Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Biologie, chimie, physique et sciences de la Terre (BCPST)

Annexe 3

Programmes de mathématiques

1ère et 2nde années

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe de BCPST
1ère année

Programme de mathématiques pour la classe BCPST1

I – Objectifs de formation

La place des mathématiques dans la formation scientifique en BCPST

L'objectif de l'enseignement des mathématiques en BCPST est double.

D'une part, il contribue à l'approfondissement de la culture scientifique générale en donnant aux étudiants un accès à quelques domaines fondamentaux (algèbre linéaire, analyse, probabilités). La pratique du raisonnement mathématique concourt ici comme ailleurs à la formation de l'esprit d'un futur scientifique; la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, le contrôle et l'analyse des hypothèses, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

D'autre part, il contribue à fournir des représentations et un langage dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà sont demandeuses ou utilisatrices. De là l'importance d'une cohérence et d'une coordination aussi bonnes que possible entre les diverses disciplines : il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques dans diverses situations, et éventuellement capables de dialoguer avec des mathématiciens dans le cadre de leur futur métier.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les élèves des techniques classiques et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maitrise s'acquiert notamment grâce à des exercices variés. Le temps des travaux dirigés se prête également à l'expérimentation numérique, à la découverte et à la pratique des algorithmes, en lien avec l'enseignement d'informatique.

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés (TIPE). Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Le développement des compétences

L'enseignement des mathématiques en filière BCPST vise le développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte souvent complexe.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants leur permet de gérer leurs apprentissages de manière responsable en repérant points forts et points faibles. Ces compétences prennent tout leur sens dans le cadre de la résolution de problèmes, de la modélisation ou formalisation jusqu'à la présentation des résultats en passant par la démarche de résolution proprement dite.

De manière spécifique, on peut distinguer les compétences suivantes :

S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies	Il s'agit d'analyser un problème, de se poser des questions, d'expérimenter sur des exemples, de formuler des conjectures.
Modéliser	C'est traduire un phénomène en langage mathématique, élaborer des concepts et des outils lors d'une phase d'abstraction ou de conceptualisation.
Représenter	Il s'agit de choisir le registre (numérique, algébrique, géométrique) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, d'être capable de passer d'un registre à un autre, d'un mode de représentation (souvent visuelle : courbes, graphes, arborescences, tableaux) à un autre.
Raisonner et argumenter	Cela consiste à effectuer des inférences (inductives et déductives), à conduire une démonstration, à confirmer ou infirmer une conjecture, et enfin à évaluer la pertinence d'un concept au regard du problème posé.
Calculer, manipuler des symboles et maitriser le formalisme mathématique	C'est effectuer un calcul à la main ou à l'aide d'ordinateur, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations et effectuer des simplifications, contrôler les résultats, mettre en œuvre des algorithmes, manipuler et exploiter des expressions symboliques, comprendre et utiliser le langage mathématique.
Communiquer à l'écrit et à l'oral	Il s'agit de comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, d'opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel, de rédiger une solution rigoureuse, de présenter et de défendre une production mathématique pour convaincre un interlocuteur ou un auditoire.

II – Programme de première année

1 – Préambule

Le programme de la filière BCPST se situe dans la continuité du programme de la spécialité mathématiques de Première et de celui de spécialité de mathématiques ou de l'option mathématiques complémentaires de Terminale.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Une place importante doit être faite aux applications, exercices, problèmes. Quand cela est possible, on soulignera les liens des mathématiques avec les enseignements de physique, de chimie, de biologie, de sciences de la Terre et d'informatique, en évitant les situations artificielles ainsi que les exercices de pure virtuosité technique. Quelques unes de ces interactions sont parfois signalées dans le texte par le symbole $\rightleftharpoons$, mais ce repérage, qui n'est qu'**indicatif**, n'est **ni exhaustif ni impératif**. Ces liens peuvent alors faire l'objet d'une remarque, d'un développement, ou de la rédaction/projection/exécution d'un script au fil du cours.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Il est important de mettre en valeur une cohérence entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparait à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

La présentation de l'**algèbre linéaire** est faite par le biais du calcul : systèmes d'équations linéaires, calcul matriciel. Seule la présentation de l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, parfois $\mathbf{C}$, est demandée. L'espace vectoriel, comme objet général, n'est étudié qu'en seconde année. Ce choix a pour ambition de donner aux étudiants une connaissance et une habitude « pratique » du calcul multidimensionnel qui confère à l'introduction de la notion abstraite d'espace vectoriel un arrière-plan concret. En préparation de la seconde année, diverses situations permettent d'observer la structure d'espace vectoriel (fonctions, polynômes, suites) .

Dans la partie du programme consacrée à l'**analyse**, le but est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions. L'analyse est un outil pour les probabilités et pour les autres sciences et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire, et donc à n'insister ni sur les questions les plus fines ou spécialisées ni sur les exemples « pathologiques ». On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.

La partie relative aux **probabilités** vise à consolider et à développer la formation des étudiants au raisonnement probabiliste, initiée dès le cycle 4 Dans le domaine des probabilités, l'accent est mis sur le langage de la théorie des ensembles, les techniques élémentaires de dénombrement, et sur les espaces probabilisés finis. Tout ce qui concerne les variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs est infini est traité en seconde année Les diverses notions seront illustrées par des exemples concrets ou issus des diverses sciences.

Le programme encourage le recours à la **démarche algorithmique** et à l'informatique; le maniement de ces concepts fait partie intégrante de la formation.

Le programme est organisé en deux grandes parties de volume sensiblement équivalent, au sein de chaque semestre; aucun ordre particulier n'est imposé.

2 – Programme du premier semestre

Outils 1 – Logique, ensembles et raisonnemment

Les notions présentées ci-dessous, introduites dès la classe de Seconde, sont reprises comme outils pour l'algorithmique et les probabilités et doivent faire l'objet d'un développement très modeste sans abstraction excessive. Les exemples illustrant ces notions seront une première occasion d'introduire des situations probabilistes.

Ces notions ne pourront constituer le thème principal d'aucune question d'écrit ou d'oral.

Contenus	**Commentaires**
a) Logique élémentaire	
Assertion, négation, « et », « ou », implication, équivalence. Négation d'un « et » et d'un « ou ». Distributivité du « ou » sur le « et » et du « et » sur le « ou ».	Le principe de contraposition est rappelé. $\rightleftharpoons$ Connecteurs logiques, instruction conditionnelle.
b) Vocabulaire des ensembles	
Ensemble, élément, appartenance.	
Sous-ensemble (ou partie), inclusion. Réunion. Intersection. Complémentaire.	On se limite aux unions et intersections finies.
Complémentaire d'une union et d'une intersection, distributivité de $\cup$ sur $\cap$ et de $\cap$ sur $\cup$.	Le complémentaire d'une partie A est noté $\overline{A}$.
Couple, p-uplet. Produit cartésien.	Un élément de E^p est aussi appelé une p-liste d'éléments de E.
Quantificateurs universel et existentiel. Négation d'une assertion quantifiée.	Ces éléments, présentés dans les classes antérieures, sont repris afin de viser une expression mathématique précise. L'usage des quantificateurs hors des énoncés mathématiques est à proscrire.
c) Raisonnement par récurrence	
Raisonnement par récurrence.	Lorsqu'un raisonnement par récurrence nécessite une hypothèse dite « forte », la formulation de cette hypothèse devra être proposée.

Outils 2 – Nombres réels

L'objectif de ce chapitre est de consolider et de compléter les acquis des classes antérieures afin que ces outils soient familiers aux étudiants.

Les ensembles $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ sont supposés connus.

Contenus	**Commentaires**
Intervalles.	On se limite à une simple description des différents types d'intervalles.
Valeur absolue.	Interprétation de la valeur absolue en termes de distance.
Partie entière.	On adopte la notation internationale $\lfloor\cdot\rfloor$ pour la partie entière afin de ne pas la confondre avec l'espérance.
Exposants, racine carrée, racine cubique.	On se limite, à ce stade, aux puissances du type x^n, $x \in \mathbf{R}^*$, $n \in \mathbf{Z}$. On attend une maitrise des formules $(xy)^n = x^n y^n$, $x^{n+m} = x^n x^m$, $(x^n)^m = x^{nm}$, $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$. La notation a^b avec $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $b \in \mathbf{R}$ sera introduite dans le chapitre Analyse 2.
Identités remarquables.	Les attendus se limitent aux formules suivantes : $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Manipulation des inégalités.	Il s'agit d'une simple reprise des règles de calcul algébrique sur les inégalités.

Contenus (suite)	Commentaires
Résolutions d'équations et d'inéquations simples.	Il s'agit d'une reprise des types d'équations et inéquations abordées dans les classes antérieures.
Majorant, minorant, plus grand, plus petit élément d'une partie non vide de $\mathbf{R}$. Borne supérieure, borne inférieure.	On admet l'existence de la borne supérieure d'une partie majorée non vide. La recherche de bornes supérieures ou inférieures à partir de la définition sera étudiée sur quelques exemples simples dans le seul but d'illustrer la notion.

Outils 3 – Trigonométrie

Contenus	Commentaires
Définition de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$.	
Périodicité et symétries.	On fait le lien avec les symétries agissant sur le cercle trigonométrique.
Formules de trigonométrie : Formules découlant des symétries de cos, sin et tan. $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$ $\sin(\alpha\pm b)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)$ $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$ $=2\cos^2(\theta)-1=1-2\sin^2(\theta)$ $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$	Les autres formules de trigonométrie ne sont pas des attendus du programme.
Résolution d'équations trigonométriques simples : $\cos(x)=c$, $\sin(x)=s$ et $\tan(x)=t$. Notations arcccos, arcsin, arctan.	On introduit les notations arccos, arcsin et arctan en donnant les définitions correspondantes en termes de solutions d'équations dans certains intervalles et en admettant l'existence et l'unicité de ces solutions. La fonction arctangente sera construite dans Analyse 6. La construction des fonctions arccosinus et arcsininus n'est pas un attendu du programme.
Transformation de $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$ en $r\cos(\theta+\varphi)$. Résolution de $a\cos(\varphi)+b\sin(\varphi)=c$.	La méthode (analytique, géométrique voire, ultérieurement, complexe) n'est pas imposée. $\rightleftharpoons$ On fait le lien avec diverses situations rencontrées en sciences physiques.

Outils 4 – Nombres complexes

Ce chapitre est entièrement nouveau pour la majorité des étudiants.
L'ensemble des nombres complexes est introduit pour munir le plan d'opérations compatibles avec celles déjà pratiquées sur la droite réelle. Cela permet de trouver, sans exhaustivité, des solutions à des équations algébriques. Ces équations seront essentiellement à coefficients réels, de petit degré et utiles par exemple pour alléger l'étude des suites réelles récurrentes linéaires à coefficients constants et des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Contenus	Commentaires
a) Écriture algébrique des nombres complexes Nombres complexes. Écriture algébrique. Parties réelle et imaginaire. Propriétés élémentaires de Re et Im.	

