

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECG Maths approfondies

Juin 2025

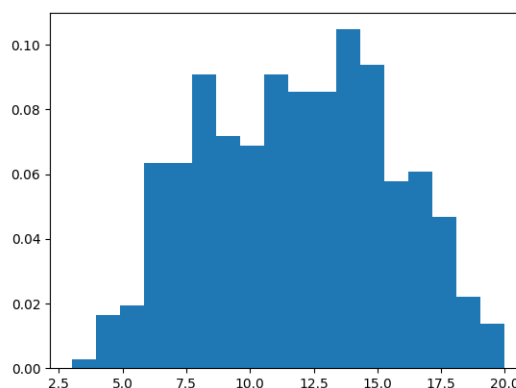
Les oraux se sont bien passés malgré la chaleur.

Certains élèves maîtrisaient mal le cours et jouaient la montre. D'autres au contraire étaient dynamiques et combattifs essayant de trouver des solutions. Nous avons valorisé ces derniers.

Nous avons vu des élèves extrêmement brillants, ayant une approche intuitive rivalisant avec les scientifiques. D'autres malheureusement ne connaissaient pas les hypothèses des théorèmes ou des propriétés et parfois mal leurs résultats.

Les notes se sont étalées de 3 à 20 avec une moyenne de 11,75 et un écart-type de 3,84.

count	384.000000
mean	11.858073
std	3.880060
min	3.000000
25%	9.000000
50%	12.000000
75%	15.000000
max	20.000000



Le jury aimerait insister sur les points suivants.

- Il est important de bien organiser son tableau : les candidats doivent le découper et y écrire en colonnes. Plusieurs candidats effacent leurs résultats trop vite, alors que la moitié du tableau est encore vide. De plus, avant d'effacer quoi que ce soit au tableau, il faut demander l'autorisation du jury.
- Les candidats annoncent parfois qu'ils ont des pistes alors qu'ils n'ont rien. C'est à la longue assez agaçant...
- Il faut savoir illustrer des résultats de propriétés : les sommes de Riemann, la convexité ou des définitions projecteur...
- Il faut rappeler que l'intégrande doit être continue et qu'une « impropriété » est là où l'intégrande n'est pas continue et non aux bornes de l'intégrale.
- Le jury ne souhaite pas que les candidats passent des questions mais qu'ils se confrontent aux questions difficiles.
- Le jury attend des candidats qu'ils sachent prouver si une intégrale converge et ne calculent pas « sous réserve de convergence ».
- Il faut savoir mieux revenir aux définitions en étant plus méthodique et structuré. La manipulation des quantificateurs est parfois déficiente et cela a pu empêcher certains candidats ayant de bonnes intuitions de conclure proprement un raisonnement.
- Quand un exercice propose le code d'une fonction Python et demande au candidat d'expliquer ce que fait la fonction, le jury n'attend pas qu'il se contente de paraphraser voir simplement lire le code.
- Plusieurs candidats ont semblé mal à l'aise avec la convexité, en particulier l'interprétation géométrique de la définition n'était pas toujours maîtrisée.

- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.

Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET Maths Approfondies 1

Exercice principal 1

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit $I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. On considère la fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in I, \varphi(x) = \ln(\cos(x)) + \frac{x^2}{2}.$$

1. Question de cours : rappeler la formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ quelconque), pour une fonction de classe C^∞ .
2. Montrer que tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.
3. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall x \in I, |\varphi(x)| \leq Mx^4.$$

4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et vérifiant

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{2k-1} X_k.$$

- (a) Montrer que pour tout $t \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{E}(\cos(tY_n)) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n} t\right).$$

- (b) Soit $t \in I$. Montrer qu'il existe un entier $N_t \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N_t, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{\sqrt{2k-1}}{n} t \in I.$$

- (c) Soit $t \in I$. Déterminer la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\cos(tY_n)).$$

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de première année p19
2. Par parité, il suffit de montrer l'inégalité quand $x \geq 0$. On sait dans ce cas que

$$\forall t \in [0, x], |(\sin)'(t)| = |\cos(t)| \leq 1.$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que $|\sin(x)| \leq |x|$.

3. On a pour tout $x \in I$

$$\varphi'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + x$$

et

$$\varphi''(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2(x)} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Ainsi,

$$|\varphi''(x)| \leq \frac{\sin^2 x}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2 \sin^2 x \leq 2x^2.$$

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral en 0, on a pour tout $x \in I$ avec $x \geq 0$:

$$|\varphi(x)| = |\varphi(0) + \varphi'(0)x + \int_0^x (x-t)\varphi''(t)dt| = |\int_0^x (x-t)\varphi''(t)dt|$$

Ainsi, pour $x \geq 0$ on a

$$|\varphi(x)| \leq \int_0^x (x-t)|\varphi''(t)|dt \leq 2 \int_0^x (x-t)t^2dt = 2(\frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4}) = \frac{x^4}{6}.$$

Pour $x \leq 0$, on utilise la parité de φ .

4. (a) Montrons par récurrence sur n la propriété :

$$\forall t \in I, \mathbb{E} \cos(tY_n) = \prod_{k=1}^n \cos(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}t).$$

On pose dans la suite pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = nY_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{2k-1}X_k.$$

La propriété est vraie pour $n = 1$ car

$$\mathbb{E}(\cos(tY_1)) = \mathbb{E} \cos(tX_1) = \frac{1}{2} \cos(-t) + \frac{1}{2} \cos(t) = \cos(t).$$

Supposons qu'elle est vraie pour un certaine $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$Y_{n+1} = \frac{Z_{n+1}}{n+1} = \frac{Z_n + \sqrt{2n+1}X_{n+1}}{n+1} = \frac{nY_n}{n+1} + \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}X_{n+1}$$

Donc

$$\mathbb{E}(\cos(tY_{n+1})) = \mathbb{E} \left(\cos(\frac{ntY_n}{n+1}) \cos(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1}) - \sin(\frac{ntY_n}{n+1}) \sin(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1}) \right).$$

Par linéarité de l'espérance et le lemme des coalitions on a

$$\mathbb{E}(\cos(tY_{n+1})) = \mathbb{E} \left(\cos(\frac{ntY_n}{n+1}) \right) \mathbb{E} \left(\cos(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1}) \right) - \mathbb{E} \left(\sin(\frac{ntY_n}{n+1}) \right) \mathbb{E} \left(\sin(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1}) \right).$$

On a

$$\mathbb{E} \left(\cos(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1}) \right) = \frac{1}{2} \cos(-\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}t) + \frac{1}{2} \cos(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}t) = \cos(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}t).$$

$$\mathbb{E} \left(\sin(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}tX_{n+1}) \right) = \frac{1}{2} \sin(-\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}t) + \frac{1}{2} \sin(\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}t) = 0,$$

et par hypothèse de récurrence

$$\mathbb{E} \left(\cos(\frac{ntY_n}{n+1}) \right) = \prod_{k=1}^n \cos(\frac{\sqrt{2k-1}}{n} \frac{nt}{n+1}) = \prod_{k=1}^n \cos(\frac{\sqrt{2k-1}}{n+1}t).$$

D'où

$$\mathbb{E} \cos(tY_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} \cos(\frac{\sqrt{2k-1}}{n+1}t).$$

(b) Si $t = 0$, $N_t = 1$. Si $t \neq 0$, alors

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{\sqrt{2k-1}}{n}t \in I$$

si et seulement si

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, |\frac{\sqrt{2k-1}}{n}||t| \leq \frac{\pi}{4}$$

ou si et seulement si

$$\frac{\sqrt{2n-1}}{n}|t| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Il suffit que ensuite d'observer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\frac{\sqrt{2n-1}}{n}||t| = 0.$$

(c) Etant donné que $t \mapsto \mathbb{E} \cos(tY_n)$ est une fonction paire, on supposera que $t \geq 0$. On a pour $n \geq N_t$:

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \cos\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}t\right) \in [\cos(\frac{\pi}{4}), \cos 0] = [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1].$$

Ainsi, pour $n \geq N_t$

$$\ln(\mathbb{E}(\cos(tY_{n+1}))) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(\cos\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n+1}t\right)\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\varphi\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n+1}t\right) - \frac{1}{2} \frac{2k-1}{(n+1)^2} t^2\right).$$

D'où

$$\ln(\mathbb{E}(\cos(tY_{n+1}))) = -\frac{1}{(n+1)^2} t^2 \sum_{k=1}^{n+1} \left(k - \frac{1}{2}\right) + \varepsilon_t(n) = -\frac{1}{2} t^2 + \varepsilon_t(n)$$

où

$$\varepsilon_t(n) = \sum_{k=1}^{n+1} \varphi\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n+1}t\right)$$

On a alors

$$|\varepsilon_t(n)| \leq M \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-1)^2}{(n+1)^4} t^4 \leq M \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^4} t^4 = M \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3} t^4.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_t(n) = 0.$$

On conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\cos(tY_n)) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Exercice sans préparation 1

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
def ST(A): # A est une matrice 3*3
    alpha=rd.normal(0,1,1000)
    beta=rd.normal(0,1,1000)
    S=0
    for i in range(3):
        for j in range(i+1):
            S+=A[i,j]**2
    dep= S - (A[0,1])**2+(A[0,2])**2+(A[1,2])**2
    min=S
    for k in range(1000):
        T=dep+(A[0,1]-alpha[k])**2+(A[0,2]-beta[k])**2+(A[1,2]-alpha[k])**2
        if T < min :
            min=T
    return min
ST(B)
4.0097773450062455
```

Que vaut la valeur prise par dep ? Que calcule $ST(B)$? Justifier le résultat.

Solution :

- On cherche la distance de A à $F = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$$M = P_F(A) = \frac{(a_{1,2} + a_{2,3})}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{1,3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d(A, F)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - M_{i,j})^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

- Si besoin En introduisant le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on remarque qu'il s'agit alors de minimiser la quantité

$$\|A - S\|^2$$

pour S variant dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ autrement dit de calculer

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$$

Or les sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux et la décomposition

$$A = \frac{A + {}^t A}{2} + \frac{A - {}^t A}{2}$$

montre que

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 = d\left(A, \frac{A + {}^t A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

SUJET Maths Approfondies 2

Exercice principal 2

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles admettant une variance et vérifiant les trois propriétés suivantes

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X_n) = 0$.
- $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \neq n, \mathbb{E}(X_k X_n) = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{V}(X_n)}{n} = 0$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

On admet dans un premier temps le lemme de Césaro :

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1, v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge également vers ℓ .

1. Question de cours : rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z_n^2) = 0.$$

3. En déduire que Z_n converge en probabilité vers 0.
4. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle vérifiant les deux hypothèses :
 - La suite $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{n} = 0$.

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une variance. Montrer que

$$\frac{a_1 Y_1 + \cdots + a_n Y_n}{n}$$

converge en probabilités vers $\ell \mathbb{E}(Y_1)$.

5. Démontrer le lemme de Césaro.

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de première année p24
- 2.

$$Z_n^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n X_k^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j.$$

D'où

$$0 \leq \mathbb{E}(Z_n^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \frac{\mathbb{E}(X_k^2)}{k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}(X_k^2)}{k}.$$

Il suffit ensuite de faire tendre n vers $+\infty$, utiliser le lemme de Césaro pour le terme à droite et conclure avec le théorème des Gendarmes.

3. Soit $\varepsilon > 0$. On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (on note que $\mathbb{E}(Z_n) = 0$) :

$$\mathbb{P}(|Z_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{\varepsilon^2}$$

puis on fait tendre $n \rightarrow +\infty$.

4. On pose

$$U_n = a_n(Y_n - \mathbb{E}(Y_n)).$$

On a alors pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(U_n) = 0, \text{ et si } k \neq n, \mathbb{E}(U_k U_n) = a_k a_n \text{Cov}(Y_k, Y_n) = 0.$$

De plus

$$\forall n \geq 1, \mathbb{E}(U_n^2) = a_n^2(\mathbb{E}(Y_n^2) - \mathbb{E}(Y_n)^2) = a_n^2 \mathbb{V}(Y_n) = a_n^2 \mathbb{V}(Y_1)$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(U_n^2)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2 \mathbb{V}(Y_1)}{n} = 0.$$

Donc

$$\frac{U_1 + \dots + U_n}{n}$$

converge en probabilité vers 0, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\frac{U_1 + \dots + U_n}{n}| \geq \varepsilon) = 0.$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\frac{a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n}{n} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \mathbb{E}(Y_1)| \geq \varepsilon) = 0.$$

On a par ailleurs,

$$|\frac{a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)| \leq |\frac{a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n}{n} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \mathbb{E}(Y_1)| + |\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)|.$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $n \geq n_0$, on a

$$|\frac{a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)| \leq |\frac{a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n}{n} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \mathbb{E}(Y_1)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc

$$\{|\frac{a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)| \geq \varepsilon\} \subset \{|\frac{a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n}{n} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \mathbb{E}(Y_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Ainsi, pour $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}(|\frac{a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|\frac{a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n}{n} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \mathbb{E}(Y_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Il suffit de passer ensuite à la limite quand $n \rightarrow +\infty$.

5. bien connu.

Exercice sans préparation 2

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. On admet que $(A + I_3)^3 = O_3$.

Comment pourrait-on déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de A^p en fonction de p ?

Solution :

Le résultat admis donne : $P(x) = (x + 1)^3$ est un polynôme annulateur de A .

Pour $p \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^p par P , ce qui s'écrit ici, compte tenu de la formule de Taylor pour les polynômes :

$$x^p = (x + 1)^3 Q(x) + (-1)^p \frac{p(p-1)}{2} (x + 1)^2 + (-1)^{p-1} p (x + 1) + (-1)^p,$$

où $Q \in \mathbb{R}[x]$. On peut donc écrire :

$$A^p = (-1)^p \frac{p(p-1)}{2} (A + I_3)^2 + (-1)^{p-1} p (A + I_3) + (-1)^p I_3$$

On calcule alors $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on en déduit :

$$A^p = (-1)^p \begin{pmatrix} p^2 - 4p + 1 & -\frac{p(p-3)}{2} & \frac{p(p-5)}{2} \\ p(p-6) & -\frac{p^2}{2} + \frac{5}{2}p + 1 & \frac{p(p-7)}{2} \\ -p(p-2) & \frac{p(p-1)}{2} & -\frac{p^2}{2} + \frac{3}{2}p + 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : on peut remarquer que la matrice $N = A + I_3$ est nilpotente, et développer $A^p = (-I_3 + N)^p$ à l'aide de la formule du binôme.

Question supplémentaire : Étude du cas $p \in \mathbb{Z}$.

Le résultat admis donne $\text{Sp}(A) \subset \{-1\}$. Puisque 0 n'est pas valeur propre de A , la matrice A est inversible et l'expression A^p pour p entier négatif a bien un sens. En notant $M(p)$ la matrice obtenue pour A^p dans le cas $p \in \mathbb{N}$, on remarque que $M(p) \times M(-p) = I_3$, ce qui permet de conclure que $A^{-p} = M(-p)$.

SUJET Maths Approfondies 3

Exercice principal 3

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant une variance. Pour tout réel θ et tout entier naturel non nul n on pose

$$u_n(\theta) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n\theta).$$

1. Question de cours : rappeler le théorème limite central.
2. On suppose dans cette question que les variables X_n suivent une loi binomiale de paramètres (m, p) . Trouver l'expression de $u_n(\theta)$ en fonction de n, θ, m et p .
3. On suppose dans cette question que les variables X_n suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Trouver l'expression de $u_n(\theta)$ en fonction de n, θ et λ .
4. On revient au cas général. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \mathbb{E}(X_1)$. Montrer que la suite $(u_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
5. On se place dans le cas $\theta = \mathbb{E}(X_1)$. Montrer que la suite $(u_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
6. En déduire la limite de la somme suivante en fonction de θ

$$\sum_{k=0}^{\min(mn, \lfloor \theta n \rfloor)} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k},$$

où $\lfloor \theta n \rfloor$ désigne la partie entière de θn .

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p 22.
2. On sait que $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale de paramètres $(2m, p)$. Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres (nm, p) . Donc

$$u_n(\theta) = \sum_{k=0}^{\min(nm, \lfloor n\theta \rfloor)} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = k) = \sum_{k=0}^{\min(nm, \lfloor n\theta \rfloor)} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k}.$$

3. Dans ce cas, on montre facilement par récurrence que $X_1 + \cdots + X_n$ suit aussi une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$. Donc

$$u_n(\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n\theta \rfloor} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = k) = e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\lfloor n\theta \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!}.$$

4. Si $\theta < M = \mathbb{E}(X_1)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - M\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq (\varepsilon + M)n) + \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq (M - \varepsilon)n).$$

D'où :

$$0 \leq \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq (M - \varepsilon)n) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - M\right| \geq \varepsilon\right).$$

En appliquant la loi des grands nombres et le théorème des Gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq (M - \varepsilon)n) = 0.$$

En choisissant $\varepsilon = M - \theta$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\theta) = 0$.

Si $\theta > M$. On choisit $\varepsilon = \theta - M > 0$. On a alors

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq \theta n) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq (M + \varepsilon)n) = 1 - \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \geq (M + \varepsilon)n).$$

Or

$$0 \leq \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \geq (M + \varepsilon)n) \leq \mathbb{P}\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - M\right| \geq \varepsilon.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \geq (M + \varepsilon)n) = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq \theta n) = 1.$$

5. D'après le théorème limite central, en notant σ l'écart-type :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - M\right) \leq 0\right) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\theta) = \frac{1}{2}.$$

6. On revient au cas où X_1 suit une loi binomiale de paramètres (m, p) . Ainsi, $\mathbb{E}(X_1) = mp$. Si $\theta > mp$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\min(mn, [\theta n])} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k} = 1.$$

Si $\theta < mp$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\min(mn, [\theta n])} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k} = 0.$$

Si $\theta = mp$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\min(mn, [nmp])} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{[nmp]} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k} = \frac{1}{2}.$$

Exercice sans préparation 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Soient (a, b) une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

Déterminer deux réels λ et μ dépendant de $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^n)^3$ et minimisant la quantité $\sum_{k=1}^n |\lambda a_k + \mu b_k + c_k|^2$, où $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ et $c = (c_1, \dots, c_n)$.

Solution :

DEMANDER UN DESSIN pour $n = 3$ On veut trouver λ et μ minimisant $\|c + (\lambda a + \mu b)\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Cette quantité est minimale si et seulement si $\lambda a + \mu b$ est l'opposé du projeté orthogonal de c sur le plan $\text{Vect}(a, b)$.

Comme la famille (a, b) est libre, on peut contruire une base orthonormée de $\text{Vect}(a, b)$.

Prenons par exemple :

$$(e_1, e_2) = \left(\frac{1}{\|a\|} a, \frac{\|a\|}{\alpha} b - \frac{\langle a, b \rangle}{\alpha \|a\|} a \right), \quad \text{où} \quad \alpha = \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2}.$$

On sait alors que le projeté de c sur $\text{Vect}(a, b)$ est $\langle c, e_1 \rangle e_1 + \langle c, e_2 \rangle e_2$.

Comme la famille (a, b) est libre, par identification on trouve :

$$\lambda = \frac{-\langle c, a \rangle}{\|a\|^2} + \frac{\langle c, b \rangle \langle a, b \rangle}{\alpha^2} - \frac{\langle a, b \rangle^2 \langle c, a \rangle}{\alpha^2 \|a\|^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{-\|a\|^2 \langle c, b \rangle}{\alpha^2} + \frac{\langle c, a \rangle \langle a, b \rangle}{\alpha^2}.$$

SUJET Maths Approfondies 4

Exercice principal 4

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On dit qu'une variable aléatoire X est unimodale si sa fonction de répartition F_X est convexe sur $] -\infty, 0[$ et concave sur $]0, +\infty[$.

1. Question de cours : rappeler les propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
2. On suppose dans cette question que X suit une loi normale de paramètres (μ, σ^2) . Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur μ et σ pour que X soit unimodale.
3. Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et soit Z_t une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur I_t où I_t est l'intervalle égal à $[t, 0]$ si $t < 0$ et à $[0, t]$ si $t > 0$. Montrer que Z_t est unimodale.
4. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on note U_t la fonction de répartition de Z_t . Quand $t = 0$, on définit U_0 par : $U_0(x) = 1$ pour $x \geq 0$ et $U_0(x) = 0$ pour $x < 0$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto tU_t(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_t(x)h(t) dt,$$

où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 , positive, vérifiant $h(0) = 0$ et telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$$

converge.

- (a) Montrer que X est unimodale.
- (b) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer sa densité en fonction de h .

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p14
2. La densité de X dans ce cas est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

D'où

$$f'(x) = -\frac{(x-\mu)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $] -\infty, \mu]$ et strictement décroissante sur $[\mu, +\infty[$. Pour que X soit unimodale, il faut et il suffit que $\mu = 0$.

3. Soit U_t la fonction de répartition de Z_t . Si $t > 0$, on montre facilement que

$$U_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 \leq x \leq t, \\ 1 & \text{si } x > t. \end{cases}$$

Il en résulte directement que Z_t est unimodale.

De même, si $t < 0$, on montre facilement que

$$U_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq t, \\ \frac{t-x}{t} & \text{si } t \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Il en résulte aussi que Z_t est unimodale.

4. Des expressions précédentes, on a si $x < 0$

$$U_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq x, \\ \frac{t-x}{t} & \text{si } t < x. \end{cases}$$

Si $x \geq 0$, on a

$$U_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq x, \\ \frac{x}{t} & \text{si } t > x. \end{cases}$$

On en déduit facilement que $t \mapsto tU_t(x)$ est continue.

5. .

(a) Il suffit d'utiliser le fait que $x \mapsto U_t(x)$ est unimodale pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) On peut écrire pour $x > 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x h(t)dt + \int_x^{+\infty} \frac{x}{t}h(t)dt = \int_{-\infty}^x h(t)dt + x \int_x^{+\infty} \frac{h(t)}{t}dt.$$

Puisque h est continue et que $t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{h(t)}{t}$ peut être prolongée par continuité en 0, on en déduit facilement que F_X est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On conclut que X est une variable aléatoire à densité. Notons f sa densité. On a pour tout $x > 0$

$$f(x) = F'_X(x) = \int_x^{+\infty} \frac{h(t)}{t}dt.$$

Pour $x < 0$, on a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{t-x}{t}h(t)dt = \int_{-\infty}^x h(t)dt - x \int_{-\infty}^x \frac{h(t)}{t}dt.$$

Ainsi, F_X est de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$.

$$f(x) = F'_X(x) = - \int_{-\infty}^x \frac{h(t)}{t}dt.$$

Exercice sans préparation 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

On dit qu'un endomorphisme non nul f de E est nilpotent s'il existe un entier positif k tel que $f^k = 0$.

On dit que f est unipotent si $f - \text{Id}_E$ est nilpotent.

Si f est nilpotent et k un entier positif tel que $f^k = 0$, on définit un endomorphisme e^f de E par :

$$e^f = \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{f^\ell}{\ell!}$$

1. Montrer que pour tout endomorphisme nilpotent f de E , on a $f^n = 0$.
2. On note $\mathcal{N}$ et $\mathcal{U}$ les ensembles des endomorphismes nilpotents et unipotents respectivement. Montrer que l'application :

$$\exp : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(E), \quad f \mapsto e^f$$

établit une bijection entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{U}$.

Solution :

1. Soit k l'ordre de nilpotence de f (le plus entier k tel que $f^k = 0$). Il existe $v \in E$ tel que $f^{k-1}(v) \neq 0$. La famille $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est liée et $f^n(v)$ est forcément combinaison linéaire de $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$. On a donc

$$f^n(v) = \alpha_1 f^{n-1}(v) + \dots + \alpha_\ell f^{n-\ell}(v)$$

avec $\alpha_\ell \neq 0$. Si $k > n$, on a alors

$$f^{k-1-n+\ell}(f^n(v)) = f^{k-1-n+\ell}(\alpha_1 f^{n-1}(v) + \dots + \alpha_\ell f^{n-\ell}(v)) = \alpha_1 f^{k-1-n+\ell}(f^{n-1}(v)) + \dots + \alpha_\ell f^{k-1-n+\ell}(f^{n-\ell}(v))$$

$$f^{k-1+\ell}(v) = \alpha_1 f^{k-1+\ell-1}(v) + \dots + \alpha_\ell f^{k-1}(v)$$

On conclut que $f^{k-1}(v) = 0$ et on a une contradiction. Donc $k \leq n$.

2. Il suffit de remarquer que l'exponentielle admet un inverse. Si $u \in \mathcal{U}$ et $f = u - \text{Id}_E$, l'application inverse est

$$\ln(u) = \ln(\text{Id}_E + f) = \sum_{\ell=1}^{n-1} (-1)^{\ell-1} \frac{(f)^\ell}{\ell}.$$

SUJET Maths Approfondies 5

Exercice principal 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Question de cours : Endomorphismes symétriques.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \frac{1}{2} {}^t X A X - {}^t B X,$$

où on a noté $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (lettre majuscule) le vecteur coordonnées de x dans la base canonique. Montrer que f est minorée si et seulement si A et B vérifient les deux conditions :

- (a) les valeurs propres de A sont positives,
 - (b) $B \in \text{Im}(A)$,
(où $\text{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } AX = Y\}$).
3. Soient f_1, f_2 deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f_i(x) = \frac{1}{2} {}^t X A_i X - {}^t B_i X, \text{ pour } i = 1, 2,$$

où A_1 et A_2 sont deux matrices réelles symétriques et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que f_1 et f_2 sont minorées et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|\nabla f_1(x)\| = \|\nabla f_2(x)\|.$$

Montrer que $f_1 = f_2$.

4. Soient A_1 et A_2 deux matrices réelles symétriques vérifiant la condition (a) de la question 2. Montrer que

$$\text{Im}(A_1 + A_2) = \text{Im}(A_1) + \text{Im}(A_2),$$

puis en déduire que

$$\text{Ker}(A_1 + A_2) = \text{Ker}(A_1) \cap \text{Ker}(A_2).$$

(où $\text{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ } Y = AX\}$ et $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$).

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p17.
2. On peut raisonner avec les fonction de plusieurs variables ou aussi de façon algébrique.
— Supposons que f est minorée par un réel $m \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \frac{1}{2} {}^t X A X - {}^t B X \geq m.$$

En remplaçant X par λX , où $\lambda \in \mathbb{R}$ est quelconque, on a

$$\frac{\lambda^2}{2} {}^t X A X - \lambda {}^t B X \geq m.$$

En divisant par λ et en faisant $\lambda \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X \geq 0,$$

ce qui signifie que A est semi-définie positive. De plus, pour tout X tel que $AX = 0$, on a

$${}^t B X \geq m.$$

Nécessairement ${}^t B X = 0$ pour tout X tel que $AX = 0$. Ainsi $B \in \text{Ker}(A)^\perp = \text{Im}(A)$.

- Réciproquement, si $B \in \text{Ker}(A)^\perp = \text{Im}(A)$ et A à valeurs propres positives, on peut introduire une B.O.N. $(V_1, \dots, V_n)$ de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. On suppose que $0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} < \lambda_p, \dots, \lambda_n$. Ainsi $B \in \text{Ker}(A)^\perp = \text{vect}\{V_p, \dots, V_n\}$. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=p}^n \lambda_k \beta_k^2 - \sum_{k=p}^n \gamma_k \beta_k,$$

où $\gamma_p, \dots, \gamma_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ sont les composantes de B et de X dans la base $(V_1, \dots, V_n)$. Clairement f est minorée.

3. On a

$$\nabla f_i = A_i X - B_i.$$

Ainsi

$$\forall X, \|A_1 X - B_1\| = \|A_2 X - B_2\|$$

En fixant X , puis le remplaçant par λX dans cette identité, divisant par $|\lambda|$ et faisant tendre λ vers $+\infty$ donne

$$\forall X, \|A_1 X\| = \|A_2 X\|$$

En levant au carré, cela donne

$$\forall X, {}^t X (A_2^2 - A_1^2) X = 0.$$

Forcément $A_1^2 = A_2^2$. Etant donné que les vecteurs propres de A_1 et de A_1^2 sont les mêmes, on en déduit que les vecteurs propres de A_1 et A_2 sont les mêmes. On peut donc diagonaliser ces deux matrices dans une même base. Puisqu'elles sont SDP, on en déduit facilement que $A_1 = A_2$. On revient à l'égalité $\|A_1 X - B_1\| = \|A_2 X - B_2\|$ qui devient $\|A_1 X - B_1\| = \|A_1 X - B_2\|$ pour tout X . Ainsi

$$\forall X, 2^t (B_2 - B_1) A_1 X + \|B_1\|^2 - \|B_2\|^2 = 0.$$

Avec $X = 0$ on obtient $\|B_1\|^2 - \|B_2\|^2 = 0$. Ensuite, on a ${}^t (B_2 - B_1) A_1 X = 0$ pour tout X . Ce qui prouve que $B_1 - B_2 \in (\text{Im } A_1)^\perp$. Comme $B_1 - B_2 \in \text{Im}(A_1)$ on en déduit que $B_1 = B_2$.

4. On a $\text{Im}(A_1 + A_2) \subset \text{Im}(A_1) + \text{Im}(A_2)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soient $B_1 \in \text{Im}(A_1)$ et $B_2 \in \text{Im}(A_2)$ quelconques. Les fonctions f_i construites comme ci-dessus avec les couples (A_i, B_i) , $i = 1, 2$, sont minorées. Donc leurs somme

$$(f_1 + f_2)(X) = \frac{1}{2} {}^t X (A_1 + A_2) X - {}^t (B_1 + B_2) X,$$

est minorée. Ainsi, $B_1 + B_2 \in \text{Im}(A_1 + A_2)$. On conclut que $\text{Im}(A_1 + A_2) \subset \text{Im}(A_1 + A_2)$. On raisonne ensuite par orthogonalité pour la dernière égalité.

Exercice sans préparation 5

Soit n un entier positif non nul. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires sur Ω indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé, on ordonne les valeurs $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$:

$$X_{i_1}(\omega) \leq X_{i_2}(\omega) \leq \dots \leq X_{i_n}(\omega)$$

où $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ est une permutation des indices $\{1, 2, \dots, n\}$ (qui dépend de ω) avec la convention que si $X_{i_k}(\omega) = X_{i_{k+1}}(\omega)$ pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ alors $i_k < i_{k+1}$.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose alors $Y_k(\omega) = X_{i_k}(\omega)$. On définit ainsi une variable aléatoire Y_k en faisant varier $\omega \in \Omega$.

1. Donner un code python qui simule la variable aléatoire Y_k .
Indication : On pourra utiliser la commande `np.sort()` qui trie un tableau par ordre croissant.
2. Déterminer la fonction de répartition de Y_k . Justifier que Y_k est une variable à densité et donner une densité de Y_k .

Solution :

