n'est pas une fonction de répartition et donc :

$$\text{il n'existe pas de v.a. } X \text{ telle que } X \overset{loi}{\sim} c + X.$$

4. a) $X \overset{loi}{\sim} aX + c$ et $\alpha = a\alpha + c$ d'où, en soustrayant : $X - \alpha \overset{loi}{\sim} a(X - \alpha)$.
Bilan :

$$Y \overset{loi}{\sim} aY$$

b) Soit $t > 0$. On a :

$$P(|Y| \geqslant t) = P(|aY| \geqslant t) = P\left(|Y| \geqslant \frac{t}{|a|}\right)$$

et par un raisonnement par recurrence sur l'entier m :

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad P(|Y| \geqslant t) = P\left(|Y| \geqslant \frac{t}{|a|^n}\right)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on $-\infty$ selon la position de $|a|$ par rapport à 1 on obtient :

$$\forall t > 0 \quad P(|Y| \geqslant t) = 0$$

c) On en deduit que $Y = 0$ $p.s$ et donc :

$$\text{si } X \overset{loi}{\sim} aX + c \text{ alors } X = \frac{c}{1-a} \ p.s.$$

5. Posons $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X) > 0$. On a alors :

$$E\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = E\left(a_n X + b_n\right) \Leftrightarrow mm = a_n m + b_n.$$
$$V\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = V\left(a_n X + b_n\right) \Leftrightarrow n\sigma^2 = a_n^2 \sigma^2.$$

D'où nécessairement : $a_n = \sqrt{n}$ et $b_n = (n - \sqrt{n})m$.
Il s'ensuit que :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \quad \text{suit la même loi que} \quad \frac{X-m}{\sigma}$$

D'après le théorème central limite on a donc :

$$\frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

D'où en conclusion :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que l'endomorphisme :

$$\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \phi_A(M) = AM$$

est diagonalisable.

Solution :
On commence par remarquer que si (v_i) est une base de $\mathbb{R}^n$ alors $(v_i\,{}^t v_j)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: c'est clair pour la base canonique (e_i) et pour une base quelconque, on a $v_i\,{}^t v_j = Pe_i\,{}^t e_j\,{}^t P$ où P est la matrice de passage, en notant que $M \to PM^tP$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si on considère une base de vecteurs propres (v_i) de A alors $(v_i\,{}^t v_j)$ est une base de vecteurs propres de ϕ_A.

SUJET Maths Approfondies 11

Exercice principal Maths Approfondies 11

Soit D la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$D = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha\beta - \gamma^2 \geqslant 0 \text{ et } \alpha + \beta \geqslant 0\}.$$

Considérons maintenant les parties de $\mathbb{R}^2$:

$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| < 1 \text{ et } |x-y| < 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| \leqslant 1 \text{ et } |x-y| \leqslant 1\}$,

et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant

$a\partial^2_{1,1}f(x,y)+b\partial^2_{2,2}f(x,y)+2c\partial^2_{1,2}f(x,y)+d\partial_1 f(x,y)+e\partial_2 f(x,y) < 0$ pour tout $(x,y) \in U$,

où a, b, c, d et e sont des constantes réelles avec $(a, b, c) \in D$.

1. Question de cours : rappeler les conditions nécessaires d'ordre 1 et 2 pour qu'une fonction f admette un minimum local en un point x_0 dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que B est borné.
3. Montrer que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.
4. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in D$. Montrer que
$$\alpha a + \beta b + 2\gamma c \geqslant 0.$$
5. Justifier pourquoi il existe au moins un point $(x_0, y_0) \in B$ tel que
$$f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y) \text{ pour tout } (x, y) \in B$$
6. Montrer que si $(x_0, y_0) \in U$ alors nécessairement
$$\left(\partial^2_{1,1}f(x_0,y_0), \partial^2_{2,2}f(x_0,y_0), \partial^2_{1,2}f(x_0,y_0)\right) \in D.$$
7. En déduire que nécessairement $(x_0, y_0) \notin U$.

Solution :

1. Voir programme.

2. Soit $(x,y) \in B$. On pose $u = x+y$ et $v = x-y$. On a
$$|x| = |\frac{u+v}{2}| \leqslant \frac{1}{2}(|u|+|v|) \leqslant 1.$$
$$|y| = |\frac{u-v}{2}| \leqslant \frac{1}{2}(|u|+|v|) \leqslant 1.$$
Donc B est borné.
3. On a $ab \geqslant c^2$. Donc a et b sont du même signe. Puisque $a+b \geqslant 0$, on en déduit que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.
4. Si $a = 0$, on a forcément $c = 0$ et $\alpha a + \beta b + 2\gamma c = \beta b \geqslant 0$ car $b \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$. De même si $\alpha = 0$. Supposons maintenant que $a > 0$ et $\alpha > 0$. On a
$$b \geqslant \frac{c^2}{a} \text{ et } \beta \geqslant \frac{\gamma^2}{\alpha}.$$
D'où
$$\alpha a+\beta b+2\gamma c \geqslant \alpha a+\frac{\gamma^2}{\alpha}.\frac{c^2}{a}+2\gamma c = \alpha a(1+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}.\frac{c^2}{a^2}+2\frac{\gamma}{\alpha}.\frac{c}{a}) = \alpha a(\frac{\gamma}{\alpha}.\frac{c}{a}+1)^2 \geqslant 0.$$
5. f est une fonction continue sur le fermé borné B. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.
6. Si $(x_0, y_0) \in U$ alors nécessairement $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ et les valeurs propres de la hessienne
$$\begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x_0, y_0) & \partial^2_{1,2} f(x_0, y_0) \\ \partial^2_{1,2} f(x_0, y_0) & \partial^2_{2,2} f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$
sont positives. Or la somme de ces deux valeurs propres est égale à la trace de cette matrice
$$0 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 = \partial^2_{1,1} f(x_0, y_0) + \partial^2_{2,2} f(x_0, y_0).$$
De même leur produit doit être positif :
$$0 \leqslant \lambda_1\lambda_2 = \partial^2_{1,1} f(x_0, y_0)\partial^2_{2,2} f(x_0, y_0) - \left(\partial^2_{1,2} f(x_0, y_0)\right)^2.$$
D'où le résultat demandé.
7. On raisonne par l'absurde. Si $(x_0, y_0) \in U$, alors $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ et on a
$$\left(\partial^2_{1,1} f(x_0, y_0), \partial^2_{2,2} f(x_0, y_0), \partial^2_{1,2} f(x_0, y_0)\right) \in D.$$
Il résulte d'après la question 4 que
$$a\partial^2_{1,1} f(x_0, y_0) + b\partial^2_{2,2} f(x_0, y_0) + 2c\partial^2_{1,2} f(x_0, y_0) \geqslant 0.$$
Cette inégalité contredit l'hypothèse sur f puisque
$$\begin{aligned} 0 &> a\partial^2_{1,1} f(x_0, y_0) + b\partial^2_{2,2} f(x_0, y_0) + 2c\partial^2_{1,2} f(x_0, y_0) + d\partial_1 f(x_0, y_0) + e\partial_2 f(x_0, y_0) \\ &= a\partial^2_{1,1} f(x_0, y_0) + b\partial^2_{2,2} f(x_0, y_0) + 2c\partial^2_{1,2} f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 11

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.
Pour tout entier non nul n on pose :

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) X_k$$

Etudier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution :

Posons $I = \int_0^1 f(x)dx$ et $J = \int_0^1 f^2(x)dx$. On a :

$$E(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) E(X_k) = p\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p\cdot I$$

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right) V(X_k) = \frac{p(1-p)}{n}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{\to J} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrons alors que : $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} pI$

Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$|Y_n - pI| \leqslant |Y_n - E(Y_n)| + |E(Y_n) - pI|$$

et donc :

$$[|Y_n - pI| \geqslant \varepsilon] \subset \left[|Y_n - \varepsilon(Y_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[|E(Y_n) - pI| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Il en résulte que :

$$0 \leqslant P(|Y_n - pI| \geqslant \varepsilon) \leqslant \underbrace{P\left(|Y_n - E(Y_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\leqslant \frac{V(Y_n)}{(\varepsilon/2)^2}\to 0} + \underbrace{P\left(|E(Y_n) - pI| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\text{nul pour } m \text{ grand}}$$

Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - pI| \geqslant \varepsilon) = 0$$

et donc :

$$Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} pI$$

SUJET Maths Approfondies 12

Exercice principal Maths Approfondies 12

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Question de cours : Donner les deux premiers termes des développements limités de $\sin(x)$ et $(1+x)^2$ lorsque x tend vers 0.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que (u_n) converge vers une limite finie l, que l'on déterminera.
4. Proposer un programme Python `indice(u0,eps)`, qui prend en paramètre le premier terme $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la suite et un paramètre ϵ. Ce programme retourne le plus petit entier k tel que $|u_k - l| < \epsilon$.
5. Montrer que la suite $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ converge, et donner la valeur de sa limite.
6. Soit (x_n) une suite réelle de limite $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $y_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k}{n}$ converge vers x.
7. Déterminer un équivalent de (u_n), lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la nature de la série de terme général (u_n).

Solution :
Solution :

1. p20 EC1. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $(1+x)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + o(x)$.
2. Montrons le résultat par réccurence sur n.

   <u>Initialisation :</u> $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par hypothèse.

   <u>Hérédité :</u> Supposons le résultat vrai pour $n \geqslant 1$. On a donc que $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction sinus étant croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $u_{n+1} = \sin(u_n) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   <u>Conclusion :</u> $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Considérons la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) := \sin(x) - x$. f est dérivable, et $f'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, f est strictement

croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], f(x) > f(0) = 0$. Celà implique que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) < x$, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.

(u_n) étant minorée par 0 et décroissante, donc elle converge vers une limite finie $l \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En passant à la limite, par continuité de la fonction sinus, on en déduit que $\sin(l) = l$. Or, $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \neq x$. On a donc necessairement $l = 0$.

4. On propose par exemple le programme suivant :

```python
import numpy
def indice(u0,eps):
    u=u0
    k=0
    while abs(u) >= eps:
        u= numpy.sin(u)
        k+=1
    return k

print(indice(1,1e-2))
>>> 29992
```

5. On remarque que $v_n = \frac{u_n^2 - \sin(u_n)^2}{u_n^2 \sin(u_n)^2}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on effectue le developpement limité des sinus, à l'aide de la question 1).

$$\begin{aligned}
v_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{u_n^2 - (\sin(u_n))^2}{u_n^2 \sin(u_n)^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{u_n^2 - \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^2}{u_n^4 + o(u_n^4)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{u_n^2 - u_n^2\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^2}{u_n^4 + o(u_n^4)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{u_n^2 - u_n^2\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)}{u_n^4 + o(u_n^4)}
\end{aligned}$$

Où l'on a effectué le developpement limité de $(1+x)^2$, avec $x = \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)$ qui tend bien vers 0. lorsque n tend vers $+\infty$. On a donc que

$$\begin{aligned}
v_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\frac{u_n^4}{3} + o(u_n^4)}{u_n^4 + o(u_n^4)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{u_n^4 + o(u_n^4)}{u_n^4 + o(u_n^4)}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ceci montre que (v_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{3}$.

6. Soit $\epsilon > 0$ fixé, on veut montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |y_n - x| < \epsilon$$

Puisque que (x_n) converge vers x,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

Or, $\forall n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} y_n - x &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k}{n} - x \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k - nx}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (x_k - x)}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} (x_k - x) + \sum_{k=n_0}^{n-1} (x_k - x)}{n} \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, $\forall n \geqslant n_0, |y_n - x| \leqslant \dfrac{1}{n} K_{n_0} + \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n-1} |x_k - x|$, où $K_{n_0} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |x_k - x|$ est une somme finie, indépendante de n. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} K_{n_0} = 0$, donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, \dfrac{1}{n} K_{n_0} < \dfrac{\epsilon}{2}$. De plus, $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n-1} |x_k - x| < \dfrac{n - n_0}{n} \dfrac{\epsilon}{2} < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Ainsi, en prenant $N = \max\{n_0, n_1\}$, on a que

$$\forall n \geqslant N, |y_n - x| < \epsilon$$

7. On remarque que $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_{k+1}^2} - \dfrac{1}{u_k^2} = \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_0^2} \right)$ par télescopage. Par les deux questions précédentes, on a que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_0^2} \right) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n u_n^2} = \dfrac{1}{3}$, donc $n u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3$, d'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

La série de terme général u_n est donc divergente, par critère de comparaison des séries à termes positifs.

Pour information, un petit programme similaire a celui de la question 4) pour la suite $\sqrt{\dfrac{3}{n}}$ renvoie un indice similaire.

```
def indice2(eps):
    k=1
    u= numpy.sqrt(3)
    while abs(u) >= eps:
        u= numpy.sqrt(3/k)
        k+=1
    return k

print(indice2(1e-2))
>>> 30002
```

Exercice sans préparation Maths Approfondies 12

Soient n un entier positif non nul et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon d'une variable aléatoire X de loi à densité uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$ où $\theta \in]0, +\infty[$ est un paramètre inconnu qu'on veut estimer.

1. Proposer un estimateur T_n de θ à l'aide de la moyenne empirique. Vérifier qu'il est sans biais et convergent.
2. On considère un estimateur sans biais M_n de la forme $M_n = c(n)\text{Max}(X_1, \ldots, X_n)$ où $c(n)$ est une constante qui ne dépend que de n. Que vaut $c(n)$?
3. Comparer la qualité des estimateurs T_n et M_n.

Solution :

1. Comme $\theta = 2\mathbb{E}(X)$, on prend $T_n = 2\overline{X}_n = \dfrac{2}{n}(X_1 \ldots + X_n)$. On a $\mathbb{E}(X) = \theta/2$ donc $\mathbb{E}(T_n) = \theta$, de plus $\mathbb{V}(X) = \theta^2/12$ donc $\mathbb{V}(T_n) = \theta^2/3n$, on conclut que T_n est un estimateur sans biais convergent.
2. La fonction de répartition de la variable aléatoire $\text{Max}(X_1, \ldots, X_n)$ est $F(x) = (x/\theta)^n$ sur $[0, \theta]$ donc la densité est donnée par
$$f(x) = n\theta^{-n}x^{n-1}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$$
et son espérance vaut donc $\dfrac{n\theta}{n+1}$. Pour obtenir un estimateur sans biais, on prend $c(n) = \dfrac{n+1}{n}$.
3. On a :
$$\mathbb{E}(M_n^2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \int_0^\theta n\theta^{-n}x^{n+1}dx = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{n\theta^2}{n+2} = \frac{(n+1)^2\theta^2}{n(n+2)}$$
d'où $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$.
On constate que la vitesse de convergence de M_n est en $1/n^2$ alors que celle de T_n est en $1/n$. Donc M_n est plus performant que T_n.

SUJET Maths Approfondies 13

Exercice principal Maths Approfondies 13

Dans l'exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F et admettant une densité f.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et suivant la même loi que X.

On admet l'existence de variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ telles que, pour tout ω de Ω, les réels $Y_1(\omega)$, $Y_2(\omega), \ldots, Y_n(\omega)$ constituent un réarrangement par ordre croissant des réels $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$, de telle sorte que, pour tout ω de Ω :

$$Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega) \quad \text{et} \quad \Big\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\Big\} = \Big\{Y_1(\omega), \ldots, Y_n(\omega)\Big\}$$

Pour tout réel x et tout entier non nul n,on note $S_n(x)$ la variable aléatoire définie par :

$$S_n(x) = \operatorname{card}\Big\{k \in [\![1, n]\!] : \ X_k \leqslant x\Big\}$$

1. Question de cours. Lois binomiales : définition, propriétés et allure de la fonction de répartition de la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{2}$.
2. Donner, pour tout entier n non nul, la loi de $S_n(x)$.
3. (a) Comparer les événements : $[Y_k \leqslant x]$ et $[S_n(x) \geqslant k]$.
   (b) En déduire, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, une expression de $F_{Y_k}(x)$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).
   (c) En déduire que, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, la variable aléatoire Y_k est à densité et que la fonction f_{Y_k} définie pour tout x réel par :
   $$f_{Y_k}(x) = k\binom{n}{k}(F(x))^{k-1}(1 - F(x))^{n-k} f(x)$$
   est une densité de Y_k.
4. Montrer que si X admet une espérance, alors pour tout k de $[\![1, n]\!]$, Y_k admet aussi une espérance.
5. Dans cette question on suppose que $n = 2\ell + 1$ est un entier impair et que X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $W_n = Y_{\ell+1}$.
   Etablir que $E(W_n) = \dfrac{1}{2}$ et commenter le résultat obtenu.