Contenus (suite)	Commentaires
Représentation géométrique d'un nombre complexe. Affixe d'un point, d'un vecteur. Interprétation géométrique de la somme de deux complexes.	L'utilisation des nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie n'est pas un objectif du programme.
Conjugué d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Propriétés de la conjugaison.	On fait ressortir l'efficacité du formalisme de la conjugaison (par exemple pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur).
Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Propriétés du module : multiplicativité, inégalité triangulaire.	Suivant les contextes, on choisit la formulation adéquate : $\|z\| = \sqrt{z\bar{z}}$ ou $\|a + \mathrm{i}b\| = \sqrt{a^2+b^2}$.
b) Formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes	
Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Propriétés $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\| = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, formules d'Euler.	
Arguments d'un nombre complexe non nul. Écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul. Linéarisation de $\cos^p(x)\sin^q(x)$.	On met en évidence quelques choix usuels d'intervalles permettant de définir l'argument. À chaque fois que le recours à la formule d'Euler sera nécessaire pour linéariser ou développer des formules, l'énoncé devra l'indiquer.
c) Application aux équations du second degré.	
Résolution des équations du second degré à coefficients réels, somme et produit des solutions.	
Résolution de l'équation $x^2 = a$ avec $a \in \mathbf{C}$.	En dehors de cette équation, qui doit pouvoir être traitée algébriquement ou en la retranscrivant trigonométriquement, la résolution des équations du second degré plus générales à coefficients complexes non réels n'est pas un attendu du programme. La recherche des racines n-ièmes de l'unité ou d'un nombre complexe quelconque dans le cas $n \geq 3$ n'est pas non plus un attendu du programme.

Outils 5 – Méthodes de calcul

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place quelques principes et exemples de maniement des symboles Σ et Π, dont les usages sont constants. La présentation des coefficients binomiaux peut être faite dans ce contexte ou bien en lien avec le dénombrement.

On travaille dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

$\rightleftharpoons$ La plupart des formules présentées ici peuvent donner lieu à des algorithmes de calcul.

Contenus	Commentaires
Notation $\sum$.	On précise qu'une somme ayant un ensemble d'indices vide est nulle.
Règles de calcul sur le symbole $\sum$: Linéarité, changements d'indices (translations et symétries), télescopages.	
Sommes doubles : $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} a_{i,j}$ et $\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$.	Les attendus du programme se limitent au maniement de ces symboles conduisant à les mettre sous la forme de deux sommes simples successives.
Notation $\prod$.	On précise qu'un produit ayant un ensemble d'indices vide vaut 1.

Contenus (suite)	Commentaires
Règles de calcul sur le symbole $\prod$.	On se contente de mettre en valeur la multiplicativité du symbole $\prod$.
Factorielle, notation $n!$.	
Somme de termes consécutifs d'une progression géométrique : $\sum_{0\leq k\leq n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.	La raison q est dans $\mathbf{C}\setminus\{1\}$.
Sommes des n premiers entiers et des n premiers carrés.	
Coefficients binomiaux.	On adopte la définition suivante : $\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k<0 \text{ ou } k>n \\ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{sinon.} \end{cases}$
Triangle de Pascal. Formule du binôme.	On met en valeur les formules : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$

Outils 6 – Vocabulaire des applications

On évite ici tout excès de formalisme et on illustre les notions présentées par des exemples issus majoritairement de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Ces notions ne pourront constituer le thème principal d'aucune question d'écrit ou d'oral.

Contenus	Commentaires
Application d'un ensemble de départ dans un ensemble d'arrivée.	On introduit les exemples des fonctions indicatrices et des suites.
Image directe d'une partie de l'ensemble de départ.	La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.
Composition.	On étudie quelques exemples fournis par des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ que l'on compose de diverses manières.
Injection, surjection, bijection, application réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	On fait remarquer que, dans le cadre des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, une bijection et sa réciproque ont des graphes symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.

Outils 7 – Dénombrement

Le but de ce chapitre est de mettre en place un vocabulaire efficace pour décrire (ou modéliser) et analyser les problèmes combinatoires, ainsi que quelques résultats fondamentaux associés. Les résultats de ce chapitre seront justifiés intuitivement, sans recours à des démonstrations formelles. De façon générale, on évitera tout excès de technicité dans les dénombrements.

Tous les ensembles considérés dans ce chapitre sont finis.
Dans les définitions qui suivent, on suppose que card$(E) = n$.

Contenus	Commentaires
Cardinal, notation $\mathrm{card}(E)$ ou $\#E$.	On définit le cardinal grâce à la notion intuitive de nombre d'éléments. En particulier, deux ensembles en bijection ont même cardinal.
Cardinal d'une union disjointe. Formule $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}A+\mathrm{card}B-\mathrm{card}(A\cap B)$.	
Cardinal d'un produit cartésien.	$\mathrm{card}(E\times F)$ est aussi le nombre de façons de choisir de façon indépendante un élément de E et un élément de F.
Un élément de E^p est appelé un p-uplet ou une p-liste de E. Il y a n^p p-uplets de E.	$\mathrm{card}(E^p)$ est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n objets distincts, avec d'éventuelles répétitions.
Un p-uplet est dit sans répétition lorsque ses éléments sont distincts deux à deux. il y a $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ p-uplets sans répétition de E.	Le nombre de p-uplets sans répétition est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n objets distincts, sans répétition.
Un n-uplet de E contenant exactement une fois chaque élément de E est appelé une permutation de E. Il y a $n!$ permutations de E.	$n!$ est le nombre de façons de choisir successivement tous les objets d'un ensemble, sans répétition.
Si $p\leq n$, une p-combinaison de E est une partie de E à p éléments. Il y a $\binom{n}{p}$ p-combinaisons de E. Cardinal de l'ensemble des parties de E.	$\binom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir simultanément p objets parmi n objets distincts. On peut sur cette base réinterpréter la formule du binôme.

Analyse 1– Suites réelles usuelles

Le but de ce chapitre est d'étendre un peu l'ensemble des suites « connues » et de développer les aptitudes au calcul sur ces suites; le point de vue est ici algébrique.

On ne travaille ici qu'avec des suites réelles.

Contenus	Commentaires
Somme, produit, quotient de suites réelles.	
Suites arithmétiques, suites géométriques. Terme général.	
Suites arithmético-géométriques.	La formule donnant le terme général n'est pas au programme. On cherchera une suite constante solution pour déterminer toutes les solutions.
Suites vérifiant une relation du type $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$.	On se limite à la maitrise d'une méthode de calcul du n-ième terme à partir de l'équation caractéristique. Au besoin, on transite par **C** dans le seul but de restituer plus rapidement la forme des solutions. $\rightleftharpoons$ On pourra illustrer ces différents types de suites avec des modèles discrets de populations. $\rightleftharpoons$ Algorithme de calcul du n-ième terme.

Analyse 2 – Fonctions réelles usuelles

Le but de ce chapitre est de consolider et d'enrichir modérément le registre des fonctions usuelles. Pour chaque fonction, la maitrise attendue concerne la définition, les principales propriétés, la formule de dérivation (avec son domaine de validité) et la courbe représentative.

Contenus	Commentaires
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	On se contente de donner ou de rappeler les définitions dans le cadre des fonctions réelles de la variable réelle.
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Graphes des fonctions $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(a-x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$. $\rightleftharpoons$ Utilisation d'une bibliothèque graphique Python.
Notions d'image et d'antécédent.	
Parité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés.
Fonctions majorées, minorées, bornées. Monotonie. Opérations algébriques sur les fonctions. Composition de fonctions.	
b) Étude d'une fonction	
Réduction du domaine d'étude selon les symétries et/ou les périodicités déterminées. Tableau de variations. Équation de la tangente en un point. Asymptotes verticales et horizontales, tracé du graphe.	On abordera uniquement des exemples simples. Les notions de continuité, dérivabilité et asymptotes obliques seront étudiées dans les chapitres Analyse 6, Analyse 7 et Analyse 10.
c) Fonctions usuelles	
Fonctions affines.	
Fonctions puissances d'exposant entier (dans $\mathbf{Z}$), . Fonction racine carrée.	Les polynômes seront développés dans le chapitre Algèbre – Polynômes réels.
Fonctions exponentielle et logarithme néperien (ln).	$\rightleftharpoons$ Pour ces diverses fonctions, les courbes représentatives sont mises en valeur comme des outils fondamentaux pour la modélisation, la reconnaissance des formes graphiques etc.
Notation a^b.	On généralise les propriétés évoquées dans Outils 2.
Fonctions exponentielles : $x \mapsto a^x$ avec $a \in \mathbf{R}_+^*$.	
Fonction logarithme décimal (log).	Les logarithmes dans une base différente de e et 10 sont hors programme. Les fonctions hyperboliques sont hors programme.
Fonctions puissances : $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$	$x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$.
Fonctions circulaires : sin, cos et tan.	Formule $\tan' = 1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$.
Fonctions partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ et valeur absolue $\lvert\cdot\rvert$.	

Analyse 3 – Calculs de dérivées, de primitives et d'intégrales

Le but de ce chapitre est de consolider et de compléter la maitrise des règles de dérivation et de quelques techniques de primitivation pour permettre la résolution d'équations différentielles et leur utilisation en sciences physiques.

Contenus	Commentaires
a) Calculs de dérivées	
Calculs des dérivées : sommes, produits, quotients.	Révision des règles correspondantes. Les dérivées des fonctions usuelles doivent être connues. On pourra introduire la notation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.
Dérivation d'une fonction composée.	On insiste sur le fait qu'une composée de fonctions dérivables est dérivable.
b) Calcul des dérivées partielles d'une fonction de deux variables	
Dérivées partielles d'une fonction de deux variables.	On introduit les notations $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$. $\rightleftharpoons$ Le calcul des dérivées partielles est présenté en lien avec l'usage qui en est fait en physique.

Contenus (suite)	Commentaires
c) Calculs de primitives Primitives usuelles et calculs simples de primitives.	Primitives de $u'e^u$, $u'u^n$, u'/u, $u'/\sqrt{u}$, $u'\sin u$, $u'\cos u$. On remarquera que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln.
d) Calculs d'intégrales Calcul à l'aide d'une primitive. Intégration par parties. Changement de variable.	À ce stade, le lien entre primitives et intégrales est admis. On interprétera l'intégrale en termes d'aires et les propriétés de l'intégrale seront étudiées plus formellement dans le chapitre Analyse 8. La théorie du changement de variable sera faite dans Analyse 8.

Analyse 4 – Équations différentielles linéaires simples

L'objectif de ce chapitre est de rappeler et d'approfondir la problématique des équations différentielles, en vue des usages qui en sont faits en physique, chimie, biologie.