```
1. import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametres
n = 100 # Taille de l'échantillon
num_samples = 1000 # Nombre de simulations

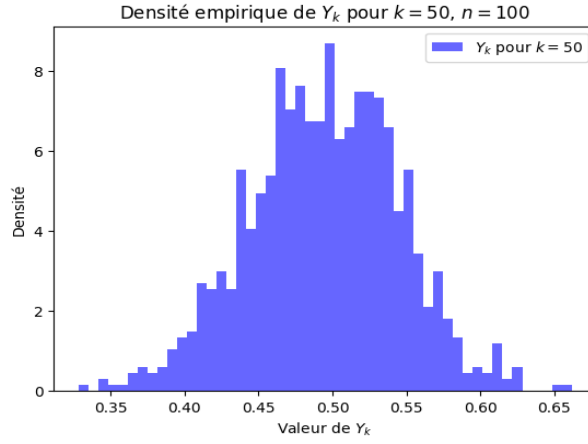
# Generer des échantillons de la loi uniforme
samples = np.random.uniform(0, 1, (num_samples, n))

# Trier les échantillons pour obtenir les statistiques d'ordre
order_stats = np.sort(samples, axis=1)

# Afficher les statistiques d'ordre pour une simulation
print("Statistiques d'ordre pour un échantillon :")
print(order_stats[0])

# Tracer la densité empirique des statistiques d'ordre
k = 50 # Indice de la statistique d'ordre Y_k
plt.hist(order_stats[:, k - 1], bins=50, density=True, alpha=0.6,
color='b', label=f'$Y_k$ pour $k = {k}$')

# Ajouter des labels et une légende
plt.title(f"Densité empirique de $Y_k$ pour $k = {k}$, $n = {n}$")
plt.xlabel("Valeur de $Y_k$")
plt.ylabel("Densité")
plt.legend()
plt.show()
```



2. Pour $t \in [0, 1]$, on a $F_{Y_k}(t) = \mathbb{P}(X_i \leq t \text{ pour au moins } k \text{ indices } i) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \mathbb{P}(X_1 \leq t)^j \mathbb{P}(X_1 > t)^{n-j}$. Donc

$$F_{Y_k}(t) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}$$

$$f_{Y_k}(x) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (jx^{j-1}(1-x)^{n-j} - (n-j)x^j(1-x)^{n-j-1}), \quad x \in [0, 1].$$

$$= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} jx^{j-1}(1-x)^{n-j} - \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (n-j)x^j(1-x)^{n-j-1}.$$

Pour la première somme, notons que :

$$\binom{n}{j} j = n \binom{n-1}{j-1}.$$

Ainsi la somme s'écrit :

$$\sum_{j=k}^n n \binom{n-1}{j-1} x^{j-1} (1-x)^{n-j} = n \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i}$$

en posant $i = j - 1$. Pour la seconde somme, notons que :

$$\binom{n}{j} (n-j) = n \binom{n-1}{j}.$$

Ainsi, la somme devient :

$$\sum_{j=k}^n n \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-j-1} = n \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i}$$

en posant $i = j$. En combinant les deux sommes on obtient

$$f_{Y_k}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

SUJET Maths Approfondies 6

Exercice principal 6

Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que le nombre π est irrationnel.

On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\pi = \frac{p}{q}$.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale P_n et l'intégrale I_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin(t) dt.$$

1. **Question de cours :** Donner la définition d'une somme de Riemann et préciser un résultat sur sa convergence.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.
 - (a) Déterminer explicitement les coefficients du polynôme P_n .
 - (b) Écrire une fonction Python, qui prend en argument un entier naturel non nul n et l'entier q défini dans l'énoncé, et renvoie une valeur approchée de I_n .
 - (c) Montrer que $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
 - (d) En déduire que $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$.
 - (e) Conclure que $I_n \in \mathbb{N}^*$.
3. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. Conclure.

Solution :

1. Programme de mathématiques approfondies 1ère année p12.

2. (a) À l'aide de la formule du binôme de Newton, d'un changement d'indice et en remarquant que $\binom{n}{k-n} = \binom{n}{2n-k}$:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-q)^{n-k} p^k x^{2n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} \binom{n}{k-n} (-q)^{k-n} p^{2n-k} x^k = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k,$$

$$\text{où } a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ \frac{1}{n!} \binom{n}{k-n} (-q)^{k-n} p^{2n-k} & \text{si } k \in \llbracket n, 2n \rrbracket \end{cases}.$$

- (b) Une valeur approchée de I_n peut être obtenue par la somme de Riemann :

$$\frac{q^n \pi}{N n!} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k\pi}{N}\right)^n \left(\pi - \frac{k\pi}{N}\right)^n \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right).$$

```
import numpy as np
```

```
def Integrale(n,q):
```

```
    N=1000
```

```
    X=[k**n*(np.pi-k*np.pi/N)**n*np.sin(k*np.pi/N) for k in range(N-1)]
```

```
    return q**n*(np.pi/N)**(n+1)*sum(X)/np.prod(range(1,n+1))
```

- (c) D'après la formule de Taylor pour les fonctions polynomiales, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$:

$$P_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} \binom{n}{k-n} (-q)^{k-n} p^{2n-k} = \binom{k}{n} \binom{n}{k-n} (k-n)! (-q)^{k-n} p^{2n-k} \in \mathbb{Z}.$$

- (d) On remarque que : $P_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = P_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant k fois et après évaluation en 0, on obtient :

$$(-1)^k P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = P_n^{(k)}(0),$$

d'où $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$.

- (e) Sur $\left[0, \frac{p}{q}\right]$, P_n et $\sin$ sont continues, positives et ne sont pas les fonctions nulles donc : $I_n > 0$.

La fonction P_n est polynomiale de degré $2n$. Les fonctions P_n et $\sin$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{p}{q}\right]$, à l'aide de $(2n+1)$ intégrations par parties et en utilisant le fait que $P_n^{(2n+1)} = 0$, on trouve :

$$I_n = \left[\sum_{k=0}^n \left(\cos(t) (-1)^{k+1} P_n^{(2k)}(t) + \sin(t) (-1)^{k+1} P_n^{(2k+1)}(t) \right) \right]_0^{\frac{p}{q}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(P_n^{(2k)}\left(\frac{p}{q}\right) - P_n^{(2k)}(0) \right).$$

Ainsi, on conclut que $I_n \in \mathbb{N}^*$.

3. La fonction $t \mapsto t(p - qt)$ est positive sur $\left[0, \frac{p}{q}\right]$ et admet un maximum lorsque $t = \frac{p}{2q}$ qui vaut $\frac{p^2}{4q}$. Ainsi, pour tout $t \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$:

$$|P_n(t) \sin(t)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n.$$

Par croissance de l'intégrale : $|I_n| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n \frac{p}{q}$. Or, par croissances comparées, $\frac{1}{n!} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc par théorème d'encadrement, la suite (I_n) converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4. Vu la question précédente, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|I_n| \leq \frac{1}{2}$, ce qui est en contradiction avec la question 2e, où l'on a prouvé que $I_n \in \mathbb{N}^*$. On conclut donc à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que π est irrationnel.

Exercice sans préparation 6

1. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux disjoints d'un espace probabilisé. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.
 2. A l'aide d'une suite de variables aléatoires, donner un exemple d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints qui ne soit pas un système complet d'événements.
 3. Proposer une variable aléatoire réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(A_n)$
 4. Soit X une variable aléatoire indépendante d'elle-même. Montrer qu'elle est constante.
-

Solution :

1. la sigma additivité assure que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge donc son terme générale tend vers 0.
2. $A_n = "$ avoir un premier pile au $(n+1)$ tirage suivit d'un pile au $(n+2)$ ième tirage.
3. $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$
4. On utilise les fonctions de répartitions : Soit F la fonction de répartition de X . Alors $F(X) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{X \leq x\}) = \mathbb{P}(X \leq x)^2 = F(x)^2$. Alors $F(x) = 0$ ou $F(x) = 1$ pour tout réel x . On en déduit qu'il existe un réel a tel que $P(X = a) = 1$ et X est une constante égale à a .

SUJET Maths Approfondies 7

Exercice principal 7

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

On note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance, si elle existe, d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soient un entier $n \geq 2$, un réel $p \in]0, 1[$ et des variables aléatoires A_n, B_n , et C_n , mutuellement indépendantes, suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

On définit T_n le polynôme aléatoire :

$$T_n = A_n x^2 + B_n x + C_n,$$

c'est-à-dire que, pour tout $\omega \in \Omega$, $T_n(\omega)(x)$ est le polynôme $A_n(\omega)x^2 + B_n(\omega)x + C_n(\omega)$.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction G_n par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_n = k) t^k.$$

1. **Question de cours :** Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Calculer $G_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Exprimer, si elles existent, les espérances $\mathbb{E}(A_n)$, $\mathbb{E}(A_n(A_n - 1))$, $\mathbb{E}(A_n(A_n - 1)(A_n - 2))$ et $\mathbb{E}(A_n(A_n - 1)(A_n - 2)(A_n - 3))$ en fonction de G_n et de ses dérivées.
4. Justifier que la famille $(1, x, x(x - 1), x(x - 1)(x - 2), x(x - 1)(x - 2)(x - 3))$ est une base de $\mathbb{R}_4[x]$.
5. Montrer que $\mathbb{E}(A_n^4) = n^4 p^4 + o(n^4)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
On définit la variable aléatoire $\Delta_n = B_n^2 - 4A_n C_n$.
6. Calculer, si elle existe, $\mathbb{E}(\Delta_n)$, ainsi que sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.
7. Montrer que $\mathbb{V}(B_n^2) = o(n^4)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
8. Montrer que $\mathbb{P}(\Delta_n \geq 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; que peut-on conclure quant à l'existence de racines réelles de T_n ?

Solution :

1. Programme de mathématiques approfondies de première année p24.
2. Comme, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(A_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1 - p)^{n-k} = (1 - p + pt)^n.$$

3. La fonction G_n est polynomiale de degré n donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Si $k > n$, alors $G^{(k)}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et si $k \leq n$, $G^{(k)}(t) = p^k n(n-1) \cdots (n-k+1) (1-p+pt)^{n-k}$.
On remarque que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G^{(k)}(1) = k! \binom{n}{k} p^k$, avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k > n$.
Les variables $A_n, A_n(A_n - 1), A_n(A_n - 1)(A_n - 2)$ et $A_n(A_n - 1)(A_n - 2)(A_n - 3)$ sont bornées, donc admettent une espérance. Par dérivations successives de G_n et à l'aide du théorème de transfert, on obtient :

$$\begin{aligned} G'_n(t) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(A_n = k) t^{k-1} & \text{et } G'_n(1) &= \mathbb{E}(A_n) \\ G''_n(t) &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \mathbb{P}(A_n = k) t^{k-2} & \text{et } G''_n(1) &= \mathbb{E}(A_n(A_n - 1)) \end{aligned}$$

$$G_n^{(3)}(t) = \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)\mathbb{P}(A_n = k)t^{k-3} \quad \text{et } G_n^{(3)}(1) = \mathbb{E}(A_n(A_n-1)(A_n-2))$$

$$G_n^{(4)}(t) = \sum_{k=4}^n k(k-1)(k-2)(k-3)\mathbb{P}(A_n = k)t^{k-4} \quad \text{et } G_n^{(4)}(1) = \mathbb{E}(A_n(A_n-1)(A_n-2)(A_n-3))$$

4. La famille $(1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3))$ est composée de 5 vecteurs de $\mathbb{R}_4[x]$. Puis, si $(\lambda_j)_{j \in \llbracket 1, 5 \rrbracket} \in \mathbb{R}^5$ est telle que

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x(x-1) + \lambda_4 x(x-1)(x-2) + \lambda_5 x(x-1)(x-2)(x-3) = 0,$$

en évaluant successivement en 0, 1, 2, 3, on trouve $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

La famille est donc libre c'est bien une base de $\mathbb{R}_4[x]$.

5. Vu la question précédente et comme $x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$: il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ tels que

$$x^4 = \alpha x(x-1)(x-2)(x-3) + \beta x(x-1)(x-2) + \gamma x(x-1) + \delta x + \varepsilon$$

En regardant le terme de plus haut degré, on obtient $\alpha = 1$. Par linéarité de l'espérance on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_n^4) &= \mathbb{E}(A_n(A_n-1)(A_n-2)(A_n-3)) + \beta \mathbb{E}(A_n(A_n-1)(A_n-2)) + \gamma \mathbb{E}(A_n(A_n-1)) + \delta \mathbb{E}(A_n) + \varepsilon. \\ &= G_n^{(4)}(1) + \beta G_n^{(3)}(1) + \gamma G_n''(1) + \delta G_n'(1) + \varepsilon \end{aligned}$$

Puisque $G_n^{(k)}(1) = n(n-1) \cdots (n-k+1)p^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k p^k$, on en déduit que, au voisinage de $+\infty$:

$$G_n^{(4)}(1) = n^4 p^4 + o(n^4) \quad \text{et} \quad G_n^{(i)}(1) = o(n^4) \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Finalement $\mathbb{E}(A_n^4) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^4 p^4$.

6. La variable Δ_n étant bornée, elle admet une espérance. Par indépendance de A_n et C_n on peut écrire : $\mathbb{E}(\Delta_n) = \mathbb{E}(B_n^2) - 4\mathbb{E}(A_n)\mathbb{E}(C_n)$. Puis : $\mathbb{E}(B_n^2) = \mathbb{E}(B_n)^2 + \mathbb{V}(B_n) = n^2 p^2 + np(1-p)$.

Ainsi : $\mathbb{E}(\Delta_n) = np(1-p) - 3n^2 p^2$, donc $\mathbb{E}(\Delta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

7. On a $\mathbb{V}(B_n^2) = \mathbb{E}(B_n^4) - \mathbb{E}(B_n^2)^2$. On sait déjà que, au voisinage de $+\infty$:

$$\mathbb{E}(B_n^2) = np(1-p) + n^2 p^2 = n^2 p^2 + o(n^2)$$

donc $\mathbb{E}(B_n^2)^2 = n^4 p^4 + o(n^4)$.

Comme A_n et B_n suivent la même loi, la question 5 donne, au voisinage de $+\infty$:

$$\mathbb{V}(B_n^2) = n^4 p^4 + o(n^4) - n^4 p^4 + o(n^4) = o(n^4).$$

8. Comme $\mathbb{E}(\Delta_n) < 0$ à partir d'un certain rang, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(\Delta_n \geq 0) = \mathbb{P}(\Delta_n - \mathbb{E}(\Delta_n) \geq -\mathbb{E}(\Delta_n)) \leq \mathbb{P}(|\Delta_n - \mathbb{E}(\Delta_n)| \geq -\mathbb{E}(\Delta_n)) \leq \frac{\mathbb{V}(\Delta_n)}{\mathbb{E}(\Delta_n)^2}.$$

Or, par indépendance de B_n^2 et $A_n C_n$, et de A_n^2 et C_n^2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\Delta_n) &= \mathbb{V}(B_n^2 - 4A_n C_n) = \mathbb{V}(B_n^2) + 16\mathbb{V}(A_n C_n) \\ &= o(n^4) + 16\mathbb{E}(A_n^2 C_n^2) - 16\mathbb{E}(A_n C_n)^2 \\ &= o(n^4) + 16\mathbb{E}(A_n^2) \mathbb{E}(C_n^2) - 16\mathbb{E}(A_n)^2 \mathbb{E}(C_n)^2 \\ &= o(n^4) + 16(n^2 p^2 + o(n^2))(n^2 p^2 + o(n^2)) - 16(np)^2 (np)^2 \\ &= o(n^4). \end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leq \mathbb{P}(\Delta_n \geq 0) \leq \frac{o(n^4)}{9n^4 p^4 + o(n^4)},$$

et on conclut par encadrement.

Ainsi, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\mathbb{P}(\Delta_n < 0)$ tend vers 1, autrement dit, la probabilité que T_n n'admette aucune racine réelle tend vers 1.

Exercice sans préparation 7

1. Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = n^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{n}} (\sin x)^\beta dx \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0.$$

2. Donner une fonction Python prenant en paramètre β et renvoyant une valeur approchée de u_1

Solution :

1. On utilise l'encadrement de la fonction sinus pour x assez petit. En effet, nous avons par convexité $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (illustrer d'un dessin). Donc, pour $\beta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $n \geq 2$,

$$0 \leq \left(\frac{x}{2}\right)^\beta \leq (\sin x)^\beta \leq x^\beta, \quad \text{pour tout } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}.$$

D'où

$$0 \leq \frac{1}{2^\beta} \frac{\pi^{\beta+1}}{\beta+1} \frac{1}{n^{\beta+1-\alpha}} \leq u_n \leq \frac{\pi^{\beta+1}}{\beta+1} \frac{1}{n^{\beta+1-\alpha}},$$

Les résultats sur les séries de Riemman et le critère de comparaison impliquent que la série de terme général u_n est convergente si et seulement si $\beta > \alpha$.

2.

```
import numpy as np

def valeur(beta):
    n=500
    S=0
    for k in range(n):
        S+=np.sin((k*np.pi)/(2*n))**beta
    return np.pi*S/(n*2)
```

SUJET Maths Approfondies 8

Exercice principal 8

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_{k,n} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k,n} = a_{k-1,n} - a_{k,n}$.

Dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on admet que l'on définit une variable aléatoire X_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = u_{k,n}.$$

- Question de cours :** Énoncer la formule de changement de variable dans une intégrale définie sur un intervalle quelconque en précisant les hypothèses.
- Montrer que X_n admet une espérance et exprimer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction des termes de la suite $(a_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$.
- Pour tout réel t et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_0(t) = 0$ et $f_p(t) = 1 - (1 - e^{-t})^p$.
 - Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que l'intégrale $I_p = \int_0^{+\infty} f_p(t) dt$ est convergente.
 - Montrer que : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}$.
 - En déduire que : $\ln(n) \leq I_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$.
- Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geq 0, \quad g_n(t) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^t}\right)^{n-1}.$$

Montrer que pour tout entier $m \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^m a_{k,n} \leq \int_0^m g_n(t) dt \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_{k,n}.$$

- Démontrer que : $\mathbb{E}(X_n) - 1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leq \mathbb{E}(X_n)$ et en déduire un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

- Programme de mathématiques approfondies de première année p 19.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N kP(X_n = k) &= \sum_{k=1}^N k u_{k,n} = \sum_{k=1}^N k(a_{k-1,n} - a_{k,n}) = \sum_{k=1}^N k a_{k-1,n} - \sum_{k=1}^N k a_{k,n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) a_{k,n} - \sum_{k=1}^N k a_{k,n} = a_{0,n} + \sum_{k=1}^{N-1} a_{k,n} - N a_{N,n} = \sum_{k=0}^{N-1} a_{k,n} - N a_{N,n}. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^k} = 0$, $a_{k,n} \sim \frac{n-1}{2^k}$. La série géométrique de terme général $\frac{n-1}{2^k}$ étant convergente, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que la série de terme général $a_{k,n}$ converge.

Et, $N a_{N,n} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} (n-1) \frac{N}{2^N}$, donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} N a_{N,n} = 0$ par croissances comparées. On en déduit que la série de terme général $kP(X_n = k)$, converge et que la variable aléatoire X_n admet une espérance. De plus,

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}.$$

3. (a) La résultat est évident quand $p = 0$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_p est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$, $f_p(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} pe^{-t}$.

Ainsi, $f_p(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. Par comparaison de fonctions positives, on conclut que $\int_0^{+\infty} f_p$ converge. En particulier, l'intégrale I_p est une intégrale convergente.

- (b) Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{p+1} - I_p &= \int_0^{+\infty} \left((1 - e^{-t})^p - (1 - e^{-t})^{p+1} \right) dt = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-t})^p (1 - (1 - e^{-t})) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - e^{-t})^p dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{p+1} (1 - e^{-t})^{p+1} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{p+1} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-t})^{p+1} - (1 - 1)^{p+1} \right) \\ &= \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

Par sommation pour p de 0 à $n-2$ et par télescopage, on obtient : $I_{n-1} - I_0 = \sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1}$ et donc

$$I_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

- (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$. En additionnant membre à membre, on obtient

$$I_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n)$$

et

$$I_{n-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t} = 1 + \int_1^{n-1} \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n-1).$$

Donc, $\ln(n) \leq I_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$.

4. Soit $m \geq 2$. La fonction $t \mapsto 2^{-t}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ puis la fonction $t \mapsto (1 - 2^{-t})^{n-1}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et finalement, la fonction g_n est décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc,

$$\int_0^m g_n(t) dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} g_n(t) dt \leq \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} g_n(k) dt = \sum_{k=0}^{m-1} g_n(k) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{k,n}$$

et

$$\int_0^m g_n(t) dt = \sum_{k=1}^m \int_{k-1}^k g_n(t) dt \geq \sum_{k=1}^m \int_{k-1}^k g_n(k) dt = \sum_{k=1}^m a_{k,n}.$$

Donc, pour tout $m \geq 2$, $\sum_{k=1}^m a_{k,n} \leq \int_0^m g_n(t) dt \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_{k,n}$.

5. On remarque que $\int_0^{+\infty} g_n$ est convergente pour les mêmes raisons que $\int_0^{+\infty} f_{n-1}$ (en remplaçant e par 2). En passant à la limite quand m tend vers $+\infty$ dans la question précédente, on obtient :

$$\mathbb{E}(X_n) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n} \leq \int_0^{+\infty} g_n(v) dv \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} = \mathbb{E}(X_n).$$

On effectue le changement de variable $u = v \ln(2)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone, l'intégrale étant convergente, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g_n(v) \, dv &= \int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - e^{-v \ln(2)} \right)^{n-1} \right) \, dv = \int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - e^{-u} \right)^{n-1} \right) \frac{du}{\ln(2)} \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{+\infty} f_{n-1}(u) \, du.\end{aligned}$$

Ainsi : $\int_0^{+\infty} g_n(v) \, dv = \frac{I_{n-1}}{\ln(2)}$ et, pour tout $n \geq 2$: $\mathbb{E}(X_n) - 1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leq \mathbb{E}(X_n)$.

Puis, pour $n \geq 2$, d'après les questions 2 et 3b :

$$\frac{\ln(n)}{\ln(2)} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} \leq \frac{\ln(n-1)}{\ln(2)} + 1 + \frac{1}{\ln(2)}.$$

On conclut alors, quitte à diviser par $\ln(n)$ et utiliser le théorème d'encadrement, que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(2)}.$$

Exercice sans préparation 8

Soit δ une application linéaire de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\text{Pour tout } (f, g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f).$$

- (a) Montrer que δ s'annule sur les fonctions constantes.
- (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\text{Pour tout } (f, g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \delta(f'(\alpha)g - g'(\alpha)f)(\alpha) = 0.$$

Ind : Utiliser le Lemme d'Hadamard :

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = 0$ alors il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = (x - \alpha)^2 \psi(x)$.

- (c) En déduire qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\text{Pour tout } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \delta(f) = uf'.$$

Solution :

On notera $\mathbf{C}$ pour la fonction constante de valeur c , et P_1 pour la fonction $x \mapsto x$.

- (a) On a

$$\delta(\mathbf{1}) = \delta(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) = \mathbf{1}\delta(\mathbf{1}) + \mathbf{1}\delta(\mathbf{1}) = 2\delta(\mathbf{1})$$

donc $\delta(\mathbf{1}) = 0$, et par linéarité $\delta(\mathbf{C}) = 0$ pour toute fonction constante $\mathbf{C}$.

- (b) Pour le voir on pose :

$$h(x) := f'(\alpha)g(x) - g'(\alpha)f(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) = h(x) - h(\alpha).$$

Alors, $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = 0$, donc il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = (x - \alpha)^2 \psi(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \delta(\varphi)(\alpha) &= \delta((x - \alpha)^2 \psi)(\alpha) \\ &= (x - \alpha)^2(\alpha) \delta(\psi)(\alpha) + \psi(\alpha) \delta((x - \alpha)^2)(\alpha) \\ &= 2((x - \alpha)(\alpha)) \delta(x - \alpha)(\alpha) \psi(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit, par linéarité, $\delta(h)(\alpha) = \delta(h - h(\alpha))(\alpha) = \delta(\varphi)(\alpha) = 0$. C'est à dire $\delta(f'(\alpha)g - g'(\alpha)f)(\alpha) = 0$.

- (c) On déduit de l'étape précédente que

$$\text{Pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \delta(f'(\alpha) \exp - \exp(\alpha)f)(\alpha) = 0,$$

donc par linéarité de δ , pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\delta(f)(\alpha) = \exp(-\alpha) \delta(\exp)(\alpha) f'(\alpha)$. Ce qui est bien le résultat annoncé, avec $u = \exp(-\cdot) \delta(\exp) \in \mathcal{C}^\infty$.

SUJET Maths Approfondies 9

Exercice principal 9

Soit n un entier naturel non nul.

On définit, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, \quad p_{i,j} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. **Question de cours :** Rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.
2. Déterminer la valeur du réel α .
3. À l'aide de la variable aléatoire $Z = X - 1$, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient à la i -ème ligne et à la j -ème colonne vaut :

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{[X=j]}([Y = i]).$$

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
Calculer la valeur de b_{ij} pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$.
5. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et renvoie la matrice B .
6. Montrer que B est la matrice d'un projecteur et déterminer son rang.
7. Justifier que B est diagonalisable et déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $B = PDP^{-1}$.

Solution :

1. Programme de mathématiques approfondies première année - p 22.
2. Pour que la famille $(p_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2}$ définisse la loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y , il suffit de vérifier que $p_{i,j}$ est positif pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, et que :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2} p_{i,j} = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} = \alpha \sum_{i'=0}^n \binom{n}{i'} \sum_{j'=0}^n \binom{n}{j'}.$$

Pour calculer ces deux sommes on utilise la formule du binôme de Newton. On obtient :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2} p_{i,j} = \alpha (2^n)^2 = \alpha 4^n.$$

On en déduit : $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2} p_{i,j} = 1 \iff \alpha = \frac{1}{4^n}.$

Et pour cette valeur de α , on a bien $p_{i,j} \geq 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$. Ainsi $\alpha = \frac{1}{4^n}$.

3. On a : $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, et pour tout $k \in Z(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k + 1).$$

La famille $((Y = j))_{j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k + 1) &= \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}((X = k + 1) \cap (Y = j)) = \frac{1}{4^n} \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

On reconnaît une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Ainsi : $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(Z) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{4}$. Or $X = Z + 1$, donc par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) + 1 = \frac{n}{2} + 1$, et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z + 1) = \mathbb{V}(Z) = \frac{n}{4}$.

4. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$. Notons que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=j)}(Y = i)$ existe bien car $\mathbb{P}(X = j) > 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, d'après la loi de X trouvée à la question 3.

Puis, par un raisonnement analogue à celui fait pour déterminer la loi de X , on obtient : $\forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{j-1}$. Puis, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$:

$$\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1} \times \frac{1}{2^n} \binom{n}{j-1} = \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)).$$

Ceci montre que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

On peut donc écrire :

$$b_{i,j} = \mathbb{P}_{(X=j)}(Y = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}.$$

5.