Solution :

1. Cours.
2. $S_n(x) \hookrightarrow B(n, F(x))$.
3. (a) $[Y_k \leqslant x] = [S_n(x) \geqslant k]$.

   (b) D'après l'égalité ci-dessus on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{Y_k}(x) &= P\left(S_n(x) \geqslant k\right) \\ &= \sum_{j=k}^{n} P\left(S_n(x) = j\right) \\ F_{X_k}(x) &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (1 - F(x))^{n-j} \end{aligned}$$

   (c) La v.a. Y_k est donc à densité puisque sa fonction de répartition a au moins les mêmes régularités que F. Par derivation une densité de Y_k est donnée par :

$$f_{Y_k}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left[j f(x)(F(x))^{j-1}(1 - F(x))^{n-j} - (n-j) f(x)(F(x))^j (1 - F(x))^{n-j-1} \right]$$

$$= k\binom{n}{k} f(x)(F(x))^{k-1}(1 - F(x))^{n-k} + \sum_{j=k+1}^{n} j\binom{n}{j} f(x)(F(x))^{j-1}(1 - F(x))^{n-j}$$

$$- \sum_{j=k}^{n-1} (n-j)\binom{n}{j} f(x)F(x)^j (1 - F(x))^{n-j-1}$$

$$= k\binom{n}{k} (F(x))^{k-1}(1 - F(x))^{n-k} f(x)$$

   du fait que :
   $\displaystyle\sum_{j=k}^{n-1}(n-j)\binom{n}{j} f(x)F^j(x)(1-F(x))^{n-j-1} = \sum_{j=k+1}^{n}(n-j+1)\binom{n}{j-1} f(x)F^{j-1}x)(1-F(x))^{n-j}$
   et de l'égalité :

$$(n-j+1)\binom{n}{j-1} = j\binom{n}{j}$$

4. Si X admet une espérance alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est absolument convergente. Or.

$$0 \leqslant |x f_{Y_k}(x)| \leqslant k\binom{n}{k} |x f(x)|$$

puisque $|F(x)| \leqslant 1$ et $|1-F(x)| \leqslant 1$.
La convergence absolue de l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Y_k}(x) dx$ en résulte.

Bilan : $E(|X|) < +\infty \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!] \quad E(|Y_k|) < +\infty$.

5. D'après ce qui précède une densité de W_n est donnée par

$$g(x) = (\ell+1)\binom{2\ell+1}{\ell+1} x^{\ell}(1-x)^{\ell}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

On a ainsi : $g(x) = g(1-x)$ et donc $\displaystyle\int_0^1 x g(x) dx = \int_0^1 (1-u) g(u) du$ soit :

$$E(W_n) = 1 - E(W_n)$$

et donc $\quad E(W_n) = \dfrac{1}{2}$.
Le résultat n'est pas surprenant (hormis la valeur exacte $\dfrac{1}{2}\ldots$) du fait que W_n est la médiane de $X_1, \ldots, X_{2n+1}$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 13

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On considère l'application définie par $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Proposer un programme Python `F(x,...)` qui permet de calculer une valeur approchée de cette intégrale. Ce programme peut prendre plusieurs paramètres, mais contiendra à minima le paramètre `x` qui représente le réel x.
2. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

Solution :

1. On propose une méthode de Monte-Carlo, pour rester dans l'esprit du programme... Cette fonction renvoie un tuple contenant l'estimation de l'intégrale et le demi-intervalle de confiance à 95%.

```python
import numpy.random
import math

def F_MC(x,N):
    t = x+(x)*numpy.random.random_sample(N)
    p = 1.0/x
    f = numpy.exp(-t**2)
    moyenne = f.sum()/(N*p)
    g = f*f
    variance = g.sum()*1.0/(N*p*p)-moyenne*moyenne
    return (moyenne,math.sqrt(variance/N)*1.96)

print(F_MC(2,100))
>>> (0.005036331972694381, 0.0015823957466369176)
```

On peut aussi proposer par exemple le programme suivant, implémentant la méthode des rectangles :

```python
import numpy

def F(x,N):
    t = numpy.linspace(x,2*x,N)
    f = numpy.exp(-t**2)
    return abs(f.sum()*x/N)

print(F(2,100))
>>> 0.004289689885773678
```

On remarque que l'on tend très vite vers 0.

2. On sait que $\lim_{t\mapsto+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2} = 0$. Par conséquent, $\exists A > 0, \forall t > A, t^2\mathrm{e}^{-t^2} < 1$. Ou encore, $\forall t > A, 0 < \mathrm{e}^{-t^2} < \dfrac{1}{t^2}$.

   Ainsi, en intégrant, $\forall x > A, \quad 0 < \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t < \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Or, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x}$.

   Par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{x\mapsto+\infty} F(x) = 0$.

3. *Question subsidiaire :* Déterminer la dérivée de F.

   $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = 2\mathrm{e}^{-(2x)^2} - \mathrm{e}^{-x^2} = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$.

SUJET Maths Approfondies 14

Exercice principal Maths Approfondies 14

1. **Question de cours :** Définition et propriétés de la moyenne empirique.
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

   Notons Z la variable aléatoire égale à n si n est le plus petit entier tel que $X_n = 0$ et $Z = +\infty$ sinon.

   (a) Pour $n \geqslant 0$, calculer $P(Z = n)$ puis $P(Z > n)$. En déduire que Z est presque sûrement finie i.e. $P(Z = +\infty) = 0$.

   (b) Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit T la variable aléatoire égale à n si n est le plus petit entier tel que $X_{n-1} = X_n = 1$ et $T = +\infty$ sinon.

   (a) Calculer $P(T = 1)$, $P(T = 2)$, $P(T = 3)$ et $P(T = 4)$.

   (b) Montrer que $P(T > n) \leqslant (3/4)P(T > n - 2)$ pour tout $n > 2$. En déduire que T est presque sûrement finie

   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$:

$$P(T = n) = \frac{1}{2}P(T = n - 1) + \frac{1}{4}P(T = n - 2)$$

   (d) Montrer que $E(T)$ est finie et déterminer $E(T)$ (On ne demande pas de calculer la loi de T).

4. On suppose le paramètre p de la loi de Bernoulli des variables (X_n) quelconque. Donner un programme python pour estimer $E(T)$ à partir d'un échantillon de la variable T.

Solution :

1. **Question de cours :** Moyenne empirique. ECG2 p.23. (estimateur sans biais et convergeant)

(a) $P(Z=n) = P(X_0 = 1, \ldots, X_{n-1} = 1, X_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$P(Z > n) = 1 - P(Z \leqslant n) = 1 - \sum_{i \leqslant n} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

On a $\{Z = +\infty\} \subset \{Z > n\}$ donc

$$P(Z = +\infty) \leqslant P(Z > n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

pour tout n donc $P(Z = +\infty) = 0$.

(b)

$$E(Z) = \sum_{n \geqslant 0} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1/4 \sum_{n \geqslant 1} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1/4 \times \frac{1}{(1-1/2)^2} = 1$$

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \sum_{n \geqslant 0} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{(1-1/2)^3} - \frac{1}{(1-1/2)^2}\right) - 1 = 2$$

2. (a)

$$P(T=1) = P(X_0 = X_1 = 1) = 1/4$$

$$P(T=2) = P(X_0 = 0, X_1 = X_2 = 1) = 1/8,$$

$$P(T=3) = P(X_1 = 0, X_2 = X_3 = 1) = 1/8$$

$$P(T=4) = P(X_0 X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = X_4 = 1) = 3/4 \times 1/8 = 3/32$$

(b) On a $\{T > n\} \subset \{T > n-2, X_{n-1}X_n = 0\}$ et les événements $\{T > n-2\}$ et $\{X_{n-1}X_n = 0\}$ sont indépendants, donc

$$P(T > n) \leqslant (3/4) P(T > n-2)$$

Posons $u_n = P(T > n)$, on a $u_n \leqslant (3/4) u_{n-2}$ donc $\lim u_n = 0$.
$P(T = +\infty) \leqslant u_n$ pour tout n donc $P(T = +\infty) = 0$.

(c) Soit $n \geqslant 3$,

$$P(T=n) = \frac{1}{2} P(T = n | X_0 = 0) + \frac{1}{4} P(T = n | X_1 = 1, X_0 = 1)$$

$$+\frac{1}{4} P(T = n | X_1 = 0, X_0 = 1)$$

Comme $P(T = n | X_0 = 0) = P(T = n-1)$, $P(T = n | X_1 = 0) = P(T = n-2)$ et $P(T = n | X_1 = 1, X_0 = 1) = 0$ pour $n > 2$, on a

$$P(T=n) = \frac{1}{2} P(T = n-1) + \frac{1}{4} P(T = n-2)$$

(d) $P(T > n) \leqslant (3/4)^{n/2}$ d'où $P(T = n) \leqslant (3/4)^{(n-1)/2}$, donc la série $E(T) = \sum_{n\geqslant 1} nP(T = n)$ converge.

$$E(T) = \sum_{n\geqslant 1} nP(T = n) = \frac{1}{4} + \sum_{n\geqslant 2} nP(T = n)$$

$$E(T) = \frac{1}{4} + \sum_{n\geqslant 2}[\frac{1}{2}(n-1)P(T = n-1) + \frac{1}{4}(n-2)P(T = n-2)] +$$

$$\sum_{n\geqslant 2}[\frac{1}{2}P(T = n-1) + \frac{1}{4}2P(T = n-2)]$$

$$E(T) = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}E(T) \Rightarrow E(T) = 5$$

3.
```
import random

def estimer_instant_deux_succes(probabilite_succes, taille_echantillon, nombre_simulations):
    # Estime l'instant moyen de deux succes consecutifs dans une suite de variables aleatoires de Bernoulli
    instants_deux_succes = []

    for _ in range(nombre_simulations):
        bernoulli_variables = [1 if random.random() < probabilite_succes else 0 for _ in range(taille_echan

        for i in range(1, taille_echantillon):
            if bernoulli_variables[i] == 1 and bernoulli_variables[i - 1] == 1:
                instants_deux_succes.append(i)
                break

    if instants_deux_succes:
        moyenne_instants = sum(instants_deux_succes) / len(instants_deux_succes)
        return moyenne_instants
    else:
        return -1  # Retourne -1 si deux succes consecutifs n'ont pas ete trouves dans les simulations

# Parametres
probabilite_succes = 0.5  # Probabilite de succes
taille_echantillon = 100  # Taille de l'echantillon
nombre_simulations = 1000  # Nombre de simulations

# Estimation de l'instant moyen de deux succes consecutifs
instant_moyen = estimer_instant_deux_succes(probabilite_succes, taille_echantillon, nombre_simulations)

if instant_moyen != -1:
    print(f"L'instant moyen de deux succes consecutifs est estime a environ {instant_moyen:.2f}.")
else:
    print("Deux succes consecutifs n'ont pas  ete observes dans les simulations.")
```

```
L'instant moyen de deux succes consecutifs est estime a environ 5.07.
```

Exercice sans préparation Maths Approfondies 14

Soit (x_n) une suite réelle qui converge vers le réel m. On pose :

$$\forall (p,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_{p,k} = \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+k}\}$$

1. Ecrire un programme Python `u(x,p,k)` qui renvoie le terme $u_{p,k}$. Ce programme prend en paramètres la suite (x_n) et les entiers p et k. Pour un entier n, on accèdera au terme x_n par l'appel `x(n)`.
2. Pour k fixé, on pose $w_p = u_{p,k}$. Etudier la suite (w_p).
3. Pour p fixé, on pose $v_k = u_{p,k}$. Etudier la suite (v_k) et montrer qu'elle converge.

Solution :

1. On propose le programme suivant :

```
def u(x,p,k):
    i=2
    u=x(p+1)
    while i<k+1:
        if x(p+i) >u:
            u = x(p+i)
    return u
```

2. Ecrivons d'abord que la suite (x_n) converge vers m.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad m - \epsilon < x_n < m + \epsilon$$

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\forall p \geqslant n_0, \quad p+1, p+2, \ldots, p+k$ sont aussi plus grand que n_0. On peut donc appliquer la définition précedente :

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\}, m - \epsilon < x_{p+i} < m + \epsilon$$

C'est en particulier le cas du maximum des $(x_{p+i})_{i \in \{1,\ldots,k\}}$. Donc on a que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant n_0, \quad m - \epsilon < w_p < m + \epsilon$$

Ce qui veut exactement dire que (w_p) converge vers m.

3. Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $v_{k+1} = \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+k+1}\} \geqslant \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+k}\} = v_k$. La suite (v_k) est donc croissante. D'autre part, (x_n) est convergente, donc majorée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqslant M$. On a donc en particulier que $v_k \leqslant M$.

   Puisqu'elle est croissante et majorée, la suite (v_k) converge vers une limite dépendant de p, qu'on note m_p.

4. *Question subsidiaire :* Montrer que la suite (m_p) converge et donner sa limite.

   On réutilise la définition de la convergence de (x_n) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \geqslant n_0, \quad m - \epsilon < \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+k}\} < m + \epsilon$$

   On peut donc passer à la limite sur k, dans cette inégalité. Lorsque k tend vers $+\infty$,

$$m - \epsilon \leqslant \lim_{k \mapsto +\infty} \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+k}\} \leqslant m + \epsilon$$

   On remarquera le passage aux inégalités larges. Ceci nous assure que la limite de (m_p) existe et vaut m. En effet,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant n_0, \quad m - \epsilon < m_p < m + \epsilon$$

SUJET Maths Approfondies 15

Exercice principal Maths Approfondies 15

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$. On note (E) l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Soit f un endomorphisme tel que $\forall k < n, f^k \neq 0$ et $f^n = 0$. On appelle *commutant de* f l'ensemble :

$$\mathcal{C}(f) = \{\ g \in (E) \ \mid \ f \circ g = g \circ f\}$$

.

1. Question de cours : Donner la définition d'une famille libre d'un espace vectoriel.
2. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous espace vectoriel de (E).
3. Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Montrer que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E.
4. Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Soit $\phi_a : \mathcal{C}(f) \mapsto E$ définie par $\phi_a(g) = g(a)$. Montrer que ϕ_a est un isomorphisme.
5. En déduire que $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(Id, f, \ldots, f^{n-1})$.

Solution :
Solution :

1. EC1, p9.
2. Tout d'abord, il est clair que $\mathcal{C}(f) \subset (E)$. Ensuite, l'endomorphisme nul commute bien avec f.

   Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et $(g, h) \in \mathcal{C}(f)^2$. Alors, $f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda(f \circ g) + \mu(f \circ h) = \lambda(g \circ f) + \mu(h \circ f) = (\lambda g + \mu h) \circ f$. Ainsi, $\mathcal{C}(f)$ est bien un sous espace vectoriel de (E).
3. Tout d'abord, on dispose bien de $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$, puisque $f^{n-1} \neq 0$. Montrons que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est libre. Soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(a) = 0$.

   Soit $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. On applique f^{n-1-j}, pour obtenir n équations. Ainsi,

$$\forall j \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1-j+i}(a) = 0$$

En remarquant que $\forall k \geqslant n, f^k(a) = 0$, on obtient successivement que $\lambda_{n-1} = 0$, puis $\lambda_{n-2} = 0$, jusqu'à $\lambda_0 = 0$. Ainsi, la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est libre dans E.

Cette famille contient n élements, qui est la dimension de E. la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est donc une base de E.

4. — Montrons d'abord que ϕ_a est une application linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et $(g, h) \in \mathcal{C}(f)^2$. On a que $\phi_a(\lambda g + \mu h) = \lambda g(a) + \mu h(a) = \lambda \phi_a(g) + \mu \phi_a(h)$, d'où la linéarité.
   — Soit $g \in \ker(\phi_a)$. Par définition, $g(a) = 0$. Mais on a aussi que $g(f(a)) = f(g(a)) = f(0) = 0$. En itérant ce procédé, on montre que $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, g(f^i(a)) = 0$. On a donc montré que g est nul sur la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$. Ainsi, g est l'application nulle (i.e. $g = 0_{\mathcal{C}(f)}$). Ceci prouve l'injectivité de ϕ_a.
   — Soit $b \in E$. On considère $g \in (E)$ définie telle que

   $$g(a) = b, \quad g(f(a)) = f(b), \quad \dots, \quad g(f^{n-1}(a)) = f^{n-1}(b)$$

   L'application g considérée est bien définie, puisqu'elle l'est sur une base de E. De plus, elle vérifie que $g \circ f = f \circ g$ sur cette base. On a donc que $g \in \mathcal{C}(f)$ et que $g(a) = b$. Ceci prouve la surjectivité de ϕ_a.

   Tout ceci montre que ϕ_a est une isomorphisme.
5. Remarquons tout d'abord que $\mathrm{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1}) \subset \mathcal{C}(f)$. En effet, toute combinaison linéaire d'applications de $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ commute avec f. Ensuite, puisque ϕ_a est un isomorphisme, $\dim(\mathcal{C}(f)) = \dim(E) = n$. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut que $\mathcal{C}(f) = \mathrm{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 15

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et suivant chacune la loi normale centrée réduite.
Soient a un réel et Δ la droite d'équation cartésienne :

$$\Delta : y = ax$$

On note Y la variable aléatoire égale au carré de la distance de $M = (X_1, X_2)$ à Δ *i.e.* :

$$Y = \Big(d(M, \Delta)\Big)^2$$

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Solution :

Soit

$$\overrightarrow{v} = (a, -1)$$

un vecteur normal à Δ.

En notant $p_{\Delta^\perp}$ la projection orthogonale sur $\Delta^\perp$ on a :

$$p_{\Delta^\perp}(M) = < \overrightarrow{OM}, \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} > \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} = \frac{aX_1 - X_2}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$$

Il en résulte que :

$$Y = ||p_{\Delta^\perp}(M)||^2$$

et ainsi

$$E(Y) = \frac{E((aX_1 - X_2)^2)}{1 + a^2}$$

Or, par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 et par stabilité des lois normales, on a :

$$aX_1 - X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a^2 + 1)$$

et ainsi :

$$E((aX_1 - X_2)^2) = V(aX_1 - X_2) = 1 + a^2$$

Finalement :

$$E(Y) = 1$$

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECG Maths appliquées

Juin 2024

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de belles qualités de logique et de présentation. On remarque une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 1 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes dans la connaissance du cours ainsi que de grosses faiblesses en calcul.

A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances, faisaient preuve de finesse dans leurs raisonnements et démontraient un certain recul sur les concepts étudiés.

La moyenne est de 10,44 et l'écart-type est de 4,21.