Contenus	Commentaires
a) Équations du premier ordre Résolution de $y' + a(t)y = f(t)$ où a et f sont des fonctions continues sur un intervalle : • résolution de l'équation homogène associée, cas particulier où a est constante, • principe de superposition, • méthode de variation de la constante, • cas particulier où a et f sont constantes.	Pour toute autre équation différentielle du premier ordre, une méthode de résolution doit être fournie. ⇌ On peut montrer des exemples tirés de la physique-chimie : cinétique d'une réaction, charge d'un condensateur, système physique en contact avec un thermostat, …
b) Équations du second ordre Résolution de $ay'' + by' + cy = f(t)$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle : • résolution de l'équation homogène associée, • principe de superposition, • détermination d'une solution particulière.	La résolution de l'équation homogène se fera à l'aide de l'équation caractéristique. On pourra à cette occasion introduire la fonction de **R** dans **C** : $t \mapsto e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbf{C}$. ⇌ On peut traiter en exemple l'équation de l'oscillateur harmonique $y'' + \omega^2 y = 0$ dont les solutions sont présentées sous diverses formes; et par extension aux sciences physiques dériver et chercher une primitive à $t \mapsto e^{i\omega t}$. La forme d'une solution particulière est donnée sauf lorsque f est une fonction constante. Par exemple, lorsque f est de la forme $t \mapsto \sin(\omega t)$ ou $t \mapsto \cos(\omega t)$, l'énoncé devra indiquer de chercher une solution du type $t \mapsto \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto \lambda t \sin(\omega t) + \mu t \cos(\omega t)$, λ et μ étant à déterminer.

Algèbre linéaire 1 – Systèmes linéaires

⇌ Le premier contact avec l'algèbre linéaire est de nature algorithmique. Il est envisageable de programmer l'algorithme du pivot en restant sur des approches simples. .

On travaille sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ le plus souvent en pratique, occasionnellement sur $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Contenus	Commentaires
a) Généralités sur les systèmes linéaires	
Équation linéaire à p inconnues. Système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$.	
Système linéaire homogène.	
Système compatible, système incompatible, système de Cramer.	Tout système linéaire homogène est compatible.
Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire : • échange des lignes L_i et L_j, • ajout de λL_j à L_i, • multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$.	On emploiera les notations suivantes : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
Deux systèmes sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	
Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.	
b) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss	
Système échelonné : un système est échelonné s'il vérifie les deux propriétés suivantes : • si une ligne a un membre de gauche nul, toutes les lignes suivantes ont aussi un membre de gauche nul, • dans les lignes dont le membre de gauche est non nul, l'indice de l'inconnue portant le premier coefficient non nul à partir de la gauche croît strictement.	
On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne dont le membre de gauche est non nul.	
Détermination, pour un système linéaire, d'un système échelonné équivalent par la méthode du pivot de Gauss.	On se limite à la mise en pratique de la méthode; l'écriture formelle d'un algorithme de réduction n'est pas un attendu du programme.
c) Ensemble des solutions d'un système linéaire	
Rang d'un système échelonné : c'est son nombre de pivots.	
Rang d'un système : c'est le rang de tout système échelonné équivalent.	On admet que deux systèmes échelonnés équivalents ont même rang.
Inconnues principales, inconnues secondaires (variables libres).	
Résolution d'un système échelonné.	
Résolution d'un système : un système linéaire a zéro, une seule ou une infinité de solutions. Dans ce dernier cas, on exprime toutes les inconnues en fonction des inconnues secondaires.	On fait le lien avec les problèmes d'intersection de droites et de plans (dans le plan ou dans l'espace).

Algèbre linéaire 2 – Matrices

Le but de ce chapitre est de mettre en place le calcul sur les matrices avec ses analogies et différences vis-à-vis du calcul sur les nombres réels et complexes. La mise en pratique de ce calcul peut nécessiter l'usage de l'ordinateur.

On travaille sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ le plus souvent en pratique, occasionnellement sur $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

On ne confondra pas matrices (ou vecteurs) lignes et matrices (ou vecteurs) colonnes.

Contenus	Commentaires
Matrices : définition, vocabulaire. Matrice nulle.	
Matrices carrées, matrices lignes, colonnes.	
Matrices triangulaires, diagonales. Matrice identité.	

Contenus (suite)	Commentaires
Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit matriciel. Formule du binôme quand les deux matrices commutent. Propriétés de ces opérations. Transposée d'une matrice M, notée M^T. Transposée d'une somme, d'un produit de matrices. Matrices carrées symétriques.	Produit de matrices diagonales.
Écriture matricielle d'un système linéaire. Rang d'une matrice.	On adapte la méthode du pivot qui devient un algorithme opérant sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Le rang d'une matrice est alors défini comme le nombre de pivots. On admet que le rang d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes. On pourra proposer, dès que le cours sur les espaces vectoriels aura été traité, des caractérisations du rang d'une matrice permettant d'éviter le recours systématique à la méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang dans la pratique.
Matrices carrées inversibles, matrice inverse, inverse d'un produit, inverse de la transposée d'une matrice carrée inversible. Recherche pratique de l'inverse d'une matrice.	L'inversion peut se ramener à la résolution de systèmes linéaires. La description d'un algorithme d'inversion de matrices n'est pas un attendu du programme.
Déterminant des matrices 2×2 et caractérisation des matrices 2×2 inversibles.	Seul le déterminant des matrices 2×2 est introduit et les formules de Cramer, même dans le cas 2×2, ne sont pas exigibles.
Expression matricielle formelle, $X = A^{-1}Y$, de la solution d'un système linéaire $AX = Y$ lorsque la matrice carrée A qui lui est associée est inversible.	

Géométrie 1

Ce chapitre vise à consolider les acquis des années antérieures sur les notions de vecteurs, droites et plans dans le plan et l'espace géométriques. En mathématiques, il sert essentiellement de support intuitif et introductif à l'algèbre linéaire; il permet aussi de présenter le produit scalaire qui sera étudié dans des espaces plus généraux en seconde année. Enfin, ce chapitre sert également aux sciences physiques et à la géologie. En mathématiques, une épreuve écrite ou orale ne doit pas reposer sur ce chapitre.

Dans tout ce chapitre, on se place dans le plan et l'espace géométriques formés de points et dans lesquels plusieurs notions et résultats sont supposés connus : distance entre deux points, parallélisme, perpendicularité, angle géométrique, angle orienté, angle droit, cosinus d'un angle géométrique, trigonométrie du triangle rectangle.

Contenus	Commentaires
a) Vecteurs du plan et de l'espace.	
Vecteurs « géométriques » du plan et de l'espace. Un vecteur non nul est caractérisé par sa direction, son sens, sa norme. Vecteur directeur d'une droite. Vecteur nul. Notation $\vec{0}$. Étant donné un vecteur $\vec{u}$ et un point O, il existe un et un seul point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.	Un vecteur peut être représenté par deux points du plan. La notion de relation d'équivalence entre bipoints n'est pas un attendu du programme.
Opérations sur les vecteurs définies géométriquement : addition et multiplication par un nombre réel. Relation de Chasles. Colinéarité. Coplanarité.	On pourra faire le lien avec le théorème de Thalès.
Bases et repères du plan et de l'espace.	Une base du plan (resp. de l'espace) est la donnée de deux (resp. trois) vecteurs non colinéaires (resp. non coplanaires).

Contenus (suite)	Commentaires
Résultat admis : existence et unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base du plan ou de l'espace. Une base orthonormée du plan (resp. de l'espace) est la donnée de deux (resp. trois) vecteurs orthogonaux de norme 1 ; un repère orthonormé est la donné d'un point et d'une base orthonormée.	Ce résultat sera repris et formalisé dans le chapitre Algèbre linéaire 3 – Espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ et sous-espaces vectoriels.
b) Déterminant Une base orthonormée du plan étant fixée, déterminant de deux vecteurs dans le plan définis à l'aide de leurs coordonnées. Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs du plan par l'annulation du déterminant.	 On fait le lien avec le déterminant de la matrice des vecteurs dans une base qui est une matrice carrée 2×2.
c) Droites et cercles dans le plan Vecteur directeur d'une droite. Représentation paramétrique d'une droite. Vecteur normal à une droite. Équation cartésienne d'une droite obtenue à l'aide d'un vecteur normal. Coefficient directeur (ou pente) d'une droite. Équation cartésienne d'un cercle défini par son centre et son rayon.	 Une droite est déterminée par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul : un tel vecteur est appelé vecteur directeur de la droite.
d) Droites et plans dans l'espace Base d'un plan. Représentation paramétrique d'un plan. Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan obtenue à l'aide d'un vecteur normal. Vecteur directeur d'une droite. Représentation paramétrique d'une droite. Équations cartésiennes (système d'équations linéaires) d'une droite.	Les sphères ne sont pas un attendu du programme. Un plan est déterminé par la donnée d'un point A et de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires : on dit que le triplet $(A, \vec{u}, \vec{v})$ forme un repère du plan, et le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ une base du plan.
e) Projection orthogonale Projection orthogonale d'un point M sur une droite $\mathscr{D}$ donnée par un point A et un vecteur $\vec{u}$: c'est l'unique point H de la droite tel que les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. Lien avec la distance entre le point M et la droite $\mathscr{D}$. Projection orthogonale d'un point M sur un plan affine $\mathscr{P}$ donné par un repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$: c'est l'unique point H du plan tel que $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Lien avec la distance entre le point M et le plan $\mathscr{P}$.	 $\rightleftharpoons$ On pourra aborder la définition de projection orthogonale d'un vecteur sur une droite en lien avec les applications en physique. Aucune formule générale donnant la distance entre un point et une droite n'est exigible. Aucune formule générale donnant la distance entre un point et un plan n'est exigible.
f) Produit scalaire Définition du produit scalaire usuel de deux vecteurs à partir de la projection orthogonale. Formulation du produit scalaire à l'aide du cosinus de l'angle formé entre deux vecteurs non nuls. Caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs par le produit scalaire. Propriétés : symétrie, bilinéarité, positivité. Lien avec la norme. Expression du produit scalaire à partir des coordonnées dans une base orthonormée.	 Aucun développement sur la notion d'angle orienté n'est un attendu du programme. On pourra énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La bilinéarité du produit scalaire pourra être admise.

Statistique 1 – Statistique descriptive

La plupart des notions étudiées dans ce chapitre ont été présentées dans les classes antérieures. Il s'agit d'abord de préciser le vocabulaire et de rappeler quelques techniques élémentaires de description statistique.

$\rightleftharpoons$ Un choix d'exemples, inspirés de situations rencontrées en biologie, géologie, physique ou chimie, permettra de montrer l'intérêt et les limites des résumés statistiques introduits, avant de pouvoir aborder la question du lien éventuel entre deux caractères d'une même population.

$\rightleftharpoons$ Calcul d'une moyenne, d'une moyenne glissante ou d'autres paramètres statistiques ; mise en valeur graphique des données.