```
import numpy as np

def SimulationB(n):
    B = np.zeros((n+1,n+1))
    for i in range(n+1):
        B[i,:] = np.prod(range(1,n+1))/2**n/np.prod(range(1,i+1))
                                                    /np.prod(range(1,n-i+1))

    return B
```

6. On a, d'après la question précédente :

$$B = ((\mathbb{P}(Y = i)))_{1 \leq i, j \leq n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y = 1) & \mathbb{P}(Y = 1) & \cdots & \mathbb{P}(Y = 1) \\ \mathbb{P}(Y = 2) & \mathbb{P}(Y = 2) & \cdots & \mathbb{P}(Y = 2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbb{P}(Y = n+1) & \mathbb{P}(Y = n+1) & \cdots & \mathbb{P}(Y = n+1) \end{pmatrix}.$$

Toutes les colonnes de B sont identiques et la première colonne n'est pas nulle puisque $\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(Y = i) = 1$.

Ainsi : B est de rang 1.

7. En posant $C = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y = 1) \\ \mathbb{P}(Y = 2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(Y = n+1) \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Par calcul matriciel $B = CL$.

On a alors $B^2 = (CL)(CL) = C(LC)L$. Or :

$$LC = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(Y = i) = 1$$

puisque la famille $((Y = i))_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est un système complet d'événements.

Finalement $B^2 = B$ et on conclut que B est la matrice d'un projecteur.

8. La question précédente permet d'écrire $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Im}(B) \oplus \text{Ker}(B)$. Dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à B est diagonale. Pour construire P , on peut utiliser des bases de $\text{Im}(B)$ et $\text{Ker}(B)$ obtenues en utilisant :

$$\text{Im}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y = 1) \\ \mathbb{P}(Y = 2) \\ \mathbb{P}(Y = 3) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbb{P}(Y = n+1) \end{pmatrix} \right), \quad \text{Ker}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice sans préparation 9

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sin u_n \quad \text{et la condition initiale} \quad u_0 = \alpha \in]0, 1[.$$

1. Déterminer la nature de la série de terme général v_n , où $v_n = u_n - u_{n+1}$.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n^3 .
3. Quelle est la nature de la série de terme général u_n^2 ? En déduire la nature de la série de terme général u_n .

Solution :

1. La série de terme général v_n est une série télescopique. Elle a même nature que (u_n) .
Par une simple récurrence, on montre que $u_n \in]0, 1[$ puis $u_{n+1} - u_n = (\sin u_n) - u_n < 0$ donc la suite est strictement décroissante. La suite $(u_n)_n$ est décroissante, minorée par 0 donc convergente et sa limite $l \geq 0$ (par analyse de fonction, $f(x) = \sin(x) - x$ est négative et strictement décroissante sur $[0, 1]$).
Maintenant la continuité de la fonction sinus permet de conclure ($\sin l = l$) et on conclut que $l = 0$.

Donc la série de terme général v_n est convergente.

2. On commence par faire un développement limité de la fonction sinus en 0 jusqu'à l'ordre 3 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc, pour tout n entier,

$$v_n = u_n - u_{n+1} = u_n - \sin u_n = \frac{1}{6} u_n^3 (1 + f(n)) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0.$$

On conclut que $0 \leq u_n^3 \underset{+\infty}{\sim} 6v_n$ d'où les séries de terme général u_n^3 et v_n sont de même nature. Or $\sum v_n$ converge donc la série de terme général u_n^3 converge.

3. La série de terme général w_n , où $w_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$, est une série télescopique, on commence par calculer la suite des sommes partielles, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_p = \sum_{n=0}^p w_n = \sum_{n=0}^p \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \ln(u_0) - \ln(u_{p+1}) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc la série de terme général w_n est divergente.

On commence par faire un développement limité de la fonction $\ln$ en 0 jusqu'à l'ordre 2 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc, pour tout n entier,

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{u_n}{\sin u_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{6}u_n^2 + o(u_n^2)}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{6}u_n^2 + o(u_n^2)\right) = \frac{1}{6}u_n^2 + o(u_n^2). \end{aligned}$$

On conclut que $0 \leq u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} 6w_n$ d'où les séries de terme général u_n^2 et w_n sont de même nature. Or $\sum w_n$ diverge donc la série de terme général u_n^2 diverge.

Par minoration, on sait que $0 \leq u_n^2 \leq u_n$ car $0 < u_n < 1$. Or la série de terme général u_n^2 diverge donc la série de terme général u_n diverge.

SUJET Maths Approfondies 10

Exercice principal 10

Soit n un entier naturel non nul.

Dans la suite, I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tA désigne la transposée d'une matrice A .

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot; \cdot \rangle$, défini par :

$$\forall (U, V) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \quad \langle U; V \rangle = {}^tUV.$$

Soient $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant l'égalité ${}^tOO = I_n$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

On définit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $Y = OX = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$, ainsi que les variables aléatoires suivantes :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2.$$

1. **Question de cours :** Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales de paramètres distincts.
2. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k et Y_k ont même loi.

Dans la suite, on admet que les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes et on choisit la matrice O dont tous les coefficients de la dernière ligne sont égaux à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. Vérifier que : $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2$.
4. Dédire de ce qui précède que $\bar{X}$ et S_n^2 sont indépendantes.
5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'intégrale $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} dt$ converge et vaut π .
 (b) Déterminer la loi de $X_1^2 + X_2^2$.
 (c) En déduire la loi de S_{2n+1}^2 .

Solution :

1. Programme de mathématiques approfondies deuxième année p 16.
2. On note C_k la k -ième colonne de O pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient à la ligne i colonne j de la matrice tOO vaut ${}^tC_i C_j = \langle C_i; C_j \rangle$. Cette matrice étant égale à l'identité, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ ne contient pas le vecteur nul et est orthonormale, donc elle est libre. Puisqu'elle est formée de n vecteurs, on conclut que c'est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par calcul matriciel, $Y_i = \sum_{j=1}^n O_{i,j} X_j$ et, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire $O_{i,j} X_j$ suit une loi $\mathcal{N}(0, O_{i,j}^2)$ par transformation affine. Puis, les variables aléatoires X_j sont mutuellement indépendantes donc les variables $O_{i,j} X_j$ le sont aussi et par stabilité de la loi normale pour la somme, on conclut :
 $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sum_{j=1}^n O_{i,j}^2\right) = \mathcal{N}(0, 1)$, puisque $\sum_{j=1}^n O_{i,j}^2 = 1$ puisque O est inversible d'inverse $O^{-1} = {}^tO$, donc on a aussi $O^t O = I_n$. X et Y suivent donc la même loi.

4. Par calcul :

$$\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 = \sum_{k=1}^n (X_k^2 - 2\bar{X}X_k + \bar{X}^2) = \sum_{k=1}^n X_k^2 - n\bar{X}^2.$$

Le choix fait sur O implique : $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k = \sqrt{n} \bar{X}$.

Enfin, on remarque que : $\sum_{k=1}^n Y_k^2 = {}^t Y Y = {}^t X^t O O X = {}^t X X = \sum_{k=1}^n X_k^2$.

Finalement : $S_n^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n X_k^2 - n\bar{X}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n Y_k^2 - Y_n^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2$.

5. Avec les questions précédentes et le fait que les variables Y_k soient indépendantes pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient :

$\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_n$ est indépendante de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2 = S_n^2$.

6. (a) $\frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x t}}$ et $\frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \underset{t \rightarrow x^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x(x-t)}}$, donc, par comparaison à une intégrale de Riemann, les fonctions étant positives, on conclut que l'intégrale converge.

À l'aide du changement de variable $t = \frac{x}{2}(1 + \cos(u))$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, \pi[$ dans $]0, x[$ et strictement monotone, on obtient : $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} dt = \int_0^\pi 1 du = \pi$.

(b) Déterminons la loi de X^2 où X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Si $x \geq 0$: $F_{X^2}(x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$.

Si $x < 0$, $F_{X^2}(x) = 0$.

Ainsi, la fonction F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. On conclut que

X^2 est une variable aléatoire à densité et une densité est $f_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{et } x > 0 \end{cases}$.

Comme la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} dt$ est définie et constante, on conclut que

$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1^2}(t) f_{X_2^2}(x-t) dt$ existe et est continue sauf éventuellement en 0.

Ainsi, $X_1^2 + X_2^2$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. On

reconnait : $X_1^2 + X_2^2 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

(c) Comme Y a même loi que X , de l'égalité $nS_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2$ on déduit que $(2n+1)S_{2n+1}^2$ a même loi

que $\sum_{k=1}^{2n} X_k^2$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $Z_k = X_{2k-1} + X_{2k}$ de sorte que $(2n+1)S_{2n+1}^2$ a même loi

que $\sum_{k=1}^n Z_k$. Par la question précédente, $Z_k \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $2Z_k \sim \mathcal{E}(1)$ et par indépendance des Z_k on

obtient : $2(2n+1)S_{2n+1}^2 \sim \gamma(n)$. Par transformation affine, S_{2n+1}^2 est une variable à densité dont une

densité est : $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2^n (2n+1)^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-2(2n+1)x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Exercice sans préparation 10

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx.$$

1. Justifier l'existence de I .
2. Ecrire un code Python qui renvoie une approximation de I à l'aide de sommes de Riemann.
3. Calculer I .

Solution :

1. $\ln \sin(x)$ est équivalent à $\ln(x)$ en 0 et $\ln(x)$ est intégrable en 0 car une primitive est $x \ln(x) - x$.

```
2. import numpy as np
def f(x):
    return np.log(np.sin(x))
# Parametres
a = 0                # Borne inf
b = np.pi / 2       # Borne sup
n = 10000            # Nombre de sous-intervalles
delta = (b - a) / n   # Largeur de chaque sous-intervalle
# Somme de Riemann
riemann_sum = sum(f(a + i * delta) * delta for i in range(1, n + 1))
print(f"Approximation de l'integrale par la somme de Riemann : {riemann_sum}")
```

Approximation de l'integrale par la somme de Riemann : -1.087960787406043

3. On remarque d'abord que $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)) dx$ puis :

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)) dx = \int_0^{\pi/2} \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(\sin(2x)) \right] dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u)) du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u)) du \right]$$

$$2I = \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u)) du + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u)) du \right] = \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + I$$

$$\text{Donc } I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

SUJET Maths Approfondies 11

Exercice principal 11

1. **Question de cours :** Inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Soient n un entier naturel non nul, $a_1, a_2, \dots, a_n$ n nombres réels et $b_1, b_2, \dots, b_n$ n nombres réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

3. Soient $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini et $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω . Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω , on suppose Y strictement positive. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\frac{X^2}{Y}\right) \geq \frac{\mathbb{E}(|X|)^2}{\mathbb{E}(Y)} \geq \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(Y)}.$$

4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ convexe.

(a) On fixe $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction affine a telle que $a(t) \leq \varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\varphi(t_0) = a(t_0)$.

(b) Soit Z une variable aléatoire à densité d'espérance $\mathbb{E}(Z)$ finie et telle que $\phi(Z)$ admet une espérance finie. Montrer que

$$\varphi(\mathbb{E}(Z)) \leq \mathbb{E}(\varphi(Z)).$$

5. Soient I un intervalle ouvert contenant 0 et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On pose pour $x \in I$:

$$G(x) = \int_0^1 2(1-t)g''(tx)dt.$$

(a) Montrer que pour tout $x \in I$:

$$g(x) - g(0) - xg'(0) = \frac{1}{2}x^2G(x).$$

(b) On suppose que g'' est convexe. Montrer que $G(x) \geq g''(x/3)$

(c) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a

$$(1+x)\ln(1+x) - x \geq \frac{x^2}{2(1+x/3)}.$$

Solution :

1. **Question de cours :** Inégalité de Cauchy-Schwarz. ECG2, p18.

2. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $v = (\frac{a_i}{\sqrt{b_i}})$ et $w = (\sqrt{b_i})$.

3. On applique l'inégalité de la question 2 avec $a_i = X(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i)$ et $b_i = Y(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i)$.

4. (a) On prend $y = a(t)$ la tangente de φ en t_0 .

(b) Si $t_0 = \mathbb{E}(Z)$, on a :

$$\varphi(\mathbb{E}(Z)) = \varphi(t_0) = a(t_0) = a\left(\int t d\mathbb{P}_Z\right) = \int a(t) d\mathbb{P}_Z \leq \int \varphi(t) d\mathbb{P}_Z = \mathbb{E}(\varphi(Z))$$

5. (a) un changement de variable linéaire donne $G(x) = \int_0^x 2(1 - \frac{u}{x})g''(u) \frac{du}{x}$ donc en faisant une iip

$$\frac{x^2}{2}G(x) = \int_0^x (x-u)g''(u) du = [(x-u)g'(u)]_0^x + \int_0^x g'(u) du = g(x) - g(0) - xg'(0)$$

- (b) On remarque que $2(1-t)$ est une densité d'une variable aléatoire T sur $[0, 1]$ avec $\mathbb{E}(T) = 1/3$. On applique 4(b) à la fonction $f(t) = g''(xt)$ qui est convexe :

$$G(x) = \mathbb{E}(g''(xT)) \geq g''(x\mathbb{E}(T)) = g''(x/3)$$

- (c) Résulte de 5(b) avec $g(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$.

Exercice sans préparation 11

Justifier l'existence et déterminer

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^1 (\exp(t) - (a + bt))^2 dt \right].$$

Solution :

1. L'intégrale d'un produit de fonctions continues sur $[-1; +1]$ existe sur ce même segment et par conséquent la quantité $(\cdot | \cdot)$ est bien définie.
 - (a) la symétrie provient de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
 - (b) la linéarité par rapport à la première variable découle essentiellement de la linéarité du passage à la limite (et de la distributivité de la multiplication sur l'addition).
 - (c) Si $f \in E$, alors $f^2 \geq 0$ et donc $(f|f) \geq 0$. Si cette quantité est nulle, f^2 est une fonction continue positive sur $[-1; +1]$ d'intégrale nulle sur ce même segment et est donc nulle sur $[-1; +1]$. f l'est donc aussi. Ceci nous donne le caractère défini positif.

$(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire.

2. Il est évident que $(u|v) = 0$ par un calcul direct. Il reste donc à normer les deux vecteurs u et v pour obtenir une base orthonormée. Ainsi $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}u; \sqrt{\frac{3}{2}}v \right)$ est une b.o.n. de F .
3. D'après les règles de calcul en base orthogonale, et en notant p la projection orthogonale sur F ,

$$p(w) = \frac{(w|u)}{\|u\|^2} u + \frac{(w|v)}{\|v\|^2} v.$$

Une intégration par parties donne, en posant, $I_n = \int_{-1}^1 t^n \exp(t) dt$,

$$I_n = \exp(1) - \frac{(-1)^n}{\exp(1)} - nI_{n-1}.$$

On en déduit que :

$$I_0 = \exp(1) - \frac{1}{\exp(1)}, \quad I_1 = \frac{2}{\exp(1)}, \quad I_2 = \exp(1) - \frac{5}{\exp(1)}$$

et ainsi

$$p(w) = \frac{\exp(1) + \exp(-1)}{2} u + \frac{3}{\exp(1)} w.$$

On remarque que :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^1 (\exp(t) - (a + bt))^2 dt \right] = \inf_{f \in F} \|w - f\|^2 = d(w, F)^2.$$

D'après le cours cette distance est atteinte pour $f = p(w)$ et vaut donc $\|w - p(w)\|^2$. En écrivant que $w = (w - p(w)) + p(w)$ et en remarquant que $w - p(w)$ et $p(w)$ sont orthogonaux, on a alors par Pythagore :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^1 (\exp(t) - (a + bt))^2 dt \right] = \|w\|^2 - \|p(w)\|^2 = \frac{\exp(2) - \exp(-2)}{2} - \frac{(w|u)^2}{\|u\|^2} - \frac{(w|v)^2}{\|v\|^2}.$$

un calcul permet de simplifier cette expression et d'obtenir :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^1 (\exp(t) - (a + bt))^2 dt \right] = 1 - \frac{7}{\exp(1)^2}.$$

SUJET Maths Approfondies 12

Exercice principal 12

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}, \quad \text{et} \quad H : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(\mathbf{p}) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$

Avec la convention $0 \ln 0 = 0$.

On se donne un ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et pour chaque $\mathbf{p} \in \mathcal{Q}$, on note $(\Omega, \mathbb{P}_{\mathbf{p}})$ l'espace de probabilité défini par $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\omega_i) = p_i$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

On note $\mathcal{X} = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$. Pour chaque $X, Y \in \mathcal{X}$, on pose :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X(\omega_i) Y(\omega_i)$$

Si $X \in \mathcal{X}$ et $\mathbf{p} \in \mathcal{Q}$, on note $\mathbb{E}_{\mathbf{p}}(X)$ l'espérance de X relativement à l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}_{\mathbf{p}})$.

On notera $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

1. **Question de cours :** Extrema sur un ensemble fermé borné.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire qui fait de $\mathcal{X}$ un espace euclidien. Expliciter une base orthonormée de $\mathcal{X}$.
3. Notons pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\phi(t) = -t \ln t$ si $t > 0$ et $\phi(0) = 0$. On fixe $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$, montrer qu'il existe $\epsilon \in]0, b]$ tel que

$$\phi(a+t) + \phi(b-t) > \phi(a) + \phi(b)$$

pour tout $t \in]0, \epsilon]$.

4. Déterminer $H(\mathcal{Q})$ l'image de $\mathcal{Q}$ par H .
5. On pose pour $X \in \mathcal{X}$

$$\varphi_X : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_X(\mathbf{p}) = H(\mathbf{p}) + \mathbb{E}_{\mathbf{p}}(X)$$

On note $\mathcal{Q}_X$ le sous ensemble de $\mathcal{Q}$ constitué des $\mathbf{p}$ tel que $\mathbf{p}$ est un maximum global de φ_X .

- (a) Justifier que $\mathcal{Q}_X$ est non vide.
 - (b) Montrer que pour tout $\mathbf{p} \in \mathcal{Q}_X$, on a $\mathbf{p} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.
6. On fixe $X \in \mathcal{X}$ et $\mathbf{p} \in \mathcal{Q}_X$. Soit $\mathcal{Y} = \{Y \in \mathcal{X} \text{ tel que } \mathbb{E}_{\mathbf{u}}(Y) = 0\}$. Pour $Y \in \mathcal{Y}$, on considère

$$\mathbf{t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{t}(s) = \mathbf{p} + sy$$

où $y = (Y(\omega_1), \dots, Y(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Montrer que $\mathcal{Y}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X}$ dont on déterminera la dimension.
- (b) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbf{t}(s) \in \mathcal{Q}$ pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$.
- (c) Calculer $\mathbf{t}'(0)$.

Solution :

1. **Question de cours :** Extrema sur un ensemble fermé borné. ECG2, p19.
2. Les fonctions indicatrices $(\mathbf{1}_{\{\omega_i\}})$ forment une base orthonormée.

3. La fonction $f(t) = \phi(a+t) + \phi(b-t)$ est dérivable sur $]0, b[$ et $f'(t) = -\ln(a+t) + \ln(b-t)$. Pour $\epsilon < \frac{b-a}{2}$, on a $(b-t) - (a+t) = b-a-2t > 0$ si $t \in]0, \epsilon]$. Donc $\ln(b-t) > \ln(a+t)$ et $f'(t) > 0$. On en déduit que $f(t) = \phi(a+t) + \phi(b-t) > f(0) = \phi(a) + \phi(b)$ pour $t \in]0, \epsilon]$.
4. On a clairement $H(\mathbf{p}) \geq 0$ et $H(\mathbf{u}) = \ln(n)$. Par concavité de la fonction $\ln$, on a

$$H(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i = \sum_{i=1}^n p_i \ln \left(\frac{1}{p_i} \right) \leq \ln \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{p_i} \right) = \ln(n)$$

Donc l'image de H est inclus dans $[0, \ln(n)]$.

5. (a) $\mathcal{Q}$ est borné fermé et H est continue, donc il existe des extremas globaux.
- (b) Supposons $p_1 = 0$ et $p_2 > 0$. Soient $\mathbf{q}(t) = (t, p_2 - t, p_3, \dots, p_n)$ et $g(t) = \varphi_X(\mathbf{q}(t))$ pour $t \in]0, p_2[$. On a :

$$g(t) = \phi(t) + \phi(p_2 - t) + X(\omega_1)t + X(\omega_2)(p_2 - t) + \sum_{i=3}^n \dots$$

$$g'(t) = -\ln(t) + \ln(p_2 - t) + X(\omega_1) - X(\omega_2)$$

On voit que $g'(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow 0$, donc $g'(t) > 0$ sur $]0, \epsilon[$ pour ϵ assez petit. On en déduit que

$$\varphi_X(\mathbf{p}) = g(0) < g(\epsilon) = \varphi_X(\mathbf{q}(\epsilon))$$

ce qui contredit la maximalité en $\mathbf{p}$.

6. (a) Comme noyau d'une forme linéaire, $\mathcal{Y}$ est de dimension $n - 1$.
- (b) On a clairement $\sum_{i=1}^n (p_i + sY(\omega_i)) = \sum_i p_i + ns\mathbb{E}_{\mathbf{u}}(Y) = 1 + 0 = 1$. Il suffit juste de s'assurer que $p_i + sY(\omega_i) \geq 0$ pour tout i , ce qui est le cas si $s \in]-\epsilon, \epsilon[$ avec ϵ est assez petit.
- (c) $\mathbf{t}'(0) = y$

Exercice sans préparation 12

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B deux événements. Montrer que :

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Solution :

Si A est un événement, on sait que sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$, et de variance $f(\mathbb{P}(A))$ où f désigne la fonction $x \mapsto x(1-x)$. Alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)\mathbb{E}(\mathbf{1}_B) = \text{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B).$$

En notant ρ le coefficient de corrélation linéaire, on obtient : $|\rho(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)| \leq 1$, ce qui se réécrit :

$|\text{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(\mathbf{1}_A)}\sqrt{\mathbb{V}(\mathbf{1}_B)} = \sqrt{f(\mathbb{P}(A))f(\mathbb{P}(B))}$. Comme $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$ sur le segment $[0, 1]$, on a bien

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Question supplémentaire : Cette inégalité est-elle optimale ?

La valeur $\frac{1}{4}$ est optimale : il suffit de prendre $A = B$ de probabilité $\frac{1}{2}$ pour réaliser l'égalité.

SUJET Maths Approfondies 13

Exercice principal 13

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geq 2$). Nous admettons que les n appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0, 1[$. Nous noterons $q = 1 - p$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes obtenues au téléphone.

Ayant obtenu k personnes, la secrétaire rappelle une deuxième fois, dans les mêmes conditions, chacune des $n - k$ personnes qu'elle n'a pas réussi à joindre la première fois.

Soit Z le nombre total de personnes obtenues lors des deux séries d'appels.

1. **Question de cours** Formule des probabilités totales.
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Donner son espérance et sa variance.
3. Quel est le support de la variable aléatoire Z ?
4. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(Z = 0)$ et $\mathbb{P}(Z = 1)$.
5. Déterminer la loi de Z .
6. **Python** Effectuer une simulation de la loi de Z et déterminer de façon approchée son espérance.

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de première année p22
2. Soit X la v.a. égale au nombre... $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ $\mathbb{E}(X) = np$ et $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.
3. Z est à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$.
4. • $\mathbb{P}(Z = 0) = (q^2)^n = q^{2n}$. En effet chaque personne est appelée 2 fois, avec un résultat négatif à chaque appel.
• Pour la deuxième probabilité, on peut obtenir $Z = 1$ de deux manières différentes :
 - soit on obtient 0 personne sur n lors de la première série et 1 personne sur n lors de la deuxième,
 - soit on obtient 1 personne sur n lors de la première série et 0 personne sur $n - 1$ lors de la deuxième.Ainsi, on a :

$$\mathbb{P}(Z = 1) = (1 - p)^n \times \binom{n}{1} (1 - p)^{n-1} p + \binom{n}{1} (1 - p)^{n-1} p \times (1 - p)^{n-1} = np(1 - p)^{2n-2}(2 - p)$$

5. Sachant que $X = k$, la secrétaire doit rappeler $n - k$ personnes, chacune avec la probabilité p . Ainsi la loi de Y sachant $[X = k]$ suit $\mathcal{B}(n - k, p)$.
Donc on a :

$$\mathbb{P}(Y = l | X = k) = \binom{n - k}{l} p^l \times (1 - p)^{n - k - l}.$$

6.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = s) &= \sum_{l=0}^s \mathbb{P}(Y = l | X = s - l) \times \mathbb{P}(X = s - l) \\ &= \sum_{l=0}^s \binom{n - s + l}{l} p^l \times (1 - p)^{n - s} \times \binom{n}{s - l} p^{s - l} \times (1 - p)^{n - s + l}. \end{aligned}$$

Après quelques simplifications, on obtient

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{(n - s)!} \times p^s \times (1 - p)^{2(n - s)} \sum_{l=0}^s \frac{1}{l!(s - l)!} (1 - p)^l \\ &= \frac{n!}{(n - s)!s!} \times p^s \times (1 - p)^{2(n - s)} \sum_{l=0}^s \frac{s!}{l!(s - l)!} (1 - p)^l \times 1^{s - l} \\ &= \binom{n}{s} p^s \times (1 - p)^{2(n - s)} \times (2 - p)^s. \end{aligned}$$

Si on pose $p = 1 - q$, on obtient :

$$\mathbb{P}(Z = s) = \binom{n}{s} (1 - q)^s \times (q)^{2(n-s)} \times (1 + q)^s = \binom{n}{s} (1 - q^2)^s \times (q^2)^{(n-s)}.$$

Ce changement de notation nous permet de conclure que $Z \sim \mathcal{B}(n, 1 - q^2)$, ce qui paraît logique, vu que chaque personne se voit offrir une deuxième chance. La probabilité d'obtenir une personne vaut donc $1 - q^2$.

7.

```
def simul_Z(p,n):
    A=rd.binomial(1,p,n)
    Z=0
    for k in range(n):
        if A[k]==1:
            Z+=1
        else :
            Z+=rd.binomial(1,p)
    return Z
def espZ(p,n):
    N=10000
    S=0
    for k in range(N):
        S+=simul_Z(p,n)
    return S/N
```

Exercice sans préparation 13

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{(x - \pi/4) \sin x}{\sin x - \cos x} dx.$$

1. Justifier l'existence de I .
2. Ecrire un code Python qui renvoie une approximation de I en utilisant des sommes de Riemann.
3. Montrer que

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{(x - \pi/4) \cos x}{\sin x - \cos x} dx.$$

Solution :

1. On a à priori un problème en $\pi/4$, on constate par un *DL1* $\sin x - \cos x \sim \sqrt{2}(x - \pi/4)$, donc on a un prolongement par continuité en $\pi/4$ et l'intégrale est bien définie.

2.