Le jury aimerait insister sur les points suivants.

- Dans la continuité de la session précédente, et toujours suite à la réforme des programmes, l'informatique a désormais une place plus importante à l'oral. Toutes les planches comportaient une question d'informatique faisant intervenir soit le langage Python, soit du SQL. Cette évolution semble de mieux en mieux intégrée par les candidats : si on rencontrer encore quelques candidats qui ont visiblement négligé cette partie du programme, ils sont de moins en moins nombreux. Cela est particulièrement vrai en ce qui concerne le SQL : alors que l'an dernier le jury avait pu constater que cette partie du programme informatique était celle à avoir fait l'objet du plus d'impasse, c'était nettement moins le cas cette année.
  Il va sans dire que les quelques candidats qui avaient choisi de faire manifestement l'impasse sur l'informatique ont été sanctionnés, et d'autant plus quand leur prestation sur la partie proprement mathématique de l'oral faisait apparaître que cette impasse était un choix délibéré.
  Les candidats doivent s'attendre pour l'année prochaine, et les suivantes, à ce que l'informatique garde la place qu'elle occupe désormais. Chaque planche proposée aux candidats continuera à comporter au moins une question concernant le programme d'informatique.
- Le jury apprécie particulièrement les candidats attentifs à la cohérence de leurs résultats. Cela est notamment le cas quand cela permet, par exemple, à des candidats de repérer des erreurs de calcul. Des candidats ayant ainsi d'eux-mêmes corriger leurs erreurs ont été récompensés.
- Les candidats doivent savoir citer précisément les résultats de leur cours avec toutes les hypothèses nécessaires. A ce propos, le jury a été frappé notamment du manque de rigueur avec lequel plusieurs candidat ont cité un « théorème du point fixe », à propos des limites de suites récurrentes, qui apparaît bien dans le programme officiel mais sans se voir attribuer ce nom. Quand le jury a demandé aux candidats quel résultat ils désignaient de la sorte, trop peu ont été capables de donner une réponse suffisamment précise, plusieurs ont notamment omis l'hypothèse de continuité, pourtant essentielle ici.
- Le jury attend des candidats qu'ils soient en mesure d'illustrer leurs raisonnements par des schémas, et qu'ils soient également capables de tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction.
- Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral. Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation. Le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue

avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre question, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts.

- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET Maths Appliquées 1

Exercice principal Maths Appliquées 1

On note I_4 la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
On définit l'ensemble $\mathcal{E}$ par :

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Question de cours : Énoncer la formule du binôme de Newton pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Justifier que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et en donner une base.
3. Écrire une fonction Python qui prend en entrée une matrice M de taille 4 et renvoie un message permettant de savoir si M appartient ou non à $\mathcal{E}$.
4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $M_{a,b} \in \mathcal{E}$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une expression matricielle de $M_{a,b}^k$ en fonction de k, a et b.
5. Justifier que les matrices de $\mathcal{E}$ sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que :
   $$\forall M \in \mathcal{E}, \quad M = PDP^{-1},$$
   où D est une matrice de taille 4 diagonale à déterminer. On donnera une expression matricielle de P.

Solution :

1. ECG 2 : page 7.
2. $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}\left(I_4, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\,(I_4, J)$, où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3.
```python
import numpy as np
def Appartenance(M):
        N = (M[0,0]-M[0,1])*np.eye(4) + M[0,1]*np.ones((4,4))
        compteur = 0
        for i in range(4):
                for j in range(4):
                        if M[i,j] == N[i,j]:
                                compteur = compteur +1
        if compteur == 16 :
                print('La matrice est dans E')
        else:
                print('La matrice n\'est pas dans E')
```
4. Soient $M \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe deux réels a et b tels que $M = (a-b)I_4 + bJ$. Comme I_4 et J commutent, la formule du binôme de Newton donne :
   $$M^k = ((a-b)I_4 + bJ) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (a-b)^{k-\ell} b^\ell J^\ell.$$
   Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on montre que $J^n = 4^{n-1}J$. Ainsi :
   $$M^k = (a-b)^k I_4 + \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} (a-b)^{k-\ell} b^\ell 4^{\ell-1} J = (a-b)^k I_4 + \frac{1}{4}((a+3b)^k - (a-b)^k)J.$$

5. M est symétrique (à coefficients réels) donc diagonalisable.

On remarque que $M-(a-b)I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, est une matrice de rang 1.

Puis, en notant C_k la k-ième colonne de $M-(a-b)I_4$ pour $k \in [\![1,4]\!]$, on remarque que $C_1 - C_2 = 0, C_1 - C_3 = 0, C_1 - C_4 = 0$, ce qui justifie que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres de M associés à la valeur propre $a-b$.

Puis, $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = (a+3b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc le vecteur $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $a+3b$.

La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est formée de $4 = dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}))$ vecteurs et est libre, puisque la résolution de $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + \delta X_4 = 0$ pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ donne $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

On a donc trouvé un base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M. On peut choisir :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+3b \end{pmatrix}.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 1

On se donne $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite, $x \in \mathbb{R}$ un réel, et $\alpha \in \left]0\,;1\right[$.

On étudie le processus aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$X_0 = x$$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \alpha X_n + \epsilon_n$$

.

Étudier la convergence en loi de X_n.

Solution :

On remarque d'abord que $X_n = \alpha^n x + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i-1}\epsilon_i$

Donc, par stabilité par opération affine et par somme de variables indépendentes des lois normales :

$$X_n \sim \mathcal{N}\left(\alpha^n x, \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{2i}\right)$$

ie

$$X_n \sim \mathcal{N}\left(\alpha^n x, \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}\right)$$

Donc, si G est une variable normale centrée réduite, $t \in \mathbb{R}$, en notant $\sigma_n = \sqrt{\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}}$ et $\sigma = \sqrt{\frac{1}{1-\alpha^2}}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \leqslant t) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_n - \alpha^n x}{\sigma_n} \leqslant \frac{t-\alpha^n x}{\sigma_n}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(G \leqslant \frac{t-\alpha^n x}{\sigma_n}\right) \\
&\to_n \mathbb{P}\left(G \leqslant \frac{t}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sigma G \leqslant t\right)
\end{aligned}$$

D'où la convergence de X_n vers une loi normale centrée de variance σ^2.

Question supplémentaire :

On étudie maintenant le processus aléatoire suivant :

$$Y_0 = x$$

et pour tout n,

$$Y_{n+1} = (1 - n^{-\frac{1}{2}})Y_n + \epsilon_n$$

. Que peut-on dire de la convergence en loi de Y_n ?

On pourra s'aider de l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, qu'on ne demande pas de redémontrer.

CORRECTION QSUP :

posons $\beta_n = \left(1 - n^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\bar{\beta_n} = \prod_{i=1}^{n} \beta_i$.

On a, de même

$$Y_n = \bar{\beta}_n x + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}_{n-1}}{\bar{\beta}_i} \epsilon_i$$

$$Y_n \sim \mathcal{N}\left(\bar{\beta_n} x, \bar{\beta_n}^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\bar{\beta}_i^2}\right)$$

$\bar{\beta_n}$ est décroissante et positive, donc converge vers une limite que l'on note β

De plus, par passage au logarithme, et étude de la série téléscopique de terme général $(\ln \bar{\beta}_n - \ln \bar{\beta}_{n-1}) = \ln\left(1 - n^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant -n^{-\frac{1}{2}}$.

On a

$$\begin{aligned}
\log \bar{\beta}_n &= \sum_{i=1}^{n} (\ln \bar{\beta}_i - \ln \bar{\beta}_{i-1}) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} i^{-\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \int_1^n t^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}t \\
&= 2n^{\frac{1}{2}} \\
\bar{\beta}_n &\leqslant e^{2n^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

D'où la convergence par comparaison de la série (à termes positifs) de terme général $\frac{1}{\bar{\beta}_n^2}$, d'où la convergence en loi de même qu'au dessus.

SUJET Maths Appliquées 2

Exercice principal Maths Appliquées 2

Valeur numérique utile : si Φ désigne la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite, alors $\Phi(1,96) \approx 0,975$

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Énoncer le théorème central limite.
2. (a) On admet que le polynôme $Q = X^3 - 2X^2 - X + 2$ est un polynôme annulateur de A. Déterminer le spectre de A et les sous-espaces propres de A.

   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Soient $X_1, \cdots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On note : $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n^\star = \dfrac{M_n - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$.

   (a) Déterminer l'espérance et la variance de la variable M_n

   (b) Donner, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, l'approximation de la probabilité $\mathbb{P}([-\alpha < M_n^\star < \alpha])$ donnée par le théorème central limite.

   (c) Montrer que, pour n suffisamment grand, $\mathbb{P}\left(p \in \left[M_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; M_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 95\%$.
4. On note N le nombre de vecteurs propres de A dont les cœfficients sont des entiers de $[\![-5, 5]\!]$.

   (a) On admet qu'on dispose d'une fonction en langage Python `vecteurs_propres` prenant en argument un vecteur `u` et renvoyant le booléen `True` si `u` est un vecteur propre de A et `False` sinon. Expliquer comment le programme suivant permet d'estimer la valeur de N :

```python
import numpy.random as rd

def simul():
        u = [ rd.randint ( -5 ,6) for k in range (3) ]
        return vecteurs_propres (u)

n = 10000
nb = 0
for k in range (n):
        if simul ():
                nb += 1
print (round(nb/n *11**3))
```

   Avec `round(x)` = l'entier le plus proche de x.

   (b) Montrer que si n est choisi suffisamment grand et supérieur à 4×11^6, on est alors sûr à 95 % de la valeur affichée.

   (c) En exécutant le programme pour 4×11^6, la valeur qui s'affiche est 22. Calculer la valeur exacte de N et commenter le résultat obtenu par cette estimation.

Solution :

1. Cours : programme de seconde année p. 20
2. (a) $Q=(X+1)(X-1)(X-2)$ donc les éventuelles valeurs propres de A sont parmi -1, 1 et 2. Montrons que ce sont en effet les trois valeurs propres de A : Posons $E_{-1}=\text{Ker}(A+I)$, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}4x+y+z &= 0\\ x+y+z &= 0\\ -3x &= 0\end{cases}$$

et ainsi

$E_{-1}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$, de manière analogue : $E_1=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\right)$ et $E_2=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

On a bien $\text{Sp}(A)=\{-1,1,2\}$ et E_{-1}, E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés.

(b) Les vecteurs $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (famille libre de 3 vecteurs en dimension 3) donc A est diagonalisable.

3. (a) Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, X_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ donc $\mathbb{E}(X_k)=p$ et $\mathbb{V}(X_k)=p(1-p)$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(M_n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)=p$

Par indépendance des X_k, $\mathbb{V}(M_n)=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k)=\dfrac{p(1-p)}{n}$ donc $\sigma(M_n)=\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

(b) Ainsi $M_n^\star=\dfrac{M_n-\mathbb{E}(M_n)}{\sigma(M_n)}$ est la variable centrée réduite associée à M_n.

Les variables X_k étant indépendantes et de même loi, d'après le théorème central limite, $M_n^\star$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}(0,1)$, dès lors, pour $\alpha>0$, $\mathbb{P}(-\alpha<M_n^\star<\alpha)\approx\Phi(\alpha)-\Phi(-\alpha)=2\Phi(\alpha)-1$

(c) $\mathbb{P}\left(p\in\left[M_n-\dfrac{1}{\sqrt{n}};M_n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right)=\mathbb{P}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\leqslant M_n^\star\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$

Or comme $p\in]0;1[$, $p(1-p)\leqslant\dfrac{1}{4}$, on a $2\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}}$, donc

$\mathbb{P}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\leqslant M_n^\star\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\geqslant\mathbb{P}(-2\leqslant M_n^\star\leqslant 2)$

Et $\mathbb{P}(-2\leqslant M_n^\star\leqslant 2)=2\Phi(2)-1\geqslant 2\Phi(1,96)-1\approx 0,95$ car Φ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On obtient ainsi le résultat demandé.

4. (a) $\text{card}([\![-5;5]\!]^3)=11^3$ donc $N=p\times 11^3$

`simul` modélise l'épreuve de de Bernoulli consistant à choisir au hasard un vecteur (à coordonnées entières) de $[\![-5;5]\!]^3$

On réalise $n=10000$ fois dans des conditions indépendantes cette expérience (boucle `for`).

Si on note X_k la variable aléatoire valant 1 si le vecteur tiré est un vecteur propre de A et 0 sinon, le nombre `nb/n` affiché en sortie de boucle correspond à une réalisation de $M_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$, estimateur sans biais de p. Ainsi `nb/n` donne une estimation de p.

`nb/n*11**3` arrondi à l'entier le plus proche donne ainsi une estimation de N.

(b) D'après la question 3(c) : $\mathbb{P}\left(11^3M_n-\dfrac{11^3}{\sqrt{n}}\leqslant N\leqslant 11^3M_n+\dfrac{11^3}{\sqrt{n}}\right)\geqslant 0,95$

Si $n\geqslant 4\times 11^6$ alors $\dfrac{11^3}{\sqrt{n}}\leqslant 0,5$ donc $\mathbb{P}\left(11^3M_n-0,5\leqslant N\leqslant 11^3M_n+0,5\right)\geqslant 0,95$

Ainsi $\mathbb{P}\left(-0,5\leqslant N-11^3M_n\leqslant 0,5\right)\geqslant 0,95$ donc l'arrondi de $11^3\times M_n$ calculé par le programme fournit bien une estimation à 95 %.

5. Calculons la valeur exacte de N afin de la comparer à 22 :

   D'après l'étude réalisée dans 2.(a), les vecteurs propres de A à coefficients entiers sont de la forme $(0, k, -k)$ ou $(-2k, k, 3k)$ ou $(k, 0, -k)$ avec $k \in \mathbb{Z}^\star$.

   Comme il y a 10 entiers non nuls compris entre -5 et 5, on dénombre :

   — 10 vecteurs propres $(0, k, -k)$ éléments de $[\![-5, 5]\!]^3$

   — 10 vecteurs propres $(k, 0, -k)$ éléments de $[\![-5, 5]\!]^3$

   Reste à dénombrer ceux qui sont de la forme $(-2k, k, 3k)$ avec $k \neq 0$.

   Il faut que l'on ait : $\begin{cases} 0 < |2k| \leqslant 5 \\ 0 < |k| \leqslant 5 \\ 0 < |3k| \leqslant 5 \end{cases}$

   Les seuls entiers k qui conviennent sont -1 et 1.

   Il y a donc 2 vecteurs propres de la forme $(-2k, k, 3k)$ qui appartiennent à $[\![-5, 5]\!]^3$.

   On en déduit que $N = 10 + 10 + 2 = 22$ ce qui correspond à la valeur obtenue par estimation dans la question précédente.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée vérifiant la propriété :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2} \geqslant 0.$$

Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_{n+1} - u_n) = 0$.

On pourra poser $v_n = u_n - u_{n+1}$.

Solution :

- La propriété s'écrit $v_n \geqslant v_{n+1}$. Ainsi la suite (v_n) est décroissante.
- Montrons que (v_n) est positive. S'il existe n_0 tel que $v_{n_0} < 0$, $v_n \leqslant v_{n_0} < 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Autrement dit $u_{n+1} \geqslant u_n + |v_{n_0}|$ pour $n \geqslant n_0$. Il en résulte que (u_n) n'est pas majorée, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.
- Puisque (v_n) est positive, la suite (u_n) est décroissante. Elle est minorée. En conséquence elle converge. On note ℓ sa limite. On peut noter que (v_n) converge vers 0.
- On note maintenant que pour tous $n \geqslant p \geqslant 1$, on a

$$(n+1-p)v_n \leqslant \sum_{k=p}^{n} v_k = \sum_{k=p}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{n+1} \leqslant u_p - \ell.$$

  D'où $nv_n \leqslant (p-1)v_n + (u_p - \ell)$.
- Pour $\varepsilon > 0$, on fixe p tel que $(u_p - \ell) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

  On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (p-1)v_n = 0$, il existe donc N tel que pour tout $n \geqslant N$, $(p-1)v_n \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

  Ainsi, pour $n \geqslant N$, $0 \leqslant nv_n \leqslant \varepsilon$: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = 0}$

SUJET Maths Appliquées 3

Exercice principal Maths Appliquées 3

A et B sont deux sacs qui contiennent chacun deux boules portant le numéro 1 ou le numéro 0. Une expérience consiste à tirer simultanément une boule de chaque sac et à la replacer dans l'autre sac.
On part des sacs A_0 contenant deux boules marquées 1 et B_0 contenant deux boules marquées 0 et on définit par récurrence la suite de sacs A_n, B_n par : l'expérience appliquée à A_n, B_n donne A_{n+1}, B_{n+1}.
S_n [resp. T_n] est la variable aléatoire égale à la somme des numéros sur les boules de A_n [resp. B_n] $(n \in \mathbb{N})$.