Contenus	Commentaires
a) Statistique univariée	
Caractère. Distinction entre caractères quantitatifs (discrets ou continus) et qualitatifs.	Un caractère est encore appelé variable ou variable statistique.
Modalités d'un caractère, cas des regroupements par classes.	
Description d'une série statistique de taille n portant sur un caractère x : • présentation brute des données : l'observation se traduit par un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ • présentation dans un tableau : effectifs de chaque modalité.	
Effectifs cumulés, fréquences, fréquences cumulées.	
Représentations graphiques.	Diagrammes en bâtons, histogrammes, polygones des effectifs cumulés (*resp.* fréquences cumulées).
Caractéristiques (empiriques) de position : • mode • moyenne $\overline{x}$ (les calculs se font à partir des observations ou du tableau des effectifs)	$\rightleftharpoons$ On montre, sur des exemples tirés de données réelles, que ces caractéristiques peuvent donner des indications plus ou moins pertinentes.
• médiane (les calculs se font à partir du tableau des effectifs ou du polygone des effectifs/fréquences cumulés/es notamment lorsque les modalités sont regroupées par classes).	Modalité de l'individu médian ou moyenne des modalités des deux individus médians selon la parité de n. $\rightleftharpoons$ Algorithmes de tri.
Caractéristiques (empiriques) de dispersion : • variance s_x^2 et écart-type s_x (les calculs se font à partir des observations ou du tableau des effectifs) • quartiles, déciles (les calculs se font à partir du polygone des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées)	La formule avec le facteur $\frac{1}{n-1}$ n'est pas un attendu du programme.
b) Statistique bivariée	
Série statistique double de taille n portant sur deux caractères quantitatifs x et y.	
Présentation brute des données : l'observation se traduit par un n-uplet d'éléments de $\mathbf{R}^2$ $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$.	On se limite au cas de n couples deux à deux distincts.
Représentation par un nuage de points de $\mathbf{R}^2$. Point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ du nuage.	
Caractéristiques d'une série statistique double : • covariance s_{xy} • coefficient de corrélation r_{xy}.	Les calculs se font à partir des observations.

Contenus (suite)	Commentaires
Approche descriptive de l'ajustement affine selon la méthode des moindres carrés.	L'optimalité de l'ajustement est, à ce stade, admise. $\rightleftharpoons$ L'objectif est de présenter graphiquement une méthode pouvant intervenir dans les autres enseignements scientifiques. On montre sur des exemples comment des changements de variables peuvent transformer le nuage de points de sorte qu'un ajustement affine soit graphiquement plus pertinent.

3 – Programme du second semestre

Algèbre – Polynômes réels

En première année, les polynômes sont exclusivement définis comme fonctions polynomiales de **R** dans **R**. Le théorème de d'Alembert - Gauss, sous une forme ou une autre, est hors programme. Les notions de polynôme en tant qu'objet formel et de fraction rationnelle sont hors programme.

Contenus	Commentaires
a) Polynômes, règles de calcul.	
Notation $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Monômes, coefficients. Polynôme nul. Cas particuliers : polynômes constants, fonctions affines, fonctions puissances entières.	Les notations X, $\mathbf{R}[X]$ ne sont pas exigibles en première année.
Les opérations usuelles (combinaison linéaire, produit, composée) sur les polynômes fournissent des polynômes.	
Unicité de l'écriture des polynômes : un polynôme à coefficients dans **R** est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.	En conséquence, deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.
Coefficient dominant. Degré d'un polynôme.	On convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$.
Degré d'une somme, d'un produit de polynômes.	Le degré d'une composée de polynômes n'est pas un attendu du programme.
Polynôme dérivé. Degré du polynôme dérivé.	Les formules donnant les coefficients des dérivées k-ièmes, $k > 2$, ne sont pas exigibles. La formule de Taylor est hors programme.
b) Racines et factorisation.	
Racines réelles (ou zéros réels) d'un polynôme. Un nombre réel $\alpha \in \mathbf{R}$ est racine d'un polynôme P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.	La division euclidienne des polynômes ainsi que la factorisation des polynômes réels en produit de polynômes irréductibles sur **R** sont hors programme.
Généralisation à plusieurs racines distinctes. Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Tout polynôme de degré impair a au moins une racine réelle. Un polynôme de degré $n \in \mathbf{N}^*$ possédant n racines distinctes s'écrit sous la forme $P : x \mapsto a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$.	On pourra illustrer avec des exemples de polynômes réels sans racines réelles, ou à l'opposé de polynômes totalement décomposés sur **R**.
c) Racines multiples	
Ordre de multiplicité d'une racine.	On met en évidence, à partir d'exemples, les notions de racines simples, racines multiples.
Une racine α d'un polynôme P est une racine multiple si et seulement si $P'(\alpha) = 0$.	

Analyse 5 – Suites réelles

Contenus	Commentaires
Suites majorées, minorées, bornées. Suites monotones.	
Convergence, divergence. Limite infinie.	La définition d'une limite par (ε, n_0) est présentée, mais aucune technicité ne pourra être exigée en la matière.
Comparaison de la convergence et de la limite d'une suite (u_n) avec celles des deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).	Utilisation de cette comparaison pour justifier une divergence. La notion générale de suite extraite est hors programme.
Opérations sur les limites. Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités : • Signe d'une suite de limite non nulle. • Passage à la limite dans une inégalité large. • Théorème d'encadrement, dit « des gendarmes », et extension aux limites infinies.	
Théorème de la limite monotone.	Toute suite réelle monotone admet une limite finie ou infinie.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.	
Exemples d'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.	Un plan d'étude détaillé sera toujours proposé. Il pourra commencer par la détermination d'un intervalle stable. Aucun théorème général relatif à ce type de suites n'est exigible des étudiants. L'étude numérique (par itération) et graphique sont présentées comme outils d'étude et de formation de conjectures. L'objectif est alors l'étude de la monotonie et de la convergence de telles suites dans les cas simples de fonctions f monotones.
Croissances comparées entre les suites factorielle, puissance (n^α avec $\alpha > 0$), géométriques (a^n avec $a > 1$).	
Suites équivalentes, notation $u_n \sim v_n$. L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante. Utilisation des équivalents pour la recherche de limites.	Le développement sur les équivalents doit être modeste et se limiter aux suites dont le terme général ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Analyse 6 – Limites, continuité des fonctions réelles

Contenus	Commentaires
a) Limites	
Limite d'une fonction en un point.	La définition d'une limite par (ε, α) est présentée, mais les détails techniques ne sont pas un attendu du programme.
Limite à droite, limite à gauche. Limite en $+\infty$ ou $-\infty$. Si (u_n) tend vers a et si la limite de f en a est b, alors la suite $(f(u_n))$ tend vers b. Opérations sur les limites. Limite de fonctions composées.	
Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités : • Signe d'une fonction de limite non nulle. • Passage à la limite dans une inégalité large. • Théorème dit « des gendarmes » et extension aux limites infinies. Théorème de la limite monotone.	Une fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite finie ou infinie aux bornes de l'intervalle.

Contenus (suite)	Commentaires
b) Comparaison de fonctions	
Croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes.	Connaissance de $\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln^\beta(x)$, de $\lim_{x\mapsto+\infty} x^\alpha \exp(-\beta x^\gamma)$ où α, β, γ prennent des valeurs usuelles conduisant à des indéterminations.
Fonctions équivalentes, notation $f \sim g$. L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante. Utilisation des équivalents pour la recherche de limites.	Le développement reste modeste et se limite aux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage du point de référence.
c) Continuité	
Continuité en un point. Continuité à droite et à gauche. Opérations, composition. Prolongement par continuité. Continuité sur un intervalle.	
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	Ce résultat est admis.
Théorème des valeurs intermédiaires.	On peut présenter une idée de la démonstration en s'appuyant sur un principe de dichotomie.
d) Bijections continues	
Théorème de la bijection : une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'ensemble $f(I)$, qui est un intervalle, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$.	$\rightleftharpoons$ Algorithme de dichotomie sur des exemples d'équations de type $f(x) = 0$.
Définition, monotonie et représentation graphique de la fonction arctan.	Aucune formule n'est à connaitre excepté l'imparité de la fonction arctan.

Analyse 7 – Dérivation des fonctions réelles

Contenus	Commentaires
a) Dérivée	
Dérivée en un point. Dérivée à gauche, dérivée à droite. Fonction dérivée. Notations f' et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.	
Interprétation graphique, équation de la tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$.	Révisions des acquis des classes antérieures.
Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonction composée.	La formule de Leibniz est hors programme.
Dérivation d'une fonction réciproque.	Dérivée de la fonction arctan.
b) Théorème de Rolle et conséquences	
Théorème de Rolle. Formule des accroissements finis.	L'inégalité des accroissements finis est hors programme et doit être établie à chacune de ses utilisations.
Caractérisation des fonctions croissantes (au sens large) par la positivité de leur dérivée. Cas des fonctions constantes.	
Cas des fonctions strictement croissantes.	Une fonction continue définie sur un intervalle et dont, sauf peut-être en un nombre fini de points, la dérivée existe et est strictement positive, est strictement croissante.
Recherche d'extrémums.	
c) Dérivées d'ordre supérieur	
Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$.	La formule de Taylor-Lagrange est hors programme.
Une combinaison linéaire, le produit et la composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$.	

Analyse 8 – Intégration d'une fonction continue réelle sur un segment

Contenus	Commentaires
a) Notions d'intégrale	
Intégrale d'une fonction continue et positive f sur un segment [a,b] : il s'agit de l'aire sous la courbe. Elle est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.	La notion d'aire est ici intuitive et ne doit pas soulever de question théorique.
Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.	Définition à partir de la partie positive et de la partie négative de la fonction.
Extension de la définition au cas $b \leqslant a$.	
Sommes de Riemann sur $[a,b]$: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+\dfrac{k}{n}(b-a)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+\dfrac{k}{n}(b-a)\right)$	La notion d'aire étant admise, on admettra la convergence de la suite des sommes de Riemann dans le cas $\mathscr{C}^0$ et on pourra la justifier dans le cas $\mathscr{C}^1$. On observera que la formule n'était pas si intuitive : les erreurs élémentaires vont en rapetissant, mais sont aussi de plus en plus nombreuses. $\rightleftharpoons$ Algorithme de calcul approché d'une intégrale.
b) Propriétés de l'intégrale :	
Linéarité, relation de Chasles, positivité, stricte positivité (f positive non nulle), croissance de l'intégrale.	Les démonstrations ne sont pas exigibles mais les propriétés peuvent être déduites de la relation des sommes de Riemann ou de l'interprétation en termes d'aires.
Encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction. Pour $a<b$, majoration $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.	
Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.	La valeur moyenne appartient à l'ensemble des valeurs atteintes par la fonction.
c) Théorème fondamental de l'Analyse	
Théorème : si f est continue sur un intervalle I et a un point de I, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.	On remarquera que pour f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et a un point de I, $f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour toute fonction f continue sur I, si F est une primitive de f, pour tous a et b de I, on a : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$.	Notation : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$
d) Méthodes de calculs	
Intégration par parties.	Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'une intégration par parties sera indiquée.
Changement de variable.	Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, le changement de variable sera donné.

Analyse 9 – Développements limités et études de fonctions réelles

Contenus	Commentaires
a) Développements limités	
Définition de la notation $o(x^n)$ pour désigner des fonctions négligeables devant la fonction $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbf{Z}$, au voisinage de 0 ou de l'infini.	On se ramène, aussi souvent que nécessaire, à la limite d'un quotient.
Définition des développements limités en 0. Unicité des coefficients d'un développement limité.	Les problèmes de développement limité en un réel non nul ou en $\pm\infty$ sont ramenés en 0.
Opérations sur les développements limités : somme, produit.	L'obtention d'un développement limité pour une fonction composée est présentée et mise en œuvre sur des exemples simples.
Primitivation d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : existence d'un développement limité à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	La formule de Taylor-Young est admise.