```
import numpy as np
def f(x):
    numerator = (x - np.pi / 4) * np.sin(x)
    denominator = np.sin(x) - np.cos(x)
    return numerator / denominator
# Parametres
a = -np.pi/4          # Borne inf
b = 3*np.pi / 4       # Borne sup
n = 10000              # Nombre de sous-intervalles
delta = (b - a) / n    # Largeur de chaque sous-intervalle
# Somme de Riemann
riemann_sum = sum(f(a + i * delta) * delta for i in range(1, n + 1))
print(f"Approximation de l'integrale par la somme de Riemann : {riemann_sum}")
```

Approximation de l'integrale par la somme de Riemann : 0.7301642024140733

- 3.

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{(x - \pi/4) \cos x}{\sin x - \cos x} dx$$

$$\text{On a } I - J = \int_0^{\pi/2} (x - \pi/4) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}x \right]_0^{\pi/2} = 0.$$

SUJET Maths Approfondies 14

Exercice principal 14

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et, pour P et Q dans E , on pose :

$$\langle P; Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$$

1. **Question de cours :** que peut-on dire des sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien ?
2. Justifier que l'intégrale ci-dessus est bien définie puis prouver que $(P, Q) \mapsto \langle P; Q \rangle$ est un produit scalaire sur E .
3. Soit φ définie sur E par $\varphi(P)(x) = (x^2 - 1)P''(x) + (2x + 1)P'(x)$.
Justifier que φ est un endomorphisme de E .
On admet pour l'instant qu'en outre, φ est un endomorphisme *symétrique* de E . Ce point sera prouvé à la dernière question de l'exercice.
4. (a) Déterminer les valeurs propres de φ .
(b) On note $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de φ ordonnées par ordre croissant. Soit P_k un vecteur propre associé à λ_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est orthogonale et déterminer le degré de P_k pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
5. Soit $k \geq 1$.
(a) Montrer que P_k possède au moins une racine d'ordre de multiplicité impair dans $] -1, 1[$.
(b) On note $a_1, \dots, a_r$ les racines d'ordre impair de P_k sur $] -1, 1[$ et soit $S = \prod_{i=1}^r (X - a_i)$. En considérant la quantité $\langle S; P_k \rangle$, montrer que P_k a k racines distinctes dans $] -1, 1[$.
6. On prouve dans cette question que l'endomorphisme φ est symétrique.
Soient P et Q dans E . Montrer, en intégrant par parties, que :

$$\int_{-1}^1 (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P''(t)Q(t) dt = \int_{-1}^1 (2t+1)P'(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt - \int_{-1}^1 (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t) dt$$

et en déduire le résultat demandé.

Solution :

1. Question de cours : Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p17
2. Le seul problème pour la définition de l'intégrale est en -1 , or :

$$P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \underset{-1}{\sim} P(-1)Q(-1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t}}$$

qui est intégrable par comparaison à une intégrale de Riemann convergente ($1/2 < 1$).

L'application $(P, Q) \mapsto \langle P; Q \rangle$ est clairement symétrique et bilinéaire par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale.

Pour $P \in E$:

$$\langle P; P \rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale et :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(t)^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = 0 &\implies \forall t \in]-1, 1[\quad P(t)^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 0 \text{ par continuité et positivité} \\ &\implies \forall t \in]-1, 1[\quad P(t) = 0 \\ &\implies P = 0 \text{ car } P \text{ a une infinité de racines} \end{aligned}$$

L'application $(P, Q) \mapsto \langle P; Q \rangle$ est donc bien un produit scalaire.

3. La linéarité de φ est immédiate par linéarité de la dérivation et de la multiplication. De plus, φ est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ et si $P \in E$, $\deg(X^2 - 1)P'' \leq \deg P$ et $\deg(2X + 1)P' \leq \deg P$ donc $\deg \varphi(P) \leq \deg P$ et donc $\varphi(P) \in E$.

Ainsi, φ est un endomorphisme de E .

4. (a) On remarque que $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2X + 1$ et pour $2 \leq k \leq n$:

$$\varphi(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$$

La matrice de φ dans la base canonique est donc triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les $n+1$ nombres $k(k+1)$ avec $0 \leq k \leq n$. Ce sont donc les valeurs propres de φ .

- (b) Avec les notations de l'énoncé on a donc $\lambda_k = k(k+1)$ pour $0 \leq k \leq n$. Comme φ a $n+1$ valeurs propres distinctes, $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E . De plus comme φ est symétrique, les sous-espaces propres de E sont orthogonaux deux à deux et la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc orthogonale.

Montrons que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg P_k = k$.

On le prouve par récurrence sur n . On sait déjà que le résultat est vrai pour $n = 0$ car $\varphi(a) = 0$ pour a un polynôme constant.

On suppose le résultat vrai au rang $n-1$ pour $n \geq 1$. Comme la matrice $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est triangulaire, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est stable par φ et la restriction de φ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui admet pour valeurs propres $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ comme on le voit en écrivant les matrices de φ et de sa restriction dans la base canonique – c'est le calcul effectué à la question précédente. En fait, en considérant la restriction de φ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on se retrouve dans la même situation une dimension en dessous. Autrement dit, en notant $\varphi = \varphi_n$ pour $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n|_{\mathbb{R}_{n-1}[X]} = \varphi_{n-1}$.

Ainsi $(P_0, \dots, P_{n-1})$ est une famille de vecteurs propres associée aux valeurs propres $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ et par l'hypothèse de récurrence $\deg P_k = k$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

Comme $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E , on a nécessairement $\deg P_n = n$ ce qui achève la récurrence.

5. (a) Si P_k n'a que des racines d'ordre pair sur $] -1, 1[$, il ne change jamais de signe lorsqu'il s'annule sur cet intervalle et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il est de signe constant. Quitte à remplacer P_k par $-P_k$, on peut supposer $P_k \geq 0$ sur $] -1, 1[$. Alors, par continuité et positivité de l'intégrale :

$$\langle 1; P_k \rangle = \int_{-1}^1 P_k(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt > 0$$

Mais 1 est dans le sous-espace propre associé à $\lambda_0 = 0$ d'où $\langle 1; P_k \rangle = 0$. Contradiction.

- (b) Par le même raisonnement, on suppose que le nombre r de racines d'ordre impair de P_k vérifie $r < k$. Alors $S \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1})$ et donc $\langle S; P_k \rangle = 0$.

Mais dans le même temps SP_k n'a que des racines d'ordre pair dans $] -1, 1[$ donc ne change pas de signe sur $] -1, 1[$ par le même raisonnement que précédemment et, quitte à remplacer P_k par $-P_k$, on peut supposer que $SP_k \geq 0$ sur $] -1, 1[$ d'où comme avant $\langle S; P_k \rangle > 0$.

C'est une contradiction donc $r = k$ et donc P_k admet k racines distinctes dans $] -1, 1[$. Ces racines sont alors toutes simples.

6. On pose $f(t) = (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q(t)$. Cette fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et pour tout $t \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{3}{2}(1-t)^{1/2}(1+t)^{1/2}Q(t) + \frac{1}{2}(1-t)^{3/2}(1+t)^{-1/2}Q(t) + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t) \\ &= -\frac{3}{2}(1+t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \frac{1}{2}(1-t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t) \\ &= -(2t+1)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t) \end{aligned}$$

En intégrant par parties – valide car P' est également de classe $\mathcal{C}^1$ – on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2} P''(t) Q(t) dt &= \int_{-1}^1 f(t) P''(t) dt \\
&= [f(t) P'(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f'(t) P'(t) dt \\
&= - \int_{-1}^1 f'(t) P'(t) dt \\
&= \int_{-1}^1 (2t+1) P'(t) Q(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt - \int_{-1}^1 (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2} P'(t) Q'(t) dt
\end{aligned}$$

On trouve bien le résultat annoncé. En faisant passer la première intégrale du second membre dans le premier membre, l'égalité obtenue nous dit alors exactement que :

$$\langle \varphi(P); Q \rangle = \int_{-1}^1 (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2} P'(t) Q'(t) dt$$

L'expression dans le membre de droite est symétrique en P et Q donc on a automatiquement

$\langle \varphi(P); Q \rangle = \langle P; \varphi(Q) \rangle$ et φ est bien symétrique.

Exercice sans préparation 14

Soient X , Y et Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi. On pose

$$W = X + Y + Z \text{ et } T = (X - Y)^2 + (X - Z)^2 + (Y - Z)^2.$$

1. On suppose que X , Y et Z suivent une loi normale centrée réduite. Déterminer la covariance des deux variables aléatoires W et T .
2. Même question quand X , Y et Z suivent une loi de Poisson.

Solution :

On peut écrire

$$T = 2(X^2 + Y^2 + Z^2) - 2(XY + YZ + XZ) = 2W^2 - 6(XY + YZ + XZ).$$

On a par indépendance des v. a. et par le fait qu'elles ont la même loi :

$$\mathbb{E}(T) = 2\mathbb{E}(W^2) - 18\mathbb{E}(X)^2.$$

On a aussi

$$\mathbb{E}(TW) = 2\mathbb{E}(W^3) - 6\mathbb{E}(XYW) - 6\mathbb{E}(YZW) - 6\mathbb{E}(XZW) = 2\mathbb{E}(W^3) - 18\mathbb{E}(XYW).$$

Or

$$\mathbb{E}(XYW) = \mathbb{E}(X^2Y) + \mathbb{E}(XY^2) + \mathbb{E}(XYZ) = 2\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^3.$$

Donc

$$\mathbb{E}(TW) = 2\mathbb{E}(W^3) - 36\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X) - 18\mathbb{E}(X)^3.$$

1. Si X , Y et Z suivent une loi normale centrée réduite, on sait que - par stabilité de la loi normale et le lemme des coalitions- W suit la loi normale de paramètres $(0, \sqrt{3})$. On en déduit facilement que $\mathbb{E}(W^3) = 0$. Donc $\mathbb{E}(TW) = 0$, $\mathbb{E}(W) = 0$ et

$$\text{Cov}(W, T) = 0.$$

On peut aussi remarquer des symétries et obtenir directement que la covariance est nulle (changer X en $-X$, Y en $-Y$ et Z en $-Z$).

2. Si X , Y et Z suivent une loi normale de Poisson de paramètre λ , on sait que -par stabilité de la loi Poisson - W suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 = 3\lambda$. On a alors

$$\mathbb{E}(W) = 3\lambda, \mathbb{E}(W^2) = 3\lambda(1 + 3\lambda), \mathbb{E}(W^3) = 3\lambda(1 + 9\lambda + 9\lambda^2).$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(TW) = 3\lambda(1 + 9\lambda + 9\lambda^2) - 36\lambda^2(1 + \lambda) - 18\lambda^3 = -27\lambda^3 - 9\lambda^2 + 3\lambda.$$

$$\mathbb{E}(T) = 6\lambda(1 + 3\lambda) - 18\lambda^2 = 6\lambda.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(TW) - \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(W) = -27\lambda^3 - 9\lambda^2 + 3\lambda - 18\lambda^2 = -27\lambda^3 - 27\lambda^2 + 3\lambda.$$

SUJET Maths Approfondies 15

Exercice principal 15

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (X_n) une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant des moments d'ordre 2 et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant aussi un moment d'ordre 2.

- On dit que (X_n) converge L_1 vers X ssi $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|) = 0$
- On dit que (X_n) converge L_2 vers X ssi $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|^2) = 0$
- On dit que (X_n) converge vers X ps (ou pp) ssi

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

Le but de l'exercice est établir des liens entre les différentes convergences.

1. Question de cours : Donner la définition de la convergence en probabilité et la loi faible des grands nombres.
2. Montrer que si (X_n) converge L_1 vers X alors (X_n) converge en probabilité vers X .
3. Montrer que si (X_n) converge L_2 vers X alors (X_n) converge L_1 vers X .
4. Un exemple : X une v.a.r. suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ et

$$X_n = \sqrt{n+1} \mathbb{1}_{X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]}$$

- (a) Montrer que (X_n) converge L_1 vers 0.
- (b) Qu'en est-il de la convergence L_2 ? Conclure.

5. Supposons que (X_n) converge vers X ps, notons $C = \left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$

- (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que

$$C \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geq k} \left[|X_n - X| \leq \epsilon\right]$$

- (b) En déduire que (X_n) converge vers X en probabilité.

6. Un autre exemple : X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbb{1}_{X \in]0,1]}, \\ X_2 &= \mathbb{1}_{X \in]0, \frac{1}{2}]}, \quad X_3 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{1}{2}, 1]}, \\ X_4 &= \mathbb{1}_{X \in]0, \frac{1}{3}]}, \quad X_5 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}, \quad X_6 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{2}{3}, 1]}, \\ X_7 &= \mathbb{1}_{X \in]0, \frac{1}{4}]}, \quad X_8 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]}, \quad X_9 = \mathbb{1}_{X \in]\frac{2}{4}, \frac{3}{4}]}, \quad X_{10} = \mathbb{1}_{X \in]\frac{3}{4}, 1]} \\ &\dots \end{aligned}$$

- (a) Donner l'univers image des X_n et montrer que

$$\forall k \geq \frac{n(n+1)}{2} + 1 \quad P(X_k = 0) \geq \frac{n}{n+1}$$

- (b) En déduire que X_n converge en probabilité vers 0
- (c) Montrer que (X_n) ne converge pas ps vers 0.

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p21

2. Les variables admettent un moment d'ordre 2 donc d'ordre 1 ($|X_n| \leq 1 + X_n^2$). Supposons que (X_n) converge L_1 vers X :

Soit $\epsilon > 0$, d'après l'inégalité de Markov

$$0 \leq P(|X_n - X| > \epsilon) \leq E(|X_n - X|)$$

Par encadrement on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$, d'où $\boxed{(X_n) \text{ converge en proba vers } X.}$

3. Montrer que si (X_n) converge L_2 vers X alors (X_n) converge L_1 vers X .

Supposons que (X_n) converge L_2 vers X . Comme la variance est positive, nous avons

$$0 \leq E(|X_n - X|)^2 \leq E(|X_n - X|^2)$$

Par encadrement on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|) = 0$, d'où $\boxed{(X_n) \text{ converge } L_1 \text{ vers } X.}$

4. (a) X_n est positive donc

$$E(|X_n|) = E(X_n) = \sqrt{n+1} P\left(X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n|) = 0, \text{ d'où } \boxed{(X_n) \text{ converge } L_1 \text{ vers } 0.}$$

(b)

$$E(X_n^2) = (n+1)P\left(X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]\right) = 1$$

$\boxed{(X_n) \text{ ne converge pas } L_2 \text{ vers } 0. \text{ Nous n'avons pas équivalence entre les deux convergences.}}$

5. (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que

$$C \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geq k} [|X_n - X|] \leq \epsilon$$

C'est la définition de la limite!

Soit $\omega \in C$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq k$ $|X_n - X| \leq \epsilon$

donc $\omega \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geq k} [|X_n - X| \leq \epsilon]$ d'où l'inclusion demandée.

- (b) En déduire que (X_n) converge vers X en proba.

Comme $P(C) = 1$, alors $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geq k} [|X_n - X| \leq \epsilon]\right) = 1$

Comme l'union est croissante, nous avons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n \leq k} [|X_n - X| \leq \epsilon]\right) = 1$$

Or

$$P\left(\bigcap_{n \geq k} [|X_n - X| \leq \epsilon]\right) \leq P(|X_n - X| \leq \epsilon) \leq 1$$

Par encadrement on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| \leq \epsilon) = 1$, d'où $\boxed{(X_n) \text{ converge en proba vers } X.}$

6. (a)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n(\Omega) = \{0, 1\}$$

Nous avons à chaque fois i intervalles de longueur $\frac{1}{i}$.

$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ donc pour $k \geq \frac{n(n+1)}{2} + 1$ l'intervalle associé à X_k est de longueur inférieure à $\frac{1}{n+1}$,

d'où $P(X_k = 1) \leq \frac{1}{n+1}$ et donc $\boxed{P(X_k = 0) \geq \frac{n}{n+1}}$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) = 1 \text{ d'où } (X_n) \text{ converge en probabilité vers } 0$$

(c) *Montrer que (X_n) ne converge pas ps vers 0.*

$\forall \omega \in \Omega$ $(X_n(\omega))$ admet une sous-suite constante égale à 0 et une autre constante égale à 1. $(X_n(\omega))$ ne converge pas vers 0.

$P(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = 0\}) = 0$ et donc $\boxed{(X_n) \text{ ne converge pas ps vers } 0}$

Exercice sans préparation 15

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On pose $t = a + d$, $s = ad - bc$ et $P(x) = x^2 - tx + s \in \mathbb{R}[x]$.

1. On suppose que A est diagonalisable, montrer que $P(A) = 0$.
2. En déduire que $P(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution :

1. On commence par vérifier que $P(\lambda) = 0$ si λ est une valeur propre de A : les vecteurs colonnes de $\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$ sont liés donc $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$ d'où $P(\lambda) = 0$. On en déduit $P(D) = 0$ si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de A . Puis $P(A) = P(QDQ^{-1}) = QP(D)Q^{-1} = 0$ avec Q la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres.
2. Notons $t(A) = a + d$ et $s(A) = ad - bc$. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c, d) &\mapsto [A^2 - t(A)A + s(A)I_2]_{1,1}, [A^2 - t(A)A + s(A)I_2]_{1,2}, [A^2 - t(A)A + s(A)I_2]_{2,1}, [A^2 - t(A)A + s(A)I_2]_{2,2} \end{aligned}$$

est polynomiale et s'annule sur un ouvert elle est donc nulle partout.

On peut fixer b, c, d comme paramètres et faire varier $x = a$ par exemple. Dans ce cas, A est diagonalisable sur l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 2dx + d^2 + 4bc > 0\}$...

SUJET Maths Approfondies 16

Exercice principal 16

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne canonique.

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n)^2 dt$.

1. **Question de cours :** Donner une condition suffisante pour qu'une fonction de plusieurs variables admette des extrema globaux sur un ensemble donné.
2. Montrer que la fonction f est bien définie.
3. On note $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $M = ((i+j)!)_{0 \leq i, j \leq n}$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $u = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$

Montrer que $f(x) = {}^t u M u$

4. (a) On admet que pour tout $u \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, si $u \neq 0$ alors ${}^t u M u > 0$
Montrer que les valeurs propres de M sont toutes strictement positives.
- (b) En déduire qu'il existe un réel A strictement positif tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) \geq A \|x\|^2$$

5. En déduire que f admet un minimum global.
On notera $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point où ce minimum est atteint.
6. (a) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k! + (k+1)!a_1 + \dots + (k+n)!a_n = 0$.
- (b) On pose $P(x) = 1 + a_1(x+1) + a_2(x+1)(x+2) + \dots + a_n(x+1)(x+2) \dots (x+n)$.
Montrer que $P(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (x-1)(x-2) \dots (x-n)$.
- (c) Montrer que $f(a) = P(0) = \frac{1}{n}$.

Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p19 ou 20
2. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Soit la fonction $g : t \mapsto e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n)^2$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus,
 $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées, donc l'intégrale $f(x)$ converge par domination.
3. Par linéarité (toutes les intégrales convergent par le même raisonnement qu'à la question précédente), on

trouve que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)^2 dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt + 2 \sum_{k=1}^n x_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} dt \\
&= 1 + 2 \sum_{k=1}^n k! x_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)! x_i x_j \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i+j)! x_i x_j \text{ en notant } x_0 = 1 \\
&= u^T M u
\end{aligned}$$

Remarque : $\int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} dt = (i+j)!$ en utilisant la densité d'une loi $\gamma(i+j)$, ou éventuellement par récurrence.

4. (a) Soit λ une valeur propre de M et u un vecteur propre associé

Comme u est non nul, $u^T M u = \lambda \|u\|^2 > 0$.

Donc Toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

- (b) La matrice M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable d'après le théorème spectral et il existe donc une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ (on peut supposer $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$) et une matrice orthogonale P telle que $M = P D^t P$. On peut alors écrire avec les notations précédentes, en posant $v = {}^t P u = (v_0, \dots, v_n)$:

$$f(x) = {}^t u P D^t P u = {}^t v D v = \sum_{k=0}^n \lambda_k v_k^2 \geq \lambda_0 \sum_{k=0}^n v_k^2 = \lambda_0 \|v\|^2 = \lambda_0 \|u\|^2 \geq \lambda_0 \|x\|^2.$$

5. D'après la question précédente, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| > r \Rightarrow f(x) > f(0)$.

La fonction f étant polynômiale, elle est continue sur la boule fermée bornée $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$. Elle admet donc un minimum m sur $\mathcal{B}$. Par construction de r , on a : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}$, $f(x) > f(0) \geq m$.

La fonction f admet donc un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

6. (a) Puisque la fonction f est polynômiale, donc $\mathcal{C}^1$, sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, le point a est un point critique, i.e. :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0.$$

$$\text{Or, pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 2k! + 2 \sum_{i=1}^n a_k (k+i)!.$$

$$\text{Pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k! + \sum_{i=1}^n a_k (k+i)! = 0.$$

- (b) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k! P(k) = k! + \sum_{i=1}^n a_k (k+i)! = 0$. Le polynôme P est de degré inférieur ou égal à n et admet n racines distinctes. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \lambda(X-1) \cdots (X-n)$.

Puisque $P(-1) = 1$, on trouve $\lambda = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

$$P(X) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (X-1) \cdots (X-n).$$

- (c) On a, par linéarité (toutes les intégrales convergent) :

$$\begin{aligned}
f(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n)^2 dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n) dt + \sum_{k=1}^n a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n) dt.
\end{aligned}$$

Or :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n) dt = k! + a_1(k+1)! + a_2(k+2)! + \cdots + a_n(k+n)! = 0.$$

Ainsi :

$$f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n) dt = 1 + \sum_{k=1}^n a_k k! = P(0) \boxed{= \frac{1}{n}}.$$

Exercice sans préparation 16

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires toutes possédant une espérance et une variance et telles que $(\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n)) \neq (0, \dots, 0)$. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = (\mathbb{E}(X_i X_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

1. On suppose dans cette question que les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes. Déterminer les valeurs propres de la matrice M et les sous-espaces propres associés.
2. On revient au cas général. Montrer que toutes les valeurs propres de M sont réelles positives et que

$$\lambda_n \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)^2,$$

où λ_n désigne la plus grande valeur propre de M .

Solution :

1. Puisque $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes, on a

$$(M)_{i,j} = \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j).$$

On pose $V = {}^t(\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))$. On a

$$M = V^t V.$$

Donc pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$MX = ({}^t V X) V.$$

Notons que V est aussi vecteur propre est que la valeur propre associée est

$$\lambda_n = {}^t V V = \|V\|^2.$$

Par ailleurs, on observe que $MX = 0$ si et seulement si ${}^t V X = 0$. Donc $\lambda_1 = 0$ est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\text{vect}\{V\}^\perp$. Ainsi, la multiplicité de λ_1 est $n - 1$.

Le sous-espace propre associé à λ_n est $\text{vect}\{V\}$, qui est de dimension 1.

2. Puisque la matrice M est symétrique, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Soit λ une valeur propre et $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ un vecteur quelconque. On a

$${}^t Y M Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j \mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}((\sum_{i=1}^n y_i X_i)^2) \geq (\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n y_i X_i))^2 = ({}^t Y V)^2 \geq 0.$$

En choisissant Y un vecteur propre non nul associé à λ , on en déduit que $\lambda \geq 0$. On en déduit que $\lambda \geq 0$. Ainsi, toutes les valeurs propres de M sont positives.

Soient $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ces valeurs propres et $(V_1, \dots, V_n)$ une B.O.N. de vecteurs propres associés dans le même ordre. Soit $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i$ un vecteur colonne quelconque. On a

$${}^t Y M Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \lambda_n \|Y\|^2.$$

En combinant avec l'inégalité ci-dessus, on en déduit que

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), ({}^t Y V)^2 \leq \lambda_n \|Y\|^2.$$

En choisissant $Y = V$, on en déduit que $\|V\|^2 \leq \lambda_n$.

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECG Maths appliquées

Juin 2025

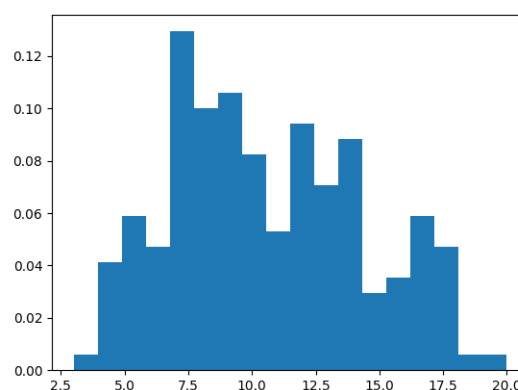
Dans leur grande majorité, les candidats montrent de belles qualités de logique et de présentation. On remarque une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 3 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes dans la connaissance du cours ainsi que de grosses faiblesses en calcul.

A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances, faisaient preuve de finesse dans leurs raisonnements et démontraient un certain recul sur les concepts étudiés.

La moyenne est de 10,76 et l'écart-type est de 3,94.

count	180.000000
mean	10.561111
std	3.985888
min	3.000000
25%	7.000000
50%	10.000000
75%	13.500000
max	20.000000



Le jury aimerait insister sur les points suivants.

- Comme les années précédentes, chaque planche comptait, soit dans l'exercice principal, soit dans l'exercice sans préparation, une question d'informatique. Cette question d'informatique faisait intervenir le langage Python, ou bien le SQL. En ce qui concerne le SQL, le jury a pu constater que sa maîtrise était trop souvent insuffisante. Certains candidats ne connaissaient pas bien les commandes SQL et le vocabulaire des bases de données était également manipulé avec un grand manque de précision. Le jury a ainsi vu à plusieurs reprises des confusions entre les attributs et les entrées d'une table ou bien entre la notion de clé primaire et celle de clé étrangère.
- Toujours en ce qui concerne l'informatique, les candidats doivent savoir faire tourner du code Python à la main sur des exemples simples. Beaucoup de candidats se sont retrouvés en difficulté quand le jury leur a demandé d'effectuer cette tâche. Par ailleurs, il est également souhaitable que les candidats aient d'eux-mêmes le réflexe de faire tourner le code à la main sans attendre que le jury les y invite, notamment face aux énoncés proposant un code dont il faut expliquer ce qu'il fait.
- Le cours n'est pas suffisamment maîtrisé, il doit être impérativement mieux su. Ainsi, par exemple, dans l'énoncé du théorème des bornes atteintes, plusieurs candidats se contentaient de dire qu'il suffisait de se placer sur un ensemble fermé en oubliant l'hypothèse « borné » et il a fallu parfois du temps pour que cet oubli soit corrigé malgré les suggestions du jury.
- Le programme du concours porte sur l'ensemble des deux années et le programme de première année ne doit pas être négligé. Certains candidats, par exemple, ont été pris en défaut sur des questions de convexité, introduite au second semestre de la première année.
- Plusieurs candidats manquent de rigueur dans l'usage du langage mathématique, ce qui est la source d'erreurs. Cela est particulièrement vrai du maniement des quantificateurs : les candidats écrivent des énoncés sans quantificateurs et cette imprécision les amènent à se perdre dans leur raisonnement. Le jury a ainsi rencontré des candidats mis en difficulté dans un raisonnement par récurrence car les hypothèses étaient mal quantifiées.

- Le jury attend des candidats qu'ils soient en mesure d'illustrer leurs raisonnements par des schémas, et qu'ils soient également capables de tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction. Ainsi, dans une planche publiée ci-dessous, était-il demandé de tracer l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq y \leq 1\}$. Cette question a posé d'énormes difficultés aux candidats. De même, certains candidats, au moment de faire un schéma, ont parfois du mal à choisir une échelle pertinente pour leur dessin.
- Le jury souhaite que les candidats se confrontent aux questions difficiles plutôt que de demander systématiquement à les passer pour n'exposer que des questions faciles traitées par l'écrasante majorité des candidats.
- Le jury a trouvé que cette année, beaucoup de candidats manquaient de combativité. Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral : tout n'est pas joué à l'issue de la préparation et le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre de questions, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons ceux qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici dix sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET Maths Appliquées 1

Exercice principal Maths Appliquées 1

On considère une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec probabilité $q = 1 - p$.

Soit n un entier non nul fixé.

On considère n joueurs qui lancent chacun la pièce jusqu'à obtenir Pile. Les ou les gagnants sont désignés comme ceux qui ont fait le moins de lancers.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit X_i le nombre de lancers du i -ième joueur, et on note N le nombre de gagnants.

1. Cours : combien y a-t-il de sous-ensembles à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ lorsque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$?
2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donner la loi de X_i , son espérance et sa variance.
3. Calculer pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_i > j)$.
4. On note $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
5. (a) Écrire une fonction Python `nombre_min(L)` prenant en argument une liste `L` et renvoyant le nombre de fois où la valeur minimale apparaît dans la liste `L`.
(b) En déduire une fonction Python `simulN(n,p)` qui, prenant en argument la valeur de n et p , simule l'expérience aléatoire décrite et renvoie la valeur de N .
6. (a) Calculer $\mathbb{P}(N = n)$.
(b) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1 - q^n}.$$

7. En déduire l'espérance de N et la variance de N .

Solution :

1. ECG1 Appli p. 16.
2. On cherche le rang du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, et donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

D'après le cours : $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X_i) = \frac{q}{p^2}$.

3. On a donc pour tous i et j

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i > j) &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_i = k) \\ &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} p q^{k-1} \\ &= p \sum_{k=j}^{+\infty} q^k \\ &= q^j \end{aligned}$$

4. Soit k un entier. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > j) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > j]\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > j) \quad \text{par indépendance} \\ &= q^{jn} \end{aligned}$$

Ainsi, Y a la même fonction de répartition qu'une loi géométrique de paramètre $1 - q^n$, et donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^n)$.

5. (a)

```
def nombre_min(L):
    m = L[0]
    nb = 0
    for x in L:
        if x < m:
            m = x
            nb = 1
        elif x == m:
            nb = nb + 1
    return nb
```

(b)