1. (a) **Cours.** Loi d'une variable aléatoire discrète finie.
   (b) i. Ecrire le code d'une fonction `echange(A,B)` qui prend en entrée les sacs A et B, représentés sous forme de liste à deux éléments, et qui renvoie la nouvelle composition des sacs après échange aléatoire d'une boule de A et d'une boule de B.
   ii. Ecrire le code d'une fonction `simuleS(n)` qui prend en entrée un entier `n` et réalise une simulation de la variable aléatoire S_n.
2. (a) Que valent S_0 et S_1 ? Expliciter la loi de S_2.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0)$. Expliciter la loi de S_n en fonction de p_n et calculer l'espérance $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n)$. Ce résultat était-il prévisible ? Comparer $\mathrm{Var}(\mathrm{S_n})$ et $\mathrm{Var}(\mathrm{T_n})$. Exprimer $\mathrm{Var}(\mathrm{S_n})$ en fonction de p_n.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, et en déduire p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la loi de S_n en fonction de n.
3. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, comment le produit $M.E$ se déduit-il de M ? Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n.E = A^n$.
   (b) En utilisant les résultats précédents, calculer A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Solution :

1. (a) **Cours.** cf. programme $1^{\text{ière}}$année, 2^{nd}semestre, IV . 3 . a.
   (b) *Fonction echange* :
   . Pour simuler les tirages aléatoires, on utilise la fonction randint du module random :
   random.randint(a, b)
   Renvoie un entier aléatoire N tel que a <= N <= b.
   . L'échange des valeurs de deux variables var_1 et var_2 se fait classiquement via une variable auxiliaire :
   $aux \leftarrow var_1;\ \ var_1 \leftarrow var_2;\ \ var_2 \leftarrow aux$
   Les habitués de Python utilisent l'affectation simultanée :
   $var_1, var_2 \leftarrow var_2, var_1$

   Réalisation du sac A_n : on part de l'état initial des sacs, A_0 contenant deux boules marquées $1, \mathrm{B}_0$ contenant deux boules marquées 0, et on effectue n échanges de boules.

   Un programme Python possible :

   Programme Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

```python
def echange(A, B):
    a=rd.randint(2)
    b=rd.randint(2)
    aux=A[a];A[a]=B[b];B[b]=aux          # ou : A[a],B[b]= B[b],A[a]
    return A, B

def simuleS(n):
    A,B=[1,1], [0,0]
    for k in range(n):
        A,B=echange(A,B)
    return sum(A)
```

---

2. (a) . S_0, somme des numéros de A_0, vaut 2 et est la variable aléatoire constante 2 (aucun échange aléatoire).
. S_1 est la somme des numéros du sac A_1 obtenu après l'échange aléatoire d'une boule 1 du sac A_0 et d'une boule 0 du sac B_0. Dans tous les cas, A_1 contient une boule 1 et une boule 0, donc S_1 vaut 1 : S_1 est la variable aléatoire constante 1.
. A_2 résulte de l'échange aléatoire d'une boule de A_1 et d'une boule de B_1, sacs contenant 0 et 1. $\{S_2=0\}$ s'obtient en tirant la boule 1 de A_1 : 1 chance sur 2, et tirant la boule 0 de B_1 : 1 chance sur 2.
Donc $\mathbb{P}(S_2=0) = \dfrac{1}{4}$

Un raisonnement analogue, en permutant boule 1 et boule 0, donne la probabilité : $\mathbb{P}(S_2=2) = \dfrac{1}{4}$

Il en résulte que : $\mathbb{P}(S_2=1) = 1-\mathbb{P}(S_2=0) - \mathbb{P}(S_2=2) = 1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}$, soit finalement : $\mathbb{P}(S_2=1) = \dfrac{1}{2}$

Conclusion : loi de S_2

valeur k	0	1	2
$\mathbb{P}(S_2=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(b) Si on démarre la récurrence à $n=1$, la répartition initiale entre les boules 0 et 1 est symétrique, donc la probabilité que le premier sac contienne 2 boules 0 est égale à la probabilité qu'il contienne 2 boules 1 ; par suite : $\mathbb{P}(S_n=2)=\mathbb{P}(S_n=0)=p_n$; et donc : $\mathbb{P}(S_n=1) = 1-\mathbb{P}(S_n=0) - \mathbb{P}(S_n=2) = 1-2\,p_n$.
Pour ceux qui ne sont pas convaincus par l'argument de symétrie ci-dessus, voici une autre justification qui a l'avantage de montrer que la symétrie n'est pas nécessaire (et qui sera utile par la suite...) :

(J) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $\{S_n=0\}$, i.e. A_n ne contient que des boules 0, ne peut découler :
. ni du cas $\{S_{n-1}=0\}$, car alors A_{n-1} ne contient que des 0 et un échange amènera fatalement un 1,
. ni du cas $\{S_{n-1}=2\}$, car alors A_{n-1} ne contient que des 1 et un échange ne peut éliminer qu'un 1 ;
donc il se déduit aléatoirement du cas où A_{n-1} et B_{n-1} contiennent tous deux 0 et 1.
Or la probabilité de remplacer la boule 1 de A_{n-1} par la boule 0 de B_{n-1} (=1 chance sur 2 de tirer 1 de A_{n-1} × 1 chance sur 2 de tirer 0 de B_{n-1} = 1/4) est égale à la probabilité de remplacer la boule 0 de A_{n-1} par la boule 1 de B_{n-1} (1/2 d'avoir le 0 de A_{n-1} × 1/2 d'avoir le 1 de B_{n-1} 1/4) □

Conclusion : loi de S_n en fonction de p_n

valeur k	0	1	2
$\mathbb{P}(S_n=k)$	p_n	$1-2\,p_n$	p_n

D'où l'espérance mathématique : $\mathbb{E}(S_n) = 0 \times p_n + 1 \times (1-2\,p_n) + 2 \times p_n = 1$.

T_n est la somme des numéros dans le second sac. Pour $n=1$, les deux sacs ont la même composition (1 boule 1 et 1 boule 0), on voit que suivre la somme du second sac équivaut à suivre la somme du premier sac (permuter les deux sacs à l'étape $n=1$ par exemple). Donc $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(S_n)$.
Alors $S_n+T_n = 2$ implique $2S_n = 2$, i.e. $\mathbb{E}(S_n) = 1$: on retrouve le résultat (quasi) sans calcul.
La relation $S_n+T_n = 2$, qui traduit la conservation des billes lors des expériences successives, donne aussi : $T_n=2-S_n$, d'où : $\mathrm{Var}(T_n)=\mathrm{Var}(-S_n)=\mathrm{Var}(S_n)$; T_n et S_n ont même variance.
Variance : $\mathrm{Var}(S_n) =\mathbb{E}(S_n^2)-\mathbb{E}(S_n)^2$; or $\mathbb{E}(S_n^2) = 0^2 \times p_n + 1^2 \times (1-2p_n) + 2^2 \times p_n = 1+2p_n$.
Donc $\mathrm{Var}(S_n) = 1+2p_n - 1^2$, soit : $\mathrm{Var}(S_n) = 2p_n$.

(c) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la justification (J) de la question 2.(b) montre que $\mathbb{P}(S_{n+1}=0)=\dfrac{1}{4}\,\mathbb{P}(S_n=1)$.
D'où, connaissant la loi de S_n : $p_{n+1}=\dfrac{1}{4}\,(1-2\,p_n)$, soit : $p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}\,p_n+\dfrac{1}{4}$.
Le point fixe étant $\dfrac{1}{6}$, on déduit : $p_{n+1}-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{1}{6}\right)$, d'où $p_{n+1}-\dfrac{1}{6}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\left(p_1-\dfrac{1}{6}\right)=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^n}\times\dfrac{1}{6}$

Conclusion : $\left| \begin{array}{l} p_{n+1} = \dfrac{1}{6}\left(1 + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^n}\right) \; ; \quad \text{on vérifie que la formule vaut pour } n \in \mathbb{N}. \\ \text{Par suite :} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = \dfrac{1}{6}\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) \end{array}\right.$

D'où la loi de S_n en fonction de n :

valeur k	0	1	2
$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n)$	$\dfrac{1}{6}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)$	$\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\,\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}$	$\dfrac{1}{6}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)$

3. (a) La matrice $M.E$ se déduit de la matrice M en permutant les colonnes 1 et 3 :

$1^{\text{ière}}$ colonne de $M.E \;= M.E\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \;=\; 3^{\text{ième}}$colonne de M.

$2^{\text{ième}}$colonne de $M.E \;= M.E\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \;=\; 2^{\text{ième}}$colonne de M.

$3^{\text{ième}}$colonne de $M.E \;= M.E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \;=\; 1^{\text{ière}}$colonne de M.

Montrons par récurrence sur n que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n.E = A^n \quad (\mathcal{P}_n)$
ce qui signifie que les matrices A^n ont même colonne 1 et 3.

- $A.E = A$ puisque la colonne 1 et la colonne 3 de A sont égales.
- si $A^n.E = A$, alors $A^{n+1}.E = A\,.\,A^n.E = A./A^n = A^{n+1}$, donc $(\mathcal{P}_n) \Rightarrow (\mathcal{P}_{n+1})$
- donc $(\mathcal{P}_n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) relation matricielle entre les lois de S_n et S_{n+1} : à partir de la loi de S_n, calculer celle de S_{n+1}

- $\mathbb{P}(S_{n+1} = 0)$: si au rang n on n'a que des boules marquées 0 dans le sac A, l'échange d'une boule amènera nécessairement une boule 1 dans le sac A.
  De même, si au rang n on n'a que des boules marquées 1 dans le sac A, l'échange d'*une* boule ne remplacera qu'une une boule 1 du sac A.
  Donc la seule possibilité que A ne contienne que des 0 au rang $n+1$ est qu'au rang n, A contienne un 1 et un 0 et B aussi, ce qui se produit avec la probabilité $\mathbb{P}(S_n = 1)$; et on a alors 1 chance sur 2 de tirer la boule 1 de A et 1 chance sur 2 de tirer la boule 0 de B, donc 1 chance sur 4 d'aboutir après échange à que des 0 dans A.
  Par conséquent : $\mathbb{P}\Big(S_{n+1} = 0\Big) = \dfrac{1}{4}\,.\,\mathbb{P}\Big(S_n = 1\Big)$.
- En échangeant 0 et 1 dans le raisonnement, on obtient : $\mathbb{P}\Big(S_{n+1} = 2\Big) = \dfrac{1}{4}\,.\,\mathbb{P}\Big(S_n = 1\Big)$.
- $\mathbb{P}(S_{n+1} = 1)$:
  si au rang n, le sac A ne contient que des boules marquées 0, alors après tirage et échange, il contiendra une boule 0 et une boule 1 : donc un premier cas de réussite avec une probabilité $\mathbb{P}(S_n = 0)$;
  symétriquement, si A ne contient que des 1 au rang n, l'échange conduit à la réussite, la probabilité étant $\mathbb{P}(S_n = 2)$;
  enfin, si au rang n le sac A contient une boule 0 et une boule 1, et donc le sac B aussi, la probabilité étant $\mathbb{P}(S_n = 1)$, alors il y a 1 chance sur 4 de tirer le 0 de A et le 0 de B et 1 chance sur 4 de tirer le 1 de A et le 1 de B : soit 1 chance sur 2 de rester avec un 0 et un 1.
  Au total : $\mathbb{P}(S_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(S_n = 0) + \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(S_n = 1) + \mathbb{P}(S_n = 2)$.

La relation entre la loi de S_n et celle de S_{n+1} est donc :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(S_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(S_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_n = 0) \\ \mathbb{P}(S_n = 1) \\ \mathbb{P}(S_n = 2) \end{pmatrix} \qquad \text{qu'on écrit :} \left| \begin{array}{l} L_{n+1} = A.L_n \\ \text{où } L_n \text{ "représente" la loi de } S_n. \end{array}\right.$$

En particulier $L_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ puisque $S_0 = 2$ variable aléatoire constante

$L_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ puisque $S_1 = 1$ variable aléatoire constante (on a bien $L_1 = AL_0$)

Il résulte de la question 1. que : $L_n = \begin{pmatrix} p_n \\ 1 - 2p_n \\ p_n \end{pmatrix}$.

De la relation $L_{n+1} = A.L_n$, on tire $L_{n+1} = A^n.L_1$ et $L_n = A^n.L_0$. D'où :

- la colonne 3 de A^n est $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^n.L_0 = L_n$;
- la colonne 2 de A^n est $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^n.L_1 = L_{n+1}$
- la colonne 1 de A^n est égale à la colonne 3 (*cf supra*).

Donc $A^n = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} & p_n \\ 1-2p_n & 1-2p_{n+1} & 1-2p_n \\ p_n & p_{n+1} & p_n \end{pmatrix}$, soit, puisqu'on a calculé p_n :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right] & \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right] & \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right] \\ \frac{2}{3}\left[1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right] & \frac{2}{3}\left[1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right] & \frac{2}{3}\left[1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right] \\ \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right] & \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right] & \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right] \end{pmatrix}$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 3

Soit n un entier $\geqslant 6$. Les n cadres d'une entreprise soit s'apprécient mutuellement, soit se détestent mutuellement. On peut schématiser la situation par un graphe non orienté simple dont les sommets « sont » les cadres et où les arêtes matérialisent les relations d'estime réciproque. Ici, ne pas s'estimer mutuellement équivaut à se détester mutuellement.

1. Chaque cadre dresse la liste des collègues qu'il apprécie.
   (a) Montrer que si on fait deux tas selon la parité de chaque liste, celui des listes contenant un nombre impair de noms contient un nombre pair de listes.
   (b) Montrer qu'il existe au moins deux listes ayant le même nombre de noms.
2. Pour mesurer l'impact des affinités sur le travail d'équipe, le DRH veut former un groupe de travail homogène de 3 de ces cadres. Montrer qu'il peut toujours soit réunir 3 personnes qui s'apprécient mutuellement, soit réunir 3 personnes qui se détestent mutuellement.

Solution :

---

1. le nombre de collègues qu'un employé apprécie est le degré du sommet associé à l'employé.
   (a) Le nombre a de listes contenant un nombre impair de noms est le nombre de degrés impairs ; s'il était impair, la somme de tous les degrés serait impaire : or, la formule d'Euler (des poignées de main) dit que la somme des degrés est le double du nombre d'arêtes, et est donc paire ; contradiction : donc a est pair.
   (b) Cela revient à montrer qu'il existe au moins deux sommets de même degré.
   Démonstration par l'absurde :
   un sommet est reliable à au plus $n-1$ autres sommets, donc son degré est compris entre 0 et $n-1$.
   Si les degrés des n sommets étaient différents, toutes les valeurs entre 0 et $n-1$ seraient prises ;
   mais : . s'il y a un sommet de degré 0, il existe un sommet qui n'est relié à aucun autre ;
   . s'il y a un sommet de degré $n-1$, il y a un sommet qui est relié à tous les autres ;
   contradiction (le second devrait être relié au premier, qui est censé n'être relié à aucun).
2. Il faut montrer qu'il y a toujours soit 3 sommets mutuellement reliés, soit 3 sommets sans liens entre eux.
   Soit s un sommet donné. Le nombre $n-1$ des autres sommets est supérieur ou égal à 5 (car $n \geqslant 6$).
   - si s admet 3 voisins : i, j, k (i.e. que s est relié à i, j et k), alors :
     - si deux de ces voisins, par exemple i et j, sont reliés, alors $\{s, i, j\}$ est un groupe de 3 cadres qui s'apprécient ;
     - sinon, $\{i, j, k\}$ est un groupe de sommets sans liens, donc un groupe de 3 cadres qui se détestent (ce qui équivaut ici à : ne s'apprécient pas).
   - sinon s a au plus deux voisins et au moins 3 des $n-1 \geqslant 5$ sommets différents de s ne lui sont pas liés. Notons les i, j, k ; alors :
     - si 2 d'entre eux, par ex. i et j, ne sont pas reliés, $\{s, i, j\}$ est un groupe de 3 cadres qui se détestent ;
     - sinon i, j, k sont mutuellement reliés, donc $\{i, j, k\}$ est un groupe de 3 cadres qui s'apprécient.

SUJET Maths Appliquées 4

Exercice principal Maths Appliquées 4

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de paramètre $p \in]0,1[$. On appelle doublet le fait d'obtenir deux succès à la suite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements suivants : A_n « obtenir le premier doublet au rang n », B_n « obtenir au moins un doublet au cours des n premières épreuves ». Enfin, on pose $p_n = P(A_n)$ et $q = 1 - p$.

1. Question de cours : Énoncer le théorème de la limite monotone pour une suite d'événements.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que $P(\overline{B_{n+2}}) \leqslant q(2-q)P(\overline{B_n})$. Est-il possible de ne pas obtenir de doublet ?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k\right)$.
4. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre p_{n+3}, p_{n+2} et p_n.

   Dans la suite, on suppose $p \neq \dfrac{2}{3}$.
5. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p^2q \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de A.
6. Justifier l'existence de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ (sans expliciter leurs valeurs) tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \lambda_k^n.$$
   En déduire la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. ECG 2 - page 7
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_k l'événement "Succès à la k-ième épreuve" pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   On remarque que $\overline{B_{n+2}} \subset \overline{B_n} \cap (\overline{S_{n+1}} \cup \overline{S_{n+2}})$. Par indépendance des épreuves, $P(\overline{B_{n+2}}) \leqslant P(\overline{B_n})(2q - q^2)$.
   Puis, on note B l'événement « Ne jamais obtenir de doublet ». Il s'agit de déterminer la probabilité de $B = \cap_{n \geqslant 1} \overline{B_n}$. La suite $(\overline{B_n})$ étant décroissante, le théorème de la limite monotone donne $P(B) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(\overline{B_n})$.
   Comme $q(2-q) \in]0,1[$, la suite $(P(\overline{B_n}))$ converge vers 0 donc $P(B) = 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec les notations précédentes :
$$A_{n+3} = S_{n+3} \cap S_{n+2} \cap \overline{S_{n+1}} \cap \overline{B_n} :$$
   il faut un doublet au rang $n+3$, et il doit être précédé d'un echec, sinon un doublet serait apparu au rang $n+2$. Pour obtenir une égalité, il faut encore demander qu'aucun doublet ne soit apparu aux rangs 1 à n. Les quatre événements ci-dessus sont indépendants, grâce à l'indépendance mutuelle des S_k
$$p_{n+3} = P(S_{n+3})P(S_{n+2})P(\overline{S_{n+1}})P(\overline{B_n}) = p^2 q \left(1 - P(B_n)\right).$$
   Puis, l'événement B_n est la réunion disjointe des A_k pour $k \in [\![1, n]\!]$. L'additivité de P justifie alors que
$$P(B_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

Finalement : $p_{n+3} = p^2q\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$ et cette relation reste vraie si $n = 0$, car elle s'écrit $p_3 = p^2q$, qui se déduit de l'égalité $A_3 = S_3 \cap S_2 \cap \overline{S_1}$.