Contenus (suite)	Commentaires
Développements limités usuels au voisinage de 0 : exp, cos, sin, $x \mapsto 1/(1+x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$.	Les exercices de calcul de développements limités ont pour objet de faciliter l'assimilation des propriétés fondamentales et ne doivent pas être orientés vers la virtuosité calculatoire : sur les exemples numériques, on évitera tout développement limité au-delà de l'ordre 3.
b) Applications des développements limités Calcul d'équivalents et de limites. Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement par continuité, tangente, position relative de la courbe et de la tangente.	

Analyse 10 – Fonctions réelles de deux variables réelles

En mathématiques, une épreuve écrite ou orale ne doit pas reposer sur ce chapitre.

Contenus	Commentaires
a) Notions fondamentales	
Exemples de sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$: demi-plan, disque, pavé.	On pourra illustrer les opérations ensemblistes à cette occasion (union, intersection).
Fonctions de deux variables. Ensemble de définition. Fonctions partielles.	
Surface représentative d'une fonction de deux variables, courbes ou lignes de niveau.	On souligne le lien entre fonctions partielles et certaines sections de cette surface. ⇌ Des illustrations tirées de problèmes de cartographie, thermodynamique ou géologie sont ici pertinentes.
b) Continuité	
Continuité en un point, continuité sur un pavé ouvert.	Aucune question sur ces notions de continuité ne doit être posée dans une épreuve de mathématiques.
c) Dérivées partielles	
Dérivées partielles.	
Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé ouvert du plan.	Dans un énoncé on ne demandera jamais de montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$. Utilisation des dérivées partielles premières pour évaluer une petite variation de la valeur d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ découlant de petites variations sur les variables.
Définition du gradient; calcul dans un repère orthonormal en coordonnées cartésiennes.	On pourra donner sans démonstration l'interprétation graphique du gradient.
Dérivation d'une expression de la forme $t \mapsto f(x(t), y(t))$, la fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ et les fonctions x, y étant dérivables.	
Définition de point critique. Lien avec l'existence éventuelle d'extremum dans le cas d'une fonction définie sur un pavé ouvert et admettant des dérivées partielles.	Toute condition suffisante d'extrémalité est hors programme. Application à l'ajustement affine par les moindres carrés.
d) Dérivées partielles d'ordre deux	
Dérivées partielles d'ordre deux, interversion des dérivations.	Le théorème de Schwarz est admis.

Algèbre linéaire 3 – Espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ et sous-espaces vectoriels

On travaille sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ le plus souvent en pratique, occasionnellement sur $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. L'espace vectoriel, comme objet général et abstrait, n'est formellement présenté qu'en seconde année.

Ce choix a pour ambition de donner aux étudiants une connaissance et une habitude « pratique » du calcul multidimensionnel qui confèrera à l'introduction de la notion générale d'espace vectoriel un arrière-plan concret. Le but est donc, en première année, de faire maitriser les concepts fondamentaux sans excès de technicité ni d'abstraction en centrant le travail sur le calcul matriciel et les systèmes linéaires. Le lien avec la géométrie est à faire en chaque occasion propice.

Contenus	**Commentaires**
a) Structure vectorielle	
Description de la structure vectorielle de $\mathbf{K}^n$, règles de calcul.	On fait le lien avec les règles habituelles du calcul sur les vecteurs du plan et de l'espace en géométrie. On pourra faire remarquer que certains ensembles rencontrés dans d'autres chapitres (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire, ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire, ensemble de matrices,...) possèdent eux aussi cette structure vectorielle, sans qu'aucune connaissance relative à la notion générale d'espace vectoriel ne soit requise à ce stade.
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs. Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$.	On entend par sous-espace vectoriel un ensemble de vecteurs stable par combinaison linéaire et contenant le vecteur nul.
Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	On utilise la notation $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots x_k)$.
Famille génératrice finie d'un sous-espace vectoriel.	
Famille libre finie, famille liée finie.	
Bases d'un sous-espace vectoriel.	On admet l'existence de bases pour tout sous-espace vectoriel autre que l'espace nul.
Coordonnées d'un vecteur par rapport à une base.	Une interprétation matricielle est ici pertinente, amenant à parler de la matrice colonne associée au vecteur, puis de la matrice d'une famille de vecteurs.
Base canonique de $\mathbf{K}^n$.	On veillera à ne pas travailler systématiquement dans la base canonique en mettant en évidence l'intérêt, dans certains contextes, de choisir une autre base.
b) Dimension	
Dimension.	On admet que toutes les bases d'un sous-espace vectoriel ont même cardinal appelé dimension du sous-espace vectoriel.
Dans un espace vectoriel de dimension $p \geq 1$: • Toute famille libre peut se compléter en une base. • Toute famille libre a au plus p éléments. • Une famille libre ayant p éléments est une base. • De toute famille génératrice on peut extraire une base. • Toute famille génératrice a au moins p éléments. • Une famille génératrice ayant p éléments est une base.	Aucune version plus précise de ce théorème n'est exigible. Les démonstrations ne sont pas exigibles On complète ces propositions par l'étude du cas particulier des familles orthogonales de deux ou trois vecteurs de l'espace de dimension 2 ou 3.
Si E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$ avec $F \subset E$, alors $\dim F \leq \dim E$; et si les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.	

Contenus (suite)	Commentaires
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Le rang peut se calculer pratiquement en adaptant la méthode du pivot aux familles finies de vecteurs.

Algèbre linéaire 4 – Applications linéaires et matrices

On travaille sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ le plus souvent en pratique, occasionnellement sur $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

On ne confondra pas matrices (ou vecteurs) lignes et matrices (ou vecteurs) colonnes.

Contenus	Commentaires
Définition d'une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$.	On pourra faire remarquer que certaines applications rencontrées dans d'autres chapitres (dérivation, intégration, espérance, applications du plan dans lui-même ou de l'espace dans lui-même, etc.) possèdent aussi la propriété de linéarité, sans pour autant aller plus loin.
Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations.	
Noyau, image. Lien avec : f injective, f surjective, f bijective.	
Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs d'une base. Matrice d'une application linéaire dans des bases.	
Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque.	
Rang d'une application linéaire.	On fait le lien entre les différentes notions de rang, vues à propos des systèmes, des familles de vecteurs, des matrices et des applications linéaires.
Théorème du rang.	La démonstration n'est pas exigible.

Probabilités 1 – Concepts de base des probabilités

Contenus	Commentaires
a) Espace probabilisé	
Ensemble des résultats possibles de l'épreuve ou expérience aléatoire (univers). Événements. Événement certain, événement impossible, événements incompatibles.	On se limite au cas où l'algèbre des événements est l'ensemble des parties d'un ensemble fini Ω.
Système complet d'événements .	Un système complet pour Ω est une famille d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est l'ensemble Ω.
Probabilité sur Ω.	
Propriétés d'une probabilité : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $P(\varnothing) = 0$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	La formule générale du crible est hors programme. On pourra voir comment retrouver la formule dans le cas de 3 événements.
Formule des probabilités totales : Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements et B un événement, on a : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$.	
Cas de l'équiprobabilité : probabilité uniforme.	
b) Conditionnement	
Définition de la probabilité conditionnelle. P_A est une probabilité. Formule de conditionnement $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.	On utilise l'une ou l'autre des deux notations $P(B \mid A)$ et $P_A(B)$ pour la « probabilité de B sachant A » (probabilité de B sachant que A est réalisé).

Contenus (suite)	Commentaires
Formule des probabilités composées (conditionnements successifs).	
Réécriture de la formule des probabilités totales en termes de probabilités conditionnelles.	Dans le cas où $P(A_i) = 0$, on conviendra que $P(A_i)P_{A_i}(B) = 0$. On pourra s'appuyer sur des représentations telles que arbres, graphes, tableaux, diagrammes, etc. Ces représentations n'auront pas valeur de démonstration.
Formule de Bayes.	
Indépendance de deux événements. Événements (mutuellement) indépendants. Extension à l'indépendance conditionnelle.	On souligne le lien qui existe entre les hypothèses d'indépendance et les choix faits lors de la modélisation du problème étudié.

Probabilités 2 – Variable aléatoire sur un univers fini

Contenus	Commentaires
a) Variable aléatoire sur un univers fini	
On nomme variable aléatoire sur un univers Ω (fini) toute application de Ω dans $\mathbf{R}$.	Pour une variable aléatoire X, la détermination exacte de l'univers image $X(\Omega)$ n'est pas toujours utile et on pourra se limiter à un ensemble de valeurs pertinentes.
Pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ est noté $(X \in I)$	Notations $(X = x)$, $[X = x]$, $\{X = x\}$, $(X \leq x)$, etc.
Exemple des fonctions indicatrices. Notation $1\!\!1_A$ où $A \subset \Omega$.	Règles de calcul : intersection, union, complémentaire.
Système complet d'événements $(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ associé à une variable aléatoire.	
La loi [de probabilité] d'une variable aléatoire X est l'application f_X de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$ associant à tout x de $X(\Omega)$ le nombre $P(X = x)$. La fonction de répartition de X est l'application F_X de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ associant à tout t réel le nombre $F_X(t) = P(X \leq t)$.	On rappellera les représentations graphiques de ces deux fonctions, respectivement en bâtons et en escaliers. Les étudiants doivent savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition. Les propriétés générales des fonctions de répartition (croissance, limites, ...) seront vues en deuxième année.
Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de réels distincts et $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ alors il existe une variable aléatoire X sur un univers fini vérifiant, pour tout i compris entre 1 et n, $P(X = x_i) = p_i$.	On ne se posera pas la question de l'espace probabilisé. $\rightleftharpoons$ Algorithme de simulation d'une variable aléatoire sur un univers fini, les (p_i) étant donnés sous la forme d'une liste.
b) Indépendance	
Indépendance de deux variables aléatoires.	L'indépendance conditionnelle de variables aléatoires n'est pas un attendu du programme.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendantes.	Résultat admis.
Généralisation : indépendance (mutuelle) de n variables aléatoires.	
Propriétés de l'indépendance mutuelle :	Les résultats sont admis.