```
def simulN(n,p):
    joueurs = [geom(p) for i in range(n)]
    return nombre_min(joueurs)
```

6. (a) $(N = n)$ = tous les joueurs ont le même résultat. Donc :

$$(N = n) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{i=1}^n (X_i = k), \text{ ainsi par incompatibilité :}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X_i = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = k) \quad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^n q^{n(k-1)} \\ &= \frac{p^n}{1 - q^n} \end{aligned}$$

(b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons A_k l'ensemble des parties à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\text{On a } (N = k) = \bigcup_{I \in A_k} \bigcup_{l=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{i \in I} (X_i = l) \cap \bigcap_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} (X_j > l) \right)$$

Ainsi, par incompatibilité :

$$\mathbb{P}(N = k) = \sum_{I \in A_k} \sum_{l=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = l] \cap \bigcap_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} [X_j > l]\right).$$

Pour chaque partie I de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments, on a, par indépendance :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = l] \cap \bigcap_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} [X_j > l]\right) &= \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = l) \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} \mathbb{P}(X_j > l) \right) \\ &= \sum_{l=1}^{+\infty} p^k q^{k(l-1)} q^{(n-k)l} \\ &= \frac{p^k}{q^k} \frac{q^n}{1 - q^n} \\ &= \frac{p^k q^{n-k}}{1 - q^n} \end{aligned}$$

Comme le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{k}$, on a bien

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{k} \frac{p^k q^{n-k}}{1 - q^n}$$

7. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(N = k) \\ &= \frac{1}{1 - q^n} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{np}{1 - q^n}\end{aligned}$$

Car on reconnaît l'espérance d'une loi binomiale $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ qui vaut np .

D'après la formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}(N^2) - (\mathbb{E}(N))^2$

Par le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N^2) &= \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^n (k(k-1) + k) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k(k-1) \mathbb{P}(N = k) + \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(N = k)\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{E}(N)$ et $\sum_{k=1}^n k(k-1) \mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} = p^2 n(n-1)$

On obtient $\mathbb{E}(N^2) = \frac{npq + n^2 p^2}{1 - q^n}$, et donc

$$\mathbb{V}(N) = \frac{npq + n^2 p^2}{1 - q^n} - \left(\frac{np}{1 - q^n} \right)^2.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 1

Soient f une fonction continue positive décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ soit divergente.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On suppose que $\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que la série $\sum u_n f(S_n)$ converge.

Etudier la réciproque.

Solution :

Le premier point se prouve par une comparaison série-intégrale, en remarquant que $u_n = S_n - S_{n-1}$ d'où par décroissance de f :

$$u_n f(S_n) \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} f(t) dt$$

puis :

$$\sum_{k=0}^n u_k f(S_k) \leq \int_0^{S_n} f(t) dt \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

Les sommes partielles étant majorées et la série $\sum u_k f(S_k)$ à termes positifs elle converge.

La réciproque est fausse. L'idée étant que si la série $\sum u_n$ diverge très vite vers $+\infty$, la série $\sum u_k f(S_k)$ va être convergente sans que l'intégrale le soit. Le jury sera sans doute déjà content si un candidat arrivé à ce point de l'oral réussit à avoir cette intuition et l'expliquer qualitativement.

Un contre exemple est fourni par $u_n = e^{(n+1)^2} - e^{n^2}$, $S_n = e^{(n+1)^2} - 1$ et $f(t) = \frac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$.

SUJET Maths Appliquées 2

Exercice principal Maths Appliquées 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $T = \max(X, Y)$ et $W = \frac{1}{T}$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de la variable aléatoire W .

1. Cours : donner la définition d'une variable à densité.
2. On suppose que le module Python `numpy.random` a été importé sous l'alias `rd`. Justifier que la fonction Python écrite ci-dessous permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

```
def expo():  
    return -log(rd.random())
```

3. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T .
Démontrer alors que T admet une densité, et en déterminer une.
4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(t) = 2 \times \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$$

Montrer que φ se prolonge par une fonction continue en 0.

On notera encore φ le prolongement obtenu et ainsi φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

5. (a) Démontrer que la variable aléatoire W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.
(b) En déduire que W admet une espérance.

6. On admet alors que $\mathbb{E}(W) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$ et on souhaite calculer $\mathbb{E}(W)$.

- (a) Démontrer que : pour tout $x > 0$, les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt$ et $\int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ convergent et

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

- (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(W)$

Solution :

1. Programme de seconde année, p.16
2. Soient donc $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$ et $Z = -\ln(U)$. Z étant presque sûrement positive, sa fonction de répartition est nulle sur $\mathbb{R}_-$.
Si $x > 0$, on a alors $\mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(U \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x}$, et on reconnaît bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.
3. Soit F_T la fonction de répartition de la variable T .
Si $x \leq 0$ $F_T(x) = P(T \leq x) = 0$
Si $x > 0$, $F_T(x) = P(T \leq x) = P((X \leq x) \cap (Y \leq x)) = (1 - e^{-x})^2$ par indépendance.

F_T est continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$, de plus F_T est continue en 0. Ainsi F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. On en conclut que T est une variable à densité et une densité de T est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2e^{-t}(1 - e^{-t}) & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Au voisinage de 0 : $e^{-t} - e^{-2t} = 1 - t - (1 - 2t) + o(t) = t + o(t)$ ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 2$ donc φ est prolongeable par continuité en 0

Remarque : on peut aussi (sans utiliser de DL) écrire le numérateur sous la forme $e^{-t} - 1 - (e^{-2t} - 1)$ puis se ramener à des limites usuelles du type $\frac{e^x - 1}{x}$ au voisinage de 0

5. (a) D'après le théorème de transfert, la variable W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f(t) dt$ converge absolument.

Or la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, et $t \mapsto \frac{1}{t} f(t)$ est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} 2 \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge.

- (b) φ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et est négligeable devant $t \mapsto e^{-t}$ en $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.

6. (a) Soit $x > 0$.

$\frac{e^{-2t}}{t} = o(e^{-2t})$ et $\int_x^{+\infty} e^{-2t} dt$ converge donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt$ converge.

De manière analogue $\int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

Soit $A > 0$. Effectuons le changement de variables affine $u = 2t$ dans l'intégrale $\int_x^A \frac{e^{-2t}}{t} dt$, on obtient :

$\int_x^A \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_{2x}^{2A} \frac{e^{-u}}{u} du$ et donc en passant à la limite lorsque $A \rightarrow +\infty$ (possible puisqu'on a établi la convergence au préalable) on obtient le résultat.

- (b) Soit $x > 0$. Par combinaison linéaire $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge. De plus,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{par Chasles}$$

Ainsi, W admet une espérance si et seulement si $2 \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$ admet une limite lorsque $x \rightarrow 0$

Pour $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$, on a $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$ et par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$2e^{-2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leq 2 \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq 2e^{-x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t},$$

et donc en calculant les intégrales

$$2e^{-2x} \ln(2) \leq 2 \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq 2e^{-x} \ln(2).$$

Par théorème d'encadrement pour $x \rightarrow 0$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt = 2 \ln(2)$ et ainsi

$$\mathbb{E}(W) = 2 \ln(2)$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A = I_n$.

Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de A^p en fonction de A , I_n et p .

Solution :

Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(u_p, v_p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^p = u_p A + v_p I_n$. La propriété est triviale pour $p = 0$: $A^0 = I_n = u_0 A + v_0 I_n$ où $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.

Supposons le résultat pour $p \in \mathbb{N}$.

$$A^{p+1} = u_p A^2 + v_p A = (u_p + v_p)A + u_p I_n.$$

La propriété est donc héréditaire en posant $u_{p+1} = u_p + v_p$ et $v_{p+1} = u_p$.

La suite u est récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_{p+2} = u_{p+1} + u_p.$$

Puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on trouve que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_p = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^p - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^p.$$

On en déduit alors que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad v_p = u_{p-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{p-1}.$$

On remarquera que la formule est encore vraie pour $p = 0$.

SUJET Maths Appliquées 3

Exercice principal Maths Appliquées 3

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Cours. Rappeler la définition de la convexité de f .
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, pour tout n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de réels de I , pour tout n -uplet $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de réels positifs tel que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, on a :

$$f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n).$$

3. Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs dans I . Montrer que $f(E(X)) \leq E(f(X))$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Lors d'une soirée, n amis jouent au jeu suivant. Chacun met un euro sur la table et inscrit pile ou face sur un papier sans que les autres puissent connaître son choix. Un serveur lance ensuite une pièce équilibrée. Sont gagnants ceux qui ont fait le bon choix.

La somme de n euros est partagée (sous forme fractionnaire) entre les gagnants. S'il n'y pas de gagnant, on donne la somme totale au serveur en guise de pourboire.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire égale à la somme que reçoit le joueur k .

4. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer l'espérance de X_k .
5. On propose à l'un des n joueurs de faire venir une $n+1$ ^{ème} personne dans le jeu : a-t-il intérêt à accepter ?

On revient dans le jeu à n joueurs.

6. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, écrire $E(X_k^2)$ sous la forme d'une somme finie.
7. Montrer que :

$$E(X_k^2) \geq 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2.$$

Puis que :

$$E(X_k^2) \geq \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$

Solution :

1. Cours (ECG1 Appli page 20).
2. Par récurrence.
3. En note $x_1, \dots, x_n$ les éléments de $X(\Omega)$ et en utilisant la question 2 pour $t_i = P(X = x_i)$.
4. Une méthode efficace est de noter Y_n la variable aléatoire égale à la somme reçue par le serveur, et qui vérifie

$$\sum_{k=1}^n X_k + Y_n = n.$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient $\sum_{k=1}^n E(X_k) + E(Y_n) = n$.

De plus $Y_n(\Omega) = \{0, n\}$, et $P(Y_n = n) = \frac{1}{2^n}$, puis $E(Y_n) = \frac{n}{2^n}$.

Ainsi $\sum_{k=1}^n E(X_k) = n - \frac{n}{2^n}$.

De plus les X_k suivent la même loi, et donc, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(X_k) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

On peut également passer par la définition de l'espérance, et la détermination de la loi de X_k (cf q6).

5. Plus le nombre de joueurs est grand, plus l'espérance de gain d'un joueur est grande, et les joueurs ont donc intérêt à accepter la proposition.

6. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On revient ici à la loi de X_k . D'une part $X_k(\Omega) = \left\{0, 1, \frac{n}{n-1}, \dots, n\right\}$.

D'autre part, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \binom{n-1}{i-1} \frac{1}{2^n}$. Alors

$$\begin{aligned} E(X_k^2) &= \sum_{x \in X_k(\Omega)} x^2 P(X = x) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{i^2} \binom{n-1}{i-1} \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \binom{n}{i} \frac{1}{2^n} \quad \text{à l'aide de la formule des chefs.} \end{aligned}$$

7. On réécrit $E(X_k^2)$ pour pouvoir utiliser le résultat de la question 2 :

$$E(X_k^2) = \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \binom{n}{i} \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} \sum_{i=1}^n \frac{\binom{n}{i}}{2^{n-1}} \frac{1}{\frac{i}{n}}.$$

Or $\sum_{i=1}^n \frac{\binom{n}{i}}{2^{n-1}} = 1$, et par convexité de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\binom{n}{i}}{2^{n-1}} \frac{1}{\frac{i}{n}} &\geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\binom{n}{i}}{2^{n-1}} \frac{i}{n}} \\ \text{ie } \sum_{i=1}^n \frac{\binom{n}{i}}{2^{n-1}} \frac{1}{\frac{i}{n}} &\geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\binom{n-1}{i-1}}{2^{n-1}}} \\ \text{ie } \sum_{i=1}^n \frac{\binom{n}{i}}{2^{n-1}} \frac{1}{\frac{i}{n}} &\geq \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \\ \text{ie } E(X_k^2) &\geq \frac{(2^n - 1)^2}{2^{2n-1}} \\ \text{ie } E(X_k^2) &\geq 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 \\ \text{ie } E(X_k^2) &\geq 2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 \quad \text{car } \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n+1} \\ \text{ie } E(X_k^2) &\geq 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \end{aligned}$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 3

La base de données **communication** gère les envois d'invitations aux différents événements organisés ou gérés par le BDE (bureau des étudiants) d'une école de commerce. Cette base comporte trois tables : la table **personnes** représente les personnes éventuellement invitées, la table **invitation** représente les invitations envoyées et la table **evenements** représente les différents événements auxquels on peut être invité. Le schéma est le suivant, les clés primaires sont soulignées :

- **personnes**(idpers, nom, tel, email)
avec
idpers : identifiant d'une personne, type entier
nom : type chaîne de caractères (nom de la personne)
tel : type entier (numéro de téléphone de la personne)
email : type chaîne de caractères (adresse mail de la personne)
- **invitation**(idpers, idevenement, datedenvoi, message)
avec
idpers : identifiant d'une personne, type entier
idevenement : identifiant d'un événement, type entier
datedenvoi : type chaîne de caractères (date de l'envoi)
message : type chaîne de caractères (contenu du message)
- **evenements**(idevenement, nomevenement, date, lieu)
avec
idevenement : identifiant d'un événement, type entier
nomevenement : nom de l'événement, type chaîne de caractères
date : type chaîne de caractères (date de l'événement)
lieu : type chaîne de caractères (lieu de l'événement)

Voici un exemple d'enregistrements de ces trois tables :

table **personnes**

<u>idpers</u>	nom	tel	mail
72250	Jeanne Durand	08495673	jeanne.durand@ecole.com
73251	Elia Dupont	08425942	elia.dupont@ecole.com
87288	Kev Forment	09674532	kev.forment@ecole.com

table **invitation**

<u>idpers</u>	<u>idevenement</u>	datedenvoi	message
87288	9765	2024-05-10	invitation pour l'événement truc ...
73251	5643	2024-21-11	invitation pour l'événement machin ...

table **evenements**

<u>idevenement</u>	nomevenement	date	lieu
9765	soirée d'Halloween	2024-30-10	salle 001
5643	fêtes de fin d'année	2024-19-12	salles 001 et 002

1. Expliquer pourquoi la clé primaire de la table **invitation** comprend deux attributs. Pourrait-on n'en choisir qu'un seul ?
2. Écrire la requête SQL donnant la liste des événements ayant lieu le 5 septembre 2025 ou le 9 octobre 2025.
3. Écrire la requête SQL donnant la liste des messages d'invitations envoyées à Joël Pompon le 12 avril 2024.
4. On décide que chaque invité à un événement pourra, en plus, lors de l'événement recevoir un cadeau et on souhaite préciser lors de l'envoi de l'invitation le cadeau offert en cas de participation. Le BDE dispose d'un stock de cadeaux qui peuvent être utilisés pour n'importe quel événement. Un cadeau est représenté par son type (par exemple : un sac, un mug , une peluche...) et sa taille (petit,moyen, grand).
Proposer une modification de la base **communication** afin de prendre en compte cette nouvelle contrainte.

5. La commande **EXCEPT** réalise la différence ensembliste entre les requêtes. Cette commande s'utilise entre 2 instructions pour récupérer les enregistrements de la première requête sans inclure les résultats de la seconde requête.
Écrire la requête SQL donnant la liste des identifiants des personnes n'ayant pas reçu d'invitation le 14 mai 2023.

Solution :

1. **idpers, idevenement** est une clé primaire car ce couple d'attributs identifie de manière unique une invitation. Un seul de ces attributs ne suffit pas car il y a plusieurs invitations possibles pour un même événement (resp. une même personne). Aucun des deux autres attributs n'identifie de manière unique une invitation.

2.

```
SELECT nomevenement FROM evenements AS ev
WHERE ev.date = "2025-05-09" OR ev.date = "2025-09-10"
```

3.

```
SELECT message FROM invitation AS inv
JOIN personnes AS p ON p.idpers = inv.idpers
WHERE p.nom = "Joel_Pompon" AND inv.datedenvoi = "2024-12-04"
```

4. On doit créer la table **cadeaux(idcadeau, type, taille)** ce qui peut être réalisé par la commande :

```
CREATE TABLE cadeaux(idcadeau INT PRIMARY KEY, type TEXT, taille INT)
```

Il faut ensuite ajouter un attribut **idcadeau** à la table **invitation** et le déclarer comme clé étrangère faisant référence à la table **cadeaux**.

5.

```
SELECT idpers FROM personnes
EXCEPT(SELECT idpers FROM invitation AS inv WHERE inv.datedenvoi = "2025-14-05")
```

Remarque : pour la première requête c'est bien à partir de la table **personnes** qu'il convient de sélectionner **idpers** car si on le fait à partir de la table **invitation**, il manquera à la liste obtenue les personnes qui n'ont été invitées à aucun événement.

Question supplémentaire : écrire la requête SQL donnant (à partir de la base modifiée question 4.) les noms des événements pour lesquels une peluche a été proposée en cadeau.

Corrigé de la question supplémentaire :

```
SELECT nomevenement FROM evenements AS ev
JOIN cadeaux AS ca
JOIN invitation AS inv
ON ca.idcadeau = inv.cadeau AND ev.idevenement = inv.idevenement
WHERE ca.type = "peluche"
```

Remarque : si on veut éviter les "doublons", on peut écrire **SELECT DISTINCT**

SUJET Maths Appliquées 4

Exercice principal Maths Appliquées 4

On admet que l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ est fermé. On considère la fonction f définie sur D par :

$$f(x, y) = (y - x)^2 + 6xy$$

1. Cours : condition nécessaire d'existence d'un extremum local.
2. Représenter graphiquement D puis montrer que la fonction f admet un minimum et un maximum globaux sur D .
3. Déterminer les points critiques de f sur l'ouvert $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < y < 1\}$.
4. Déterminer des réels a et b tels que :

$$\forall x \in D, \quad f(x, y) = a(y + x)^2 + b(y - x)^2.$$

5. Montrer que pour tout $(x, y) \in D$, on a $-2 \leq f(x, y) \leq 6$.
6. En déduire l'ensemble des points de D où f atteint son maximum (respectivement son minimum).
7. Montrer que le point origine $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f sur D .

Solution :

1. Cours : 2ème année p.15.
2. La fonction f est continue sur l'ensemble D qui est fermé et borné. Elle est donc bornée et admet un minimum et un maximum globaux sur D .

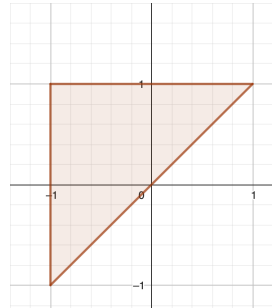


FIGURE 1 – Le domaine D

3. La fonction f admet des dérivées partielles en tout point de D' . Soit $(x, y) \in D'$.

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - y) + 6y = 0 \\ 2(y - x) + 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Puisque $(0, 0) \notin D'$, f n'admet aucun point critique sur D' .

4. $\forall (x, y) \in D, f(x, y) = (y - x)^2 + 6xy = (y - x)^2 + \frac{3}{2}(x + y)^2 - (x - y)^2 = \frac{3}{2}(y + x)^2 - \frac{1}{2}(y - x)^2$.
5. Pour tout $(x, y) \in D$, $0 \leq y - x \leq 2$ et $|y + x| \leq 2$. Ainsi :

$$-2 = -\frac{1}{2} \times 2^2 \leq -\frac{1}{2}(y - x)^2 \leq f(x, y) \leq \frac{3}{2}(y + x)^2 \leq \frac{3}{2} \times 2^2 = 6.$$

6. D'après la question 3, f n'admet pas d'extremum global sur D' .

Soit $(x, y) \in D$. D'après la question précédente :

$$f(x, y) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}(y-x)^2 = -2 \\ (y+x)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 1)$$

car $(1, -1) \notin D$.

$$f(x, y) = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}(y+x)^2 = 6 \\ (y-x)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \{(1, 1), (-1, -1)\}.$$

7. Remarquons que $f(0, 0) = 0$. Pour $(x, y) \in [-1, 1]$, $f(-y, y) = -2y^2 \leq 0 = f(0, 0) \leq 6x^2 = f(x, x)$. Le point $(0, 0)$ n'est donc pas un extremum local.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 4

Un sauteur en hauteur tente de franchir, dans cet ordre, des hauteurs successives numérotées 1, 2, etc., jusqu'à ce qu'il échoue. Il est éliminé à son premier échec.

Pour tout entier naturel non nul k la probabilité de franchir la hauteur k vaut $1/k$.

On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Écrire une fonction Python prenant en paramètre N et permettant d'obtenir N simulations de la variable aléatoire X , données sous forme de liste, ainsi qu'une estimation de son espérance.
2. Détermine l'espérance, puis la variance de la variable X .

Solution :

1. Voilà le programme informatique.

```
import numpy.random as rd

def simule (N) :
    S=0
    simul=[]
    for i in range (N) :
        k=1
        a=rd.random()
        while a<=1/k :
            k+=1
            a=rd.random()
        simul.append(k-1)
        S+=k-1
    return(simul , S/N)
```

2. On a d'abord $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

On obtient donc : $E(X) = \sum_{k \geq 1} k P(X = k) = \sum_{k \geq 1} \frac{k^2}{(k+1)!}$, ce qui n'est pas si facile à calculer.

Plus facilement : $E(X+1) = \sum_{k \geq 1} (k+1) P(X = k) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} = e$.

Par linéarité, on obtient : $E(X) = e - 1$.

Pour la variance, on commence par déterminer $E(X^2) = \sum_{k \geq 1} k^2 P(X = k) = \sum_{k \geq 1} \frac{k^3}{(k+1)!}$, ce qui n'est pas non plus facile à calculer.

Plus simplement $E((X-1)(X+1)) = \sum_{k \geq 1} (k-1)(k+1) P(X = k) = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-2)!} = e$ pour la même raison.

Et donc $E(X^2) = E(X^2 - 1) + 1 = E((X-1)(X+1)) + 1 = e + 1$.

Finalement $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (e + 1) - (e - 1)^2 = e(3 - e)$.

SUJET Maths Appliquées 5

Exercice principal Maths Appliquées 5

On modélise le comportement des usagers d'un réseau de transports en commun de type métro, à une station donnée. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Un usager montera dans un des n trains qui arrivent successivement à cette station.

Lors de son arrivée à une station, un train est plus ou moins plein et on quantifie son taux de places disponibles (debout ou assise) par une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, ce taux est d'autant plus élevé qu'il y a de places disponibles dans le train.

On considère qu'un usager monte dans le premier train dont le taux de places disponibles est supérieur ou égal à un seuil $s \in]0, 1[$ fixé et dans le cas où aucun des $n - 1$ premiers trains ne dépasse le seuil s , l'usager monte dans le dernier train (le n -ième).

On note X_i la variable aléatoire donnant le taux de places disponibles du i -ème train.
De plus, on suppose que les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Pour tout $k \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, on note A_k l'événement : « pour tout $i \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$, $(X_i < s)$ et $(X_k \geq s)$ », et B l'événement : « pour tout $k \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, $(X_k < s)$ »

On définit par conséquent la variable aléatoire $Z_{n,s}$, taux de places disponibles du train choisi par l'usager, comme suit :

$$Z_{n,s} = \begin{cases} X_n & \text{si } B \text{ est réalisé,} \\ X_k & \text{si } A_k \text{ est réalisé } (1 \leq k \leq n - 1) \end{cases} .$$

1. Cours : énoncer la formule des probabilités totales pour un système complet d'événements fini.
2. (a) Écrire une fonction Python `simulZ(n,s)` qui prend en argument un réel $s \in]0, 1[$, un entier naturel non nul n , et simule la variable $Z_{n,s}$.
(b) En déduire une fonction Python `simul_moy(n,s)` qui prend en argument un réel $s \in]0, 1[$, un entier naturel non nul n et qui renvoie une valeur approchée du taux moyen de places disponibles dans le train choisi via ce protocole.
3. Calculer $\mathbb{E}(Z_{n,0})$ et $\mathbb{E}(Z_{n,1})$.
4. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $\mathbb{P}(B \cap (Z_{n,s} \leq t)) = s^{n-1}t$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $0 < s < 1$.

5. Soit $t \in [0, 1]$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, montrer que :

$$\mathbb{P}(A_k \cap (Z_{n,s} \leq t)) = \begin{cases} (t - s)s^{k-1} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases} .$$

6. Montrer que $Z_{n,s}$ est une variable à densité, et en donner une densité.
7. Déterminer $\mathbb{E}(Z_{n,s})$ puis déterminer le seuil s_n^* qui maximise, en fonction de n , le taux moyen de places disponibles du train choisi par l'usager.

Solution :

CORRIGÉ

1. Programme de 1ère année VI.5 (semestre 1) p.16.

```

2. import numpy.random as rd
def simulZ(n,s):
    for i in range(1,n):
        x = rd.random()
        if x > s:
            return x
    return rd.random()

def simul_moy(n,s):
    N = 1000
    S = 0
    for i in range(N):
        S += simulZ(n,s)
    return S/N

```

3. Si le seuil est fixé à 0, alors l'utilisateur montera presque sûrement dans le premier train. Ainsi,

$$\mathbb{E}(Z_{n,0}) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}.$$

Si le seuil est fixé à 1, alors presque sûrement aucun train n'aura le taux de places disponibles nécessaire, et donc l'utilisateur montera dans le dernier train. Ainsi

$$\mathbb{E}(Z_{n,1}) = \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}.$$

4. Si $s = 0$, alors la probabilité de B est nulle, et donc la probabilité cherchée est nulle aussi, et l'égalité est vraie.

Si $s > 0$, alors $\mathbb{P}(B) \neq 0$, et par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(B \cap (Z_{n,s} \leq t)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(Z_{n,s} \leq t).$$

Sachant que B est réalisé et B et X_n étant indépendants, on a :

$$\mathbb{P}_B(Z_{n,s} \leq t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) = t.$$

Ensuite, B est réalisé ssi $X_i < s$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Chacun des ces événements est de probabilité s , et par indépendance, on a donc

$$\mathbb{P}(B) = s^{n-1}.$$

Finalement : $\mathbb{P}(B \cap (Z_{n,s} \leq t)) = s^{n-1}t$.

5. On a par indépendance

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k \cap [Z_{n,s} \leq t]) &= \mathbb{P}([X_1 < s] \cap [X_2 < s] \cap \cdots \cap [X_{k-1} < s] \cap [s \leq X_k \leq t]) \\ &= \begin{cases} s^{k-1}(t-s) & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases} \end{aligned}$$

6. Déterminons la fonction de répartition de $Z_{n,s}$. D'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\{A_1, \dots, A_{n-1}, B\}$.

Si $t \geq s$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{n,s} \leq t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k \cap [Z_{n,s} \leq t]) + \mathbb{P}(B \cap [Z_{n,s} \leq t]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s^{k-1}(t-s) + s^{n-1}t \\ &= (t-s) \frac{1-s^{n-1}}{1-s} + ts^{n-1} \end{aligned}$$

Si $t < s$, la même formule donne

$$\mathbb{P}(Z_{n,s} \leq t) = ts^{n-1}.$$

$Z_{n,s}$ est à valeurs dans $[0,1]$ donc $F_{Z_{n,s}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$ Ainsi, avec la question précédente :

$$F_{Z_{n,s}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ts^{n-1} & \text{si } 0 \leq t < s \\ (t-s)\frac{1-s^{n-1}}{1-s} + ts^{n-1} & \text{si } s \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition de $Z_{n,s}$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, t, 1\}$. On vérifie par limites à droite et à gauche qu'elle est continue en ces trois points donc continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $Z_{n,s}$ est une variable à densité.

$$F'_{Z_{n,s}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ s^{n-1} & \text{si } 0 < t < s \\ \frac{1-s^n}{1-s} & \text{si } s < t < 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

donc $Z_{n,s}$ admet pour densité (par exemple) :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ s^{n-1} & \text{si } 0 \leq t < s \\ \frac{1-s^n}{1-s} & \text{si } s \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

7. $Z_{n,s}$ admet une espérance car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est absolument convergente ($Z_{n,s}$ est en effet à valeurs dans $[0, 1]$).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{n,s}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt \\ &= \int_0^s tf(t) dt + \int_s^1 tf(t) dt \\ &= s^{n-1} \frac{1}{2} s^2 + \frac{1-s^n}{1-s} \frac{1}{2} (1-s^2) \\ &= \frac{1}{2} s^{n+1} + \frac{1}{2} (1-s^n)(1+s) \\ &= \frac{1}{2} (1-s^n + s) \end{aligned}$$

Soit $\varphi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall s \in]0, 1[, \varphi(s) = \frac{1}{2} (1-s^n + s).$$

Alors φ est dérivable, et pour tout $s \in]0, 1[$,

$$\varphi'(s) = \frac{1}{2} (1 - ns^{n-1}).$$

La fonction φ est donc croissante sur $\left] 0, \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \right]$ et décroissante sur $\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}, 1 \right[$.

Elle admet donc un maximum en $s_n^* = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, qui vaut

$$\varphi(s_n^*) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \right).$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes strictement positifs.

Dans les deux cas suivants, montrer que les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont de même nature :

1. si le terme général v_n vérifie $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$;
2. si le terme général v_n vérifie $v_n = \frac{u_n}{u_1 + u_2 + \dots + u_n}$.

Solution :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant à termes positifs, il en est de même de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et ainsi les sommes partielles de leurs séries soit convergent soit tendent vers $+\infty$.

1. • Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge.

Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de limite nulle, et donc $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{1 + u_n} \rightarrow 1$, et donc $v_n \sim u_n$.

Par comparaison des séries à termes positifs, on obtient que $\sum v_n$ converge.

- Dans le cas où la série $\sum v_n$ converge.

En remarquant que $u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}$, on obtient par un raisonnement analogue la convergence de $\sum u_n$.

Les deux séries sont donc de même nature.

2. • Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge.

On note $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k$. Et, par passage à la limite $S \geq u_1$, donc $S > 0$.

Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de limite nulle, et donc $\frac{S \times v_n}{u_n} = \frac{S}{u_1 + \dots + u_n} \rightarrow 1$, et donc $v_n \sim \frac{u_n}{S}$.

Par comparaison des séries à termes positifs, on obtient que $\sum v_n$ converge.

- Dans le cas où la série $\sum v_n$ converge.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Nécessairement $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, et donc $-\ln(1 - v_n) \sim v_n$.

On obtient donc que $\sum -\ln(1 - v_n)$ converge. Regardons la suite des sommes partielles de cette série convergente.

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^n -\ln(1 - v_k) = \sum_{k=2}^n -\ln\left(1 - \frac{u_k}{1 + \dots + u_k}\right) = \sum_{k=2}^n -\ln\left(\frac{S_{k-1}}{S_k}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_1)$$

Comme $\sum -\ln(1 - v_n)$ converge, alors la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=2}^n -\ln(1 - v_k)\right)_n$ est de limite

finie, et il en est donc de même de la suite $(\ln(S_n))_n$.

Par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on obtient que la suite $(S_n)_n$ a une limite finie, ie que la série $\sum u_k$ converge.

Les deux séries sont donc de même nature.

SUJET Maths Appliquées 6

Exercice principal Maths Appliquées 6

Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de « six » obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de « six » obtenus et on répète l'expérience, définissant ainsi une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de « six » obtenus après n lancers.

1. Cours : formule des probabilités totales.
2. Écrire en Python une fonction prenant en argument deux entiers non nuls n et N et simulant une réalisation de la variable aléatoire S_n .
3. Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[S_n = k]$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n où $p_{n+1} = \frac{1 + p_n}{6}$.
5. Déterminer une expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. On note T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires à l'obtention des N « six ».
 - (a) Écrire en Python une fonction prenant en argument un entier N non nul et simulant une réalisation de la variable aléatoire T .
 - (b) Exprimer l'événement $[T = 1]$ à l'aide de la variable S_1 et, pour tout entier $n \geq 2$, exprimer l'événement $[T = n]$ à l'aide des variables aléatoires S_n et S_{n-1} .
 - (c) En déduire la loi de T .

Solution :

1. Cours : 1ère année p.17
2.