4. Soit $n \geqslant 2$. D'après la question précédente, on dispose des égalités $\dfrac{p_{n+3}}{p^2q} = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k$ et $\dfrac{p_{n+2}}{p^2q} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k$.
En les soustrayant, on obtient $\dfrac{p_{n+3} - p_{n+2}}{p^2q} = -p_n$, ou encore (relation encore vraie pour $n = 1$) :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+3} = p_{n+2} - (p^2q)p_n.$$

5. Soit $\lambda \in Sp(A)$.
$$A - \lambda I_3 \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & -p^2q \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda(1-\lambda) & -p^2q \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda(1-\lambda) & -p^2q \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \lambda(1-\lambda)L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda^3 - p^2q \end{pmatrix}$$
Les valeurs propres réelles de A sont donc les racines réelles de $\chi_A(X) = X^3 - X^2 + p^2q$.
On remarque que p est une racine évidente, il reste à factoriser un polynôme de degré 2.
Si on ne le remarque pas, on détermine les variations de χ_A. Son polynôme dérivé est $\chi_A' = 3X^2 - 2X = X(3X-2)$. Le tableau de variation de la fonction polynomiale associée est donc

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$\chi_A'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\chi_A(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	p^2q	$\searrow$	$-\frac{4}{27} + p^2q$	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque que $f\colon p \in]0,1[\mapsto p^2q = p^2 - p^3$ vérifie $f'(p) = -\chi_A'(p)$, donc le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

p	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	0		$\frac{4}{27}$		0

Il en résulte que $\chi_A\left(\dfrac{2}{3}\right) < 0$, puisque $p \neq \dfrac{2}{3}$. Comme $\chi_A(0) = p^2q > 0$, la matrice A possède trois valeurs propres réelles simples et non nulles, notées $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$: A est donc diagonalisable.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n le vecteur colonne ${}^t(p_{n+2}\ p_{n+1}\ p_n)$. La relation de récurrence établie à la question 3 s'écrit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = AU_n$. On en déduit par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = A^{n-1}U_1,$$
avec $U_1 =^t (p_3\ p_2\ p_1) =^t (p^2q\ p^2\ 0)$.

Vu la question précédente, il existe une matrice inversible de taille 3 notée P et $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ telle que $A = PDP^{-1}$. La relation $U_n = A^{n-1}U_1$ peut se récrire $P^{-1}U_n = D^{n-1}(P^{-1}U_1)$,
Par produit matriciel, on en déduit l'existence de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \lambda_k^n.$$
Comme $\chi_A(-1) = -2 + p^2q < -1$ et $\chi_A(1) = p^2q > 0$, les trois valeurs propres de A vérifient
$$-1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \frac{2}{3} < \lambda_3 < 1,$$
donc elles ont toutes une valeur absolue strictement plus petite que 1. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 4

La base de données GAMESTAT d'un jeu vidéo comporte deux tables : la table `joueurs` représente les joueurs et la tables `parties` représente les parties. Le schéma est le suivant :

— `joueurs(id,pseudo,credit,niveau)`
avec
`id` : identifiant d'un joueur, type entier
`pseudo` : type chaîne de caractères (pseudonyme du joueur)
`credit` : type entier (nombre de crédits)
`niveau` : type entier (niveau atteint par le joueur)

— `parties(id,date,score)`
avec
`id` : identifiant d'un joueur, type entier
`date` : type chaîne de caractères (date de la partie)
`score` : type entier (score de la partie)

Voici un exemple d'enregistrements de ces deux tables :

table `joueurs`

id	pseudo	credit	niveau
49250	princesse	3800	4
49251	oiseau	4200	2
49252	lutin	3100	5
49253	canard	2900	1

table `parties`

id	date	score
49250	2023-05-11	30500
51210	2023-07-12	61200

1. Quel attribut de la table `joueurs` peut être la clé primaire ? Justifier.
2. Écrire la requête SQL donnant le niveau du joueur dont l'identifiant est 52725
3. Écrire la requête SQL donnant le pseudo et le niveau des joueurs dont le nombre de crédits est supérieur ou égal à 3000.
4. Écrire la requête SQL donnant le pseudo des joueurs ayant joué une partie le 1er juin 2024
5. Écrire la requête SQL donnant le pseudo et l'identifiant des joueurs ayant obtenu au moins une fois le score 50000
6. Modifier la table `parties` afin de doubler les scores de toutes les parties jouées le 28 mai 2023

Solution :

1. L'attribut `Id` de la table `joueurs` peut être une clé primaire, de même que l'attribut `pseudo` car chacun identifie un joueur de manière unique.
2.
```
SELECT niveau FROM joueurs WHERE id = 52725
```
3.
```
SELECT pseudo,niveau FROM joueurs WHERE credit >= 3000
```
4.
```
SELECT pseudo FROM joueurs
JOIN parties ON joueurs.id = parties.id
WHERE parties.date = '2024-06-01'
```

5.
```
SELECT pseudo,id FROM joueurs
WHERE id IN (SELECT id FROM parties WHERE score >=50000)
```

6.
```
UPDATE parties SET score = score*2 WHERE date = "2023-05-28"
```

Question supplémentaire :

La fonction d'agrégation `MAX` renvoie la valeur maximum des enregistrements d'une sélection.

Écrire la requête SQL donnant les identifiants et pseudo des joueurs (éventuellement ex-aequo) ayant obtenu le meilleur score.

Corrigé de la question supplémentaire :

```
SELECT j.id,j.pseudo
FROM joueurs as j
JOIN parties as p ON p.id = j.id
WHERE p.score = SELECT(MAX(p.score))
                       FROM parties as p)
```

SUJET Maths Appliquées 5

Exercice principal Maths Appliquées 5

Soit la relation de récurrence : $(\mathcal{R})$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - 4 + e^{u_n} \end{cases}$

1. **Cours.** Théorème de la limite monotone pour une suite.
2. Montrer que $(\mathcal{R})$ définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que cette suite est décroissante, et qu'elle tend vers $-\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = 1 - 4n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$.
   En déduire : $\quad 1 - 4n \leqslant u_n \leqslant e - 3n$.

   (b) Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$ est majorée par la constante $\dfrac{e^e}{1-e^{-3}}$.
4. (a) Déterminer une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général de la forme $w_n = c \cdot n^p$, avec $c \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, telle que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient équivalentes quand n tend vers $+\infty$.

   (b) Montrer que pour $n \geqslant 700$, $\left|\dfrac{u_n}{w_n} - 1\right| < 10^{-2}$.

   (c) Compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il donne le plus petit entier naturel n tel que $\left|\dfrac{u_n}{w_n} - 1\right| < 10^{-2}$.

   Programme Python.

```
from numpy import exp, abs

u=-3+exp(1)
n=1

while ......... >= .01 :
    u=........
    n+=1
print(n)
```

Solution :

1. **Cours.** Programme Math Appli $1^{\text{ière}}$année, 1^{ier}semestre, IV. 3.

2. La relation $(\mathcal{R})$ s'écrit $\left| \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$ avec $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-4+e^x \end{array}$

   Comme f est définie sur $\mathbb{R}$ entier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie.

   f est strictement croissante (évident).
   $u_1 = -3 + e < 0$.
   Alors : . $u_1 < u_0$;
   . $u_{n+1} < u_n \quad \Longrightarrow \quad f(u_{n+1}) < f(u_n)$, i.e. $u_{n+2} < u_{n+1}$.
   Donc par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} < u_n$, c'est-à-dire : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Si elle était minorée, elle convergerait vers une limite l (théorème de la limite monotone) .
   Comme f est continue (évident), cette limite serait un point fixe de f : $l - 4 + e^l = l \iff l = \ln(4)$.

Mais u_n étant <0 à partir du rang 1 ne peut avoir qu'une limite négative.
Donc $(u_n)_{n\in N}$ n'est pas minorée : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3. (a) $u_{n+1} = u_n - 4 + e^{u_n} \iff u_{n+1} - u_n = -4 + e^{u_n}$. Donc :

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_{k+1} - u_k) + \cdots + (u_1 - u_0) + u_0$$
$$= (-4+e^{u_{n-1}}) + (-4+e^{u_{n-2}}) + \cdots + (-4+e^{u_k}) + \cdots + (-4+e^{u_1}) + (-4+e^{u_0}) + u_0$$

d'où : $\quad u_n = 1 - 4n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \qquad (*)$

Encadrement de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$:

. comme $e^{u_k} \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$ est minoré par 0 ;

. comme $u_0 = 1$ et $u_k \leqslant 0$ pour $k \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{u_k} = e^{u_0} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} e^{u_k} \leqslant e + n - 1$.

Par conséquent : $\quad 0 \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \leqslant e + n - 1$.

Encadrement de u_n :
On déduit alors de $(*)$: $\quad 1 - 4n \leqslant u_n \leqslant 1 - 4n + e + n - 1$, soit :
$1 - 4n \leqslant u_n \leqslant e - 3n$.

(b) Il résulte de la majoration de u_n que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} e^{\,e-3k} = e^e \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{-3}\right)^k = e^e \cdot \frac{1-e^{-3n}}{1-e^{-3}} < e^e \cdot \frac{1}{1-e^{-3}} = \frac{e^e}{1-e^{-3}}.$$

Donc $\; 0 \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \leqslant C \qquad$ avec $C = \dfrac{e^e}{1-e^{-3}}$.

4. (a) Donc $(*)$ donne la majoration : pour $n \geqslant 2 \quad u_n \leqslant 1 - 4n + C \qquad$ avec $C = \dfrac{e^e}{1-e^{-3}}$.

L'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 - 4n < u_n \leqslant 1 - 4n + C \quad$ implique : $-\dfrac{1}{4\,n} + 1 - \dfrac{C}{4\,n} \leqslant \dfrac{u_n}{-4n} < -\dfrac{1}{4\,n} + 1 \quad (E)$
qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{-4n} = 1$.

Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $w_n = -4n$ est telle que $\dfrac{u_n}{w_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

(b) l'encadrement (E) donne : $-\dfrac{1}{4n}(1+C) < \dfrac{u_n}{-4n} - 1 \leqslant -\dfrac{1}{4n}$, d'où : $\left|\dfrac{u_n}{-4n} - 1\right| < \dfrac{1}{4n}\big(1+C\big)$ car $C > 0$

Pour montrer que $n \geqslant 700$ implique $\left|\dfrac{u_n}{-4n} - 1\right| < 10^{-2}$, il suffit de montrer que $\left|\dfrac{u_n}{-4n} - 1\right| < \dfrac{7}{n} = \dfrac{1+27}{4n}$.

Il suffit donc de montrer que $C \leqslant 27$. Or : $C = e^3 \dfrac{e^e}{e^3-1} < 3^3 \dfrac{e^e}{e^3-1} = 27 \dfrac{e^e}{e^3-1}$. Il suffit donc de montrer que $\dfrac{e^e}{e^3-1} < 1$ soit $1 < e^3 - e^e$. Or : $e^3 - e^e = \displaystyle\int_e^3 e^x \,\mathrm{d}x > (3-e)e^e > 4(3-e) > 1$ car $e < 2,72$.

(c) *Programme Python.*

```
import numpy as np

u=-3+np.exp(1)
n=1

while np.abs(u/(-4*n)-1) >= .01 :
    u=u-4+np.exp(u)
    n+=1
print(n)
```

Remarque : le programme donne $n = 113$.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 5

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note B_k l'événement « au moins k événements parmi $A_1, \ldots, A_n$ sont réalisés ». En considérant la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k).$$

Solution :

Aide possible *: comment exprimer B_k en fonction de X ?*

La variable aléatoire X étant finie, elle admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Remarquons que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = [X \geqslant k]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{E}(X) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\left[\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geqslant k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(B_k) - \sum_{k=1}^{n} (k-1)\mathbb{P}(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k).
\end{aligned}$$

SUJET Maths Appliquées 6

Exercice principal Maths Appliquées 6

On se donne le jeu suivant, joué par 1 joueur aidé d'un croupier (c'est à dire d'un employé du casino qui effectue les tirages, mais n'est pas considéré comme un joueur). À chaque tour i :

1. le croupier lance secrètement N pièces ;
2. il déclare au joueur le nombre X_i de pièces tombées sur pile.

Au bout de K tours, le joueur tente de deviner le nombre de pièces N. Le joueur gagne s'il devine la valeur exacte.

1. **Cours :** Rappeler la loi faible des grands nombres.
2. Quelle loi suit le nombre X_i de piles au tour i ? Quelle est l'espérance et la variance de cette loi ?

Connaissant les résultats de chaque tour, on pose $\overline{X}_K = \dfrac{\sum_{i=1}^K X_i}{K}$ et $\hat{N}_K = 2\overline{X}_K$.

3. (a) On utilise $\hat{N}_K$ comme estimateur de N. Justifier ce choix.
   (b) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_K - N\right| > \epsilon\right) \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0$.
   (c) Soit $\delta > 0$. En déduire, une stratégie de jeu (que nous nommerons « stratégie 1 ») qui permet de deviner exactement N avec une probabilité plus grande que $(1-\delta)$ si le nombre de tours K est suffisamment important.

Un autre joueur a une autre stratégie (que nous nommerons « stratégie 2 ») : il séléctionne $\mathring{N}_K$ le nombre maximum qui a été déclaré par le croupier sur tous les tours.

4. Montrer que $\mathbb{P}\left(\mathring{N}_K \neq N\right) \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0$

On se demande laquelle de ces stratégies est la meilleure.

5. Écrire une fonction `simulation(n_parties, K)` simulant `n_parties` parties de longueur K, et renvoyant le pourcentage de parties gagnées par la stratégie 1, et par la stratégie 2. Le nombre N sera choisi au hasard entre 1 et 10. On pourra utiliser la commande `round(x)` qui prend en argument un flottant `x` et renvoie la valeur de l'entier le plus proche de `x`.
6. (a) Quelle est la probabilité de gagner avec la stratégie 2 ?
   (b) Notons $Z_K = \sqrt{K}(\hat{N}_K - N)$. Vers quelle loi $\mathcal{L}$ la variable Z_K converge-t-elle en loi quand $K \to +\infty$.
   (c) Pour K suffisament grand, nous faisons l'approximation que $Z_K \sim \mathcal{L}$. Exprimer alors la probabilité de gagner avec la stratégie 1. On pourra utiliser dans l'expression Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Solution :

1. La loi faible des grands nombres dit que si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes de même espérance E et de même variance finie, et si $\overline{X}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, alors pour tout $\epsilon > 0$ $\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - E\right| > \epsilon\right) \to_n 0$.
2. Le nombre de pile au tour i suit une loi $B(N, \dfrac{1}{2})$, d'espérance $\dfrac{N}{2}$ et de variance $\dfrac{N}{4}$
3. (a) $\overline{X}_K = \dfrac{\sum_{i=1}^K X_i}{K}$ est l'estimateur de la moyenne $\dfrac{N}{2}$. $\hat{N}_K = 2\overline{X}_K$ est donc un estimateur naturel de N.

(b) Notons que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_K - N\right| > \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|2\overline{X}_K - N\right| > \epsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_K - \frac{N}{2}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &\to_K 0 \quad \text{(LFGN)}\end{aligned}$$

(c) En particulier, si on pose $\epsilon = 1$, $\mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_K - N\right| > 1\right) \to_K 0$. Donc si on choisit comme stratégie de toujours déclarer N arrondi à l'entier le plus proche,

$$\mathbb{P}\left(\text{Perte}\right) = \mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_K - N\right| > 1\right) \to_K 0$$

4. On sait $\mathring{N}_K = \max(X_1 \dots X_K)$. $\mathring{N}_K \leqslant N$ et $\mathring{N}_K < N$ ssi $\forall 1 \leqslant i \leqslant K, X_i < N$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathring{N} \neq N) &= \mathbb{P}(\forall 1 \leqslant i \leqslant K, X_i < N) \\ &= \prod_{i=1}^{K} \mathbb{P}(X_i < N) \\ &= \prod_{i=1}^{K} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)^K \\ &\to_K 0\end{aligned}$$

5.
```
import numpy.random as rd

def simulation(n_parties, K):
    resultats_1 = 0.
    resultats_2 = 0.

    for _ in range(n_parties):
        max = 0
        moy = 0
        N = rd.randint(1, 11) #11 pour que 10 soit inclus
        for _ in range(K):
            n_piles=0
            for _ in range(N):
                piece = rd.rand()>.5
                if piece:
                    n_piles += 1
            moy += n_piles
            if n_piles > max:
                max = n_piles

        moy = moy / K
        moy = round(moy)

        if moy == N:
            resultats_1 += 1
        if max == N:
            resultats_2 += 1

    return resultats_1 / n_parties * 100, resultats_2 / n_parties * 100
```

6. (a) D'après le calcul en question **??**, elle vaut $1 - \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)^K$

(b) Notons $\overline{X} = \dfrac{N}{2}$, $\sigma = \sqrt{\dfrac{N}{4}}$

$$\begin{aligned}
Z_K &= \sqrt{K}(\hat{N}_K - N) \\
&= 2\sqrt{K}\left(\overline{X}_K - \overline{X}\right) \\
\frac{2 * Z_K}{\sqrt{\frac{N}{4}}} &= \sqrt{K}\frac{\overline{X}_K - \overline{X}}{\sigma} \rightarrow_{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{(TCL)} \\
\frac{Z_K}{\sqrt{N}} &\rightarrow_{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1) \\
Z_K &\rightarrow_{\text{loi}} \mathcal{N}(0,N)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\text{Gagner}\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_K - N\right| < 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sqrt{K}\left|\hat{N}_K - N\right| < \sqrt{K}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{|Z_K|}{\sqrt{N}} < \sqrt{\frac{K}{N}}\right) \\
&= \Phi\left(\sqrt{\frac{K}{N}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{K}{N}}\right)
\end{aligned}$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 6

On note I la matrice identité d'ordre 2 et O la matrice nulle d'ordre 2.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ défini par $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (M+I)(M+2I) = O\}$.