Contenus (suite)	Commentaires
• Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, toute sous-famille l'est aussi. • Lemme des coalitions : si $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p}$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors $u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$ sont indépendantes.	On observera que cette propriété peut s'étendre à un nombre fini de fonctions s'appliquant à une partition des variables, et en particulier au cas de $(u_1(X_1), u_2(X_2), \dots, u_n(X_n))$.
c) Espérance et variance	
Espérance mathématique $E(X)$ d'une variable aléatoire X, variable aléatoire centrée. $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ et autres propriétés élémentaires de l'espérance.	On démontre que l'espérance est positive (si X est positive) et croissante. La linéarité est énoncée mais la preuve n'est pas exigible.
Théorème de transfert : calcul de l'espérance de $u(X)$ à partir de la loi de X.	Ce résultat peut être admis.
Moments. Variance $\mathrm{V}(X)$ d'une variable aléatoire X. Formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X. $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$. Variable centrée réduite.	
Si X et Y sont indépendantes, espérance de XY et variance de $X + Y$.	Le résultat sur l'espérance peut être admis ; on signalera le cas où les variables aléatoires sont des indicatrices d'événements. Généralisation au cas de n variables aléatoires indépendantes.
d) Lois usuelles	
Lois certaine, uniforme, de Bernoulli, binomiale.	Les étudiants doivent savoir reconnaitre les situations classiques de modélisation par des lois uniformes, de Bernoulli et binomiale. On fait le lien entre la loi de Bernoulli et les variables indicatrices.
Espérance et variance d'une variable de loi certaine, d'une variable de loi de Bernoulli (ou indicatrice), d'une variable de loi binomiale.	
Espérance d'une variable de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.	La formule de la variance d'une variable de loi uniforme est hors programme.
Loi de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.	$\rightleftharpoons$ Simulation de variables aléatoires suivant une loi binomiale.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe de BCPST

2nde année

Programme de mathématiques pour la classe BCPST2

I – Préambule

Objectifs de la formation

En classe de BCPST2 l'objectif est, dans le cadre d'un approfondissement de la formation, d'amener l'étudiant à intégrer les différentes étapes permettant de résoudre un problème exprimable de façon mathématique. L'enjeu est la reformulation et la résolution de problèmes issus de contextes ou de réalités a priori non mathématiques (provenant souvent d'autres disciplines).

Ainsi sont mises en jeu diverses compétences. Certaines ont déjà été envisagées en première année (BCPST1), et sont consolidées en seconde année :

1. Engager une recherche, définir une stratégie.
2. Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique.
3. Représenter, changer de registre.
4. Raisonner, démontrer, argumenter...
5. Calculer (symboliquement ou numériquement avec une calculatrice ou un ordinateur), maîtriser le formalisme mathématique.
6. Communiquer à l'écrit et à l'oral.

D'autres constituent des objectifs plus spécifiquement approfondis en seconde année, dans la perspective des concours :

— Identifier un problème sous différents aspects;
— Mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes;
— Critiquer ou valider un modèle ou un résultat.

Buts visés

Le programme de mathématiques de BCPST2 approfondit celui de BCPST1, ce qui se traduit par les enjeux suivants.

— Consolider les acquis mathématiques de BCPST1, notamment en matière de calcul et raisonnement. Par souci de clarté, il a été choisi de numéroter de manière compatible les têtes de chapitre des programmes de BCPST1 et de BCPST2.
— Généraliser et compléter les concepts introduits en BCPST1.
— Mettre un accent particulier sur la notion de modélisation, où se confrontent les mathématiques et les autres sciences, notamment dans le cadre des T.I.P.E.

Équilibre entre compétences

Les différentes compétences sont développées puis évaluées (au cours de l'année puis lors des concours) en veillant à leur équilibre. On prend garde en particulier à ne pas surdévelopper une compétence par rapport à une autre.

Les capacités en calcul par exemple (point 5 ci-dessus), lorsqu'elles sont propres aux mathématiques, restent relativement simples, l'objectif n'étant pas ici d'aboutir à une virtuosité technique. On attend, en la matière, une maîtrise solide des calculs, concepts et théorèmes mathématiques, dans des situations courantes, sans pour autant négliger les autres compétences.

Contenu

Le programme de seconde année combine des révisions du programme de première année, des approfondissements de certaines parties et des nouveautés.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur ; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

L'**analyse** apparait sous forme de révisions, de nouveautés (séries et intégrales généralisées) ou de compléments (équations différentielles). C'est ainsi que les séries sont introduites comme outil de base des probabilités, tandis que l'étude des intégrales généralisées est insérée dans la mise en place des variables aléatoires à densité ; l'usage de ces outils est limité aux contextes probabilistes et aux démarches de modélisation ; on évitera les développements artificiels ou purement techniques à ce propos.

En **algèbre linéaire**, le passage de $\mathbf{K}^n$ aux espaces vectoriels généraux permet d'élargir le champ d'action et de donner une vision géométrique des espaces de fonctions. Ce cadre plus systématique permet de donner un sens à l'étude des bases et changements de base qui sont fondamentaux pour aborder les valeurs propres et vecteurs propres des applications linéaires et des matrices ; cette dernière approche se limite à la diagonalisation pour s'en tenir à des phénomènes simples. En vue de nombreuses applications (optimisation, analyse de données), est proposée une présentation du produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$, du théorème de projection orthogonale et du théorème spectral. La notion de sous-espaces supplémentaires ne figure pas au programme, mais dans bien des situations le théorème de la projection orthogonale fournit une approche similaire tout en permettant un calcul effectif.

L'étude des **probabilités** est donc un enjeu majeur du programme de seconde année. Le but de ce parcours est de mettre en place, de la manière la plus efficace possible, un contexte opérationnel permettant d'utiliser aussi bien des variables aléatoires discrètes prenant une infinité de valeurs (amenant notamment les lois géométrique et de Poisson) que des variables aléatoires à densité (dites « continues »), avec un accent particulier sur les variables gaussiennes. Pour maintenir le programme dans un volume raisonnable, les couples de variables aléatoires ne sont abordés que pour les variables discrètes, ce qui évite d'avoir à aborder les intégrales doubles. Les démarches de simulation de variables aléatoires sont fortement encouragées.

Quelques théorèmes limites en probabilités ainsi que la construction précise d'un **test d'hypothèse** en découlant (comparaison d'une moyenne ou d'une proportion expérimentale à sa valeur théorique) offrent un environnement propice à la simulation numérique et permettent aux étudiants qui en ont le besoin pour leurs TIPE d'aller plus loin sur ces questions.

La variété des modèles ainsi mis en place, combinés avec les différents théorèmes limites proposés, permet d'aborder de nombreuses applications dans les domaines les plus divers ; l'évocation de ces contextes applicatifs est un élément important de la formation et fait partie des buts visés. Comme dans le programme de première année, on signale par un symbole $\rightleftharpoons$ certaines situations particulières où un lien avec d'autres enseignements scientifiques est encouragé, permettant de donner corps aux démarches de modélisation et d'application pratique des mathématiques.

En prolongement des programmes de première année en mathématiques et informatique, le programme encourage la **démarche algorithmique** et le recours aux **outils informatiques** ; le maniement de ces outils fait partie intégrante de la formation et a toute sa place dans l'évaluation en cours d'année et lors des concours.

Pour ce qui concerne les **révisions**, la proposition de consolider les compétences acquises en première année par quelques exercices ne doit pas être prise dans un sens restrictif : des approches numériques, pouvant s'appuyer sur le programme d'informatique ou recourir à des outils logiciels ou des calculatrices, peuvent tout aussi bien renforcer la maîtrise des concepts et de leurs applications.

II – Programme de seconde année

La répartition en chapitres proposée ci-dessous (ainsi que l'agencement des chapitres de révisions) est fournie à titre indicatif et ne constitue pas une progression figée ou obligatoire. Les impératifs pédagogiques liés à la préparation aux concours peuvent justifier une organisation différente, sous réserve de maintenir une structure cohérente.

Révisions 1 – Suites

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 1 et Analyse 5).
$\rightleftharpoons$ Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Révisions 2 – Fonctions et dérivées

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 2, Analyse 3, Analyse 6, Analyse 7, Analyse 9).
$\rightleftharpoons$ Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Révisions 3 – Intégrales

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 8).
$\rightleftharpoons$ Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Révisions 4 – Equations différentielles

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 4) $\rightleftharpoons$ Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Révisions 5 – Fonctions de deux variables

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 10).

Analyse 1 – Séries réelles

Contenus	Commentaires
Sommes partielles, convergence d'une série, somme d'une série convergente.	La série est notée $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ ou plus succinctement $\sum u_n$. En cas de convergence, la somme de la série est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. La terminologie de « famille sommable » n'est pas donnée. La notion de reste d'une série est hors programme.
Combinaison linéaire de séries convergentes.	

Contenus (suite)	Commentaires
Thèorèmes de convergence pour deux séries à termes positifs u_n et v_n : • théorème de comparaison si $u_n \le v_n$ à partir d'un certain rang, • si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	Tout autre critère de convergence est hors programme. Les résultats relatifs aux restes et sommes partielles sont hors programme.
Convergence et somme de la série géométrique $\sum\limits_{n\ge 0} q^n$ (pour $\|q\|<1$) et des séries « dérivées » $\sum\limits_{n\ge1} nq^{n-1}$ et $\sum\limits_{n\ge2} n(n-1)q^{n-2}$.	
Convergence et somme de la série exponentielle $\sum\limits_{n\ge0}\dfrac{x^n}{n!}$.	Résultat admis.
Convergence de $\sum\limits_{n\ge1}\dfrac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum\limits_{n\ge1}\dfrac{1}{n}$.	L'étude générale des séries de Riemann est hors programme.
Convergence absolue.	La convergence absolue est présentée comme une condition suffisante pour obtenir la convergence de la série. En vue des applications probabilistes, on admet que la valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes. L'étude de séries semi-convergentes est hors programme.

Analyse 2 – Intégrales généralisées

Contenus	Commentaires
Convergence d'une intégrale généralisée (ou impropre) d'une fonction continue sur un intervalle I semi-ouvert ou ouvert.	La convergence est traduite en termes de limites portant sur une primitive. La terminologie de « fonction intégrable » n'est pas donnée. Les notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ pourront, selon le contexte, désigner l'intégrale généralisée ou sa valeur.
Cas d'une fonction définie sur un intervalle et continue sur cet intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points.	Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.
Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, stricte positivité (f positive non nulle), croissance.	La démonstration de la stricte positivité n'est pas exigible.
Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales généralisées.	On souligne la nécessité de confirmer la convergence de tous les termes apparaissant dans une telle formule.
Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales généralisées.	Si la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone sur un intervalle d'extrémités a et b ayant des limites $\alpha = \lim_a \varphi$ et $\beta = \lim_b \varphi$ et si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β, alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature, et ont la même valeur lorsqu'elles convergent.
Cas des fonctions paires ou impaires.	
Théorèmes de convergence pour deux fonctions positives f et g : • théorème par comparaison si $f \le g$, • si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, alors les intégrales généralisées en b $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.	Tout autre critère de convergence est hors programme. Tout résultat sur la nature des intégrales de Riemann devra être démontré.

Contenus (suite)	Commentaires
Convergence absolue d'une intégrale généralisée.	La convergence absolue est présentée comme une condition suffisante pour obtenir la convergence de l'intégrale. Les intégrales semi-convergentes sont hors programme.
L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.	La valeur de cette intégrale est un résultat admis.

Analyse 3 – Équations différentielles scalaires autonome d'ordre 1

Contenus	Commentaires
Exemples de résolution d'équations différentielles autonomes du type $y'(t) = F(y(t))$, F étant une fonction continue sur un intervalle et à valeurs réelles.	Aucune théorie générale ne doit être faite. Toute étude devra être entièrement guidée. $\rightleftharpoons$ On se limite ici à quelques exemples issus de la biologie des populations ou de la cinétique chimique (modèles malthusien, logistique, de Gompertz). $\rightleftharpoons$ Lien avec l'informatique : programmation de la méthode d'Euler. Dans un énoncé, la méthode d'Euler sera rappelée.

Révisions 6 – Nombres complexes

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Outils 3, Outils 4).