```
import numpy.random as rd

def S(N,n):
    des_restants = N
    s = 0
    for k in range(n):
        x=rd.binomial(des_restants,1/6)
        des_restants =des_restants-x
        s += x
    return s
```
3. Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[S_n = k]$ est la loi binomiale de paramètres $N - k$ et $\frac{1}{6}$ en reconnaissant un nombre de succès lors de la répétitions de $N - k$ expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès $\frac{1}{6}$.
4. On montre le résultat par récurrence. Il est trivial pour $n = 1$ et on trouve que $p_1 = \frac{1}{6}$. Supposons que S_n suive la loi binomiale de paramètres N et p_n . Remarquons que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. $([S_n = k])_{0 \leq k \leq N}$ est un

système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket, \mathbb{P}(S_{n+1} = j) &= \sum_{k=0}^N \mathbb{P}([S_n = k] \cap [S_{n+1} = j]) \\
&= \sum_{k=0}^j \mathbb{P}(S_n = k) \mathbb{P}(X_{n+1} = j - k \mid S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^j \binom{N}{k} p_n^k (1 - p_n)^{N-k} \binom{N-k}{j-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{j-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-j} \\
&= \binom{N}{j} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-j} (1 - p_n)^{N-j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} p_n^k (1 - p_n)^{j-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{j-k} \\
&= \binom{N}{j} \left(\frac{5 - 5p_n}{6}\right)^{N-j} \left(\frac{1 + 5p_n}{6}\right)^j.
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{5 - 5p_n}{6} + \frac{1 + 5p_n}{6} = 1$, S_{n+1} suit la loi binomiale de paramètres N et p_{n+1} où $p_{n+1} = \frac{1 + 5p_n}{6}$.

5. La suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique. Puisque $\ell = \frac{1 + 5\ell}{6} \Leftrightarrow \ell = 1$, posons $u_n = p_n - 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = -\left(\frac{5}{6}\right)^n$ et enfin $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

6. (a) `def T(N):`
`n = 0`
`des_restants = N`
`while des_restants > 0:`
`des_restants -= rd.binomial(des_restants, 1/6)`
`n=n+1`
`return n`

- (b) On trouve que $[T = 1] = [S_1 = N]$ et :

$$\forall n \geq 2, [T = n] = [S_n = N] \cap [S_{n-1} \neq N] = [S_n = N] \setminus [S_{n-1} = N].$$

- (c) La loi de T est donc donnée par $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(S_1 = N) = p_1^N = \frac{1}{6^N}$ et :

$$\forall n \geq 2, \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(S_n = N) - \mathbb{P}(S_{n-1} = N) = p_n^N - p_{n-1}^N = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N$$

En bonus, on peut demander un équivalent de $\mathbb{P}(T = n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. À l'aide de la formule du binôme, on trouve que $\mathbb{P}(T = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} N \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 6

Soient $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_0^1 x^k f(x) \, dx = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]0, 1[$.

Solution :

On remarque que f s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$ car son intégrale est nulle.

Supposons par l'absurde que f s'annule exactement k fois sur $]0, 1[$, où $0 < k < n$. Notons $a_1, \dots, a_j$ les points où f s'annule sur $]0, 1[$ en changeant de signe et considérons le polynôme $P : x \mapsto (x - a_1) \cdots (x - a_j)$. Remarquons que $j \neq 0$ car sinon f serait de signe constant sur $]0, 1[$, ce qui est exclu.

Par linéarité de l'intégrale, on trouve alors que :

$$\int_0^1 P(x) f(x) \, dx = 0.$$

Or, la fonction Pf est de signe constant sur $[0, 1]$ par construction de P . On en déduit alors que la fonction Pf est nulle sur $[0, 1]$ donc que f est nulle sur $[0, 1]$ privé d'un nombre fini de valeurs (les racines de P), ce qui est absurde par hypothèse.

SUJET Maths Appliquées 7

Exercice principal Maths Appliquées 7

On souhaite estimer la proportion $p \in]0, 1[$ de personnes, au sein d'une population, abonnées à un réseau social.

On note : $q = 1 - p$.

Soit un entier $n \geq 1$ fixé. On considère un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires, indépendantes, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et définies sur un même espace probabilisé.

On note : $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Cours : énoncer l'inégalité de Markov.
2. Déterminer l'espérance et la variance de $\overline{X}_n$. Justifier que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de p .
3. (a) Écrire une fonction Python `simulXbarre(n,p)` prenant en arguments un entier `n` et une probabilité `p`, et qui simule la variable $\overline{X}_n$.

- (b) Montrer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que l'intervalle $\left[\overline{X}_n - \sqrt{\frac{5}{n}}; \overline{X}_n + \sqrt{\frac{5}{n}} \right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95.

On se propose de déterminer un intervalle de confiance d'une autre manière.

4. On fixe un réel strictement positif t quelconque et ε un réel strictement positif quelconque.

(a) Établir l'égalité : $\mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{nt\overline{X}_n} \geq e^{nt(p+\varepsilon)})$

(b) Établir l'inégalité suivante : $\mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\ln(pe^t + q) - t(p+\varepsilon))}$

(c) On admet l'inégalité : $\ln(pe^t + q) - tp \leq \frac{t^2}{8}$. Ainsi, on a l'inégalité suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n\left(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon\right)}$$

En déduire l'inégalité : $\mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$

5. Soit $\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - X_k)$. On admet que par un raisonnement analogue : $\mathbb{P}(\overline{Y}_n - q \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$.

Montrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

6. Comment choisir ε pour obtenir un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 ? L'estimation de p obtenue par cet intervalle de confiance est-elle meilleure que celle obtenue en 3.(c) ?

Solution :

1. cours : programme de seconde année p.19
2. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{np}{n} = p$. Par indépendance, $\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.
 $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de p car $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = p$.

3. (a)

```
import numpy as np
import random as rd
def simulXbarre(n,p):
    S = 0
    for i in range(n):
        x = rd.random()
        if x < p:
            S += 1
    return S/n
```

(b) $\overline{X}_n$ est une variable d'espérance p et de variance $\frac{p(1-p)}{n}$ donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Or $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ donc $\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Par ailleurs, $(|\overline{X}_n - p| > \varepsilon) \subset (|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon)$ donc par croissance de la probabilité :

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Et par passage à l'événement contraire : $\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$, c'est à dire :

$$\mathbb{P}(p \in [\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

En prenant $\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{n}}$ on obtient :

$$\mathbb{P}\left(p \in \left[\overline{X}_n - \sqrt{\frac{5}{n}}, \overline{X}_n + \sqrt{\frac{5}{n}}\right]\right) \geq 0,95$$

4. (a)

$$\begin{aligned} (\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) &= (nt\overline{X}_n \geq nt(p + \varepsilon)) \quad \text{car } nt > 0 \\ &= (e^{nt\overline{X}_n} \geq e^{nt(p+\varepsilon)}) \quad \text{car exp est bijective et croissante} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{nt\overline{X}_n} \geq e^{nt(p+\varepsilon)})$$

$$(b) \text{ D'après le théorème de transfert } \mathbb{E}(e^{nt\overline{X}_n}) = \sum_{k=0}^n e^{nt\frac{k}{n}} \mathbb{P}(\overline{X}_n = \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (q + pe^t)^n$$

Ainsi $e^{nt\overline{X}_n}$ est une variable positive qui admet pour espérance $(q + pe^t)^n$, donc d'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(e^{nt\overline{X}_n} \geq e^{nt(p+\varepsilon)}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{nt\overline{X}_n})}{e^{nt(p+\varepsilon)}}$$

et en utilisant 4.(a) :

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq \frac{(q + pe^t)^n}{e^{nt(p+\varepsilon)}}$$

c'est à dire :

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\ln(pe^t + q) - t(p+\varepsilon))}$$

(c) Le trinôme du second degré $\frac{t^2}{8} - t\varepsilon$ atteint son minimum en $\frac{\varepsilon}{1/4} = 4\varepsilon$ et ce maximum vaut $-2\varepsilon^2$. Et par croissance de l'exponentielle, on obtient l'inégalité voulue.

5. $Y_n = 1 - X_n$ donc $(\overline{Y}_n - q \geq \varepsilon) = (1 - \overline{X}_n - (1-p) \geq \varepsilon) = (-(\overline{X}_n - p) \geq \varepsilon) = (\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon)$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$$

Comme $(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) = (\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \cup (\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon)$ et l'union étant disjointe :

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon)$$

$$\text{Ainsi : } \mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

6. On choisit ε vérifiant $1 - 2e^{-2n\varepsilon^2} \geq 0,95$.

$$\varepsilon = \sqrt{-\frac{\ln(0,0025)}{2n}} \text{ convient.}$$

Cet intervalle, tout comme celui de la question 3.(c) a une longueur de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, il n'y a donc pas d'amélioration sensible.

remarque : le premier intervalle est de longueur environ $\frac{4,5}{\sqrt{n}}$ alors que le second est $\frac{2,7}{\sqrt{n}}$, le second intervalle améliore donc un peu l'estimation

Exercice sans préparation Maths Appliquées 7

Soit la fonction Python `mystere(M,n)` prenant en entrée la matrice d'adjacence M d'un graphe non orienté et un entier naturel non nul n égal à son ordre (nombre de sommets). Les sommets sont les entiers naturels de 0 à $n - 1$. La matrice M est représentée par un tableau `numpy` et l'accès à l'élément d'indice i, j est réalisé par `M[i,j]`

```
def mystere(M,n):
    i = 0
    j = 0
    while i < n and j < n:
        if i == j:
            i = i+1
        else:
            if M[i,j] == 1:
                j = j+1
                i = 0
            else:
                i = i+1
    return j
```

Que renvoie cette fonction ?

Solution :

Cette fonction recherche et renvoie, s'il existe, le premier indice j tel que la colonne de numéro j soit constituée de 0 sauf éventuellement à la position j, j et s'il n'existe pas de tel indice alors la valeur n est renvoyée.

Cette fonction recherche donc un sommet qui n'est relié à aucun autre sommet distinct (il peut en revanche être relié à lui-même, ou non) et renvoie ce sommet s'il existe, et sinon, elle renvoie la valeur n .

Question supplémentaire : on dit dans ce cas que le sommet est isolé. Écrire une fonction Python prenant en entrée la matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets dont les sommets sont les entiers de 0 à $n - 1$ et renvoyant le nombre de points isolés de ce graphe.

Corrigé de la question supplémentaire :

```
def compte(M,n):
    cpt = 0
    for j in range(n):
        i = 0
        while i < n and (M[i,j] == 0 or i == j):
            i = i+1
        if i == n:
            cpt = cpt + 1
    return cpt
```

SUJET Maths Appliquées 8

Exercice principal Maths Appliquées 8

1. Cours : donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ où $a \in \mathbb{R}$
2. On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$ où $\text{Sp}(A)$ désigne le spectre de la matrice A . Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A et montrer que la famille obtenue par concaténation de ces bases n'est pas une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On admet alors que la matrice A n'est pas diagonalisable.

- (b) On note $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1)$ et $a_3 = (1, -1, 0)$.

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$.

- (c) Déterminer une matrice carrée P telle que $A = PMP^{-1}$ (le calcul de P^{-1} n'est pas demandé ici)

3. On admet que $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Soient f , g et h trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(t) &= 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) &= f(t) + 2g(t) + h(t) \\ h'(t) &= 3h(t) \end{cases} \quad \text{et } f(0) = g(0) = h(0) = 1.$$

- (a) Déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) On note $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$.

On note $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$.

Montrer qu'on a : $\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

- (c) En déduire l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme $P(t)e^{3t}$ où P est un polynôme de degré 1.

- (d) Déterminer alors l'expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de t .

Solution :

1. Programme de première année, second semestre 3, p. 20.

(a) Après échelonnement : $\text{rg}(A - \lambda I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & (\lambda - 1)(3 - \lambda) & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$. On a donc $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$

$$E_1(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_3(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La concaténation des bases des sous-espaces propres est la famille de deux vecteurs $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Cette famille est libre (cours) mais ne comporte que 2 vecteurs donc elle n'est pas une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc (admis dans l'énoncé car pas au programme) A n'est pas diagonalisable.

- (b) On montre facilement la liberté, et comme la famille est composée de trois vecteurs, la famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

On a alors $\varphi(a_1) = 3a_1$, $\varphi(a_2) = a_1 + 3a_2$ et $\varphi(a_3) = a_3$, d'où la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Par formule de changements de base, on obtient donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) h est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $y' - 3y = 0$ vérifiant $y(0) = 1$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = e^{3t}.$$

- (b) On a $X'(t) = AX(t)$, et donc

$$Y'(t) = P^{-1}APY(t) = MY(t).$$

$$\text{Ainsi } \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } u'(t) = 3u(t) + v(t)$$

$$\text{Comme } Y = P^{-1}X, \text{ on a } v = h \text{ et comme } h(t) = e^{3t} \text{ on a bien : } \forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = 3u(t) + e^{3t}.$$

- (c) Les conditions initiales pour u , v et w se déduisent de celles pour f , g et h , en particulier

$$u(t) = \frac{1}{2}(f(t) + g(t)), \text{ et donc } u(0) = 1.$$

Une solution particulière est $t \mapsto te^{3t}$, ainsi, en tenant compte en outre de la condition initiale $u(0) = 1$, on trouve $u : t \mapsto (t+1)e^{3t}$

- (d) On a pour tout t : $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} = PY(t) = \begin{pmatrix} u(t) + w(t) \\ u(t) - w(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

On a $w'(t) = w(t)$, avec $w(0) = \frac{1}{2}(f(0) - g(0)) = 0$. Ainsi, on a $w = 0$, puis $f(t) = g(t) = u(t)$.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 8

Une enfant possède deux paquets de n bonbons, un dans chaque poche. À chaque fois qu'elle veut manger un bonbon, elle choisit une poche au hasard et prend un bonbon du paquet correspondant. À un moment, elle essayera de piocher dans un des paquets de bonbons et réalisera qu'il est vide. On note X le nombre de bonbons restant dans l'autre paquet à ce moment-là. Déterminer la loi de X .

1. Ecrire le code d'une fonction Python `simuleX(n)` prenant l'entier n en argument et réalisant une simulation de la variable aléatoire X .
2. Déterminer la loi de X .

Solution :

```
1. import numpy.random as rd
```

```
def simuleX(n):
    X1,X2=n,n
    while X1*X2>0:
        x=rd.random()
        if x<1/2:
            X1=X1-1
        else:
            X2=X2-1
    return max(X1,X2)
```

2. Notons G_i l'événement « l'enfant choisit la poche de gauche à son i -ème choix ».
Remarquons que $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Par symétrie, on trouve que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n - k) &= 2\mathbb{P}\left(G_{n+k} \cap \left[\bigcup_{\substack{J \subset \llbracket 1, n+k-1 \rrbracket \\ \text{card } J = n-1}} \left(\bigcap_{j \in J} G_j \right) \cap \left(\bigcap_{j \in \llbracket 1, n+k-1 \rrbracket \setminus J} \overline{G_j} \right) \right] \right) \\ &= \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n+k-1 \rrbracket \\ \text{card } J = n-1}} \frac{1}{2^{n+k-1}} \quad \text{par disjonction et indépendances des tirages} \\ &= \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-1}{n-1}.\end{aligned}$$

Question supplémentaire : déterminer l'espérance de X .

Solution : Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \mathbb{P}(X = n-k) \\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} k \mathbb{P}(X = n-k) \\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} k \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-1}{n-1} \\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} k \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-1}{k} \\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} (n+k-1) \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-2}{k-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= n - \sum_{k=0}^{n-1} (n+k-1) \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-2}{n-1} \\
&= n \left(1 - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-2}{n-1} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1) \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-2}{n-1} \\
&= n \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n+k-2}} \binom{n+k-2}{n-1} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k+1) \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-2}{n-1} \\
&= n \left(1 - 2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-1}{n-1} \right) + \sum_{k=0}^{n-2} (n-k) \frac{1}{2^{n+k}} \binom{n+k-1}{n-1} \\
&= n\mathbb{P}(X=1) + \frac{1}{2} (E(X) - \mathbb{P}(X=1))
\end{aligned}$$

d'où finalement $E(X) = (2n-1)\mathbb{P}(X=1) = (2n-1) \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1}$.

SUJET Maths Appliquées 9

Exercice principal Maths Appliquées 9

Soit α un réel positif ou nul. Soit f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\alpha(x) = x^3 + \alpha x - 1$$

1. Cours : donner la définition d'une fonction strictement décroissante sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note $\varphi(\alpha)$ cette solution.
La fonction φ est ainsi la fonction qui à tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ associe l'unique solution $\varphi(\alpha)$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f_\alpha(x) = 0$.
3. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < \varphi(\alpha) \leq 1$
4. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction Python `dicho(alpha)` prenant en entrée un réel α positif ou nul et renvoyant une valeur approchée de $\varphi(\alpha)$ à 10^{-3} près.
5. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer $\varphi(0)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha)$
6. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]0, 1]$ et déterminer sa bijection réciproque, puis justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Solution :

1. Cours : programme de première année V.3 p. 14
2. f_α est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_\alpha(x) = 3x^2 + \alpha$ est positive et éventuellement nulle en un point (lorsque $\alpha = 0$) en 0, donc f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, f_α est également continue sur $\mathbb{R}$ et $f_\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_\alpha(x) = 0$ admet une unique solution $\varphi(\alpha)$ dans $\mathbb{R}$.
3. On a $-1 < 0 \leq \alpha$, c'est à dire $f_\alpha(0) < f_\alpha(\varphi(\alpha)) \leq f_\alpha(1)$, donc par stricte croissance de f_α on en déduit : $0 < \varphi(\alpha) \leq 1$
4. On commence par implémenter la fonction f_α .

```
def f(alpha,x):  
    return x**3+alpha*x-1
```

Puis la dichotomie.

```
def dicho(alpha):  
    a,b = 0,1  
    while abs(b-a) > 10**(-3):  
        m = (a+b)/2  
        if f(alpha,a)*f(alpha,m) >0:  
            a = m  
        else:  
            b = m  
    return a
```

5. Montrons que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Soit α et β tels que $0 \leq \alpha < \beta$.
 $f_\alpha(\varphi(\beta)) = \varphi(\beta)^3 + \alpha\varphi(\beta) - 1$
Or $\varphi(\beta)^3 - 1 = -\beta\varphi(\beta)$

Donc $f_\alpha(\varphi(\beta)) = (\alpha - \beta)\varphi(\beta) < 0$ car $\alpha < \beta$ et $\varphi(\beta) > 0$ d'après 3.

Et comme $f_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0$, on a $f_\alpha(\varphi(\beta)) - f_\alpha(\varphi(\alpha)) < 0$ et par croissance de $f_\alpha : \varphi(\beta) < \varphi(\alpha)$

φ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$\varphi(0) = 1$ car 1 est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 = 1$

φ étant décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone φ admet une limite finie ℓ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$ et $\ell \geq 0$.

Si $\ell \neq 0$ alors $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha)^3 + \alpha\varphi(\alpha) = +\infty$ ce qui est contradictoire étant donné que $\varphi(\alpha)^3 + \alpha\varphi(\alpha) = 1$

Ainsi $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha) = 0$

remarque : on peut ici faire une démonstration plus directe en remarquant que $\varphi(\alpha) = \frac{1 - \varphi(\alpha)^3}{\alpha}$ et que le numérateur est borné

6. φ étant strictement décroissante, elle est injective de $\mathbb{R}_+$ dans $]0, 1]$

Soit $y \in]0, 1] : y = \varphi(\alpha) \Leftrightarrow y^3 + \alpha y = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1 - y^3}{y}$

Ainsi pour tout $y \in]0, 1]$, $y = \varphi\left(\frac{1 - y^3}{y}\right)$ et $\frac{1 - y^3}{y} \in \mathbb{R}_+$

Donc φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]0, 1]$ et $\varphi^{-1} : y \mapsto \frac{1 - y^3}{y}$. Cette application étant continue sur $]0, 1]$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, sa réciproque φ est également continue sur $\mathbb{R}_+$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 9

Soit n un entier naturel non nul.

On choisit au hasard (et de manière équiprobable) une fonction σ parmi toutes les bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On considère que σ est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On dit que $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est un **point fixe** de σ si $\sigma(k) = k$.

Quel est le nombre moyen de points fixes de σ ?

Solution :

Aide/questions intermédiaires :

- Combien y a-t-il de bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même ?

- À quoi correspond la variable aléatoire $\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[\sigma(k)=k]}$?

On note X le nombre de points fixes de σ et on remarque que :

$$X = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[\sigma(k)=k]}$$

Ainsi, par un argument de dénombrement, on trouve que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\sigma(k) = k) = \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} = 1.$$

SUJET Maths Appliquées 10

Exercice principal Maths Appliquées 10

Soit n un entier naturel non nul.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $f(P) = Q$ où $Q : x \mapsto P''(x) - 4xP'(x)$.

1. Cours : $\mathbb{R}_n[x]$?
2. On décide de représenter le polynôme nul par la liste vide et tout polynôme non nul $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ (où $a_k \neq 0$) par sa liste `[a_0, ..., a_k]` des coefficients dans l'ordre croissant des degrés.
Écrire en Python une fonction `f` qui, à partir de la liste `coeff_P` des coefficients d'un polynôme P renvoie la liste des coefficients du polynôme $f(P)$.
3. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ et déterminer sa matrice A dans la base canonique.
4. Montrer que A est diagonalisable. Quelle est la dimension de chacun de ses espaces propres ?
5. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que $f(P) = \lambda P$. Montrer que $\lambda = -4 \deg(P)$.
6. En déduire qu'il existe un unique polynôme H_n de degré n et de coefficient dominant 1 tel que $f(H_n) = -4nH_n$ puis montrer que, pour tout $n \geq 1$, $f(H'_n) = -4(n-1)H'_n$.
7. En déduire les formules suivantes :

$$\forall n \geq 1, H'_n = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) - xH_{n-1}(x) + \frac{n-1}{4}H_{n-2}(x) = 0.$$

Solution :

1. Cours : ECG2 Appli p. 6.
2.