Solution :

Soit M telle que $M \in \mathcal{A}$ alors $(M+I)(M+2I) = 0$ et donc le polynôme $(X+1)(X+2)$ est un polynôme annulateur de M. Les éventuelles valeurs propres de M sont donc -1 et -2. Étudions les différents cas :

— Si -1 et -2 sont valeurs propres de M alors $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes et donc M est diagonalisable et est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

— Si -1 n'est pas valeur propre alors $M+I$ est inversible et comme $(M+I)(M+2I) = 0$, on obtient $M+2I = 0$ soit $M = -2I$

— De manière analogue, si -2 n'est pas valeur propre alors $M = -I$

On remarque que dans tous les cas -1 ou -2 est valeur propre de M.

Réciproquement, si M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

alors ils existe P inversible telle que $M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$ et

$(M+I)(M+2I) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0$ donc $M \in \mathcal{A}$

Par ailleurs si $M = -I$ ou $M = -2I$, on a $(M+I)(M+2I) = 0$ donc $M \in \mathcal{A}$

En conséquence : $M \in \mathcal{A}$ si, et seulement si, $M = -I$ ou $M = -2I$ ou M est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

<u>Question supplémentaire</u> : dans le cas où M est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ si on note $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad-bc \neq 0$, déterminer M en fonction de a, b, c et d.

<u>Solution :</u> comme P est inversible $P^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ad+2bc & -ab \\ dc & bc-2ad \end{pmatrix}$

SUJET Maths Appliquées 7

Exercice principal Maths Appliquées 7

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![0, N]\!]$. Un joueur arrive au casino avec une fortune de n euros et joue à la roulette. A chaque partie, la probabilité de gagner vaut p avec $p \in]0,1[$. Le déroulement d'une partie est le suivant : le joueur mise un euro, s'il gagne on lui rend son euro avec un euro de plus, s'il perd on ne lui donne rien.

Le joueur a décidé de s'arrêter de jouer lorsqu'il aura tout l'argent disponible dans le casino, soit N euros, ou lorsqu'il n'aura plus d'argent. On note T_n la variable aléatoire représentant le temps de jeu du joueur.

On admet que la variable aléatoire T_n admet une espérance notée $\mathbb{E}(T_n)$.

1. Question de cours : Énoncer la formule des probabilités totales.
2. Écrire une fonction Python qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n.
3. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $n \in [\![1, N-1]\!]$.
   Montrer que $\mathbb{P}(T_n = j) = p\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + (1-p)\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)$.
4. En déduire que, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$,
$$\mathbb{E}(T_n) = p(1 + \mathbb{E}(T_{n+1})) + (1-p)(1 + \mathbb{E}(T_{n-1})).$$
5. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Déterminer une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de n, p et N. On pourra faire intervenir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \mathbb{E}(T_n) + n\alpha$ avec α un réel à déterminer.

Solution :

1. ECG 1 - page 17
2.
```python
import numpy.random as rd
def SimulationT(n,N,p):
        f = n
        T = 0
        while f > 0 and f < N:
                f = f-1+2*rd.binomial(1,p)
                T = T+1
        return(T)
```
3. On pose $n \in [\![1, N-1]\!]$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $q = 1-p$.
   On étudie l'issue de la première partie : si le joueur gagne, on est ramené au problème avec un montant initial de $n+1$, s'il perd, avec un montant initial de $n-1$. On note donc G l'événement : « Le joueur gagne la première partie » et on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (G, $\overline{G}$).
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = j) &= \mathbb{P}(T_n = j|G)P(G) + \mathbb{P}(T_n = j|\overline{G})P(\overline{G}) \\ &= \mathbb{P}(T_{n+1} = j-1)p + \mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)q.\end{aligned}$$
4. Comme $\mathbb{P}(T_n = 0) = 0$ puisque n est entre 1 et $N-1$ et que l'espérance de T_n existe, toutes les séries

ci-dessous convergent et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(T_n = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j[\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1)p + \mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)q] \\
&= p\sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + q\sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1) \\
&= p\sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)\mathbb{P}(T_{n+1} = j) + q\sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)\mathbb{P}(T_{n-1} = j) \\
&= p\mathbb{E}(T_{n+1}+1) + q\mathbb{E}(T_{n-1}+1) = p(1+\mathbb{E}(T_{n+1})) + q(1+\mathbb{E}(T_{n-1}))
\end{aligned}$$

d'après le théorème de transfert.

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in [\![0, N]\!]$, on pose $u_n = \mathbb{E}(T_n) + n\alpha$.
Si $1 \leqslant n \leqslant N-1$, on a

$$\begin{aligned}
&pu_{n+1} + qu_{n-1} - u_n \\
&\quad = p\mathbb{E}(T_{n+1}) + p\alpha(n+1) + q\mathbb{E}(T_{n-1}) + q\alpha(n-1) - \mathbb{E}(T_n) - \alpha n \\
&\quad = p\alpha n + p\alpha + q\alpha n - q\alpha - 1 - \alpha n = p\alpha - q\alpha - 1
\end{aligned}$$

On se place dans le cas où $p \neq \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $p \neq q$. On peut alors poser $\alpha = \frac{1}{p-q}$, de sorte que $pu_{n+1} + qu_{n-1} - u_n = 0$.
L'équation caractéristique associée est $px^2 - x + q = 0$, de discriminant

$$1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$$

(non nul car $p \neq q$). Les solutions de cette équation sont

$$\frac{1+(1-2p)}{2p} = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad \frac{1-(1-2p)}{2p} = 1.$$

On a donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$,

$$u_n = \lambda + \mu\left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

Comme $u_0 = \mathbb{E}(T_0) = 0$ et $u_N = \mathbb{E}(T_N) + \alpha N = \frac{N}{p-q}$, (λ, μ) est solution du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 & (L_1) \\ \lambda + \mu\left(\frac{q}{p}\right)^N = \frac{N}{p-q} & (L_2) \end{cases}.$$

En effectuant $(L_2) - (L_1)$, on obtient $\mu\left(\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1\right) = \frac{N}{p-q}$ donc

$$\mu = \frac{N}{(p-q)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1\right)} \quad \text{et} \quad \lambda = -\mu = -\frac{N}{(p-q)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1\right)}.$$

Ainsi, pour $n \in [\![0, N]\!]$, il vient :

$$\mathbb{E}(T_n) = u_n - \alpha n = \frac{1}{p-q}\left(N\frac{-1+\left(\frac{q}{p}\right)^n}{-1+\left(\frac{q}{p}\right)^N} - n\right) = \frac{1}{q-p}\left(n - N\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right).$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 7

On s'intéresse à la suite suivante :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{1+u_n}} \qquad u_0 > 0$$

1. Convergence de (u_n) (en fonction de u_0) ?

2. Etudier la convergence de :

$$v_{n+1} = \frac{v_n^\alpha}{\sqrt{1+v_n}} \qquad v_0 > 0$$

Solution :
CORRECTION

1. Monotonie :

   $u_0 > 0 \Rightarrow u_n > 0$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} \geqslant u_n &\Leftrightarrow \frac{u_n^2}{\sqrt{1+u_n}} \geqslant u_n \\
&\Leftrightarrow u_n \geqslant \sqrt{1+u_n} \\
&\Leftrightarrow u_n^2 \geqslant 1+u_n \qquad \text{(positif)} \\
&\Leftrightarrow u_n^2 - u_n - 1 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \left(u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(u_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant 0 \qquad \text{car } u_n > 0 \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \\
&\Leftrightarrow u_n \geqslant \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\alpha}
\end{aligned}$$

— Si $\underline{u_0 < \alpha}$: $a \geqslant u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \dots$

u décroissante.

— Si $\underline{u_0 = \alpha}$: u_n constante.

— Si $\underline{u_0 > \alpha}$: $a \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \dots$

u croissante.

Convergence :

- Si $u_0 \leqslant \alpha$, u converge (décroissante et bornée).
- Si $u_0 > \alpha$:
  Notons que $u_n \geqslant u_0 \geqslant \alpha$

  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} \geqslant \underbrace{\frac{u_0}{\sqrt{1+u_0}}}_{c} > 1 \text{ donc } u_n \geqslant u_0 c^n \longrightarrow +\infty \text{ et enfin : } u_n \longrightarrow +\infty$$

2. Si $\alpha > \dfrac{3}{2}$ alors : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{v_n^{\alpha-1}}{\sqrt{1+v_n}}$
   $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = f(v_n)$ où $f(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{1+x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
   Donc il existe x_0 tel que $\forall x \geqslant x_0,\ f(x) > 1+\delta$
   Dans ce cas, si $v_n \geqslant x_0$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant (1+\delta)$
   Or $v_{n+1} \geqslant v_n$, donc si $v_0 \geqslant x_0$:
   $v_0 \leqslant v_1 \leqslant \ldots \leqslant v_n$ et $\forall n \quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant (1+\delta)$

   Donc $v_n \geqslant (1+\delta)^n v_0$ et v_n diverge.
3. Si $\alpha \leqslant \dfrac{3}{2}$ alors : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{v_n^{\alpha-1}}{\sqrt{1+v_n}}$ où $v_n^{\alpha-1} \leqslant \sqrt{1+v_n}$

   Si $v_n \geqslant 1$, $v_n^{\alpha} \leqslant \sqrt{v_n} \leqslant \sqrt{1+v_n}$. Si $v_n \leqslant 1$, $v_n^{\alpha} \leqslant 1 \leqslant \sqrt{1+v_n}$)
   Donc (v_n) converge.

Question Supplémentaire : Donner un équivalent de u_n.

Question Supplémentaire : On pose $z_n = \ln u_n$

$$z_{n+1} = 2z_n - \frac{1}{2}\ln(1+u_n)$$

$$z_{n+1} = \frac{3}{2}z_n - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

Intuition $z_n \sim \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. Posons plutôt : $w_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n} z_n$

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} z_{n+1} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1}\left(\frac{3}{2}z_n - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{-n} z_n - \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \\
w_{n+1} - w_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\frac{1}{2u_n} + o\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\frac{1}{u_n}\right)
\end{aligned}$$

La série de tg $w_{n+1} - w_n$ converge, donc w_n converge. On pose $w = \lim w_n$.

$w_n = w + o\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\right)$ majoré par le 1er terme reste des sommes géométriques.

$$\begin{aligned} z_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^n w_n \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n w + o(1) \\ u_n &= \mathrm{e}^{\left(\frac{3}{2}\right)^n w + o(1)} \\ u_n &= \mathrm{e}^{\left(\frac{3}{2}\right)^n w}\,(1 + o(1)) \end{aligned}$$

$$u_n = \mathrm{e}^{\left(\frac{3}{2}\right)^n w}$$

SUJET Maths Appliquées 8

Exercice principal Maths Appliquées 8

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}.$$

1. Cours : développement limité de $\ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0.
2. Montrer la convergence de l'intégrale J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et préciser son signe.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x$ converge et exprimer sa valeur en fonction de J_n.
4. En déduire la monotonie de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} = \dfrac{3n+2}{3n+3} J_n$.
5. On admet que $J_0 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Écrire en Python une fonction prenant en argument un entier n et qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = n^{\frac{1}{3}} J_n$.
   (a) À l'aide de développements limités usuels, montrer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{9n^2}$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^{-\frac{1}{3}}$.

Solution :

1. Cours : cf programme de deuxième année page 9.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une comparaison avec une intégrale de Riemann montre que l'intégrale J_n converge. Puisque l'intégrande est strictement positive sur $[0, +\infty[$, l'intégrale J_n est strictement positive.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $A > 0$. Les fonctions $(x \mapsto x)$ et $\left(x \mapsto -\dfrac{1}{(3n+3)(1+x^3)^{n+1}}\right)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, donc par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^A x\frac{x^2}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{x}{(3n+3)(1+x^3)^{n+1}}\right]_0^A + \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{(3n+3)(1+x^3)^{n+1}} \\ &= -\frac{A}{(3n+3)(1+A^3)^{n+1}} + \frac{1}{3n+3}\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3n+3}J_n.\end{aligned}$$

   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3n+3}J_n.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (par linéarité de l'intégrale) :

$$\frac{1}{3n+3}J_n = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^3)-1}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = J_n - J_{n+1}.$$

   On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} = \dfrac{3n+2}{3n+3}J_n$. La suite étant positive, elle est strictement décroissante.

5. On fera particulièrement attention aux erreurs d'indices !

```python
import numpy as np

def liste_J(n):
    J = [2*np.pi/(3**1.5)]
    for k in range(n):
        J.append((3*k+2)*J[k]/(3*k+3))
    return J

ou

def liste_J(n):
    J = [2*np.pi/(3**1.5)]
    for k in range(1,n+1):
        J.append((3*k-1)*J[k-1]/(3*k))
    return J
```

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = n^{\frac{1}{3}} J_n$.

   (a)

$$\begin{aligned}\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln\left((n+1)^{\frac{1}{3}} J_{n+1}\right) - \ln\left(n^{\frac{1}{3}} J_n\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + \ln\left(\frac{J_{n+1}}{J_n}\right) \\ &= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3n+3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \left[-\frac{1}{3n+3} - \frac{1}{2(3n+3)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].\end{aligned}$$

   En multipliant par n^2 et en passant à la limite, on trouve que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{9n^2}$.

   (b) D'après la question précédente et le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge. On en déduit que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, vers un réel qu'on notera ℓ. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $A = e^{\ell}$. En particulier $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A$ donc $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^{-\frac{1}{3}}$.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 8

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$. On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $M = \begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$. Soit A l'événement « La matrice M est diagonalisable ».

1. Déterminer la probabilité p de l'événement A. On donnera le résultat sous forme d'une série numérique dépendant uniquement de λ.
2. À l'aide de simulations des variables aléatoires X et Y, proposer une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de p.

Solution :

1. La matrice M étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont X et Y.
   - Si $X \neq Y$ alors on peut trouver une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres puisqu'une famille de vecteurs propres associée à des valeurs propres distinctes est libre. Dans ce cas, A est réalisé. On a donc $(X \neq Y) \subset A$.
   - Si $X = Y$ alors la matrice a une unique valeur propre. Elle est diagonalisable si, et seulement si elle est semblable à la matrice nulle, c'est-à-dire si, et seulement si $X = 0$.

   Ainsi :
   $$p = P(A \cap (X \neq Y)) + P(A \cap (X = Y)) = P(X \neq Y) + P((X = 0) \cap (X = Y)).$$
   Par indépendance de X et Y, on obtient :
   $$p = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)^2 + P(X = 0)P(Y = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$

2. Pour obtenir une valeur approchée de cette série, on peut effectuer un grand nombre de simulations des variables aléatoires X et Y et compter le nombre de fois où $X = Y$ et $X \neq 0$. La valeur q obtenue correspond à $1 - p$.

```python
import numpy.random as rd
def Diagonalisable(l,N):
        compteur= 0
        for k in range(N):
                X=rd.poisson(l)
                Y=rd.poisson(l)
                if X == Y and X != 0:
                        compteur = compteur +1
        return 1-compteur/N
```

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECT

Juin 2024

Le bilan de la session 2024 de mathématiques voie T est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 2 et 18. La moyenne s'établit à 8,94 et l'écart-type à 4,23.

Le niveau d'ensemble des candidats reste assez hétérogène : certaines prestations se sont avérées catastrophiques tandis que le jury a également pu remarquer des candidats très brillants faisant preuve de bonnes capacités de réflexion.

Le jury insiste à nouveau sur sur les points suivants auprès des futurs candidats et de leurs enseignants.

- Le jury continue de remarquer l'existence d'importantes lacunes en calcul chez certains candidats. De même, les théorèmes du cours doivent être connus avec plus de rigueur : hypothèses précises et conclusions.
- Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes restent incontournables. Notamment, le jury est en droit d'attendre l'esquisse qualitative d'une courbe après avoir établi un tableau de variation.
- Dans le sillage de l'an dernier, suite à l'introduction des nouveaux programmes, la totalité des sujets contenait au moins une question d'informatique, faisant intervenir soit le langage Python, soit le SQL. On note des progrès en ce domaine, en particulier alors que l'an dernier le jury pouvait noter plusieurs candidats ayant fait l'impasse totale sur le SQL, cela n'a pas été autant le cas cette année. L'informatique sera autant présente lors des sessions futures du concours et il faut donc continuer dans cette voie.
- Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral. Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation. Le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre de questions, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts. Le jury apprécie particulièrement les candidats attentifs à la cohérence de leurs résultats, notamment quand cela leur permet de détecter des erreurs puis de les corriger.
- La question sans préparation est aussi très importante. Il n'est pas nécessaire de la mener à son terme pour faire bonne impression. Le jury est là encore attentif aux qualités de réflexion des candidats. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, après avoir raté l'exercice préparé, ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.
  Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Voici les sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T 1

Exercice T 1

1. Cours.
   Définition d'une suite arithmétique.
   Somme des n premiers entiers naturels strictement positifs.
   En déduire la somme des n premiers impairs.

   Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .
   La cible d'un forain est partagée en n zones délimitées par n cercles concentriques de rayons respectifs $1, 2, \ldots, n$.
   Pour $k \in \{2, \ldots, n\}$, Z_k est la zone délimitée par les cercles de rayons $k-1$ et k.
   On note Z_1 le disque de rayon 1.
   On note Z_0 la zone hors de la cible.
   Jean, muni d'un arc et de flèches, doit s'entraîner pour les prochains J.O.
   Lorsqu'il tire, il touche la cible 3 fois sur 4 .
   Lorsqu'il touche la cible, la probabilité qu'il atteigne la zone Z_k est proportionnelle à l'aire de Z_k.
   On admettra que la probabilité qu'il touche l'un des cercles délimitant les zones est nulle.
2. (a) Quelle est l'aire a_k de Z_k pour $k \in \{1, .., n\}$?
   (b) On note p_k la probabilité que la flèche atteigne Z_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ Que vaut p_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$?
3. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la zone atteinte lors d'un tir.
   Ecrire, en Python, une fonction `simuleX(n)` qui prend en argument l'entier n et renvoie une simulation de X.
   On pourra, lorsque Jean atteint la cible, choisir au hasard un élément entre 1 et n^2 et retourner le numéro de la zone atteinte.
   Par exemple, si $n = 4$ et si on choisit 8 dans $\{1, \ldots, 16\}$, alors X prend la valeur 3.
4. Jean tire une flèche.
   S'il atteint Z_k avec $k \in \{1, \ldots, n\}$ il gagne $g_k = n^2 - k^2 + 1$ et ne gagne rien s'il rate la cible ($g_0 = 0$).
   On appelle G_n la variable aléatoire égale au gain pour un tir.
   On admet que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.
   Quelle est l'espérance $\mathbb{E}(G_n)$ de G_n ?
5. Jean et Martin s'affrontent et tirent chacun une flèche.
   Martin, comme Jean, atteint la cible 3 fois sur 4 et la probabilité qu'il atteigne la zone Z_k est alors encore proportionnelle à l'aire de Z_k.
   On suppose que les tirs sont indépendants.
   Quelle est la probabilité que le gain de Martin soit supérieur ou égal à celui de Jean ?

Solution :

1. Cours : $(u_n)_{n \in N}$ est arithmétique $\Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R} \quad \forall n \in N \quad u_{n+1} = u_n + r$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

2. (a) $\forall k \in \{2,..,n\} \quad a_k = \pi k^2 - \pi(k-1)^2 = (2k-1)\pi$ et $a_1 = \pi$.

   (b) Soit C l'événement : « Jean atteint la cible ». $p_0 = 1 - P(C) = \dfrac{1}{4}$. Pour $k \in \{1,\dots,n\}$, on pose $p'_k = P_C$ (« Z_k atteint »). Les p'_k où $k \in \{1,..n\}$ sont proportionnels aux n premiers impairs, donc :

$$\frac{p'_1}{1} = \dots = \frac{p'_k}{2k-1} = \dots = \frac{p'_n}{2n-1} = \frac{\sum_{k=1}^n p'_k}{\sum_{k=1}^n (2k-1)} = \frac{1}{n^2}$$

   Donc $\forall k \in \{1,\dots,n\} \quad p'_k = \dfrac{2k-1}{n^2}$ et $\quad p_k = \dfrac{3}{4}p'_k = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2k-1}{n^2}$

3. Python.

```python
import numpy as np
import numpy. random as rd

def X(n) :
    if rd.randint(1,4)==1 :
        z=0
    else:
        x=rd. randint(1, n**2+1)
        k=1
        while x>k**2 :
            k=k+1
        z=k
    return z
```

Explications : On teste si la cible est ratée : on a une chance sur 4 de choisir 1 dans $\{1,2,3,4\}$ et alors $z=0$ sinon on choisit un entier x entre 1 et n^2 compris et on cherche le numéro de la zone où se trouve x.

4. Par définition $\mathbb{E}(G_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k g_k$ Or $g_0 = 0$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\mathbb{E}(G_n) &= \sum_{k=1}^{n} p'_k g_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{n^2}\left(n^2 - k^2 + 1\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\left(n^2+1\right)\sum_{k=1}^{n}(2k-1) - \sum_{k=1}^{n}\left(2k^3 - k^2\right)\right] = n^2 + 1 - \frac{n+1}{6n}\left(3n^2+n-1\right)
\end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\mathbb{E}(G) = \frac{3}{4}\left[n^2 + 1 - \frac{n+1}{6n}\left(3n^2+n-1\right)\right]$$

5. Soit J_k l'événement : « Jean tire et atteint Z_k » pour $k \in \{0,1,\dots,n\}$ M_k : "« la flèche de Martin atteint le disque de rayon k » pour $k \in \{1,\dots,n\}$ et M_0 : « Martin atteint la cible ou la rate ».
Soit A : « le gain de Martin est supérieur ou égal à celui de Jean ».
Alors :

$$A = \bigcup_{k=0}^{n}\left(J_k \bigcap M_k\right) \qquad \text{(union disjointe).}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=0}^{n} P\left(J_k\right) \times P\left(M_k\right) \text{ (tirs indépendants)} \\
&= \frac{1}{4} \times 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4}\frac{2k-1}{n^2} \times \frac{3}{4}\frac{k^2}{n^2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{9}{16n^4}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3(n+1)\left(3n^2+n-1\right)}{32n^3}
\end{aligned}$$

Exercice sans préparation T 1

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de P.

1. Calculer AP.
2. Donner des valeurs propres de A et des vecteurs propres associés.
3. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. Calculer $P^{-1}AP$. La matrice A est-elle diagonalisable ? est-elle inversible ?

Solution :

1. $AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. On remarque que : $\quad AC_1 = C_1, AC_2 = 2C_2$ et $AC_3 = -C_3$
   Comme les C_k sont non nuls, on en déduit que :
   - 1 est valeur propre et C_1 est un vecteur propre associé ;
   - 2 est valeur propre et C_2 est un vecteur propre associé ;
   - -1 est valeur propre et C_3 est un vecteur propre associé.
3. On résoud $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & b-c \\ y & = & -a+b \\ z & = & a+b-c \end{array} \right.$
   Le système est de Cramer Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$.
   D est diagonale, A est donc diagonalisable.
   D est inversible car sans 0 sur la diagonale. $A = PDP^{-1}$ est invesible comme produit de trois matrices inversibles.
   N.B. A est diagonalisable car elle a trois valeurs propres distinctes (hors programme).

SUJET T 2

Exercice T 2

On considère X une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ et de loi uniforme sur $]0,1[$.
On pose : $Z = \dfrac{1-X}{X}$.

1. Définition d'une variable aléatoire à densité.
2. Déterminer $\mathbb{P}(Z \geqslant 2)$.
3. (a) Vérifier que Z prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.
   (b) Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $a \leqslant b$. Déterminer $(\alpha,\beta) \in]0,1[^2$ tels que $\alpha \leqslant \beta$ et que :
   $$a \leqslant Z \leqslant b \Longleftrightarrow \alpha \leqslant X \leqslant \beta$$
   (c) En déduire $\mathbb{P}(Z \in [a,b])$ puis la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.
4. Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
5. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?
6. (a) Vérifier que, pour $0 < a \leqslant b$, $\mathbb{P}(a \leqslant Z \leqslant b) = \mathbb{P}(1/b \leqslant Z \leqslant 1/a)$.
   Qu'en déduit-on pour les lois de Z et de $1/Z$?
   (b) Retrouver ce résultat en exprimant la variable $1/Z$ en fonction de $Y = 1-X$.
7. On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. On note X la longueur du morceau de gauche.
   Quelle est la probabilité pour que l'un des deux morceaux soit au moins deux fois plus long que l'autre ?

Solution :

1. Programme ECT 2 p. 9.
2. Par un calcul immédiat : $\mathbb{P}(Z \geqslant 2) = \mathbb{P}(X \leqslant 1/3) = 1/3$.
3. (a) Comme $X > 0$ et $1-X > 0$, $Z > 0$.
   (b) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x} - 1$. On vérifie que f est une bijection décroissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f^{-1} : x \mapsto \dfrac{1}{1+y}$. On en déduit que :
   $$a \leqslant Z \leqslant b \Longleftrightarrow a \leqslant f(X) \leqslant b \Longleftrightarrow f^{-1}(b) \leqslant X \leqslant f^{-1}(a)$$
   On peut donc choisir $\alpha = f^{-1}(b) = \dfrac{1}{1+b}$ et $\beta = f^{-1}(a) = \dfrac{1}{1+a}$.
   (c) On en déduit que : $\mathbb{P}(Z \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in \left[\dfrac{1}{1+b}, \dfrac{1}{1+a}\right] = \dfrac{1}{1+a} - \dfrac{1}{1+b} = \dfrac{b-a}{(1+a)(1+b)}$ Soit $x > 0$.
   De même :
   $$\mathbb{P}(Z \leqslant x) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(f(X) \leqslant x) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(X \geqslant f^{-1}(x)) \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$
4. On peut écrire :
   $$\mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1+x} = \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x f_Z(t)\,\mathrm{d}t$$
   avec
   $$f_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction f_Z est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

La fonction f_Z est donc une densité de probabilité et Z est bien une variable à densité.

5. On peut calculer, pour $A > 0$ fixé :

$$\int_0^A \frac{x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right]_0^A = \ln(1+A) + \frac{1}{1+A} - 1 \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$$

La variable aléatoire Z n'admet donc pas d'espérance.

6. (a) Le résultat demandé découle de 3.c) en remarquant que :

$$\frac{1/a - 1/b}{(1+1/b)(1+1/a)} = \frac{(b-a)/ab}{(1+a)(1+b)/ab} = \frac{b-a}{(1+a)(1+b)}$$

On en déduit de manière immédiate que Z et $1/Z$ ont la même loi car

$$\mathbb{P}(a \leqslant 1/Z \leqslant b) = \mathbb{P}(1/b \leqslant Z \leqslant 1/a) = \mathbb{P}(a \leqslant Z \leqslant b)$$

.

(b) En posant $Y = 1 - X$, on obtient $Z = \dfrac{Y}{1-Y}$ d'où $1/Z = \dfrac{1-Y}{Y}$. Or Y suit également une loi uniforme sur $]0,1[$ donc Z et $1/Z$ suivent la même loi.

7. Le morceau de gauche est de longueur X, celui de droite de longueur $1-X$. En notant toujours $Z = \dfrac{1-X}{X}$, l'événement « l'un des deux morceaux est au moins deux fois plus long que l'autre » s'écrit $\{Z \geqslant 2\} \cup \{1/Z \geqslant 2\}$. Les événements $\{Z \geqslant 2\}$ et $\{1/Z \geqslant 2\}$ sont incompatibles d'où :

$$\mathbb{P}(\{Z \geqslant 2\} \cup \{1/Z \geqslant 2\}) = \mathbb{P}(Z \geqslant 2) + \mathbb{P}(1/Z \geqslant 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

d'après les questions 2., 3.c) et 6.

Exercice sans préparation T 2

On considère une base de données `triangles` constituée d'une seule table dont le schéma relationnel est le suivant :

```
triangles( idt:integer, ab:integer, ac:integer, bc:integer)
```

Chaque ligne représente les longueurs d'un triangle ABC ainsi qu'un identificateur unique `idt` qui joue donc le rôle de clé primaire.

On rappelle les instructions suivantes en SQL :

— la fonction `COUNT` renvoie le nombre de résultats d'une requête ;

— la fonction `MAX` renvoie la valeur maximale des résultats d'une requête.

1. Ecrire une requête SQL permettant d'obtenir la liste des triangles équilatéraux.
2. Ecrire une requête SQL permettant d'obtenir le nombre de triangles rectangles en A.
3. Ecrire une requête SQL permettant d'obtenir le triangle rectangle en A de périmètre maximal.

Solution :

1.
```sql
SELECT *
FROM triangles
WHERE ac=ab AND ac=bc
```

2.
```sql
SELECT COUNT(*)
FROM triangles
WHERE ac*ac+ab*ab=bc*bc
```

3. Avec la fonction MAX
```sql
SELECT idt, MAX(ab+ac+bc)
FROM triangles
WHERE ac*ac+ab*ab=bc*bc
```

ou sinon, en triant les résultats (moins bien) :

```sql
SELECT idt, ab+ac+bc AS p
FROM triangles
WHERE ac*ac+ab*ab=bc*bc ORDER BY p DESC
```

SUJET T 3

Exercice T 3

On admet dans cet exercice le résultat suivant : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

1. Définition des fonctions puissances généralisées (exposant réel).
2. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$: $\ln(x) \leqslant x - 1$
   (b) En déduire que, pour tout $x > 0$: $\ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}$.
3. On pose $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   (b) Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe grâce à la question 2.b).
   (c) Déterminer, si elles existent, les quatre limites suivantes :
   $$\lim_{x \to 0^+} \ln(f(x)), \quad \lim_{x \to 0^+} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(f(x)) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$
4. Déduire des question précédentes que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$$
5. On pose $u_n = \frac{n^n}{n!}$.
   (a) Pour $n \geqslant 1$, simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   En déduire, pour $n \geqslant 1$, un encadrement de u_{n+1} faisant intervenir u_n.
   (b) Montrer par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n-1} \leqslant u_n \leqslant e^{n-1}$.
   (c) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Solution :

1. Programme ECT 1 p. 15.
2. (a) C'est de la convexité. Ou bien on considère la fonction $\phi : x \mapsto \ln(x) - x + 1$. Alors ϕ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\phi'(x) = \frac{1}{x} - 1$. Ainsi $\phi'(x) > 0$ pour $0 < x < 1$, $\phi'(x) < 0$ pour $x > 1$ et $\phi'(1) = 0$. On en déduit que la fonction ϕ admet un maximum en $x = 1$ d'où, pour $x > 0$, $\phi(x) \leqslant \phi(1) = 0$ et donc finalement : $\boxed{\ln x \leqslant x - 1}$ pour $x > 0$.
   (b) Soit $x > 0$. Alors $\frac{1}{x} > 0$ donc par la question précédente :
   $$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} - 1 \quad \text{soit} \quad -\ln x \leqslant \frac{1}{x} - 1 \quad \text{d'où finalement} \quad \boxed{\ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}}$$
3. On pose $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

(a) Par définition des fonctions puissances générales,

$$f(x) = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

Et donc, si D_f désigne l'ensemble de définition de f :

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff x \neq 0 \text{ et } 1+\frac{1}{x} > 0 \\ &\iff x > 0 \text{ ou } (x < 0 \text{ et } -\frac{1}{x} < 1) \\ &\iff x > 0 \text{ ou } (x < 0 \text{ et } -x > 1) \text{ par passage à l'inverse pour des nombres positifs} \\ &\iff x > 0 \text{ ou } (x < 0 \text{ et } x < -1) \\ &\iff x > 0 \text{ ou } x < -1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[}$$

(b) La fonction f est dérivable sur D_f par les théorèmes généraux et, pour $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} \underline{f'(x)} &= \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \times \frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right)\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \underline{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} \end{aligned}$$

Ainsi, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

Or :

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \\ &\geqslant 1 - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1} \quad \text{par la question 1.b)} \\ &\geqslant 1 - \frac{x+1}{x+1} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in D_f$: $\boxed{f'(x) \geqslant 0}$

(c) Remarquons tout d'abord que $\ln(f(x)) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Pour le calcul de la limite en 0^+ on écrit alors :

$$\ln(f(x)) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + x\ln(x+1)$$

Alors, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x+1) = 0^+$. Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln f(x) = 0^+} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1}$$

Pour la limite en $+\infty$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

d'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln f(x) = 1} \quad \text{puis} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = e}$$

4. La dérivée de f est positive sur $]0,+\infty[$ d'après la question 2.b) donc la fonction f est croissante sur cet intervalle. On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(1) \leqslant f(n) \leqslant \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

soit :

$$\boxed{2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e}$$

ce qui est le résultat demandé.

5. On pose $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
   (a) On calcule :

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

   Par la question précédente, on a donc, pour $n \geqslant 1$:

   $$2 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant e \quad \text{soit} \quad \boxed{2u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant eu_n}$$

   car u_n est positif.

   (b) Pour $n=1$, on a $u_1 = 1$ et donc $2^0 = 1 \leqslant u_1 \leqslant e^0 = 1$. La propriété est donc vraie.
   Soit maintenant $n \geqslant 1$ tel que $2^{n-1} \leqslant u_n \leqslant e^{n-1}$. Alors, par la question précédente : $2u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant eu_n$ et par l'hypothèse de récurrence $2^n = 2\times 2^{n-1} \leqslant 2u_n$ tandis que $eu_n \leqslant ee^{n-1} = e^n$. On en déduit donc que $2^n \leqslant u_{n+1} \leqslant e^n$, ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.
   On en déduit donc, en vertu du principe de récurrence que :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n-1} \leqslant u_n \leqslant e^{n-1}}$$

   (c) L'inégalité précédente se réécrit, pour $n \geqslant 1$:

   $$\frac{2^n}{2} \leqslant \frac{n^n}{n!} \leqslant \frac{e^n}{e}$$

   De la première inégalité, en passant à l'inverse on obtient, toutes les quantités étant positives : $\dfrac{n!}{n^n} \leqslant 2\dfrac{1}{2^n}$ soit encore $n! \leqslant 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ tandis que la seconde donne, par des calculs similaires : $\dfrac{n!}{n^n} \geqslant e\dfrac{1}{e^n}$ soit encore $n! \geqslant e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. En rassemblant ces deux inégalités, on a donc finalement prouvé, pour $n \geqslant 1$:

   $$\boxed{e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^n}$$

Exercice sans préparation T 3

Alice et Bob s'intéressent au lancer de trois pièces équilibrées et plus particulièrement à la probabilité que les trois pièces tombent du même côté.