Révisions 7 – Systèmes linéaires et matrices

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Algèbre linéaire 1 et 2).

Algèbre – Polynômes

Contenus	Commentaires
a) Polynômes, règles de calcul.	
Retour sur les polynômes réels : notation X pour l'application $x \mapsto x$ et réécriture d'un polynôme avec cette notation.	On remarque que les règles de calcul avec X prolongent les règles de calculs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
On introduit les polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$. Notation X pour l'application $x \mapsto x$.	
Les opérations usuelles (combinaison linéaire, produit, composée) sur les polynômes fournissent des polynômes.	
Unicité de l'écriture des polynômes : un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.	En conséquence, deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.
Coefficient dominant et degré d'un polynôme.	On convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$.
Degré d'une somme, d'un produit de polynômes.	
Notations $\mathbf{R}[X], \mathbf{C}[X], \mathbf{R}_n[X], \mathbf{C}_n[X]$.	
b) Racines et factorisation.	
Définition d'une racine α d'un polynôme P : $P(\alpha) = 0$.	
Un nombre réel ou complexe α est racine d'un polynôme P si, et seulement si, il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$.	La division euclidienne des polynômes est hors programme.
Généralisation à plusieurs racines distinctes.	
Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	

Contenus (suite)	Commentaires
Ordre de multiplicité d'une racine.	La caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés n'est pas un attendu du programme.
Cas des polynômes réels : si α est racine, $\overline{\alpha}$ est aussi racine.	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation dans $\mathbf{C}[X]$.	Ce théorème est admis. La factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ est hors programme.

Algèbre linéaire 1 – Espaces vectoriels

Ce chapitre reprend les concepts présentés en première année dans un cadre limité ($\mathbf{K}^n$) et les adapte brièvement à d'autres espaces, de dimension finie ou non.

La notion de somme de sous-espaces vectoriels n'est pas au programme.

On travaille uniquement dans des **K**-espaces vectoriels, **K** désignant **R** ou bien **C**. Lorsqu'un espace est un **C**-espace vectoriel, le considérer comme un **R**-espace vectoriel n'est pas un attendu du programme. Il n'est pas dans l'esprit du programme de rentrer dans des détails techniques comme parler de **R**-base, **C**-base, **R**-dimension, **C**-dimension.

Contenus	Commentaires
a) Structure vectorielle	
Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul.	On met plus particulièrement en valeur les espaces vectoriels suivants : $\mathbf{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, l'ensemble des applications définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}_n[X]$. L'étude d'espaces de suites n'est pas un attendu du programme.
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	
Sous-espaces vectoriels.	
Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	On introduit la notation $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.
Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence).	
Famille libre finie. Famille liée finie.	
Exemple fondamental de famille libre : toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.	
Base finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence). Coordonnées d'un vecteur dans une base.	
Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base.	
Bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}_n[X]$.	D'autres exemples peuvent être proposés, mais les attendus du programme se limitent aux cas mentionnés.
b) Dimension	
On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. De toute famille génératrice finie d'un espace E non réduit au vecteur nul on peut extraire une base. Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul E ont le même cardinal ; ce nombre commun est appelé dimension de E. Par convention, l'espace vectoriel réduit au vecteur nul est de dimension 0.	
Dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$: • Toute famille libre peut se compléter en une base.	

Contenus (suite)	Commentaires
• Toute famille libre a au plus n éléments. • Une famille libre ayant n éléments est une base. • Toute famille génératrice a au moins n éléments. • Une famille génératrice ayant n éléments est une base.	Compte tenu des objectifs pédagogiques, la plupart de ces énoncés doivent être admis, mais on peut montrer comment certains de ces résultats peuvent en impliquer d'autres.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. Si les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Ce rang peut se calculer comme le rang de la matrice des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base.

Algèbre linéaire 2 – Applications linéaires et matrices

Le passage aux espaces vectoriels quelconques pousse à redéfinir les notions liées aux applications linéaires. Il convient de faire cette adaptation avec une certaine brièveté afin de garder tout le temps requis pour traiter des exemples.

On travaille dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Contenus	Commentaires
a) Applications linéaires	
Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme. Espaces isomorphes.	On introduit les notations $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(E)$, mais leur étude n'est pas un attendu du programme.
Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations.	Notation f^n pour $n \in \mathbf{N}$.
Noyau. Lien avec l'injectivité.	On montre que le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.
Image. Lien avec la surjectivité.	On montre que l'image est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.
b) Cas de la dimension finie	
Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.	
Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.	Tout espace de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.
Rang d'une application linéaire.	
Théorème du rang.	Résultat admis.
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.	On soulignera, à travers un exemple, que ce n'est pas le cas en dimension infinie. Toutefois, aucun exemple ne sera exigible des étudiants.
c) Matrices et applications linéaires	
Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel de dimension finie, une base ayant été choisie dans chacun d'eux.	
Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque.	On montre qu'un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible, et qu'il suffit pour cela de disposer d'une matrice inverse à gauche ou à droite.
Définitions du noyau et de l'image d'une matrice. Lien entre noyau et image d'une matrice et d'une application linéaire représentée par cette matrice dans des bases.	Toute identification entre vecteur de $\mathbf{K}^n$ et sa représentation matricielle dans une base, même la base canonique, est à éviter.

Contenus (suite)	Commentaires
d) Changement de base	
Changement de base. Matrice de passage. Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur. Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	
Matrices semblables.	On met en valeur l'intérêt des matrices semblables pour le calcul des puissances. On ne parlera pas de matrices équivalentes.

Algèbre linéaire 3 – Valeurs propres, vecteurs propres

Contenus	Commentaires
a) Éléments propres	
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée.	On appelle spectre de l'endomorphisme f (respectivement de la matrice A) l'ensemble des valeurs propres de f (respectivement de A). En dimension finie, on fait le lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.
Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments diagonaux de cette matrice.	
b) Diagonalisation	
Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. En dimension finie, endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable. Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.	Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ admet au plus n valeurs propres deux à deux distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.
Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	On fait observer que les sous-espaces propres sont de dimension 1. La notion de polynôme annulateur est hors programme.

Révisions 7 – Géométrie

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Géométrie 1).

Géométrie – Produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$

Ce chapitre propose une extension modeste des notions de géométrie euclidienne à l'espace euclidien de dimension n, avec la notion de projection orthogonale sur un sous-espace et une application aux statistiques.

Contenus	Commentaires
a) Produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$	
Produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$. Écriture matricielle. Bilinéarité.	

Contenus (suite)	**Commentaires**
Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire. Cas d'égalité.	Le recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz devra être précisé.
Vecteurs orthogonaux.	Définition de deux matrices colonnes orthogonales.
Une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux est libre.	
Théorème de Pythagore.	
Bases orthonormales de l'espace $\mathbf{R}^n$ ou d'un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.	On souligne le fait que le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière dans toutes les bases orthonormales. Les algorithmes d'orthonormalisation ne sont pas au programme.
b) Projection orthogonale	
Orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^n$.	
L'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, il existe un unique couple $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ vérifiant $x = x_F + x_{F^\perp}$.	On rappelle que les notions générales de sommes de sous-espaces vectoriels et de projections ne sont pas au programme. On admet qu'il existe une base orthonormale du sous-espace F dès que F n'est pas réduit au vecteur nul.
On appelle projection orthogonale sur le sous-espace F de $\mathbf{R}^n$ l'application p qui à tout $x \in \mathbf{R}^n$ associe x_F.	Écriture du projeté orthogonal d'un vecteur de $\mathbf{R}^n$ dans une base orthonormale de F.
La projection orthogonale sur le sous-espace F est l'endomorphisme p de $\mathbf{R}^n$ vérifiant $p \circ p = p$, $\mathrm{Im}(p) = F$ et $\mathrm{Ker}(p) = F^\perp$.	
Relation $\dim F + \dim F^\perp = n$.	
Distance entre deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$.	
Définition de la distance d'un vecteur à une partie non vide de $\mathbf{R}^n$. Cas de la distance d'un vecteur à un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.	
Interprétation en termes de projection orthogonale.	Interprétation de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés en termes de projection sur un sous-espace de dimension 2. La démonstration n'est pas exigible. Les coefficients de la droite de meilleure approximation au sens des moindres carrés devront être rappelés.
c) Théorème spectral	
Deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.	
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormale.	La démonstration de ce thorème est hors programme. On fera remarquer qu'il existe aussi des bases de diagonalisation non orthonormales. Les étudiants devront être guidés pour la construction effective d'une base orthonormale de vecteurs propres.

Probabilités 1 – Concepts de base des probabilités et des variables aléatoires

Ce chapitre étend le cadre des probabilités qui avait été posé en première année (Probabilités 1) pour aborder une situation plus générale, se prêtant à la définition des variables aléatoires discrètes ou à densité.

Les séries ont été introduites comme un outil pour donner tout leur sens aux probabilités et variables aléatoires discrètes. En dehors de questions probabilistes, les séries ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation.

Contenus	Commentaires
a) Compléments ensemblistes et notion de probabilité	
Définition de $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.	
Notion de tribu.	On convient de nommer événements les éléments d'une tribu. Une tribu $\mathscr{T}$ (ou σ-algèbre) sur Ω est une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$ contenant Ω, stable par passage au complémentaire et telle que, pour toute suite (B_n) d'événements, la réunion des B_n est un événement. Aucune question sur les tribus ne doit être proposée dans une épreuve de mathématiques.
Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$.	On met en valeur l'axiome de $\sigma-$additivité $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$ pour des suites (B_n) d'événements deux à deux incompatibles, et on fait remarquer que la série $\sum_{n\geq 0} P(B_n)$ converge.
Définition d'un événement négligeable, d'un événement presque sûr.	On distingue l'événement impossible (resp. certain) des événements négligeables (resp. presque sûrs).
Révisions et extensions à ce nouveau cadre des propriétés des probabilités et des définitions vues en première année, en particulier :	
• Une suite d'événements (A_n) est un système complet d'événements si les A_n sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est égale à Ω.	Pour une telle suite, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.
• Formule des probabilités totales : si (A_n) est un système complet d'événements, alors, pour tout événement B, la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n \cap B)$ converge et $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$.	Cette formule reste valable dans le cas d'une suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles et tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$; on dira dans ce cas que le système est quasi-complet. Interprétation en termes de probabilités conditionnelles, avec la convention suivante : si $P(A_n) = 0$, alors on pose $P(A_n)P_{A_n}(B) = 0$.
• Indépendance de deux événements. Indépendance (mutuelle) de n événements, d'une suite d'événements.	
b) Variables aléatoires réelles	
On nomme variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{T})$ toute application X de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$, noté $(X \leq a)$, soit un événement.	Aucune vérification du fait qu'une fonction est une variable aléatoire ne sera demandée dans une épreuve de mathématiques.
Si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, alors $(X \in I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ est un événement.	Résultat admis.
Fonction de répartition : $F_X : t \mapsto P(X \leq t)$. Croissance, limites en $\pm\infty$. Deux variables X et Y sont dites indépendantes si pour tous intervalles I et J, $P(X \in I \cap Y \in J) = P(X \in I)\, P(Y \in J)$. Généralisation au cas de n variables aléatoires, puis d'une suite de variables aléatoires.	