```
def f(coeff_P):
    n = len(coeff_P)
    psecond = []
    for k in range(2, n):
        psecond.append(k*(k-1)*coeff_P[k])
    xp_prime = [0]
    for k in range(1, n):
        xp_prime.append(k*coeff_P[k])
    somme = []
    for k in range(n): # longueur de xp_prime
        if k < n-2:
            somme.append(psecond[k] - 4*xp_prime[k])
        else:
            somme.append(-4*xp_prime[k])
    return somme
```
3. L'application est trivialement linéaire (l'opérateur de dérivation seconde est linéaire et la multiplication par x aussi).
Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Il vient alors que $P'' \in \mathbb{R}_n[x]$ et $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ puis que $xP' \in \mathbb{R}_n[x]$.
On en déduit que $f(P) \in \mathbb{R}_n[x]$ et ainsi que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
Puisque $f(1) = 0$, $f(x) = -4x$ et pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $f(x^k) = k(k-1)x^{k-2} - 4kx^k$, la matrice de f dans

la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & & & \\ & -4 & 0 & 6 & & & \\ & & -8 & 0 & \ddots & & \\ & & & -12 & \ddots & k(k-1) & \\ & & & & \ddots & 0 & \ddots \\ & (0) & & & & -4k & \ddots & n(n-1) \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & -4n \end{pmatrix}$$

4. La matrice A est triangulaire. Le spectre de A s'obtient donc par lecture des éléments diagonaux de la matrice. Puisque les coefficients de la diagonale sont deux-à-deux distincts, la matrice A admet $n+1$ valeurs propres distinctes (dans un espace de dimension $n+1$), elle est donc diagonalisable et la dimension de chacun de ses espaces propres est égale à 1.
5. Soit P un vecteur propre associé à une valeur propre λ . Ainsi $P'' - 4xP' = \lambda P$. Remarquons que P est un polynôme non nul et notons $a \neq 0$ le coefficient dominant de P . Le coefficient dominant de $P'' - 4xP'$ est $-4a \deg(P)$ tandis que celui de λP est λa . Il vient donc immédiatement que $\lambda = -4 \deg(P)$.
6. **Attention : la diagonalisation d'endomorphisme est hors-programme, il faut raisonner sur les matrices.**

Le réel $-4n$ est une valeur propre de A . Il existe donc un (et même une infinité de) vecteur propre X de A associé à $-4n$. D'après la question précédente, le dernier coefficient a de X est non nul (puisque $\deg(P) = n$).

Notons H_n le polynôme représenté par $\frac{1}{a}X$ dans la base canonique. Ce polynôme est bien de degré n , de coefficient dominant 1 et vérifie $f(H_n) = -4nH_n$.

L'unicité de ce polynôme est assurée par le fait que l'espace propre de A associé à la valeur propre $-4n$ est de dimension 1 : il ne peut exister dans cet espace deux vecteurs de dernier coefficient 1.

En dérivant l'égalité $f(H_n) = -4nH_n$, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_n^{(3)}(x) - 4xH_n''(x) - 4H_n(x) = -4nH_n'(x) \quad \text{i.e.} \quad H_n^{(3)}(x) - 4xH_n''(x) = -4(n-1)H_n'(x).$$

On obtient alors : $f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.

7. De la question précédente, on déduit que, pour tout $n \geq 1$, H_n' est un vecteur propre associé à la valeur propre $-4(n-1)$, tout comme le polynôme nH_{n-1} .

Puisque les espaces propres de f sont de dimension 1 et puisque H_n' et nH_{n-1} sont deux polynômes associées à la même valeur propre et puisqu'ils ont même coefficient dominant, ils sont égaux.

On en déduit que, pour tout $n \geq 2$, $H_n'' = nH_{n-1}' = n(n-1)H_{n-2}$.

Puisque $f(H_n) = -4nH_n$, on en déduit que :

$$\forall n \geq 2, n(n-1)H_{n-2} - 4nxH_{n-1}' = -4nH_n \quad \text{i.e.} \quad H_n - xH_{n-1}' + \frac{n-1}{4}H_{n-2} = 0.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 10

Soient $\lambda > 0$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toute la même loi de Poisson de paramètre λ . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{X_k}.$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un intervalle de confiance asymptotique de $e^{-\lambda}$ au niveau $1 - \alpha$ de la forme $[Y_n - \varepsilon, Y_n + \varepsilon]$, où ε est à déterminer en fonction de n et α .

Solution :

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$, où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Comme les variables X_k sont indépendantes et suivent toutes une loi de Poisson de paramètre λ , la variable S_n suit une loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.

Par théorème de transfert, Y_n admet une espérance si, et seulement si $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k P(S_n = k)$ converge absolument.

Or : $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k P(S_n = k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}$ est le terme général d'une série exponentielle convergente. Ainsi Y_n admet une espérance qui vaut : $\mathbb{E}(Y_n) = e^{-\lambda}$.

De même, Y_n admet une variance si, et seulement si Y_n^2 admet une espérance. Il s'agit ici d'étudier la nature de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2k} P(S_n = k)$ dont le terme général est celui d'une série exponentielle.

Par calcul, on obtient : $\mathbb{E}(Y_n^2) = e^{-n\lambda} e^{(1 - \frac{1}{n})^2 n\lambda} = e^{-2\lambda + \frac{\lambda}{n}}$.

Finalement, Y_n admet une variance qui vaut, par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - (\mathbb{E}(Y_n))^2 = e^{-2\lambda + \frac{\lambda}{n}} - e^{-2\lambda} = e^{-2\lambda} \left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right).$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire Y_n :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|Y_n - e^{-\lambda}| > \varepsilon) \leq \frac{e^{-2\lambda} \left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)}{\varepsilon^2},$$

ce qui peut se récrire :

$$P(Y_n - \varepsilon \leq e^{-\lambda} \leq Y_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{e^{-2\lambda} \left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)}{\varepsilon^2}.$$

Puis, quand n est grand, $e^{\frac{\lambda}{n}} - 1 \leq \frac{2\lambda}{n}$, donc

$$P(e^{-\lambda} \in [Y_n - \varepsilon, Y_n + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{2\lambda e^{-2\lambda}}{n\varepsilon^2}.$$

Enfin, la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est à valeurs dans $[0, e^{-1}]$, ce qui implique : $2\lambda e^{-2\lambda} \leq e^{-1}$, donc $P(e^{-\lambda} \in [Y_n - \varepsilon, Y_n + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{e^{-1}}{n\varepsilon^2}$.

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n} e^\alpha}$, on justifie que $[Y_n - \varepsilon, Y_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de $e^{-\lambda}$ au niveau $1 - \alpha$.

ÉPREUVE ORALE MATHÉMATIQUES T

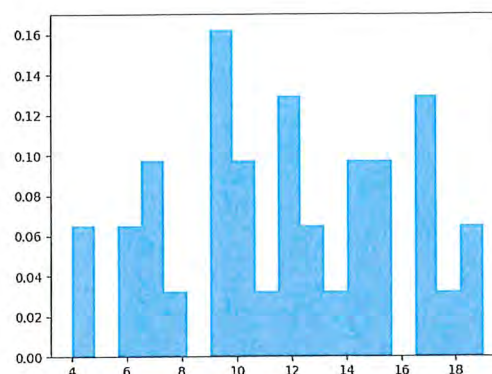
HEC Paris 2025

Programme Grande Ecole

Le bilan de la session 2025 de mathématiques voie T est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 4 et 19. La moyenne s'établit à 11,7 et l'écart-type à 4,17.

count	37.000000
mean	11.702703
std	4.174092
min	4.000000
25%	9.000000
50%	12.000000
75%	15.000000
max	19.000000



Le niveau d'ensemble des candidats reste assez hétérogène : certaines prestations se sont avérées catastrophiques tandis que le jury a également pu remarquer des candidats très brillants faisant preuve de bonnes capacités de réflexion.

Le jury insiste à nouveau sur les points suivants auprès des futurs candidats et de leurs enseignants.

- Le jury continue de remarquer l'existence d'importantes lacunes en calcul chez certains candidats. De même, les théorèmes du cours doivent être connus avec plus de rigueur : hypothèses précises et conclusions. Il importe de lire attentivement la question posée et d'éviter les formules approximatives et fausses.
- Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes restent incontournables. Notamment, le jury est en droit d'attendre l'esquisse qualitative d'une courbe après avoir établi un tableau de variation.
- Il est important de manier le langage mathématique avec rigueur et précision, notamment en ce qui concerne l'utilisation des quantificateurs. Plusieurs candidats se sont révélés avoir des difficultés à rédiger proprement une récurrence. Cela a pu s'avérer pénalisant, notamment dans un sujet traitant de suites récurrentes.
- Comme l'an dernier, chaque planche proposait, soit dans l'exercice principal, soit dans l'exercice sans préparation, au moins une question d'informatique, faisant appel au langage Python ou à du SQL. La simulation correcte de scénarios probabilistes en Python est un élément important et une telle simulation doit à minima contenir le bon nombre de tirages au sort.
- Toujours à propos du langage Python, la fonction `sum()` est autorisée, puisqu'elle apparaît dans le programme officiel, encore faut-il s'en servir correctement. Certains candidats auraient peut-être été mieux inspirés d'utiliser une simple boucle de sommation manuelle plutôt que de se servir de la fonction `sum()` avec des erreurs. Il est impératif de bien maîtriser les fonctions qui apparaissent dans le programme.
- Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral. Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation. Le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Le jury remarque également trop de candidats qui, la moindre demi-formule écrite au tableau, attendent un signe d'acquiescement ou une réaction du jury. C'est à eux d'avancer et le jury saura les arrêter s'il l'estime nécessaire. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre de questions, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts. Le jury apprécie particulièrement les candidats attentifs à la cohérence de leurs résultats, notamment quand cela leur permet de détecter des erreurs puis de les corriger.

- La question sans préparation est aussi très importante. Il n'est pas nécessaire de la mener à son terme pour faire bonne impression. Le jury est là encore attentif aux qualités de réflexion des candidats. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, après avoir raté l'exercice préparé, ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.

Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Voici des sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T 1

Exercice T 1

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher, numérotées de 0 à 3. On effectue trois tirages successifs avec remise. On note X, Y, Z les variables aléatoires égales au résultat de chacun de ces tirages. On note p la probabilité de l'événement $(X + Y = Z)$.

1. Question de cours : Donner la définition de la covariance de deux variables aléatoires réelles.
2. Donner les lois de X, Y et Z ainsi que leur espérance et leur variance.
3. Déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y) . Préciser sa covariance.
4. En déduire la loi de la variable aléatoire $X + Y$. Préciser son espérance et sa variance.
5. En déduire la valeur de p .
6. Application

Un système de tickets à gratter fonctionne de la façon suivante :

- Un ticket coûte un euro.
- Il y a sur le ticket 3 cases et, en grattant une case, on découvre un numéro compris entre 0 et 3. Le ticket est gagnant si la somme des deux premiers nombres vaut le troisième. Toutes les configurations de numéros sur les tickets sont équiprobables.
- Un ticket gagnant rapporte a euros au consommateur où a est à déterminer.

- (a) Exprimer en fonction de a l'espérance de gain du joueur.
- (b) Pour quelle valeur de a le jeu est-il équitable? C'est à dire que l'espérance du gain est égale à 0.
- (c) Le gain a est mis à $a = 6$. Un joueur décide de jouer jusqu'à ce qu'il gagne une partie. En moyenne, combien de parties devra-t-il jouer et quel est son gain final?
- (d) Ecrire le corps de la fonction XYZ, de sorte que dans le script suivant, la fonction Gain retourne une simulation du gain obtenu à l'issue d'une série de parties s'arrêtant à la première partie gagnée.

```
def Gain():  
    a = 6  
    S = 0  
    perdu = True  
    while perdu :  
        S += 1  
        perdu = ( XYZ() + XYZ() != XYZ() )  
    return a - S
```

Solution :

1. Question de cours : ECT2, p.6
2. Les variables X, Y et Z ont même loi, la loi uniforme sur $\llbracket 0, 3 \rrbracket$, sont indépendantes. On peut remarquer que $X' = X + 1$ est uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$, ce qui permet d'utiliser les formules d'espérance et de variance du cours

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X') - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X') = \frac{(4)^2 - 1}{12} = \frac{5}{4}.$$

(On peut refaire le calcul manuellement, il s'agit de sommes comportant 4 termes...)

3. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) . Préciser sa covariance. Les tirages se font avec remise, ce qui implique une hypothèse d'indépendance sur X et Y . On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[(X = i) \cap (Y = j)] &= \mathbb{P}(X = i) \cdot \mathbb{P}(Y = j) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

et

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

4. La variable aléatoire $X + Y$ est à valeurs dans $\llbracket 0, 6 \rrbracket$.

(a) Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$.

- (b) Par développement de la variance d'une somme de v.a. indépendantes,

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}.$$

On calcule pour chaque $k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}(X + Y = k)$.

— Pour $k = 0$: $X + Y = 0 \iff (X = 0 \text{ et } Y = 0)$ donc $\mathbb{P}(X + Y = 0) = \mathbb{P}[(X = 0) \cap (Y = 0)] = \frac{1}{16}$ d'après 2.

— Pour $k = 1$: $X + Y = 1 \iff (X = 1 \text{ et } Y = 0) \text{ ou } (X = 0 \text{ et } Y = 1)$ donc $\mathbb{P}(X + Y = 1) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$.

— Pour $k = 2$: $X + Y = 2 \iff (X = 2 \text{ et } Y = 0) \text{ ou } (X = 1 \text{ et } Y = 1) \text{ ou } (X = 0 \text{ et } Y = 2)$ donc $\mathbb{P}(X + Y = 2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. En raisonnant de même pour les autres valeurs de k , on obtient

la loi de $X + Y$:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X + Y = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

— Remarque : la somme des probabilités est bien égale à 1.

5. Les v.a. $X + Y$ et Z sont indépendantes et, par la formule des probabilités totales (en utilisant le système d'événements $[Z = 0], [Z = 1], [Z = 2], [Z = 3]$), il vient

$$\begin{aligned}p &= \mathbb{P}(X + Y = Z) \\ &= \mathbb{P}(X + Y = 0 \cap Z = 0) + \mathbb{P}(X + Y = 1 \cap Z = 1) + \mathbb{P}(X + Y = 2 \cap Z = 2) + \mathbb{P}(X + Y = 3 \cap Z = 3)\end{aligned}$$

et donc par indépendance :

$$\begin{aligned}p &= \mathbb{P}(X + Y = 0) \cdot \mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(X + Y = 1) \cdot \mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{P}(X + Y = 2) \cdot \mathbb{P}(Z = 2) + \mathbb{P}(X + Y = 3) \cdot \mathbb{P}(Z = 3) \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{16} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{10}{64} = \frac{5}{32}.\end{aligned}$$

6. Application

(a) Le gain du joueur est $G = \begin{cases} a - 1 & \text{si la partie est gagnée} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$. On a $\mathbb{E}(G) = p \cdot (a - 1) + (1 - p) \cdot (-1) = a \cdot p - 1$.

(b) Le jeu est équitable lorsque $a \cdot p - 1 = 0$, c'est à dire $a = \frac{1}{p}$ puisque $p \neq 0$.

- (c) On suppose donc que $a = 6$ et que le joueur décide de rejouer jusqu'à ce qu'il gagne une partie. Soit T le numéro de la première partie gagnante. La variable aléatoire T suit une loi géométrique de paramètre p . On a

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p} = \frac{32}{5}.$$

Le « gain » du joueur est $G = a - T$, et donc, en moyenne :

$$\mathbb{E}(G) = a - \mathbb{E}(T) = 6 - \frac{32}{5} = -\frac{2}{5}$$

Ce n'est pas si mauvais d'un point de vue commercial car cela permet au joueur de passer un certain temps au comptoir (6 parties), sans avoir à trop déboursier à la fin, (en moyenne 40 centimes)

(d) Il suffit d'écrire un tirage au sort uniforme sur l'intervalle d'entiers $\llbracket 0, 3 \rrbracket$.

```
import numpy as np
def XYZ():
    return int(np.floor(np.random.rand()*4))
```

Exercice sans préparation T 1

Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \cdot \binom{2n}{n} - 1.$$

Solution :

On veut montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \cdot \binom{2n}{n} - 1.$$

Pour $n = 1$, les composantes (partie gauche, partie droite) de la formule sont :

$$\frac{1}{4} \cdot \binom{2}{1} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{2n+1}{4^n} \cdot \binom{2n}{n} - 1 = \frac{3}{4} \cdot \binom{2}{1} - 1 = \frac{1}{2}$$

et donc la formule est vraie pour $n = 1$.

Supposons la formule vraie pour un certain entier n . On a alors, au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} + \frac{1}{4^{n+1}} \binom{2(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{2n+1}{4^n} \cdot \binom{2n}{n} - 1 + \frac{1}{4^{n+1}} \binom{2(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} \left(\frac{4(2n+1)(2n)!}{(n!)^2} + \frac{(2(n+1))(2n+1)(2n)!}{(n+1)!^2} \right) - 1 \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} \frac{(2n+1)(2n)!}{(n+1)!^2} (4(n+1)^2 + 2(n+1)) - 1 \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} (2(n+1) + 1) - 1 \end{aligned}$$

Cette dernière formule est bien la formule attendue pour obtenir l'hérédité de la propriété.

SUJET T 2

Exercice T 2

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, diagonalisable, qui possède 2 valeurs propres strictement positives, deux à deux distinctes, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Soit $P = (X_1 | X_2)$ une matrice décrite par ses colonnes : X_1 est la première colonne de P , X_2 est la deuxième colonne de P . On suppose que P diagonalise A , c'est à dire que P est inversible et

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

On suppose par ailleurs qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

1. Question de cours. Définition de « Une matrice carrée A est diagonalisable ».
2. Etude d'un cas particulier. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Vérifier que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalise A et donner $P^{-1}.A.P$.

- (b) Construire une matrice M telle que $M^2 = A$. (On pourra donner une formule non simplifiée faisant intervenir P^{-1} et P .)
3. On revient au cas général.
 - (a) Montrer que le polynôme $C(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ est annulateur de la matrice A .
 - (b) En déduire un polynôme annulateur de la matrice M . Quelles sont les valeurs propres possibles pour M ?
4.
 - (a) Montrer que X_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 et vérifier qu'un vecteur X vérifie $AX = \lambda_1 X$ si et seulement si il existe un nombre réel α tel que $X = \alpha X_1$.
 - (b) Montrer que si X est vecteur propre de M^2 , alors soit $MX = 0$, soit MX est vecteur propre de M^2 pour la même valeur propre.
 - (c) En déduire que si X est vecteur propre de M^2 , alors X et MX sont deux vecteurs colonnes proportionnels.
 - (d) En déduire que la matrice P diagonalise la matrice M . C'est à dire que $P^{-1}MP$ est diagonale.
5. On notera dans la suite : $B = P^{-1}AP$ et $N = P^{-1}MP$.
 - (a) Vérifier que l'équation $M^2 = A$ équivaut à $N^2 = B$.
 - (b) Expliciter toutes les matrices M vérifiant $M^2 = A$.

Solution :

1. ECT2 p.7
2. (a) Appelons X_1, X_2 les deux colonnes de P :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $A.X_1 = X_1$ et $A.X_2 = 3X_2$. On a

$$A.P = (X_1 | 3X_2) = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Comme P est inversible (son det vaut $-2 \neq 0$), il vient

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) En posant

$$M = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

On a $M^2 = A$.

3. (a) Soit le polynôme $C(x) = (x - \lambda_1).(x - \lambda_2)$. On a (on multiplie à gauche et à droite par P^{-1} et P , on intercale aussi le produit de ces deux matrices) :

$$\begin{aligned} C(A) &= (A - \lambda_1.I_2).(A - \lambda_2.I_2) \\ P^{-1}.C(A).P &= P^{-1}.(A - \lambda_1.I_2).P.P^{-1}.(A - \lambda_2.I_2).P \\ &= (P^{-1}.A.P - \lambda_1.I_2).(P^{-1}.A.P - \lambda_2.I_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $C(A) = P.0.P^{-1} = 0$. C'est à dire que C est annulateur de la matrice A .

- (b) On en déduit que $D(x) = C(x^2) = (x^2 - \lambda_1).(x^2 - \lambda_2)$ est annulateur de M . Les valeurs propres possibles pour M sont les racines de ce polynôme, à savoir $\sqrt{\lambda_1}, -\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, -\sqrt{\lambda_2}$.
4. (a) On a

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A.P = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ce qui se lit colonne par colonne, matriciellement :

$$(A.X_1 | A.X_2) = (\lambda_1.X_1 | \lambda_2.X_2)$$

et donc

$$A.X_1 = \lambda_1.X_1 \text{ et } A.X_2 = \lambda_2.X_2.$$

On en déduit que X_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 (et X_2 est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2). Un vecteur X vérifie $A.X = \lambda_1.X$ si et seulement si $(A - \lambda_1.I_2).X = 0$, ce qui équivaut à

$$P^{-1}.(A - \lambda_1.I_2).P.P^{-1}.X = 0$$

C'est à dire

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.X = 0$$

c'est à dire si et seulement si la deuxième composante de $P^{-1}.X$ vaut 0, c'est à dire si et seulement si $P^{-1}.X$ est de la forme $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Ceci revient à dire que $X = \alpha.X_1$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (b) Si X est vecteur propre de M^2 , alors $M^2.X = \lambda.X$ et donc, en multipliant par M à gauche il vient que :

$$M.M^2.X = \lambda.M.X$$

c'est à dire

$$M^2.M.X = \lambda.M.X$$

et donc soit $M.X = 0$, soit $M.X$ est vecteur propre de M^2 pour la même valeur propre.

- (c) Si X est vecteur propre de M^2 associé à λ_1 , X est non nul, proportionnel à X_1 et MX est proportionnel à X_1 . On en déduit que X et $M.X$ sont deux vecteurs colonnes proportionnels : il existe μ_1 tel que $M.X = \mu_1.X$.

Il en va de façon similaire si X est un vecteur propre de M^2 associé à λ_2 .

- (d) On en déduit que X_1 et X_2 sont vecteurs propres de M et donc que la matrice P diagonalise la matrice M . C'est à dire que $P^{-1}.M.P$ est diagonale et avec nos notations :

$$P^{-1}.M.P = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

5. On notera dans la suite : $B = P^{-1}AP$ et $N = P^{-1}MP$.

- (a) L'équation $M^2 = A$ équivaut à $(P.N.P^{-1})^2 = P.B.P^{-1}$, ce qui équivaut après simplification à : $P.N^2.P^{-1} = P.B.P^{-1}$, puis à $N^2 = B$.

- (b) Si on résout $N^2 = B$ avec N et B diagonales,

$$N = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

on obtient, par identification l'équivalence avec $\mu_1^2 = \lambda_1$ et $\mu_2^2 = \lambda_2$. C'est à dire

$$N^2 = B \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = \sqrt{\lambda_1} \text{ et } \mu_2 = \sqrt{\lambda_2} & \text{ou} \\ \mu_1 = \sqrt{\lambda_1} \text{ et } \mu_2 = \sqrt{-\lambda_2} & \text{ou} \\ \mu_1 = \sqrt{-\lambda_1} \text{ et } \mu_2 = \sqrt{\lambda_2} & \text{ou} \\ \mu_1 = \sqrt{-\lambda_1} \text{ et } \mu_2 = \sqrt{-\lambda_2} & \end{cases}$$

Il y a donc 4 solutions à cette équation :

$$N = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Le raisonnement mené dans l'exercice démontre que lorsque A est diagonalisable et possède deux valeurs propres strictement positives distinctes :

$$A = M^2 \Leftrightarrow M = P. \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}. P^{-1}$$

où P est une matrice diagonalisant A en :

$$A = P. \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. P^{-1}$$

Exercice sans préparation T 2

Soit n un entier naturel, U une variable aléatoire uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$.

On définit la fonction G_U sur $\mathbb{R}$ par : $G_U(t) = \mathbb{E}(t^U)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Ecrire le code d'une fonction Python `G_U(n, t)` prend en argument un entier naturel `n` et un réel `t` et renvoyant la valeur de $G_U(t)$.
2. On pose $t = 1 + h$ avec $h \in \mathbb{R}$.
Montrer alors que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_U(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} h^k.$$

En déduire que

$$\mathbb{E}(U) = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(U(U-1)) = \frac{1}{3}n(n-1)$$

Solution :

```
1. def G_U(n, t):  
    u=1  
    G=1  
    for k in range(n):  
        u=u*t  
        G=G+u  
    return G/(n+1)
```

2. Soit n un entier naturel, U une variable aléatoire uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $t = 1 + h$, (on suppose $t \neq 1$)

$$G_U(t) = \mathbb{E}(t^U) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n t^k = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{t^{n+1} - 1}{t - 1}$$

En remplaçant t par $1 + h$ avec $h \neq 0$, on obtient

$$G_U(t) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(1+h)^{n+1} - 1}{h} = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} h^k.$$

où la dernière identité est obtenue par le binôme de Newton.

En dérivant

$$\begin{aligned} G'_U(t) &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n k \cdot t^{k-1} \\ G'(1+h) &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k+1} k \cdot h^{k-1} \end{aligned}$$

et en évaluant de part et d'autre en $t = 1$, c'est à dire $h = 0$, il vient

$$\mathbb{E}(U) = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{2} = \frac{n}{2}.$$

En redérivant

$$\begin{aligned} G''_U(t) &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=2}^n k \cdot (k-1) t^{k-2} \\ G''(1+h) &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=2}^n \binom{n+1}{k+1} k \cdot (k-1) \cdot h^{k-2} \end{aligned}$$

et en évaluant de part et d'autre en $t = 1$, c'est à dire $h = 0$, il vient

$$\mathbb{E}(U.(U-1)) = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{3} \cdot 2 = \frac{n.(n-1)}{3}.$$

Question supplémentaire : Montrer que $\mathbb{E}(U(U-1)(U-2)) = \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)$ (ou simplement demander le calcul de $\mathbb{E}(U(U-1)(U-2))$).

Solution : En reredérivant

$$\begin{aligned} G_U'''(t) &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=3}^n k.(k-1).(k-2)t^{k-3} \\ G_U'''(1+h) &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=3}^n \binom{n+1}{k+1} k.(k-1).(k-2).h^{k-3} \end{aligned}$$

et en évaluant de part et d'autre en $t = 1$, c'est à dire $h = 0$, il vient

$$\mathbb{E}(U.(U-1).(U-2)) = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{4} \cdot 3! = \frac{n.(n-1).(n-2)}{4}.$$

$$\mathbb{E}(U) = \frac{n}{2}, \mathbb{E}(U.(U-1)) = \frac{1}{3}.n(n-1), \mathbb{E}(U.(U-1).(U-2)) = \frac{1}{4}.n.(n-1)(n-2)$$

SUJET T 3

Exercice T 3

1. Question de cours : Rappeler densité, espérance et variance de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
2. Soit λ un réel strictement positif et

$$f(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est une densité de probabilité.

3. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit T_i une variable aléatoire admettant f comme densité. Calculer $F_{T_i}(t)$, la fonction de répartition de T_i .
4. On admet la formule donnant l'espérance à partir de la fonction de répartition :

$$\mathbb{E}(T_i) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_i > t) \, dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_{T_i}(t)) \, dt$$

Calculer $\mathbb{E}(T_1)$ en fonction de λ . En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} \, dt = \frac{2}{\lambda^2}$$

On s'intéresse à deux appareils constitués de deux composants ayant chacun une durée de vie T_i décrite ci-dessus. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont supposées indépendantes.

5. Dans le premier appareil, les composants sont branchés en série : l'appareil ne fonctionne que si les 2 composants fonctionnent. On appelle D_1 la durée de vie de cet appareil.
 - (a) Exprimer D_1 en fonction de T_1 et T_2 .
 - (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(D_1 > t)$. En déduire la fonction de répartition de la variable D_1 .
 - (c) On admet la formule donnant l'espérance à partir de la fonction de répartition :

$$\mathbb{E}(D_1) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(D_1 > t) \, dt$$

Donner l'expression de l'espérance de D_1 en fonction de λ .

6. Dans le second appareil, les composants sont branchés en parallèle : l'appareil fonctionne tant qu'au moins un des deux composants fonctionne. On appelle D_2 la durée de vie de cet appareil.
 - (a) Exprimer D_2 en fonction de T_1 et T_2 .
 - (b) Calculer la fonction de répartition de D_2 .

Solution :

1. Question de cours : ECT 2, p.9
2. Soit

$$f(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

- (a) La fonction f est continue sur tout $\mathbb{R}$ sauf, peut-être, en 0. Elle est positive.

(b) Calculons son intégrale : on a $\int_{-\infty}^0 f(t) dt = 0$ et, pour $X > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^X f(t) dt &= \int_0^X \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^X t \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda [u(t).v(t)]_0^X - \lambda \int_0^X u'(t).v(t) dt \\ &= -\lambda [t.e^{-\lambda t}]_0^X + \lambda \int_0^X e^{-\lambda t} dt.\end{aligned}$$

On a posé, pour cette intégration par parties, $u(t) = t$, $v(t) = -e^{-\lambda t}$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur l'intervalle $[0, X]$. Et finalement, en reconnaissant une primitive pour la deuxième intégrale :

$$\int_0^X f(t) dt = -\lambda X e^{-\lambda X} + 1 - e^{-\lambda X}.$$

Lorsque $X \rightarrow +\infty$, on a alors

$$\int_0^X f(t) dt \rightarrow 1,$$

ce qui montre que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$. Par CHASLES, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

(c) La fonction f est donc une densité de probabilité.

3. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit T_i une variable aléatoire admettant f comme densité. Le calcul fait pour démontrer que f est une densité de probabilité montre que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{T_i}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t f(s) ds = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

4. D'après la formule donnée, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_1) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt + \int_0^{+\infty} \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} (1 + 1) = \frac{2}{\lambda}.\end{aligned}$$

Il faut comprendre que les calculs des deux dernières intégrales (elles valent 1) sont faits du moment que l'on sait que les intégrandes de ces intégrales sont des densités de probabilités.

5. Dans le premier appareil, les composants sont branchés en série : l'appareil ne fonctionne que si les 2 composants fonctionnent. On appelle D_1 la durée de vie de cet appareil.

(a) On a $D_1 = \min(T_1, T_2)$. La v.a. D_1 est à valeurs dans $]0, +\infty[$.

(b) Soit $t > 0$ (si $t \leq 0$, $\mathbb{P}(D_1 > t) = 1$). On a (la deuxième ligne s'obtient par indépendance de T_1 et T_2 , la troisième du fait que ces deux v.a. ont même fonction de répartition) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_1 > t) &= \mathbb{P}(T_1 > t \text{ et } T_2 > t) \\ &= \mathbb{P}(T_1 > t) \cdot \mathbb{P}(T_2 > t) \\ &= (e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t})^2 \\ &= e^{-2\lambda t} + 2\lambda t e^{-2\lambda t} + \lambda^2 t^2 e^{-2\lambda t}\end{aligned}$$

et donc la fonction de répartition de la variable D_1 vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(D_1 \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-2\lambda t} - 2\lambda t e^{-2\lambda t} - \lambda^2 t^2 e^{-2\lambda t} & \text{sinon} \end{cases}.$$

(c) On a donc (en utilisant la formule donnée pour l'espérance de D_1),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_1) &= \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda.t} dt + \int_0^{+\infty} 2\lambda.t.e^{-2\lambda.t} dt + \int_0^{+\infty} \lambda^2.t^2.e^{-2\lambda.t} dt \\ &= \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2\lambda} = \frac{5}{4\lambda}.\end{aligned}$$

Là encore, ces calculs d'intégrales ont déjà été faits précédemment avec 2λ à la place de λ . Pour conclure, par la formule usuelle donnant l'espérance, on a

$$\frac{2}{\lambda} = \mathbb{E}(T_1) = \int_0^{+\infty} t.\lambda^2.t.e^{-\lambda.t} dt$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \lambda.t^2.e^{-\lambda.t} dt = \frac{1}{\lambda} \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

6. Dans le second appareil, les composants sont branchés en parallèle : l'appareil fonctionne tant qu'au moins un des deux composants fonctionne.

(a) On a $D_2 = \max(T_1, T_2)$. D_2 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(b) On a, pour $t \in \mathbb{R}_+$, (la deuxième identité étant par indépendance de T_1 et T_2 .)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_2 \leq t) &= \mathbb{P}(T_1 \leq t \text{ et } T_2 \leq t) \\ &= (1 - e^{-\lambda.t} - \lambda.t.e^{-\lambda.t})^2.\end{aligned}$$

Exercice sans préparation T 3

On dispose d'une base de données regroupant les informations sur les films sortis en salles depuis 125 ans. Son schéma relationnel est le suivant (on donne la commande de création) :

```
CREATE TABLE films (  
    film_id INTEGER PRIMARY KEY,  
    film_titre CHAR(120),  
    annee_sortie INTEGER,  
    realisateur CHAR(80),  
    budget INTEGER,  
    box_office INTEGER,  
    notes_imdb INTEGER  
);
```

Ecrire une requête SQL affichant :

1. La liste des titres des films sortis en 1925;
 2. Le budget moyen d'entrées des films sortis depuis 2015; On pourra utiliser la fonction de calcul de moyenne AVG
 3. La note IMDB minimale des films réalisés par SCORSESE; On pourra utiliser la fonction de calcul de minimum MIN
-

Solution :

1.