1. Ecrire le code Python du fonction `simule3()` qui simule le lancer des trois pièces équilibrées et renvoie `True` si les trois pièces tombent du même côté et `False` sinon.
2. Alice tient le raisonnement suivant : « si je lance trois pièces ordinaires, il y a une chance sur quatre pour qu'elles tombent toutes les trois du même côté : sur les huit tirages possibles, seuls PPP et FFF sont favorables. ».

   Quant à Bob, voici ce qu'il dit : « si je lance trois pièces, il y en a toujours deux qui tombent du même côté. Il y a une chance sur deux pour que la troisième tombe de ce côté ».

   Lequel de ces deux raisonnements est correct ? Expliquez pourquoi, ainsi que l'erreur commise dans le raisonnement fautif.

Solution :

1.
```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simule3():
    s=0
    for i in range(3):
        s=s+rd.randint(2)
    return (s==0 or s==3)

# il est alors facile de réaliser une estimation de la probabilité recherchée

def estimation(n):
    s=0
    for i in range(n):
        if simule3():
            s+=1
    return s/n
```

2. C'est Alice qui a raison. Elle raisonne par dénombrement en utilisant l'équiprobabilité : parmi les huit tirages possibles seuls deux sont effectivement favorables.

   Dans le raisonnement de Bob, il y a un conditionnement implicite fautif. Il fait comme s'il conditionnait par un événement de probabilité 1, mais ce faisant il néglige le fait que, s'il y a effectivement toujours au moins deux pièces qui tombent du même côté, il ne sait pas desquelles il s'agit. Or, cela intervient dans le raisonnement. Formalisons cela afin de corriger le raisonnement de Bob.

   Soit pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ avec $i < j$, $A_{i,j}$ l'événement « les pièces i et j tombent du même coté ». Alors $(A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,3})$ est un système complet d'événements. Notons S :« les trois pièces tombent du même côté ».

   On a de manière immédiate $\mathbb{P}(A_{i,j}) = \dfrac{1}{2}$.

   Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3}) \\
&= \mathbb{P}(A_{1,2}|A_{1,3})\mathbb{P}(A_{1,3}) \\
&= \mathbb{P}(A_{1,2})\mathbb{P}(A_{1,3}) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Une autre manière de voir cela est la suivante : Bob dit que S est la même chose que $S \cap ((A_{1,2} \cup A_{1,3} \cup A_{2,3}))$, mais il se trompe en disant que cette probabilité est juste égale à une probabilité du type $\mathbb{P}(A_{i,j})$. En effet, en toute rigueur :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(S \cap (A_{1,2} \cup A_{1,3} \cup A_{2,3})) \\
&= \mathbb{P}((S \cap A_{1,2}) \cup (S \cap A_{1,3}) \cup (S \cap A_{2,3})) \\
&= \mathbb{P}(S \cap A_{1,2}) + \mathbb{P}(S \cap A_{1,3}) + \mathbb{P}(S \cap A_{2,3}) - \mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3}) \\
&\quad -\mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{2,3}) - \mathbb{P}(A_{1,3} \cap A_{2,3} + \mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3} \cap A_{2,3}) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques BL

Juin 2024

Le bilan de la session 2024 de mathématiques voie BL est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 4 et 20. La moyenne s'établit à 11,52 et l'écart-type à 4,29.

Le jury a fortement apprécié les qualités d'expression ainsi que la finesse de raisonnement de certains candidats qui ont fait forte impression.

A contrario, certains candidats se sont révélés approximatifs, au niveau du calcul, mais surtout au niveau de la connaissance des théorèmes du cours.

Le jury aimerait insister sur les points suivants :

- La question de cours n'est pas à négliger. La jury attend une réponse précise et rigoureuse.
- Le jury a parfois rencontré des erreurs étonnantes dans les calculs de dérivée.
- Quand on introduit un objet, par exemple une intégrale, il est attendu du candidat qu'il justifie son existence avec toute la rigueur nécessaire.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons les candidats pour leur combattivité, qui s'est particulièrement exprimée lors des questions sans préparation, où certains ont pu redresser une situation bien compromise.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, qu'ils ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET BL 1

Exercice principal BL 1

1. Question de cours : définition d'une densité de probabilité.

   Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soient α et β deux réels strictement positifs et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^\alpha & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{1}{x^\beta} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

2. (a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? à gauche en 1 ? à droite en 1 ?
   (b) Donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On discutera suivant les valeurs de α et β .
3. (a) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de α et β ?
   (b) Quelle est sa valeur lorsqu'elle converge ?
4. (a) A quelles conditions sur (α, β), la fonction f est-elle une densité de probabilité ?
   On suppose ces conditions vérifiées dans la suite de l'exercice.
   (b) Soit X une variable aléatoire de densité f.
   La variable X admet-elle une espérance $\mathbb{E}(X)$? une variance $\mathbb{V}(X)$?
   Si oui, que valent $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$?
5. (a) Peut-on trouver un segment $[0, x]$ (avec $0 \leqslant x \leqslant 1$) tel que $\mathbb{P}(X \in [0, x]) = \dfrac{1}{2}$?
   Peut-on trouver un segment $[1, y]$ (avec $1 \leqslant y$) tel que $\mathbb{P}(X \in [1, y]) = \dfrac{1}{2}$?
   (b) Pour une variable aléatoire à densité, on appelle médiane tout réel m tel que $\mathbb{P}(X \leqslant m) = \mathbb{P}(X \geqslant m)$.
   Déterminer la (les) médiane(s) de X.

Solution :

1. Question de cours : f est une densité de probabilité si f est définie sur $\mathbb{R}$, positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. (a) La fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = x^\alpha$ est continue sur $[0, 1]$ et $g(1) = 1$ et g est dérivable sur $[0, 1]$ si $\alpha \geqslant 1$, sur $]0, 1]$ si $0 < \alpha < 1$. La fonction h définie sur $[1, +\infty[$ par $h(x) = x^{-\beta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$. On en déduit que : f est continue sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, dérivable à droite en 0 si $\alpha \geqslant 1$ avec $f'_d(0) = 1$ si $\alpha = 1$ et $f'_d(0) = 0$ si $\alpha > 1$ et alors f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = g'(1) = \alpha$ dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = h'(1) = -\beta$
   (b) Sur $[0, 1]$, f est affine si $\alpha = 1$, concave si $0 < \alpha < 1$ et convexe si $\alpha > 1$. Dans tous les cas, f est convexe sur $[1, +\infty[$ avec une limite nulle en $+\infty$. D'où l'allure de la courbe (avec une demi-tangente verticale en O si $0 < \alpha < 1$).
3. f est continue sur $\mathbb{R}$.
   f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

f est continue sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{1}{\alpha+1}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$ et alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\beta} = \frac{1}{\beta-1}$

Conclusion : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta > 1$ et alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta-1}$

4. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1 si et seulement si

$$\beta > 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta-1} = 1$$

Ces conditions sont vérifiées dans la suite.

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta > 2$.

$\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si $\beta > 2$ et alors : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\alpha+2} + \dfrac{1}{\beta-2}$

$\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe si et seulement si $\beta > 3$ et alors $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \dfrac{1}{\alpha+3} + \dfrac{1}{\beta-3}$

$\mathbb{V}(X)$ existe si et seulement si $\beta > 3$ et alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\alpha+3} + \dfrac{1}{\beta-3} - \left(\dfrac{1}{\alpha+2} + \dfrac{1}{\beta-2}\right)^2$

5. (a) L'aire du triangle de sommets les points de coordonnées $(0,0), (1,1)$ et $(1,0)$ vaut $1/2$.

<u>Cas $\alpha > 1$.</u>

f est convexe et non affine sur $[0,1]$ et sa courbe est au-dessous du segment joignant l'origine au point de coordonnées $(1,1)$.

Donc $\forall x \in [0,1] \quad \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{1}{2}$ et il n'existe pas de segment $[0,x]$ tel que $\mathbb{P}(X \in [0,x]) = 1/2$.

Mais alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t > 1/2$ et, comme $y \mapsto \displaystyle\int_1^y f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[1,+\infty[$, il existe un segment $[1,y]$ tel que $\mathbb{P}(X \in [1,y]) = 1/2$

<u>Cas $0 < \alpha < 1$.</u>

f est concave et non affine sur $[0,1]$ et sa courbe est au-dessus du segment joignant l'origine au point de coordonnées $(1,1)$.

Donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t > \frac{1}{2}$ et, comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$ il existe un segment $[0,x]$ tel que $\mathbb{P}(X \in [0,x]) = 1/2$. Mais alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < 1/2$ et il n'existe pas de segment $[1,y]$ tel que $\mathbb{P}(X \in [1,y]) = 1/2$

<u>Cas $\alpha = 1$.</u>

$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1/2$ donc $\forall y > 1 \quad \displaystyle\int_1^y f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{1}{2}$. et il n'existe pas de segment $[1,y]$ tel que $\mathbb{P}(X \in [1,y]) = 1/2$

(b) Il résulte de a) que la médiane m est unique, vérifie $P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m) = 1/2$ et si $\alpha = 1$, on a $m = 1$ si $\alpha < 1 \quad m \in [0,1] \quad \displaystyle\int_0^m t^\alpha dt = 1/2$ soit $m = \left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$ si $\alpha > 1 \quad m \in \Big[1,+\infty\Big[\quad \displaystyle\int_m^{+\infty} \frac{dt}{x^\beta} = 1/2$ soit $m = \left(\dfrac{2}{\beta-1}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$.

Exercice sans préparation BL 1

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\text{si } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \varphi(M) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$$

1. Déterminer φ^4 et en déduire les valeurs propres possibles de φ.
2. Déterminer les valeurs propres de φ et les sous-espaces propres associés.
3. L'endormorphisme φ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. $\varphi^4 = Id_E$.
   Si on connait la notion de polynôme annulateur, les valeurs propres possibles sont -1 et 1 , racines de $X^4 - 1$. Sinon, soit λ une valeur propre de φ et M un vecteur propre associé. Alors $\varphi^4(M) = \lambda^4 M = M$. Or $M \neq 0$, donc $\lambda^4 = 1$ de racines -1 et 1. Donc les valeurs propres possibles sont -1 et 1.
2. $\varphi(M) = M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = d$. Donc 1 est valeur propre de φ et le sous-espace propre associé est : $\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$ engendré par $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   $\varphi(M) = -M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = -b = -c = d$. Donc -1 est valeur propre de φ et le sous-espace propre associé est : $\mathcal{E}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$ engendré par $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. (J, K) n'est pas une base de E, donc φ n'est pas diagonalisable.

SUJET BL 2

Exercice principal BL 2

1. Question de cours : comment trouver les éventuelles valeurs propres de la matrice à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

   Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$.
   On appelle homothétie de $\mathbb{R}^2$ tout endomorphisme de la forme $a\mathrm{Id}$ où a est un réel et Id l'application identique de $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que toute homothétie de $\mathbb{R}^2$ commute avec tout endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

   Dans les questions suivantes, on suppose que ni f ni g ne sont des homothéties.
3. (a) On suppose que f admet deux valeurs propres distinctes λ et λ'.
   Soient u et u' des vecteurs propres respectivement associés à λ et λ'.
   Montrer que u et u' sont aussi des vecteurs propres de g.
   L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?
   (b) Que peut-on dire de f si g admet deux valeurs propres distinctes ?
   (c) Réciproquement, soient φ et ψ des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.
   On suppose que (u, u') est une base de vecteurs propres pour φ et ψ. A-t-on $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?
   On suppose que φ et ψ ont chacun deux valeurs propres distinctes. A-t-on $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?
   On pourra s'intéresser aux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. (a) On suppose que f n'admet qu'une valeur propre : λ.
   Soit u un vecteur propre associé à λ. On complète par v pour obtenir une base de $\mathbb{R}^2$.
   Quelle est la forme de la matrice de f dans la base (u, v) ?
   Quelle est la forme de la matrice de g dans la base (u, v) ?
   (b) Si φ et ψ n'ont chacun qu'une seule valeur propre, a-t-on $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?
5. On suppose que f n'a pas de valeur propre réelle.
   (a) Montrer que g n'a pas de valeur propre réelle.
   (b) On suppose que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   Proposer une matrice B, qui ne soit pas une matrice d'homothétie, telle que $AB = BA$.

Solution :

1. Question de cours :
   les éventuelles valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont les racines réelles de l'équation $x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$.
2. Si φ est un endomorphisme quelconque de $\mathbb{R}^2$ et a un réel quelconque ; $\varphi \circ a\mathrm{Id} = a\varphi \circ \mathrm{Id} = a\varphi = a\mathrm{Id} \circ \varphi$.
3. (a) $f \circ g(u) = g \circ f(u) = g(\lambda u) = \lambda g(u)$ donc $g(u)$ appartient au sous-espace engendré par u. D'où, il existe μ tel que $g(u) = \mu u$ et comme u est non nul, u est un vecteur propre de g.
   De même v est un vecteur propre de g.
   La famille (u, v) étant une base de vecteurs propres pour f est aussi une base de vecteurs propres pour g. Donc g est diagonalisable.

(b) Comme f et g jouent le même rôle, si g admet deux valeurs propres distinctes, g et f admettent une même base de vecteurs propres. Et f admet deux valeurs propres distinctes puisque f n'est pas une homothétie.

(c) Si u et u' sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ et λ' pour φ et μ et μ' pour ψ : $\varphi \circ \psi(u) = \varphi(\mu u) = \lambda\mu u = \mu\lambda u = \psi \circ \varphi(u)$. De même $\varphi \circ \psi(v) = \psi \circ \varphi(v)$ $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ coïncident sur la base (u, v) donc $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

Si φ et ψ ont chacun deux valeurs propres distinctes, et s'ils ont même base de vecteurs propres, alors ils commutent mais sinon, on peut trouver deux tels endomorphismes qui ne commutent pas. Par exemple, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ont chacune deux valeurs propres distinctes : 1 et 2 pour A et 1 et -1 pour B, mais $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (a) Soit M la matrice de f dans la base (u, v). La première colonne est $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ et la deuxième $\begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix}$ car λ est la seule valeur propre et $a \neq 0$ car f n'est pas une homothétie. D'où $M = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$. Avec le même raisonnement que dans la question 3.a), u est un vecteur propre de g associé à une valeur propre μ. De plus, g n'a pas d'autre valeur propre car sinon, d'après 3.a) f, n'étant pas une homothétie, aurait deux valeurs propres distinctes.

La matrice de g est donc $N = \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

(b) Si φ et ψ ont une seule valeur propre et un vecteur propre u en commun et ne sont pas des homothéties, alors, dans une base (u, v), ils ont des matrices de la forme M et N comme ci-dessus. Et $MN = \begin{pmatrix} \lambda\mu & b\lambda + a\mu \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix} = NM$. Donc, dans ce cas $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Mais, on peut avoir deux endomorphismes qui ont une seule valeur propre sans commuter : par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a : $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. De plus, A et B ne sont pas des matrices d'homothéties et elles admettent chacune une seule valeur propre.

(a) D'après 3. et 4. si g a une ou deux valeurs propres réelles, il en est de même pour f. Par contraposée, g n'a pas de valeur propre réelle.

(b) Les éventuelles valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x + 1 = 0$ Donc A n'a bien pas de valeur propre réelle.

Une matrice qui n'est pas une matrice d'homothétie et qui commute avec A ne doit pas avoir de valeur propre réelle par la question précédente.

On peut prendre $B = A$ ou $B = A^T$ (transposée de A) qui commutent avec A.

Exercice sans préparation BL 2

Soit k un réel positif.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ k\dfrac{\ln x}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.
   Dans la suite on fixe cette valeur pour k.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la déterminer.
   La variable X admet-elle une variance ? Si oui, la déterminer.

Solution :

1. f est continue sur $\mathbb{R}$, positive car $k \geqslant 0$.
   En intégrant par parties :
   $\forall A \geqslant 1 \quad \displaystyle\int_1^A f(x)dx = k\int_1^A \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{k}{2} \times \frac{\ln A}{A^2} + \int_1^A \frac{dx}{x^3} = -\frac{k}{2} \times \frac{\ln A}{A^2} - \frac{k}{4}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right) \lim_{A\to+\infty} \frac{\ln A}{A^2} = 0$
   (croissances comparées) Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{k}{4}$ et f est une densité si et seulement si $k = 4$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)dx = 4\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$
   Cette intégrale converge car pour $x > 1$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2} \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx$ converge (intégrale de Riemann).
   $\forall A \geqslant 1 \quad \displaystyle\int_1^A \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln A}{A} + \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \frac{\ln A}{A} - \frac{1}{A} + 1$ qui tend vers 1 quand A tend vers $+\infty$ Donc X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 4$
   $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 f(x)dx$ diverge car $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln x}{x}dx = \frac{\ln^2 A}{2}$ qui tend vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$ Donc X n'a pas de moment d'ordre 2 et par suite pas de variance.