Probabilités 2 – Variables aléatoires réelles discrètes

L'ensemble de ce chapitre donne l'occasion de revoir, par le biais d'exercices, les lois de probabilités finies présentées dans le programme de première année (Probabilités 2).

Contenus	Commentaires
a) Variables aléatoires réelles discrètes	

Contenus (suite)	**Commentaires**
Une variable aléatoire réelle est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est inclus dans un sous-ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathbf{R}$ indexé par une partie de $\mathbf{N}$.	On pourra utiliser le terme dénombrable mais ce terme n'est pas exigible. On met en valeur le système complet d'événements formé des événements $(X = x)$ pour $x \in \mathcal{N}$. On souligne la validité de la formule des probabilités totales obtenue.
Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.	On décrit les représentations graphiques de ces deux fonctions. Les étudiants doivent savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition.
Si $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite de réels deux à deux distincts et $(p_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{i\geq 0} p_i$ converge et a pour somme 1, alors il existe une variable aléatoire réelle discrète X vérifiant $P(X = x_i) = p_i$ pour tout entier naturel i.	On tolère qu'une variable aléatoire issue d'une expérience aléatoire puisse ne pas être définie sur un événement de probabilité nulle. $\rightleftharpoons$ En lien avec l'informatique : simulation d'une variable aléatoire discrète dont la loi est imposée, construite à partir d'une variable aléatoire uniforme.
b) Indépendance Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Généralisation : indépendance (mutuelle) de n variables aléatoires ; d'une suite de variables aléatoires. Propriétés de l'indépendance mutuelle : • Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, toute sous-famille l'est aussi.	
• Lemme des coalitions : si $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors $u(X_1, \ldots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \ldots, X_{n+p})$ sont indépendantes.	On observera que cette propriété peut s'étendre à un nombre fini de fonctions s'appliquant à une partition des variables, et en particulier au cas de $(u_1(X_1), u_2(X_2), \ldots, u_n(X_n))$.
c) Espérance et variance	
Espérance. Propriétés (linéarité, positivité, croissance).	La linéarité de l'espérance est admise.
Théorème de transfert.	Ce résultat peut être admis.
Généralisation des propriétés et des définitions vues en première année, en particulier : • Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. • Variance et moments d'une variable aléatoire. • Écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X. • Formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. • Variance de $aX + b$. Notion de variable centrée réduite.	
• Si X est une variable aléatoire admettant une variance non nulle, $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.	X^* est appelée variable centrée réduite associée à X.
• Si X et Y sont indépendantes, espérance de XY et variance de $X + Y$.	Résultat sur l'espérance admis. Généralisation au cas de n variables aléatoires indépendantes.
d) Lois usuelles discrètes Loi de Poisson. Espérance, variance.	
Loi géométrique. Espérance, variance. Propriété d'invariance temporelle ou d'absence de mémoire de la loi géométrique.	On présente la loi géométrique comme loi du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre. $\rightleftharpoons$ Exemples de situations expérimentales modélisées par une loi géométrique.

Probabilités 3 – Couples de variables aléatoires discrètes

Ce chapitre permet, par le maniement de sommes de séries, d'appréhender les phénomènes liés aux couples de variables aléatoires : lois conjointes, lois marginales, indépendance. Cependant, le théorème de transfert est énoncé dans le seul cas des couples de variables aléatoires discrètes finies, et les séries doubles ne sont au programme.

Contenus	Commentaires
a) Couples de variables aléatoires réelles discrètes	
Couple (X, Y) de deux variables aléatoires discrètes. Loi conjointe.	L'événement $((X = x) \cap (Y = y))$ est également noté $(X = x, Y = y)$.
Lois marginales.	
Lois conditionnelles.	L'espérance conditionnelle n'est pas un attendu du programme.
b) Exemples de variable aléatoire de la forme $u(X, Y)$	
Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X, Y)$, le couple (X, Y) ayant une loi conjointe connue.	On s'intéressera en particulier au maximum et au minimum de deux ou de n variables aléatoires indépendantes.
Cas particulier de la somme de deux variables discrètes à valeurs dans $\mathbf{N}$.	Les deux variables ne sont pas nécessairement indépendantes.
Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson.	Généralisation au cas de n variables.
Théorème de transfert : espérance de $u(X, Y)$ à partir de la loi de (X, Y) quand X et Y sont des variables aléatoires discrètes finies.	Ce résultat peut être admis.
c) Covariance	
Covariance, formule de König-Huygens $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ et calcul effectif quand X et Y sont discrètes finies.	Le calcul effectif de $E(XY)$ au moyen d'une série double n'est pas au programme.
Variance de $X + Y$.	On remarquera qu'en cas d'indépendance $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, mais que la réciproque est fausse.

Probabilités 4 – Variables aléatoires à densité

Contenus	Commentaires
a) Variables aléatoires admettant une densité	
On appelle densité de probabilité une fonction f définie sur $\mathbf{R}$, positive, dont l'intégrale généralisée sur $\mathbf{R}$ converge et vaut 1.	Dans le cadre du programme, l'intégrale généralisée n'est définie que pour des fonctions continues sauf éventuellement en un nombre fini de points.
On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité s'il existe une densité de probabilité f telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$: $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.	Une telle fonction, qui n'est pas unique, est appelée densité de X.
F_X est dérivable en tout point de continuité x de f et $F_X'(x) = f(x)$	Ce résultat peut être admis. Dans ce contexte, donner la loi d'une variable aléatoire X, c'est justifier que X admet une densité et en donner une.
Si f est une densité de probabilité, alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité.	Résultat admis.

Contenus (suite)	**Commentaires**
X admet une densité si, et seulement si, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.	Ce résultat peut être admis. On insistera sur les représentations graphiques de la fonction de densité et de la fonction de répartition, en faisant le lien avec les histogrammes de variables aléatoires finies. Les étudiants doivent savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition. Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X)$, X ayant une densité donnée.
b) Indépendance Propriétés de l'indépendance mutuelle : • Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, toute sous-famille l'est aussi. • Lemme des coalitions : si $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors $u(X_1, \dots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$ sont indépendantes.	On observera que cette propriété peut s'étendre à un nombre fini de fonctions, et en particulier au cas de $(u_1(X_1), u_2(X_2), \dots, u_n(X_n))$. Exemples de recherche de la loi du minimum et du maximum de deux ou de n variables aléatoires indépendantes.
c) Espérance Espérance. Propriétés. Notion de variable centrée.	La linéarité de l'espérance est admise. Par extension, on pourra appliquer la linéarité de l'espérance à des variables aléatoires, qu'elles soient discrètes ou à densité, sans savoir si leur résultante est discrète ou à densité.
Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire à densité et u est une fonction définie sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $u(X)$ admet une espérance si, et seulement si, $\int_I u(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Le cas échéant, $E(u(X)) = \int_I u(x)f(x)\,\mathrm{d}x$.	Résultat admis. On pourra appliquer ce théorème sans savoir si $u(X)$ est une variable aléatoire discrète ou à densité.
Propriétés : • Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	On pourra appliquer ce théorème dès lors que la variable aléatoire admet une variance, sans savoir si elle est discrète ou à densité.
• Variance et moments. • Écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X. • Formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. • Variance de $aX + b$. Notion de variable centrée réduite. • Si X est une variable aléatoire admettant une variance non nulle, $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.	X^* est appelée variable centrée réduite associée à X.
• Si X et Y sont indépendantes, espérance de XY et variance de $X + Y$.	Résultat sur l'espérance admis. Par extension, on pourra appliquer ces formules à des variables aléatoires, qu'elles soient discrètes ou à densité, sans savoir si leurs résultantes XY et $X+Y$ sont discrètes ou à densité. Généralisation au cas de n variables aléatoires indépendantes.
d) Lois usuelles Loi uniforme : densité, fonction de répartition, espérance, variance.	

Contenus (suite)	Commentaires
Loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance, variance. Propriété d'invariance temporelle ou d'absence de mémoire : $P(X \geq s+t \mid X \geq s) = P(X \geq t)$ et on donne quelques exemples d'expériences donnant du sens à cette propriété.	$\rightleftharpoons$ Une variable aléatoire de loi exponentielle peut être simulée à partir d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
Loi normale (ou gaussienne) centrée et réduite : densité, espérance et variance.	$\rightleftharpoons$ On obtient les valeurs de la fonction de répartition (notée souvent Φ) et de sa réciproque au moyen de la calculatrice ou d'une bibliothèque associée à un langage de programmation. Un échantillon de valeurs utiles devra être rappelé. $\rightleftharpoons$ Une variable aléatoire de loi normale peut être simulée à partir d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
Loi normale de paramètres μ et σ^2 : densité, espérance et variance.	
Si X suit une loi normale, alors $aX+b$ aussi si $a \neq 0$.	Pour une variable de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, on se ramènera le plus souvent à la variable centrée réduite associée.
e) Sommes de variables aléatoires à densité indépendantes	
Loi de la somme de deux variables indépendantes à densité.	Le résultat est admis. La formule du produit de convolution devra être rappelée en cas de besoin. La démonstration de la convergence de l'intégrale, le cas échéant, n'est pas attendue des étudiants.
Somme de deux variables aléatoires normales indépendantes.	Le calcul montrant la normalité de la somme n'est pas un attendu du programme. On généralise le résultat au cas de n variables gaussiennes indépendantes.

Probabilités 5 – Théorèmes limites

Contenus	Commentaires
a) Loi faible des grands nombres	
La moyenne empirique d'un n-uplet de variables aléatoires $(X_1,\dots,X_n)$, notée M_n, est définie par $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.	
Loi faible des grands nombres pour des variables aléatoires mutuellement indépendantes.	La définition générale de la convergence en probabilité n'est pas un objectif du programme.
b) Convergence en loi	
Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires (X_n) vers une variable aléatoire X. Cas particulier où les X_n prennent leurs valeurs dans $\mathbf{N}$.	
Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires de lois binomiales vers une variable aléatoire de loi de Poisson.	Approximations qui en découlent. Les critères d'approximation devront être explicités.
Théorème central limite (première forme) : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, admettant une espérance μ et une variance σ^2 non nulle, alors $(M_n^*)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Cas de la loi binomiale : théorème de de Moivre-Laplace.	Théorème admis. On rappelle que $M_n^* = \dfrac{M_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à M_n. $\rightleftharpoons$ On illustre numériquement cette convergence.
L'écart-type empirique d'un n-uplet de variables aléatoires $(X_1,\dots,X_n)$, noté S_n, est défini par $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2$.	

Contenus (suite)	**Commentaires**
Théorème central limite (seconde forme) : Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, admettant une espérance μ et une variance, alors $\left(\frac{M_n-\mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.	Théorème admis. Une autre version de ce théorème, impliquant l'écart-type empirique corrigé S'_n défini par ${S'_n}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2$, pourra être donnée.
c) Introduction aux tests	
Test de conformité à la moyenne.	On traitera le cas particulier d'une proportion par majoration de l'écart-type. Les notions de risque α ou β, de puissance ne sont pas au programme. $\rightleftharpoons$ En lien avec l'informatique, mécanisme et simulation de tests statistiques.