```
SELECT film_titre FROM films  
WHERE annee_sortie = 1925
```

2.

```
SELECT AVG(budget) FROM films  
WHERE annee_sortie >= 2015
```

3.

```
SELECT MIN(notes_imdb) FROM films  
WHERE realisateur = 'SCORSESE'
```

SUJET T 4

Exercice T 4

On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t \ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

- Question de cours : Énoncer le « théorème de la limite monotone ».
- Donner l'ensemble de définition de f .
 - Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
 - Calculer f' et f'' sur $]0; +\infty[$.
 - En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
 - Montrer que l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$ que l'on déterminera.
- Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
- Étudier les variations de (u_n) .
- La suite (u_n) converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.
- Écrire un programme en Python permettant d'obtenir le rang n à partir duquel $|u_n - 1| \leq 10^{-4}$.
- On admet que $n(1 - u_n) \rightarrow 2$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pouvez-vous donner un ordre de grandeur de la valeur de n calculée à la question précédente ?

Solution :

- Question de cours : ECT 1 p.14.
- La fonction f est bien définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$. (L'expression $\ln(t)$ est évaluable lorsque $t \in]0, +\infty[$ et ensuite la combiner avec des puissances positives de t .)
 - Sur $]0, +\infty[$. Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$, $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2$ sont continues sur $]0, +\infty[$ et donc par produits puis combinaisons linéaires, f y est continue.
En 0^+ . On a $f(0) = 0$. Par croissances comparées, lorsque $t \rightarrow 0^+$, $t \ln(t) \rightarrow 0$, de même que $t \mapsto t^2$ (continuité polynomiale) et donc par combinaison linéaire $f(t) \rightarrow 0 = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0 à droite.
 - On a
$$\forall t > 0, f'(t) = 2t - \ln(t) - t \cdot \frac{1}{t} = 2t - 1 - \ln(t)$$
et
$$\forall t > 0, f''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \frac{2t - 1}{t}.$$
 - On en déduit que $f''(t)$ est du signe de $2t - 1$ et donc (dessiner le tableau de variations) :
 - f' est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$,
 - f' est strictement croissante sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$,

iii. f' est minimale en $\frac{1}{2}$ et y vaut $f'(\frac{1}{2}) = \ln(2)$

On en conclut que :

$$\forall t > 0, f'(t) \geq \ln(2) > 0$$

et donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Par continuité en 0^+ , elle est aussi strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (non demandé).

(e) On a $f(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$ tandis que lorsque $t \rightarrow +\infty$, par croissance comparée $\frac{1}{t} \ln(t) \rightarrow 0$ d'où

$$f(t) = t^2 \left(1 - \frac{1}{t} \cdot \ln(t) \right) \rightarrow +\infty.$$

On en déduit (théorème de la bijection) que f établit une bijection de $]0, +\infty[$ dans lui-même et l'équation $f(t) = 1$ alors admet une unique solution sur $]0, +\infty[$. Cette solution est 1 car $f(1) = 1^2 - \ln(1) = 1$.

3. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) On a vu que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Par ailleurs $f(1) = 1$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \ln(2)) \geq \frac{1}{2}$ (car $\ln(2) \simeq 0.69 > \frac{1}{2}$).

On en déduit que si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ alors $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et de là, par récurrence, comme $u_0 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

(b) Etudions le signe de $g(t) = f(t) - t$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. On a

$$g(t) = t \cdot (t - 1 - \ln(t)) = t \cdot h(t)$$

où on a posé $h(t) = t - 1 - \ln(t)$. Comme

$$\forall t > 0, h'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$

On en déduit que h est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (car $h' < 0$ sur l'intérieur de cet intervalle) et donc

$$\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], h(t) > h(1) = 0$$

On en déduit que

$$\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], g(t) > 0$$

et donc que

$$\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], f(t) > t$$

(avec égalité lorsque $t = 1$) On en déduit que si $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$$

et donc la suite (u_n) est croissante.

(c) Etant croissante et majorée par 1, la suite (u_n) est convergente, vers une certaine limite $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

avec, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $u_{n+1} \rightarrow \ell$, $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ (car f est continue en ℓ et donc par unicité de la limite,

$$\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], f(\ell) = \ell$$

et donc $\ell = 1$.

- (d) Le programme Python ci-dessous permet d'obtenir le rang n à partir duquel $|u_n - 1| \leq 10^{-4}$.

```
import numpy as np

def f(t) :
    return t**2-t*np.log(t)

u = 0.5
n = 0 ; epsilon = 10**(-4)
while np.abs(u-1) > epsilon :
    u = f(u)
    n += 1
```

- (e) Si $n(1 - u_n) \rightarrow 2$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Comme $\frac{2}{n} \simeq 10^{-4}$ si et seulement si $n \simeq 2 \cdot 10^4$, on peut s'attendre à ce que la valeur de n calculée à la question précédente soit de 20000.

Exercice sans préparation T 4

Soient X et Y deux variables aléatoires de BERNOULLI, de paramètres de succès respectifs p et q .

Montrer que si X et Y sont non corrélées (c'est à dire si leur covariance vaut 0) alors X et Y sont indépendantes.

Montrer par un exemple que ce résultat est faux si X est de BERNOULLI et Y peut prendre trois valeurs différentes.

Solution :

Pour obtenir l'indépendance de X et Y , il nous faut montrer que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1) \\ \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 0) &= \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) \\ \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 1) \\ \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) &= \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0)\end{aligned}$$

Supposons X et Y non corrélées :

$$\mathbb{E}(X.Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = p.q.$$

La variable $Z = X.Y$ est une v.a. de BERNOULLI de paramètre de succès :

$$r = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = p.q.$$

Or $\{Z = 1\} = \{X = 1\} \cap \{Y = 1\}$ et

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{E}(Z) = r = p.q$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1).$$

Maintenant, par passage au complémentaire :

$$\mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = p - p.q = p.(1 - q) = \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 0)$$

$$\mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = q - p.q = (1 - p).q = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 1)$$

$$\mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 0) - \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 1) = 1 - p.q - (1 - p).q - p.(1 - q) =$$

Soit $r \in]0, 1[$ et prenons Y avec

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - r, \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{r}{2}, \mathbb{P}(Y = +1) = \frac{r}{2}$$

et $X = Y^2$.

La v.a. X est de BERNOULLI de paramètre de succès r ,

$$\mathbb{E}(Y) = 0, \mathbb{E}(X.Y) = \mathbb{E}(Y^3) = \mathbb{E}(Y) = 0$$

et donc X et Y sont non corrélées.

On a

$$\mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{r}{2}, \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1) = r \cdot \frac{r}{2} \neq \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1).$$

ÉPREUVE ORALE MATHÉMATIQUES B/L

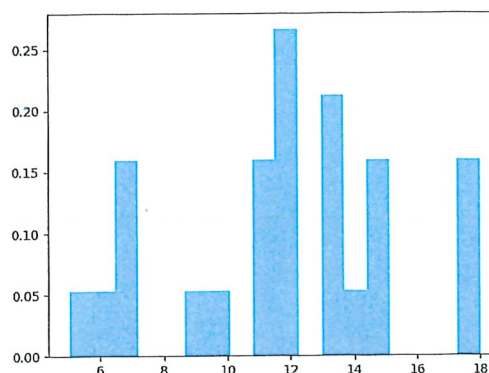
HEC Paris 2025

Programme Grande Ecole

Le bilan de la session 2025 de mathématiques voie BL est satisfaisant.

Les notes se sont étalées entre 5 et 18. La moyenne s'établit à 11,88 et l'écart type à 3,57.

count	37.000000
mean	11.702703
std	4.174092
min	4.000000
25%	9.000000
50%	12.000000
75%	15.000000
max	19.000000



Le jury a fortement apprécié les qualités d'expression ainsi que la finesse de raisonnement de certains candidats qui ont fait forte impression.

A contrario, certains candidats se sont révélés approximatifs, au niveau du calcul, mais surtout au niveau de la connaissance des théorèmes du cours.

Le jury aimerait insister sur les points suivants :

- La question de cours n'est pas à négliger. La jury attend une réponse précise et rigoureuse. De manière plus générale, plusieurs candidats au cours de l'exercice ont pu trébucher sur des définitions très standards et d'un usage constant.
- Il faut éviter de donner l'impression d'utiliser des « recettes de cuisine » sans aucun recul. Ainsi, plusieurs candidats, dans l'étude des points critiques d'une fonction de deux variables, ont utilisé le caractère négatif du discriminant de la fonction quadratique associée à la fonction au point d'étude, mais ce critère se limitait dans leur présentation orale à une inégalité algébrique « presse-bouton » faisant intervenir les dérivées partielles et les candidats se révélaient incapables de dire que cette égalité concernait le discriminant d'une fonction quadratique et de préciser cette fonction quadratique quand le jury les interrogeait.
- Avant de dériver la fonction de répartition d'une variable à densité, il faut avoir pris le temps de vérifier que la fonction de répartition en question est bien celle d'une variable à densité : plusieurs candidats ont ainsi dérivé des fonctions de répartition sans prendre le temps de vérifier qu'ils pouvaient effectivement le faire.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons les candidats pour leur combattivité, qui s'est particulièrement exprimée lors des questions sans préparation, où certains ont pu redresser une situation bien compromise.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, qu'ils ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET BL 1

Exercice principal BL 1

Dans cet exercice de probabilités, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle X sont, sous réserve d'existence, notées respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

1. Question de cours : Etant données n variables aléatoires indépendantes X_k , où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p , quelle est la loi de $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$?

2. On considère maintenant un groupe (*cluster*) de N ordinateurs fonctionnant jour et nuit. Chaque jour, chaque machine encore en fonctionnement a une probabilité p de tomber en panne. Une fois qu'une machine est tombée en panne, on la retire du groupe. Les fonctionnements des machines sont indépendants les uns des autres.

On appelle, pour j un entier naturel, X_j le nombre de machines tombées en panne le jour j et S_j le nombre de machines sorties du groupe à l'issue du jour j , de sorte que $S_0 = 0$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $S_j = S_{j-1} + X_j$. Le nombre de machines restant dans le groupe à l'issue du jour j est $N - S_j$.

- (a) Déterminer la loi de S_1 . En donner espérance et variance.
 - (b) Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $\{S_1 = n\}$? Déterminer alors la loi de S_2 .
3. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, S_j suit une loi binomiale de paramètres N et p_j où l'on déterminera p_j en fonction de j .
 4. On note T le nombre de jours écoulés avant qu'il n'y ait plus une machine fonctionnelle dans le groupe.
 - (a) Justifier que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(S_k < N)$. Quelle est la loi de T ?
 - (b) On suppose $N = 2$. Quelle est l'espérance de T ?
 - (c) On considère N variables aléatoires géométriques indépendantes R_n de paramètre p . Justifier que T a même loi que $R = \max(R_1, \dots, R_N)$.

Solution :

1. Question de cours : Première Année, IV.5. Il s'agit de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2. On considère maintenant un groupe (*cluster*) de N ordinateurs fonctionnant jour et nuit. Chaque jour, chaque machine encore en fonctionnement a une probabilité de tomber en panne de p . Une fois qu'une machine est tombée en panne, on la retire du groupe. Les fonctionnements des machines sont indépendants les uns des autres.

- (a) La v.a. S_1 suit une loi binomiale de paramètres N et $p_1 = p$. On a $\mathbb{E}(S_1) = N.p$ et $\mathbb{V}(S_1) = N.p(1 - p)$
- (b) La v.a. S_2 est à valeurs dans $\llbracket 0, N \rrbracket$. La loi conditionnelle de X_2 sachant $S_1 = n$ est une loi binomiale de paramètres $N - n$ (ce qui reste de machines) et p (modèle de comptage d'événements indépendants de même probabilité). On a donc, pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_2 = k) &= \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(X_2 = k - n | S_1 = n) \cdot \mathbb{P}(S_1 = n) \\
&= \sum_{n=0}^N \binom{N-n}{k-n} p^{k-n} \cdot (1-p)^{N-n-(k-n)} \cdot \binom{N}{n} p_1^n (1-p_1)^{N-n} \\
&= \sum_{n=0}^k \frac{(N-n)!}{(k-n)!(N-k)!} p^{k-n} \cdot (1-p)^{N-k} \cdot \frac{N!}{n!(N-n)!} p_1^n (1-p_1)^{N-n} \\
&= \binom{N}{k} (1-p)^{N-k} (1-p_1)^{N-k} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} p^{k-n} \cdot p_1^n (1-p_1)^{k-n} \\
&= \binom{N}{k} ((1-p)(1-p_1))^{N-k} (p_1 + p(1-p_1))^k
\end{aligned}$$

Donc S_2 suit une loi binomiale de paramètres N et p_2 vérifiant $p_2 = p_1 + p(1-p_1)$, c'est à dire $p_2 = p + p_1(1-p)$

3. Le même calcul que celui permettant le passage de $j = 1$ à $j = 2$ montre qu'en supposant que S_j suit une loi binomiale de paramètres N et p_j alors S_{j+1} suit une loi binomiale de paramètres N et $p_{j+1} = p + p_j(1-p)$. Les paramètres p_j satisfont une récurrence arithmético-géométrique que l'on peut résoudre (le point fixe α de la récurrence est 1, la raison géométrique est $1-p$) et donc

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, p_j = (1-p)^{j-1}(p-1) + 1 = 1 - (1-p)^j$$

On a donc $\mathbb{E}(S_j) = N \cdot p_j = N \cdot (1 - (1-p)^j)$, $\mathbb{V}(S_j) = N \cdot p_j(1-p_j) = N \cdot (1 - (1-p)^j)(1-p)^j$.

4. On note T le nombre de semaines écoulées avant qu'il n'y ait plus une machine fonctionnelle dans le groupe

(a) On a $T = \min(j \in \mathbb{N}^*, S_j = N)$. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(S_k < N) = 1 - \mathbb{P}(S_k = N) = 1 - p_k^N = 1 - (1 - (1-p)^k)^N$$

et donc, pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T = j) = \mathbb{P}(T > j-1) - \mathbb{P}(T > j) = (1 - (1-p)^{j-1})^N - (1 - (1-p)^j)^N$$

(b) Pour ce cas particulier $N = 2$,

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = j) = (1 - q^j)^2 - (1 - q^{j-1})^2 = 2(1-q)q^{j-1} - (1 - q^2)q^{2(j-1)}$$

et donc (en utilisant les valeurs des premières séries géométriques dérivées, comme présenté dans le cours)

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \cdot \mathbb{P}(T = j) = 2 \cdot \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q^2}.$$

(c) On a pour $j \in \mathbb{N}$, $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(R_n > j) = q^j$$

et donc (calcul classique de loi du max de v.a. indépendantes)

$$\mathbb{P}(R > j) = 1 - \mathbb{P}(R \leq j) = 1 - \mathbb{P}(R_1 \leq j \cap \dots \cap R_N \leq j) = 1 - (1 - \mathbb{P}(R_1 > j))^N = 1 - (1 - q^j)^N.$$

Ceci montre que T a même loi que R .

Ceci s'explique de la façon suivante : Pour chacune des N machines, on note R_n l'instant de la panne. C'est une variable géométrique de paramètre p . Les machines sont indépendantes d'où l'indépendance mutuelle des variables aléatoires R_n . L'instant T marque l'instant où toutes les machines tombent en panne, c'est donc que $T = \max(R_1, \dots, R_N)$.

Exercice sans préparation BL 1

Déterminer le/les points critiques et les extrema éventuels de la fonction f définie par

$$\forall x, y > 0, f(x, y) = x - \ln(x) + y - \ln(y)$$

Déterminer l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y) \in]0, +\infty[^2, f(x, y) = 2 \right\}.$$

Solution :

Pour déterminer le/les points critiques de la fonction f définie par

$$\forall x, y > 0, f(x, y) = x - \ln(x) + y - \ln(y)$$

On calcule les deux dérivées partielles de $f : \forall x, y > 0$,

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x, y) &= \frac{x-1}{x} \\ \partial_2 f(x, y) &= \frac{y-1}{y}\end{aligned}$$

et

$$(x, y) \text{ critique pour } f \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \text{ et } \frac{y-1}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = 1$$

La forme quadratique en $(x, y) = (1, 1)$ est donnée par $q(x, y) = x^2 + y^2$. Son discriminant vaut $\Delta = -1 < 0$ donc f admet un extremum local en $(1, 1)$. De plus cet extremum est de même nature que celui de q en $(0, 0)$. Or q a un minimum en $(0, 0)$ donc f admet un minimum local en $(1, 1)$. Ce minimum vaut $f(1, 1) = 2$.

Étudions la fonction $g : t \mapsto t - \ln(t)$. Sa dérivée est donnée par

$$\forall t > 0, g'(t) = \frac{t-1}{t}$$

ce qui montre que g est strictement décroissante sur $]0, 1]$, strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et donc que

$$\forall t > 0, t \neq 1 \Rightarrow g(t) > 1 = g(1)$$

et donc par contraposée que :

$$\forall t > 0, g(t) = g(1) = 1 \Rightarrow t = 1.$$

Soit (x, y) dans l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y) \in]0, +\infty[^2, f(x, y) = 2 \right\}.$$

On a

$$0 = f(x, y) - 2 = \underbrace{g(x) - g(1)}_{\geq 0} + \underbrace{g(y) - g(1)}_{\geq 0}$$

et donc

$$g(x) - g(1) = 0 \text{ et } g(y) - g(1) = 0$$

C'est à dire

$$x = 1 = y$$

Comme $(1, 1) \in \mathcal{C}$, on a donc

$$\mathcal{C} = \{(1, 1)\}.$$

Question supplémentaire : Dessiner :

$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2, f(x, y) = 3\}$$

A voir comme étant (et donc, c'est une boucle fermée autour de $(1, 1)$.)

$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2, g(y) = 3 - g(x)\} = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2, y = g_+^{-1}(3 - g(x)) \text{ ou } y = g_-^{-1}(3 - g(x))\}$$

où g_-^{-1} est la réciproque de $g :]0, 1] \rightarrow [1, +\infty[$, g_+^{-1} est la réciproque de $g : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ et x est tel que $g(x) \leq 2$, c'est à dire $x \in [g_-^{-1}(2), g_+^{-1}(2)]$.

SUJET BL 2

Exercice principal BL 2

Dans cet exercice de probabilités, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. L'espérance d'une variable aléatoire réelle X est, sous réserve d'existence, notée $\mathbb{E}(X)$.

1. Question de cours : Donner la fonction de répartition d'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$)

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} \cdot e^{-e^{-x}} = \exp(-x) \cdot \exp(-\exp(-x)).$$

- (a) Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité de probabilité. Donner une expression de F_X , la fonction de répartition de X .
3. Soit une suite de variables aléatoires $T_k, k \in \mathbb{N}^*$ indépendantes, suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n = \max_{k \in [1, n]} T_k$.

- (a) Donner la fonction de répartition G_n de S_n .
- (b) Montrer que S_n est une variable aléatoire à densité et qu'elle admet pour densité la fonction g_n définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, g_n(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0 \\ n \cdot e^{-s} \cdot (1 - e^{-s})^{n-1} & \text{si } s > 0 \end{cases}.$$

- (c) Montrer – on pourra utiliser le changement de variable $u = 1 - e^{-s}$ dans l'intégrale exprimant naturellement l'espérance de S_n – que

$$\mathbb{E}(S_n) = \int_0^1 -\ln(1-u) \cdot n \cdot u^{n-1} \, du.$$

- (d) Montrer finalement que :

$$\mathbb{E}(S_n) = \int_0^1 \frac{u^n - 1}{u - 1} \, du = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = S_n - \ln(n)$.

- (a) Donner la fonction de répartition F_n de X_n
- (b) Montrer que, pour tout réel x , la suite $(F_n(x))$ converge vers $F_X(x)$, où X est la variable aléatoire définie en 2b.
- (c) On pose $u_n = \mathbb{E}(X_n)$. Après avoir donné un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, démontrer que la suite (u_n) est convergente vers une certaine limite que l'on note γ .

Solution :

1. Deuxième année, IV.2. La fonction de répartition d'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot t} & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. (a) La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}$ par composition car $\exp$ est continue sur tout $\mathbb{R}$. La fonction f est clairement > 0 sur tout $\mathbb{R}$ et enfin une primitive sur tout $\mathbb{R}$ en est $F : x \mapsto \exp(-\exp(-x))$. Comme, par composition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\exp(-x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\exp(-x) = -\infty$$

alors, par composition toujours :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \exp(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

Cela montre que les intégrales $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ sont convergentes valant respectivement $F(0) - 0$ et $1 - F(0)$. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{CV}}{=} 1.$$

On en conclut alors que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

- (b) Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité de probabilité. Soit F_X , sa fonction de répartition. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = [F(t)]_{-\infty}^x = F(x) - \underbrace{\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t)}_{=0} = \exp(-\exp(-x)).$$

3. (a) Soit G_n la fonction de répartition de S_n . La fonction F_T , fonction de répartition commune à chaque T_k est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot t} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \mathbb{P}(S_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}(\{T_1 \leq t\} \cap \dots \cap \{T_n \leq t\}) \\ \text{[Indépendance des } T_k] &= \mathbb{P}(T_1 \leq t) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(T_n \leq t) \\ \text{[} F_T, \text{ f.rep. de } T_k] &= F_T(t)^n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ (1 - e^{-\lambda \cdot t})^n & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

- (b) La formule $G_n = F_T^n$ montre que la fonction de répartition G_n est continue sur tout $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ car F_T l'est.

D'après le cours, S_n est donc une variable aléatoire à densité et une densité en est obtenue par dérivation (sauf aux quelques points litigieux où on peut imposer une valeur conventionnelle de 0), c'est à dire que g_n définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, g_n(s) = \begin{cases} G'_n(s) = 0 & \text{si } s < 0 \\ G'_n(s) = n \cdot e^{-s} \cdot (1 - e^{-s})^{n-1} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

est une densité de S_n . Ceci est à comparer avec la formule proposée :

$$\forall s \in \mathbb{R}, g_n(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0 \\ n \cdot e^{-s} \cdot (1 - e^{-s})^{n-1} & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

- (c) L'espérance de S_n , si elle existe est donnée par la formule

$$\mathbb{E}(S_n) = n \cdot \int_0^{+\infty} s \cdot e^{-s} \cdot (1 - e^{-s})^{n-1} ds.$$

pourvu que cette intégrale soit absolument convergente.

- Cette intégrale généralisée, d'intégrande positive, continue sur $[0, +\infty[$ est convergente par le théorème de comparaison pour les intégrales à intégrande positive (et donc ACV, vu le caractère positif de l'intégrande) car $\forall s \geq 0, 0 \leq 1 - e^{-s} \leq 1$ et donc

$$\forall s \in [0, +\infty[, 0 \leq s.e^{-s}.(1 - e^{-s})^{n-1} \leq s.e^{-s}$$

avec $\int_0^{+\infty} s.e^{-s} ds$ convergente d'après le cours (vaut 1 car espérance d'une v.a exponentielle de paramètre 1)

- Passons maintenant au calcul par changement de variable :

Effectuons le changement de variable proposé $u = 1 - e^{-s} = \phi(s)$ où ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, strictement croissante, $s = -\ln(1 - u)$, $s : 0 \rightarrow +\infty$, $u : 0 \rightarrow 1$ et $du \leftrightarrow \phi'(s) ds = e^{-s} ds$, pour obtenir :

$$\mathbb{E}(S_n) = \lim_{S \rightarrow +\infty} n. \int_0^S s.e^{-s}.(1 - e^{-s})^{n-1} ds = \lim_{U \rightarrow 1^-} \int_0^U -\ln(1 - u).n.u^{n-1} du = \int_0^1 -\ln(1 - u).n.u^{n-1} du.$$

- (d) Effectuons une intégration par parties sur cette intégrale généralisée en posant

$$v'(u) = n.u^{n-1}, v(u) = u^n - 1 \text{ et } w(u) = -\ln(1 - u), w'(u) = \frac{1}{1 - u}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^1 -\ln(1 - u).n.u^{n-1} du &= \lim_{U \rightarrow 1^-} \int_0^U -\ln(1 - u).n.u^{n-1} du \\ &= \lim_{U \rightarrow 1^-} \left([-(u^n - 1). \ln(1 - u)]_0^U - \int_0^U \frac{u^n - 1}{1 - u} du \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du \end{aligned}$$

Cette i.p.p est légitimée par le fait que les fonctions v et w sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$, la suite du calcul provient du fait que $(u - 1) \ln(1 - u) \rightarrow 0$ lorsque $u \rightarrow 1$ (et donc le crochet a pour limite 0) et finalement du fait que l'intégrande de la dernière intégrale, sous ses airs singuliers en 1, cache un brave polynôme (intégrale faussement impropre) :

$$\frac{1 - u^n}{1 - u} = \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

On a donc

$$\mathbb{E}(S_n) = \int_0^1 \frac{u^n - 1}{u - 1} du = \sum_{k=0}^{n-1} u^k du = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k + 1}.$$

4. (a) Soit F_n la fonction de répartition de X_n . Comme S_n est à valeurs dans $[0, +\infty[$, X_n est à valeurs dans $[-\ln(n), +\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(S_n \leq x + \ln(n)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\ln(n) \\ \left(1 - e^{-(x + \ln(n))}\right)^n & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\ln(n) \\ \left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout n à partir d'un certain rang (qui dépend de x , quand $-\ln(n) \leq x$), on a

$$F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n = \exp\left(n. \ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)\right)$$

Or, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{n}e^{-x} \rightarrow 0$ et donc, par développement limité classique :

$$n. \ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right) = -n. \left(\frac{1}{n}e^{-x} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow -\exp(-x).$$

Donc, en passant à la limite dans $\exp$ (qui est continue partout), on trouve que

$$F_n(x) \rightarrow \exp(-\exp(-x)) = F_X(x)$$

où F_X est la fonction de répartition de la v.a. X définie en 2b. On a donc convergence x par x de la suite des $(F_n(x))$ vers $F_X(x)$.

(c) On pose $u_n = \mathbb{E}(X_n)$. On a (question 3d et linéarité de l'espérance),

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \ln(n) \\ u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \ln(n+1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ [\text{DL } \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2(1+\epsilon(x))] &= \frac{1}{2n^2} (1+\epsilon_n) \end{aligned}$$

où $\epsilon_n \rightarrow 0$. On en déduit (définition de limite) qu'à partir d'un certain rang :

$$0 \leq \frac{1}{4n^2} \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

et donc par le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs ($1/n^2 \geq 0$) que $\sum_{n \geq 1} u_{n+1} - u_n$

est de même nature que la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, c'est à dire convergente. La suite de ses sommes partielles est donc convergente et, par télescopie, cela implique que (u_n) est convergente.

Exercice sans préparation BL 2

Soit l'application linéaire (on admet cette propriété) $\phi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[x], \phi(P) = (P(1), P(2), P(3), P(4))$$

1. Donner la matrice de ϕ relativement aux bases canoniques de ses espaces de départ et d'arrivée.
2. Calculer $\ker(\phi)$ et en déduire que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Solution :

1. Il s'agit de la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

2. Si $P \in \ker(\phi)$ alors P est un polynôme de degré ≤ 3 vérifiant $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$. Un polynôme de degré ≤ 3 admettant 4 racines distinctes est forcément nul et donc $P = 0$. On en déduit que $\ker(\phi) = \{0\}$ (l'autre inclusion est toujours vraie, le noyau est un sev de l'espace de départ.)
On en déduit que le noyau de la matrice Φ est lui aussi nul et donc, Φ étant carrée, que Φ est inversible.

Question supplémentaire : La matrice

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$$

est-elle inversible ?